النموذج 1

1 أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

• السؤال الأول:

لدينا جدول تغيرات التابع f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$		‖	$-\infty$ ↗ 1	

① اكتب مجموعة تعريفه ومستقره الفعلي.

② أوجد ما للخط C_f من مقاربات أفقية وشاقولية.

③ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$.

• السؤال الثاني:

حل المعادلة: $6.P_{\frac{n}{2}}^{2}=\binom{n}{3}$

• السؤال الثالث:

f تابع معرف على $\mathbb{R}$ يحقق: $|f(x)-1|\le\frac{x.\cos x}{x^2+1}$. ما نهاية التابع f عند $+\infty$.

• السؤال الرابع:

إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B|A)=\frac{1}{4}$ ، $P(B|A')=\frac{5}{4}$. فاحسب $P(B)$

2 حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

• التمرين الأول:

أثبت أنه أياً كانت $x\in]1,+\infty[$ كان: $\frac{x}{1+x}\le \text{Ln}(x+1)$.

• التمرين الثاني:

نتأمل في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويين: $P:\ x-2y+3z-5=0$

$Q:\ x-y+z+1=0$

بيّن أن المستويين Q , P متقاطعين بفصل مشترك d . اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

• التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق: $u_1=2$ و $u_{n+1}=-\frac{3}{10}u_n+\frac{4}{10}$

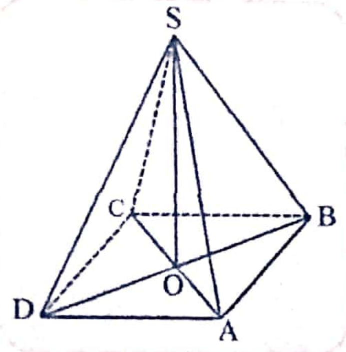
ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق: $v_n=13u_n-4$

① أثبت أن $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية، عيّن أساسها، ثم عبّر عن v_n بدلالة n .

② استنتج صيغة u_n بدلالة n ، ثم احسب: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

③ (سؤال حله للطالب): احسب $S_n=u_1+u_2+........+u_n$

• التمرين الرابع:



$S-ABCD$ هرم قاعدته مربع، طول ضلعه يساوي 4 ،
وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 4 ،
والنقطة (O) مرتسم S القائم على القاعدة.

① احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$.

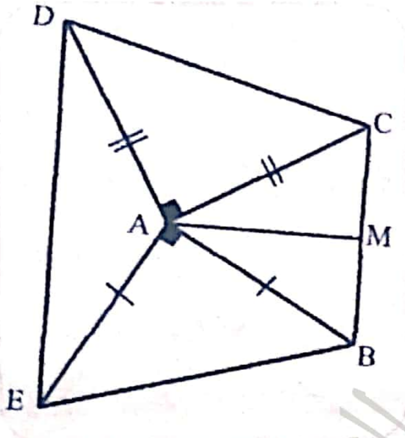
② احسب طول القطر CA ، ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$.

③ عيّن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(S,1),(B,3),(A,2)$.

④ احسب حجم الهرم $S,\ ABCD$.

③ حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

• المسألة الأولى:



نتأمل في المستوي ABC مباشر التوجيه كيفياً.
لتكن M منتصف $[BC]$، وليكن ACD , AEB مثلثين قائمين في A
ومتساويا الساقين مباشرين. نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A
نرمز b , c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان B , C. المطلوب:

① احسب بدلالة b , c الأعداد العقدية e , d , m الممثلة للنقاط E , D , M بالترتيب.

② احسب: $\dfrac{d-e}{m-a}$ ، ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED=2\,AM$

③ بفرض $b=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ جد العدد العقدي m الممثل للنقطة M صورة B وفق تحاك مركزه A ونسبته 3 واكتب بالشكل الأسي.

• المسألة الثانية:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(x^2+2x+2).e^{-x}$ خطه البياني C .

① ادرس تغيرات التابع، ونظم جدولاً بها.

② اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها (-1) ثم ارسم C, T.

③ عين الأعداد a, b, c حتى يكون التابع: $f(x)=(x^2+2x+2).e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$،
ثم احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط C والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
$x=0\ ,\ x=\alpha$ حيث $\alpha>0$.

❖ ❖ ❖ نهاية أسئلة النموذج الأول ❖ ❖ ❖

حـل النـموذج 1

1 ...

• السؤال الأول:

① ...

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ D_f =]-\infty, 0[\cup]0,+\infty[$

المستقر الفعلي $E_f =]-\infty, 1[\cup]1,+\infty[$

② ...

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$ مقارب أفقي $y=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$$ مقارب شاقولي $x=0$

③ ...

f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

$f(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$

وبما أن $0\in]-\infty,1[$ إذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]0,+\infty[$

• السؤال الثاني:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{n}{2}\ge 2 \Rightarrow n\ge 4\\ n\ge 3\end{array}\right\} \Rightarrow n\ge 4$$

$$6\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$$

$$6\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}\Rightarrow$$

$$3=\frac{n-1}{3}\Rightarrow n-1= \Rightarrow \boxed{n=10}$$

• السؤال الثالث:

$$-1\le \cos x\le +1$$

$$-x\le x\cos x\le +x \qquad x>0$$

$$\frac{-x}{x^2+1}\le\frac{x\cos x}{x^2+1}\le\frac{+x}{x^2+1}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.$$ حسب الإحاطة (1) فإن

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cos x}{x^2+1}\right)=0$$

وحسب الإحاطة (2) فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+1$

• السؤال الرابع:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{P(B\setminus A)}{1-P(A)}\Rightarrow$$

$$P(B\setminus A)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{15}$$

$$P(B)=\frac{8}{15}+\frac{1}{12}=\frac{37}{60}$$

2 ...

• التمرين الأول:

$$\frac{x}{1+x}\le \mathrm{Ln}(x+1)\Rightarrow\frac{x}{1+x}-\mathrm{Ln}(x+1)\le 0$$

نفرض التابع $f(x)=\dfrac{x}{1+x}-\mathrm{Ln}(x+1)$

ولنبرهن أن $f(x)\le 0$

ندرس تغير التابع $f(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty+\infty$ (حالة عدم تعيين)

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\left[x-(x+1)\mathrm{Lim}(x+1)\right]\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1-\infty=-\infty$$

التابع اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ ومشتقه

$$f'(x)=\frac{+1}{(1+x^2)}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{(1+x)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0 \ , \ f(0)=0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ من الجدول أن:

$f(x)\in]-\infty,0] \Rightarrow f(x)\le 0 \ ; \ x\in]-1,+\infty[$

• **التمرين الثاني:**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_P(1,-2,3)\\ \vec{n}_Q(1,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}$$

فالشعاعين غير مرتبطين خطياً.

وبالتالي المستويين متقاطعين بفصل مشترك d. ولإيجاده:

▪ **الطريقة الأولى:**

نفرض $\boxed{z=t}$ فنجد:

$$\begin{array}{l} x-2y=5-3t \\ \underline{x+y=-1-t} \\ -3y=6-2t \end{array} \quad \text{بالطرح}$$

$$y=-2+\frac{2}{3}t$$

ومنه: $x=-1-t+2-\frac{2}{3}t$

$$x=1-\frac{5}{3}t$$

$$d:\begin{cases} x=1-\frac{5}{3}t \\ y=-2+\frac{2}{3}t \\ z=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

▪ **الطريقة الثانية:**

نفرض $z=0$ ⇐

$$\begin{array}{l} x-2y=5 \\ \underline{x+y=-1} \\ -3y=6 \Rightarrow \boxed{z=-2} \Rightarrow \boxed{x=1} \end{array}$$

$A(1,-2,0)$

نفرض $y=-1$ ⇐

$$\begin{array}{l} x+3z=3 \\ \underline{x+z=0} \end{array}$$

$$2z=3 \Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{2}}$$

$$B\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2},+1,\frac{3}{2}\right)$$

$$d:\begin{cases} x=x_0+at=1-\frac{5}{2}t \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+et=\frac{3}{2}t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

ملاحظة: التمثيل الوسيطي للمستقيم ليس وحيداً.

• **التمرين الثالث:**

$$v_n=13u_n-4$$

$$v_{n+1}=13u_{n+1}-4=13\left(-\frac{3}{10}u_n+\frac{4}{10}\right)-4$$

$$v_{n+1}=13\left[-\frac{3}{10}\left(\frac{v_n+4}{13}\right)+\frac{4}{10}\right]-4$$

$$v_{n+1}=-\frac{3\times 13}{10}\left(\frac{v_n+4}{13}\right)+\frac{52}{10}-4$$

$$v_{n+1}=-\frac{3}{10}v_n-\frac{12}{10}+\frac{52}{10}+\frac{52}{10}-4=-\frac{3}{10}v_n$$

$$v_{u_{n+1}}=-\frac{3}{10}v_n$$

إذن v_n متتالية هندسية $\boxed{q=-\frac{3}{10}}$

$$v_n=v_1.q^{n-1}=(13u_1-4).\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{2.2\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4}{13}$$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{0+4}{13} = \frac{4}{13}$; $-1<q=-\frac{3}{10}<1$

- التمرين الرابع:

① ...

$AB = SA = AB = 4 \Leftarrow$ SAB مثلث متساوي الأضلاع

$\vec{SA}\cdot\vec{SB} = \|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SB}\|.\cos(ASB)$

$=4\times 4\times \cos 60 = 16\times\frac{1}{2} = 8$

② ...

AC يمثل طول قطر المربع $ABCD$

وحسب فيثاغورث في المثلث ABC

$AC^2=(4)^2+(4)^2=16+16=32 \Rightarrow$

$AC=4\sqrt{2}$

$\vec{AC}\cdot\vec{AS}=\vec{AC}\cdot\vec{AO}=\|\vec{AC}\|.\|\vec{AO}\|$

$=4\sqrt{2}\,.\,2\sqrt{2}=16$ حسب مبرهنة الإسقاط القائم

③ ...

نفرض H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$\Leftarrow (S,1),(A,2)$

$\vec{AH}=\frac{1}{3}\vec{AS}$

فتكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(B,3),(H,3)$

فهي تقع في منتصف $[BH]$

④ ...

$V=\frac{1}{3}S.h$

$S=(4)^2=6$, $h=OS=\sqrt{(4)^2-(2\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{16-8}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$V=\frac{1}{3}\times 16\times 2\sqrt{2}=\frac{32}{3}\sqrt{2}$

③ ...

• المسألة الأولى:

① ...

$\boxed{m=\frac{b+c}{2}} \Leftarrow [BC]$ منتصف M

وبما أن A مركز للدوران نجد:

E صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2} \Leftarrow$

$e-0=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-0) \Rightarrow \boxed{e=-i\,b}$

D صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2} \Leftarrow$

$d-0=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-0) \Rightarrow \boxed{d=i\,e}$

② ...

$$\frac{d-e}{m-a}=\frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}-0}=\frac{i(c+b)}{\frac{b+c}{2}}=2i$$

$\arg\left(\frac{d-c}{m-a}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{AM}\perp\vec{ED} \Rightarrow$

إذن $(AM)\perp(ED)$

(AM) ارتفاع المثلث AED.

$\left|\frac{d-e}{m-a}\right|=|2i| \Rightarrow \frac{ED}{AM}== \Rightarrow ED=2AM$

③ ...

$m'-0=3 \Rightarrow 3(b-0) \Rightarrow m'=3b$

$m'=3\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)=1-\sqrt{3}\,i$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{3}$$

$z=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

• المسألة الثانية:

① ...

$f(x)=(x^2+2x+2).e^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(+\infty).(+\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty).(0)$ حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{e^x}=\frac{x^2}{e^x}+2\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0+0+0=0$;

$y=0$ مقارب منطبق على $x\,x'$ في جوار $+\infty$

التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=(2x+2).e^{-x}-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$$
$$=e^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-2\right)$$
$$=e^{-x}\left(-x^2\right)=-x^2.e^{-x}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ إما : $e^{-x}=0$ مستحيلة

أو :

$-x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

② ...

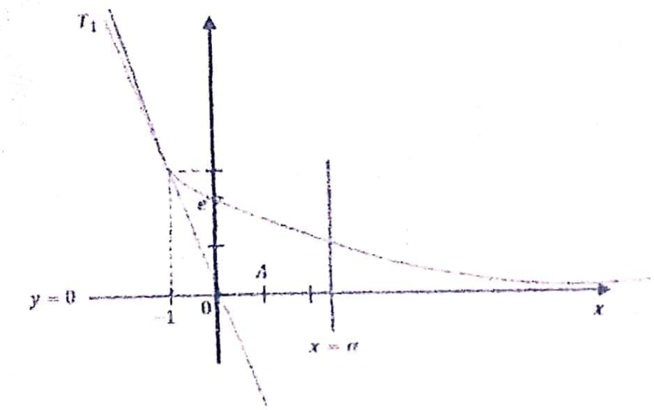
لإيجاد معادلة المماس T :

$x=-1 \Rightarrow f(-1)=(1-2+2)e=e$

$\Rightarrow (-1,e)$ نقطة التماس

$m=f'(-1)=-(-1)^2e=-e$

$y-e=-e(x+1) \Rightarrow \boxed{y=-e\,x}$



③ ...

حتى يكون $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع f

إذا وفقط إذا كان F اشتقاقياً على $\mathbb{R}$

$F'(x)=f(x) \Rightarrow$

$$(2ax+b)e^{-x}.\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$$

بالمطابقة:

أمثال x^2 : $-a=1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

أمثال x : $2a-b=2 \Rightarrow \boxed{b=-4}$

خالي من x : $b-c= \Rightarrow \boxed{c=-6}$

فالتابع الأصلي: $F(x)=\left(-x^2-4x-6\right)e^{-x}$

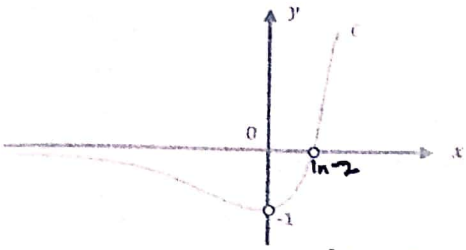
$$A(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)\,dx=[F(x)]_0^\alpha$$
$$=\left[\left(-x^2-4x-6\right)e^{-x}\right]_0^\alpha$$
$$=\left(-\alpha^2-4\alpha-6\right)e^{-x}+6$$

❖ نهاية حل النموذج الأول ❖

النموذج 2

① أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

• السؤال الأول:



ليكن التابع: $f(x)=a\,e^{2x}+b\,e^{x}$ خطه البياني C كما في الشكل:

استفد من الشكل، وبرهن أن: $b=-2\,,\,a=1$.

ثم احسب مساحة السطح الحصور بين C والمحورين الإحداثيين.

• السؤال الثاني:

بيّن أن $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة $z^2+z+1=0$، ثم أوجد الجذر الآخر.

• السؤال الثالث:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي: $u_0=1\;;\;u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$.

أثبت أن: $0\leq u_n\leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n .

• السؤال الرابع:

في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ أوجد الحد الثابت في هذا المنشور.

② حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

• التمرين الأول:

اكتب معادلة المستوي P العمودي على المستوي: $Q:\;2x+z-4=0$،

والمار من النقطتين $A(2,3,-1)$ ، $B(1,1,1)$

• التمرين الثاني:

أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة: $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$ ،

ثم أعط عدداً حقيقياً α يحقق الشرط: إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in\,]2.9\,,3.1[$ ،

ثم أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(f(x)\right)$.

• التمرين الثالث:

نتأمل في معلم متجانس $\left(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط: $A(0,0,2)\,,\,B(-1,2,1)\,,\,C(-1,2,5)$

وبفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,2)\,,(B,1)\,.(C,-1)$.

جد المجموعة E المكونة من النقاط M التي تحقق: $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$.

ثم أعط معادلة المجموعة E .

• التمرين الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\sin x$،

وبفرض f اشتقاقي n مرة على $\mathbb{R}$ أثبت أنه أياً كان $n\in\mathbb{N}^*$ فإن: $f^{(n)}(x)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$.

③ حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

• المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على: $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق: $f(x) = \dfrac{1}{x(1 - \operatorname{Ln} x)}$

① ادرس تغيرات التابع، ونظّم جدولاً بها، و استنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين، وعيّن قيمته الحديّة مبيّناً نوعها.

② اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منها فاصلتها (1).

③ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة، ثم ارسم C .

④ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = \dfrac{1}{e^2}, x = \dfrac{1}{e}$.

• المسألة الثانية:

نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين، وأربع كرات حمراء، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق، نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق، ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق، وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً.

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية.

نرمز R_1 إلى الحدث « الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون »، و المطلوب:

① ماهي مجموعة القيم التي يأخذها X .

② احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

③ احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X .

❖ ❖ ❖ نهاية أسئلة النموذج الثاني ❖ ❖ ❖

حـل النمـوذج

① ...

• السؤال الأول:

$(0,-1)\in C \Rightarrow -1=a e^{0}+b e^{0}$

$\Rightarrow a+b=-1 \quad ....①$

$(\text{Ln}2,0)\in C \Rightarrow 0=a e^{2\text{Ln}2}+b e^{\text{Ln}2}$

$a.e^{Ln4}+b e^{Ln2}=0 \Rightarrow 4a+2b=0 \Rightarrow$

$2a+b=0 \quad ....②$

بالحل المشترك نجد: $\boxed{a=1}$ ومنه $\boxed{b=-2}$

فالتابع: $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$

$A=-\int_{0}^{\text{Ln}2} f(x)dx$

$=\int_{0}^{\text{Ln}2}(2e^{x}-e^{2x})=\left[2e^{x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{\text{Ln}2}$

$=\left(2e^{Ln2}-\frac{1}{2}e^{2Ln2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)$

$=4-\frac{1}{2}(4)-\frac{3}{2}=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$

• السؤال الثاني:

نعوض $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ في المعادلة، فنجد:

$L_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0=L_2$

إذن $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذراً للمعادلة.

لإيجاد الجذر الآخر: بما أن المعادلة ذات أمثال حقيقية

فالجذر الآخر هو مرافق z_1 أي: $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

• السؤال الثالث:

نفرض الخاصة: $E(n):\quad 0\le u_n\le 4$

1- نبرهن صحة الخاصة من أجل $n=0$ فنجد:

$0\le u_0=1\le 4$

إذن $E(0)$ صحيحة.

2- نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة، ولنبرهن صحتها

من أجل $(n+1)$ أي: $0\le u_{n+1}\le 4$

الإثبات:

$0\le u_{n+1}\le 4$

$0+12\le 12+u_n\le 16$

$\sqrt{12}\le\sqrt{12+u_n}\le\sqrt{16} \Rightarrow 2\sqrt{2}\le u_{n+1}\le 4$

$0\le u_{n+1}\le 4$

إذن الخاصية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

• السؤال الرابع:

$a=x \;,\; b=\frac{1}{x} \;,\; n=6$

$T_r=\binom{n}{r}.a^{n-r}.b^{r}$

$T_r=\binom{6}{r}.x^{6-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^{r}$

$=\binom{6}{r}.x^{6-r}.\frac{1}{x^{r}}=\binom{6}{r}.x^{6-2x}$

حتى يوجد حد ثابت يجب أن يكون الأس $6-2r=0$

$2r=6 \Rightarrow \boxed{r=4}$

$T_3=\binom{6}{3}=20$

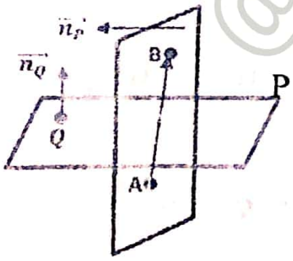
② ...

• التمرين الأول:

$Q:2x+z-4=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}(2,0,1)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,-2,2)$

نفرض $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$



$P\perp Q \Rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0 \Rightarrow$

$2a-c=0 \quad ....①$

$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow$

$-a-2b+2c=0 \quad ....②$

نفرض $\boxed{c=2} \Leftarrow \boxed{a=1} \Leftarrow 2a-2=0$

$-1-2b+4=0 \Rightarrow 2b=3 \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{2}}$

$\vec{n}_p\left(1,\frac{3}{2},2\right) \Rightarrow \vec{n}_p(2,3,4)$

معادلة المستوي P :

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-1)+3(y-1)+4(z-1)=0 \Rightarrow$

$2x+3y+4z-9=0$

• التمرين الثاني:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3.$

مركز المجال $c=\frac{2.9+3.1}{2}=\frac{6}{2}=3$

نصف قطر المجال $r=\frac{3.1-2.9}{2}=\frac{0.2}{2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$|f(x)-c|<r \Rightarrow$

$\left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow$

$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{10} \Rightarrow x+1>10 \Rightarrow x>9 \Rightarrow \boxed{\alpha=9}$

$\lim_{x\to\infty} f(f(x))=f\left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]$

$=f(3)=\frac{9+4}{3+1}=\frac{13}{4}$

• التمرين الرابع:

$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\|=$

$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}-2\vec{MC}\|$

$\|2\vec{MG}\|=\|2\vec{MG}-2\vec{MC}\|$

$\|\vec{MG}\|=\|\vec{CM}+\vec{MG}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\|=\|\vec{CG}\|$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها (CG).

لإيجاد معادلة للمجموعة E .

مركز الكرة G تمثل مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$\Leftarrow (C,-1),(B,1),(A,2)$

$$\left.\begin{aligned}
x_G &= \frac{\alpha . x_A + B . x_B . \propto x_C}{\alpha + B + \propto} \\
&= \frac{0-1+1}{2+1-1}=0 \\
y_G &= \frac{\alpha . y_B + B . y_B . \propto y_C}{\alpha + B + \propto} \\
&= \frac{0+2-2}{2+1-1}=0 \\
z_G &= \frac{\alpha . z_A + B . z_B . \propto z_C}{\alpha + B + \propto} \\
&= \frac{4+1-5}{2+1-1}=0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow G(0,0,0)$$

$CG=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2+(5-2)^2}$

$=\sqrt{1+4+2.5}=\sqrt{30}$

معادلة المجموعة E :

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$x^2+y^2+z^2=30$

• التمرين الرابع:

بطريقة الاستقراء الرياضي:

1- برهن صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{الطرف الأيسر } L_1=f^{(1)}(x)=f'(x) \\
&=\cos x \\
&\text{الطرف الأيمن } L_2=\sin\left(1.\frac{\pi}{2}+x\right) \\
&=\cos x
\end{aligned}\right\} \Rightarrow L_1=L_2$$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n=1$

2- نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n ولنبرهن صحتها

من أجل $(n+1)$ أي: $f^{(n+1)}(x)=\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+x\right)$

* البرهان:

$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\left[\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)\right]'$$

$$=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$=\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+x\right]$$

فالعلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\in\mathbb{N}^*$.

(4) ...

• المسألة الأولى:

$$f(x)=\frac{1}{x(1-Lnx)}\ ;\ D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{0.\infty}$$ (حالة عدم تعيين)

$$f(x)=\frac{1}{x-xLnx}\ ,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$x=0$ مقارب منطبق على $y\,y'$ والخط C يقع على يمين المقارب باتجاه oy^+.

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$x=e$ مقارب $//\ y\,y'$ والخط C يقع على يسار المقارب باتجاه oy^+

$$\lim_{x\to e^+}f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$x=e$ مقارب $//\ y\,y'$ والخط C يقع على يمين المقارب باتجاه oy^-

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{-\infty}=0$$

$y=0$ مقارب منطبق على $x'x$ في جوار $+\infty$.

التابع اشتقاقي على D_f ومشتقه:

$$f'(x)=\frac{-\left[1.(1-Lnx)-\frac{1}{x}.x\right]}{x^2(1-Lnx)^2}$$

$$=\frac{-(1-Lnx-1)}{x^2(1-Lnx)^2}=\frac{Lnx}{x^2(1-Lnx)^2}$$

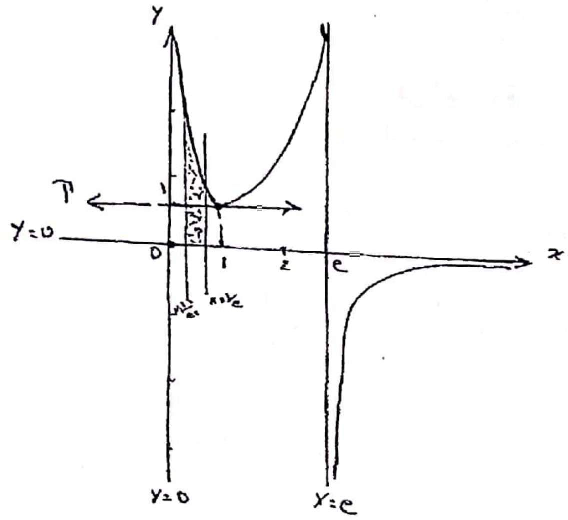
$$f'(x)=0\Rightarrow Lnx=0\Rightarrow\boxed{x=1},f(1)=1$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

للتابع قيمة محلية صغرى $f(1)=-1$

معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1)

من الجدول نجد $\boxed{y=1}$ مستقيم $//\ x'x$



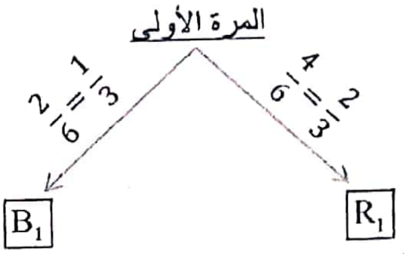
$$A=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}f(x)dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-Lnx)}dx$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{x}}{1-Lnx}\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}=\left[-Ln(1-Lnx)\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$=-Ln(1+1)+Ln(1+2)$$

$$=Ln3-Ln2=Ln\frac{3}{2}>0$$

• المسألة الثانية:



في المرة الثانية يصبح عدد الكرات في الصندوق $10 = 2$ سوداء + 8 حمراء

في المرة الثانية يصبح عدد الكرات في الصندوق $8 = 4$ سوداء + 4 حمراء

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$$P(x=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{56}=\frac{4}{168}=\frac{15}{630}$$

$$P(x=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{118}{630}$$

$$P(x=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{286}{630}$$

$$P(x=3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{211}{630}$$

xi	0	1	2	2
$P(x=xi)$	$\frac{15}{630}$	$\frac{118}{630}$	$\frac{286}{360}$	$\frac{211}{630}$

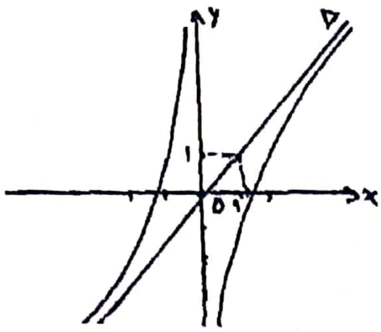
$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=4} xi\ .\ Pi=\frac{0+118+572+633}{630}=\frac{1323}{630}$$

❖ نهاية حل النموذج الثاني ❖

النموذج 3

أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

• السؤال الأول:



في الشكل المجاور جانباً: C هو الخط البياني للتابع f .

① أوجد مجموعة تعريف التابع f .

② جد: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

③ ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المقارب المائل Δ ، ثم أوجد معادلة Δ .

• السؤال الثاني:

أثبت صحة العلاقة: $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$

• السؤال الثالث:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

برهن أن التابع f فردي.

• السؤال الرابع:

عيّن مركز ثقل المثلث ABC في حالة $C(6,3,5), B(-2,1,0), A(-4,-1,2)$.

واكتب معادلة الكرة، حيث $[AB]$ قطراً فيها.

حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

• التمرين الأول:

نتأمل كثير الحدود: $P(z) = z^3 - z - 6$.

① عين عددين حقيقيين b , a يحققان: $p(z) = (z-2)(z^2+2az-b)$

② حل في C المعادلة $P(z)=0$.

• التمرين الثاني:

جد: $\lim_{x\to\infty} f\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$, $\boxed{I = \int_0^{Ln2} e^x\left(1-e^x\right)^3}$

• التمرين الثالث:

نلقي حجر نرد متوازن، وجوهه مرقمة من (1) إلى (6)، نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه (1)، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه (6)، ويخسر درجتين فيما عدا ذلك. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها.

- اكتب القانون الاحتمالي لهذا المتحول، و احسب $E(x)$, $V(x)$, $\sigma(x)$.

• التمرين الرابع:

c , b , a ثلاث أعداد متعاقبة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a+b+c=9$.

① احسب b ثم c , a بدلالة r.

② إذا علمت أنّ $a.c=-16$ عين الأساس r ثم استنتج c , a.

③ حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

• **المسألة الأولى:**

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على: $]-\infty,3]$ وفق: $f(x)=x\sqrt{3-x}$

① ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند $x=3$.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، عيّن القيم الحديّة، وحدّد نوعها.

③ استنتج من جدول التغيرات للتابع f أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أوجدهما.

④ ارسم الخط C ، ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
$x=2$, $x=0$

• **المسألة الثانية:**

في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $D(-8,1,2), C(3,4,1), , B(1,1,2), A(-1,2,0)$

① أثبت أن النقاط A , B , C تعيّن مستوياً P ، واكتب معادلته.

② اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ المار من D والعمودي على P.

③ أوجد إحداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P.

④ اكتب معادلة المستوي Q المار من النقطتين A , B ويوازي الشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

⑤ بفرض: $P_1: 2x-y=-2$ ، ادرس تقاطع المستويات P_1 , Q , P.

❖ ❖ ❖ نهاية أسئلة النموذج الثالث ❖ ❖ ❖

حـل النموذج 3

1 ...

• السؤال الأول:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$f(x) - y_\Delta > 0$ على المجال $]-\infty , 0[$

والخط C يقع فوق المقارب Δ

$f(x) - y_\Delta < 0$ على المجال $]0 , +\infty[$

والخط C يقع تحت المقارب Δ

من معادلة المقارب المائل Δ: $y = x$.

• السؤال الثاني:

الطرف الأيسر $L_1 = \dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!r!}}$

$$= \frac{(n+1)!(n-r)!r!}{(n-r)!(r+1)!r!}$$

$$= \frac{(n+1).n!r!}{(n-r).r!n!}$$

$$= \frac{n+1}{r+1} = L_2$$

• السؤال الثالث:

أياً يكن $x \in \mathbb{R}$ كان $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \mathrm{Ln}\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \mathrm{Ln}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}\right)$$

$$= \mathrm{Ln}\left(\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right) = -\mathrm{Ln}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= -f(x)$$

فالتابع فردي.

• السؤال الرابع:

$$\left.\begin{array}{l} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \quad = \dfrac{-4-2+6}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ \quad = \dfrac{-1+1+3}{3} = 1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \\ \quad = \dfrac{2+0-5}{3} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow G(0,1,-1)$$

مركز الكرة Ω منتصف $[AB] \Leftarrow$

$$\Omega\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Omega(-3,0,1)$$

$$AB^2 = (-4+2)^2 + (-1-1)^2 + (2-0)^2$$

$$= 4+4+4 = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

$$(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$$

2 ...

• التمرين الأول:

$$P(z) = (z-2)(z^2 + 2az - b)$$

$$P(z) = zz^3 + 2az^2 - bz - 2z^2 - 4az + 2b$$

بالمطابقة :

أمثال z^3	$1 = 1$	محققة
أمثال z^2	$2a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$	
أمثال z	$-b - 4a = -1 \Rightarrow \boxed{b=-3}$	
خالي من z	$2b = -6 \Rightarrow b = -3$	

$$P((z) = (z-2)(z^2 + 2z + 3)$$

$P(z) = 0 \Rightarrow$ إما : $z - -2 = 0 \Rightarrow z = 2$

أو : $z^2 + 2z + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=-1+\sqrt{2}\,i$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=-1-\sqrt{2}\,i$$

• التمرين الثاني:

• $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{2x\cdot \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}}\right)=e^{6\times 1}=e^6$$

• $I=\int_0^{\ln 2} e^x\left(1-e^x\right)^3 dx$

$$=-\int_0^{\ln 2}-e^x\left(1-e^x\right)^3dx$$

$$=-\left[\frac{\left(1-e^x\right)}{4}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=-\left[\frac{\left(1-e^{\ln}\right)}{4}-\frac{\left(1-e^0\right)}{4}\right]$$

$$=-\left(\frac{(1-2)^4}{4}-0\right)=-\frac{1}{4}$$

• التمرين الثالث:

$x(\Omega)=\{+1,6,-2\}$

$P(x=1)=\frac{1}{6},P(x=6)=\frac{1}{6},P(x=-2)=\frac{4}{6}$

x_i	1	6	−2
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

التوقع الرياضي $E(x)=\sum\limits_{i=1}^{i=3}x_i\cdot P_i$

$$=\frac{1+6-8}{6}=-\frac{1}{6}$$

التباين $v(x)=\sum\limits_{i=1}^{i=3}x_i^2\cdot P_i-[E(x)]^2$

$$v(x)=\frac{1+36+16}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=\frac{53}{6}-\frac{1}{36}$$

$$=\frac{318-1}{36}=\frac{317}{36}$$

الانحراف المعياري $\partial(x)=\sqrt{v(x)}=\frac{\sqrt{317}}{6}$

• التمرين الرابع:

c,b,a ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $\Leftarrow$

$a+c=2b \Leftarrow b=\frac{a+c}{2}$

بالتعويض نجد:

$2b+b=9 \Rightarrow 3b=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$b=a+r \Rightarrow 3=a+r \Rightarrow a=3-r$

$c=b+r \Rightarrow c=3r$

$(3-r)(3+r)=-16$

$9-r^2=-16 \Rightarrow r^2=25$

إما : $r=5$ مقبول ، أو : $r=-5$ مرفوض

(متتالية متزايدة)

$a=3-5=-2$ ، $C=3+5=8$

3 ...

• المسألة الأولى:

① .... أياً كان $x\in]-\infty,3[$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\sqrt{3-x}-f(3)}{x-3}$$

$$g(x)=\frac{x\sqrt{3-x}-0}{x-3}=\frac{x\sqrt{3-x}}{-(3-x)}$$

$\lim\limits_{x\to3^-}g(x)=\frac{0}{0}$ (عدم تعيين)

$$(g)x=\frac{x\sqrt{3-x}}{-x\sqrt{3-x}\cdot x\sqrt{3-x}}=\frac{x}{-x\sqrt{3-x}}$$

$$\lim_{x\to3^-}g(x)=\frac{-3}{0}=\infty$$

فالتابع غير اشتقاقي عند $x=3$

... ②

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad f(3)=0$$

التابع اشتقاقي على $]-\infty , 3[$ ومشتقه

$$f'(x) = 1.\sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{2(3-x)-1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6-2x-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f'(x) = \frac{5-2x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{3-\frac{5}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

للتابع قيمة كبرى محلياً $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2\sqrt{2}}$

وقيمة صغرى محلياً $f(3)=0$

f مستمر ومتزايد على

$$f\left(\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[\right) = \left]-\infty,\frac{5}{2\sqrt{2}}\right[\quad , \quad \left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$$

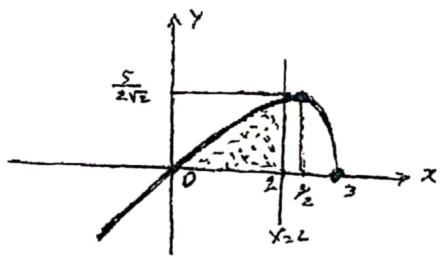
وبما أن $0 \in \left]-\infty, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right[$ إذن للمعادلة $f(x)=0$ حل

وحيد على المجال $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

ونلاحظ أيضاً من الجدول $f(3)=0$ إذن للمعادلة جذران

$$f(x)=0 \Rightarrow x\sqrt{3-x}=0$$

إما : $x=0$ ، أو : $3-x=0 \Rightarrow x=3$



$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx$$

$$= \int_0^2 x(3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\int_0^2 \left[(3-x)-3\right](3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\int_0^2 \left[(3-x)^{\frac{3}{2}} - 3(3-x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$A = -\left[\frac{(3-x)^{\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} - 3.\frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= \left[\left(-\frac{2}{5}+2\right) - \left(-\frac{2}{5}\sqrt{3^5} + 2\sqrt{3^3}\right)\right]$$

$$= -\frac{8}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3^5} + 2\sqrt{3^3} = 6\sqrt{3} - \frac{8}{5} - \frac{18}{5}\sqrt{3} > 0$$

• المسألة الثانية:

.... ①

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(0,-1,2)\\ \overrightarrow{AC}(2,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

وبالتالي النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة، فهي تعين مستوياً.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم له.

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$$

$$-b+2c=0 \quad .... ①$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$$

$$2a+2b+c=0 \quad .... ②$$

وبفرض $\boxed{c=1} \Rightarrow -b+2=0$

$$\boxed{b=2} \Rightarrow 2a+4+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{5}{2}}$$

$$\vec{n}\left(-\frac{5}{2},2,1\right) \Rightarrow \vec{n}(5,-4,-2)$$

معادلة المستوي P :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$5(x-1)-4(y-2)-2(z-0)=0$$

$$P: \boxed{5x-4y-2z+3=0}$$

② ....

$$\vec{n_P}=\vec{u}(5,-4,-2)$$

أي شعاع توجيه المستقيم Δ هو نفسه شعاع ناظم المستوي P

$$\Delta:\begin{cases} x=x_0+at=-8+5t \\ y=y_0+bt=1-4t \\ z=z_0+ct=2-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

③ ....

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي P فنجد:

$$5(-8+5t)-4(1-4t)-2(2-2t)+3=0$$

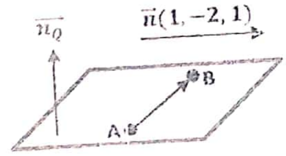
$$-40+25t-4+16t-4+4t+3=0$$

$$45t-45=0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

عندئذ إحداثيات النقطة $D'(-3,-3,0)$.

④ ....

نفرض $\vec{n_Q}(a,b,c)$ شعاع ناظم لـ Q .



$$\vec{n_Q}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow a-2b+c=0 \quad ....①$$

$$\vec{n_Q}\perp\vec{AB} \Rightarrow \vec{n_Q}\cdot\vec{AB}=0$$

$$\Rightarrow -b+2c=0 \quad ....②$$

نفرض $\boxed{c=1} \Leftarrow \boxed{b=2}$ ومنه:

$$a-4+1=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$\vec{n_Q}(3,2,1)$$

معادلة المستوي Q :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$3(x-1)-2(y-2)-1(z-0)=0$$

$$Q: \boxed{3x+2y+z-7=0}$$

⑤ ....

$$\begin{cases} x-y=-2 \quad ....\ L_1 \\ 5x-4y-2z=-3 \quad ....\ L_2 \\ 3x+2y+z=7 \quad ....\ L_3 \end{cases}$$

بإجراء التحويلات الآتية: $-5L_1+L_2 \ , \ -3L_1+L_3$

$$\begin{cases} x-y=-2 \quad ....\ L_1 \\ y-2z=7 \quad ....\ L_2 \\ 5y+z=13 \quad ....\ L_3 \end{cases}$$

$$-5L'_2+L'_3$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ y-2z=7 \\ 11z=-22 \end{cases}$$

$$\boxed{z=-2} \Rightarrow y+4=7 \Rightarrow \boxed{y=3} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

للجملة حل وحيد.

وبالتالي المستويات تشترك بنقطة وحيدة $(1,3,-2)$

❖ نهاية حل النموذج الثالث ❖

المرشد

في الرياضيات

نماذج رياضيات
مع الحل

الثالث الثانوي العلمي
لدورة ٢٠١٧

إعداد المدرسين

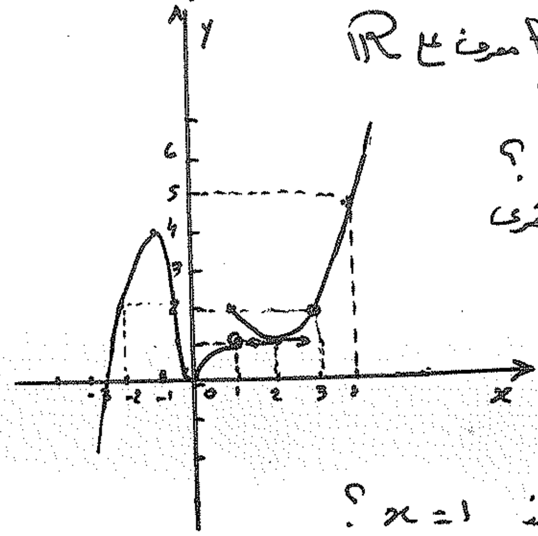
أ. ماهر إسبر
٠٩٤٤٢٠٥٥٤٩

أ. علي زلط
٠٩٣٣٦٧٦٨٣٤

نموذج "1"

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 لكل سؤال)

• السؤال الأول: نعطي جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$



والمطلوب: 1- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$ ؟

2- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 5$ ؟

3- هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أم صغرى للتابع علل ذلك ؟

4- ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟

5- ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x=2$ ؟

6- أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x=1$ ؟

• الحل:

1- عدد حلول المعادلة $f(x)=5$: حل وحيد

توضيح: نرسم مستقيم $y=5$ موازياً للمحور $x'x$ فيقطع الخط C في نقطة فاصلتها $x=4$.

2- مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 5$ هي $[4,+\infty[$ «الخط الذي يقع فوق المستقيم $y=5$»

3- $f(1)$ قيمة كبرى محلية لأنه يوجد جوار I حيث: أياً كان $x\in I\cap\mathbb{R}$ فإن $f(x)\leq f(1)$

4- عدد القيم الحدية المحلية: أربعة

5- قيمة المشتق في النقطة $x=2$ تساوي الصفر لأن المماس عند $(2,1)$ موازياً للمحور $x'x$ $\Leftarrow m=0$ ،

6- التابع غير اشتقاقي عند $x=1$ فيكون غير مستمر عند $x=1$

توضيح: كل تابع اشتقاقي هو تابع مستمر والعكس ليس بالضرورة صحيحاً

• السؤال الثاني:

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية . الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X . المطلوب:

K	0	1	2	3	4
P(X=K)					$\frac{16}{81}$

1- ما عدد الاختبارات في التجربة ؟

2- أكمل الجدول المجاور .

3- ما التوقع الرياضي والتباين للمتحول العشوائي X ؟

الحل:

المدرس
ماهر اسبر
٠٩٤٤٠١٠٠٤٩

1- عدد الاختبارات $n=4$

2- لدينا: $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}$

من الجدول لدينا: $P(X=4)=\binom{4}{4}\, p^{4}\cdot(1-p)^{4-4}$

$$\frac{16}{81}=1\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{0}\Rightarrow p^{4}=\frac{16}{81}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$$

عندئذٍ:

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=1\times1\times\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{27}=\frac{8}{81}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=6\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{24}{81}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=4\times\frac{8}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$$

المدرس علي زلط
٠٩٤٤٦٧٦٨٢٤

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

التوقع الرياضي $E(X)=n\cdot p=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

التباين $V(X)=n\cdot p\cdot q=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

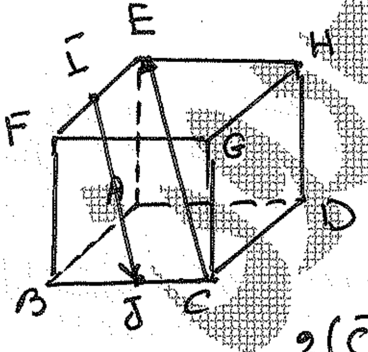
السؤال الثالث:

في الشكل المجاور مكعب.

I و J منتصفات $[EF]$ ، $[BC]$.

1- أثبت أن: $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

2- أثبت أن الأشعة: $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{CG}$ ، $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً



الحل:

أ-

$$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=2\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{IE}$$
$$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FE}$$
$$=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}$$
$$=\overrightarrow{GE}$$
$$=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$

٤-

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CJ}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE} - \overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}\right) - \overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \Rightarrow$$

فالأشعة $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

السؤال الرابع حل المعادلة : $4^x = 5^{x+1}$

الحل :

الطريقة الأولى

$$\ln 4^x = \ln 5^{x+1}$$
$$x \cdot \ln 4 = (x+1)\ln 5$$
$$x\ln 4 = x\ln 5 + \ln 5$$
$$x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5$$
$$x \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln 5$$
$$x = \frac{\ln 5}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{\ln 5}{\ln(0.8)}$$

الطريقة الثانية

$$a^x = e^{x\ln a}$$
$$e^{x\ln 4} = e^{(x+1)\ln 5} \Rightarrow$$
$$x\ln 4 = (x+1)\cdot\ln 5 \Rightarrow$$ كما سبق نجد :
$$x = \frac{\ln 5}{\ln(0.8)}$$

الطريقة الثالثة

$$4^x = 5^{x+1} \Rightarrow$$
$$4^x = 5^x \cdot 5 \Rightarrow \frac{4^x}{5^x} = 5$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^x = 5 \Rightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^x = \ln 5 \Rightarrow$$
$$x \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{\ln 5}{\ln(0.8)}$$

المدرس
ماهر اسبر
٠٩٤٤٢٠٠٥٤٩

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

• التمرين الأول:

أ- ليكن g التابع المعرف على $I =]-1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln\sqrt{2}}{x-1}$

2- احسب نهاية التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ وفق:

$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل:

1.

$$g(1) = \ln(\sqrt{1+1}) = \ln\sqrt{2}$$

المدرس علي ن. ٠٩٤٤٦٧٦٨٤٢

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln\sqrt{2}}{x-1} = \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{1}{4}$$ «حسب تعريف العدد المشتق».

2.

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

$$2x-1 \leq 2x+\sin x \leq 1+2x$$

• في حالة $x>2$ تصبح $x-2>0$ فنجد:

$$\frac{2x-1}{x-2} \leq \frac{2x+\sin x}{x-2} \leq \frac{1+2x}{x-2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) = 2 \\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{x-2}\right) = 2 \end{array}\right.$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{x-2} = 2$$

• التمرين الثاني: لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:

$x_0 = 4$ و $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ في حالة $n \geq 0$

1. نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $y_n = x_n - 8$

←

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واكتب y_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to\infty} y_n$

الحل: لدينا بالفرض: $y_n = x_n - 8$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 8$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}(x_n - 8) = \frac{3}{4}y_n \Rightarrow$$

$(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$

لدينا: $y_m = y_p \cdot q^{m-p}$

$$y_n = y_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-0} = y_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \ldots (1)$$

لإيجاد y_0: $y_n = x_n - 8$

$$n=0 \Rightarrow y_0 = x_0 - 8 = 4 - 8 = -4$$

ومنه:

$$y_n = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left[-4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = -4(0) = 0$$

حيث أن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ إذا كانت $-1 < q < 1$

طلب إضافي: احسب: $\lim_{n\to\infty} x_n$

لدينا: $y_n = x_n - 8 \Rightarrow x_n = y_n + 8.$

$$x_n = -4\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 + 8 = 8.$$

$-1 < q < 1 \Leftarrow$
$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

مدرس
علي زلط
٠٩٤٤٦٧٦٨٢٤

مدرس
ماهر أسعد
٠٩٤٤٢٠٠٥٤٩

• التمرين الرابع

أثبت صحة المساواة: $\cos^2 x . \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

ثم احسب: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x \, dx$

الحل:

• الطريقة الأولى:

$$\cos^2 x . \sin^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

• الطريقة الثانية باستخدام دستورا أويلر:

$$\cos^2 x . \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^{2ix}+2e^{ix}.e^{-ix}+e^{-2ix}}{4}\right) . \left(\frac{e^{2ix}-2e^{ix}.e^{-ix}+e^{-2ix}}{-4}\right)$$

$$= \frac{-1}{16}\left((e^{2ix}+e^{-2ix}+2).(e^{2ix}+e^{-2ix}-2)\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left((e^{2ix}+e^{-2ix})^2 - 4\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+2e^{2ix}.e^{-2ix}-4\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(2\cos 4x \cancel{+2} \cancel{-4}\right) = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x .$$

$$• \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{16} - 0\right) - (0-0) = \frac{\pi}{16}$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة :

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

1- أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، أوجد $f'(x)$ ، ادرس اطراده ونظم جدولاً به وعيّن قيمته الحدية ثم ارسم (C).

2- احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

3- بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين.

4- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي $u_0=1$ و $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ثم بيّن تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}\right) = 0$$

$y=0$ مقارب منطبق على $x'x$ في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x \cdot e^{-x}\right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

والتابع اشتقاقي في $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

التابع متزايد تماماً $]-\infty, 1[$

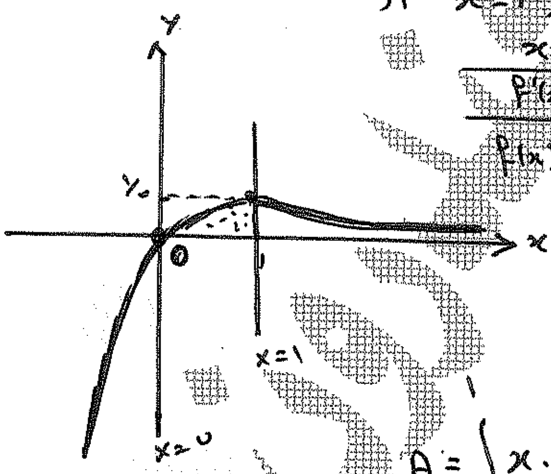
والتابع متناقص تماماً $]1, +\infty[$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0$$

اما $e^{-x} = 0$ مستحيلة

أو $x=1$, $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



للتابع قيمة كبرى محلياً $f(1) = \frac{1}{e}$

نقاط مساعدة :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} = 0$$

اما $x = 0$

أو $e^{-x} = 0$ مستحيلة

2- $A = \int_0^1 x \cdot e^{-x}\, dx$

$u = x \longrightarrow u' = 1$

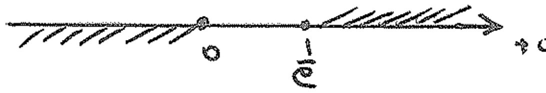
$v' = e^{-x} \longrightarrow v = -e^{-x}$

$$A = \left[-x e^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0-1) = 1 - \frac{2}{e} > 0 .$$

3-

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0
$f(x)-m$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}-m$	$\searrow$	$-m$

$$\frac{1}{e}-m>0 \Rightarrow m<\frac{1}{e}$$
$$-m<0 \Rightarrow m>0$$



$$m \in]0, \tfrac{1}{e}[$$

للمعادلة $f(x)=m$ جذرين مختلفين أحدهما $x_1 \in]-\infty, 1[$
والآخر $x_2 \in]1, +\infty[$

-4 a) بطريقة التدرج

1- برهن صحة الخاصة من أجل $n=0$

$$0 < U_0 = 1 \leqslant 1$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

ونفترض ان الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل n أي $0 < U_n \leqslant 1$

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $E(n+1): \ 0 < U_{n+1} \leqslant 1$

$$U_{n+1} = U_n \cdot e^{-U_n} = U_n \cdot \frac{1}{e^{U_n}}$$

بما أن $0 < U_n \leqslant 1$

$$0 \cdot \frac{1}{e^{U_n}} < U_n \cdot \frac{1}{e^{U_n}} \leqslant \frac{1}{e^{U_n}}$$

$$0 < U_{n+1} \leqslant 1$$

فالخاصة صحيحة أياً كانت $n \in \mathbb{N}$

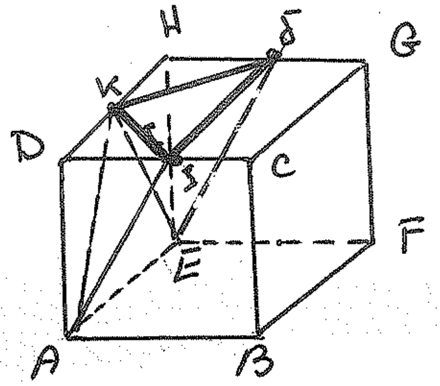
b) $U_{n+1} = U_n \cdot e^{-U_n} \Rightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-U_n} = \dfrac{1}{e^{U_n}} < 1 \Rightarrow$

فالمتتالية $(U_n)_{n \geqslant 0}$ متناقصة.

وبما أن $0 < U_n \leqslant 1$ محدودة فهي متقاربة.

مدرس
ماهر ...
٠٩٤٤٢٠٠٥٤٩

• المسألة الثانية: نتأمل مكعباً ABCDEFGH. لتكن I، J، و K منتصفات أضلاعه [DC]، [HG]، و [DH] بالترتيب. نتخذ $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ.



1. أوجد احداثيات النقاط A، I، و E.
2. اكتب معادلة المستوي (AIJE)
3. احسب بعد K عن المستوي (AIJE) وحجم الهرم KAIJE
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي (AIJE) والمار بالنقطة K.
5. احسب احداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (AIJE).
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (E, 8)، (I, β)، (A, α)
حيث α و β، 8 هي أثقال يطلب تعيينها.

الحل:

1. احداثيات النقاط $A(0,0,0)$, $E(0,1,0)$, $I(\frac{1}{2},0,1)$

2. نفرض $M(x,y,z)$ تنتمي الى المستوي (AIE) (لأن نقاطه ليست على استقامة واحدة) عندئذ يوجد عددان حقيقيان a، b تحقق

$$\overrightarrow{AM} = a.\overrightarrow{AI} + b.\overrightarrow{AE}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

المدرس محمد أسمر ٠٩٤٤٤٠٥٠٩٨

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a \quad ....(1) \\ y &= b \quad ....(2) \\ z &= a \quad ....(3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}z \Rightarrow$$

$$2x - z = 0$$

لنتحقق أن النقطة $I(\frac{1}{2},0,1)$ تنتمي الى المستوي فنجد.

$$2(\tfrac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

محققة.

اذن معادلة المستوي:

$$P: 2x - z = 0.$$

طريقة ثانية: لايجاد معادلة المستوي $(AIJE)$

لدينا $A(0,0,0)$ و $E(0,1,0)$ $I(\frac{1}{2},0,1)$

معادلة مستوي يمر من النقطة $A(0,0,0)$ (المبدأ) هي من الشكل:

$$P: \quad ax+by+cz=0$$

$$E \in P \Rightarrow b=0$$

$$I \in P \Rightarrow \frac{1}{2}a+0+c=0 \Rightarrow a+2c=0 \Rightarrow$$

$$a=-2c$$

بالتعويض نجد:

$$-2cx+0+cz=0 \Rightarrow$$

$$-c(2x-z)=0 \Rightarrow 2x-z=0 \quad ; c\neq 0$$

عزيزي الطالب

لمعرفة أي سؤال عليك الاتصال

بأحد الأرقام: ٠٩٤٤٢٠٥٥٤٩

٠٩٥٤٨٩٥٤٦١

٢٢٧٦٢٢٥

أتمنى التوفيق والنجاح

يتبع ←

المدرس

علي زلط

٠٩٤٤٦٧٦٨٢٤

3. احداثيات: $K(0,\frac{1}{2},1)$

بعد النقطة K عن المستوي P:

$$d(K,P)=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $(K-AIJE)$

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h$$

نحسب S مساحة المستطيل $(AIJE)$.

$$AI=\sqrt{(0-\frac{1}{2})^2+(0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S=(AI)\cdot(AE)=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}\quad ;\quad h=d(K,P).$$

4. معادلة المستقيم d المار بالنقطة $K(0,\frac{1}{2},1)$ وشعاع الموجه له: $\vec{u}=\vec{n}(2,0,-1)$

المعادلات الوسيطية

$$d:\begin{cases} x=x_0+at=0+2t \\ y=y_0+bt=\frac{1}{2} \\ z=z_0+ct=1-t \end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

5. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي

$$2(2t)-(1-t)=0\Rightarrow 5t=1\Rightarrow t=1/5$$

ومنه نجد احداثيات نقطة التقاطع $N(2/5,1/2,4/5)$

6. نبحث عن عددين α, β حيث: $\vec{AN}=\alpha\,\vec{AI}+\beta\,\vec{AE}$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=\alpha\left(\frac{1}{2},0,1\right)+\beta(0,1,0)\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{5}=\frac{1}{2}\alpha\Rightarrow\alpha=4/5 \\ \frac{1}{2}=\beta \\ \frac{4}{5}=\alpha+0\Rightarrow\alpha=4/5 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha=4/5,\ \beta=1/2$$

بالتعويض: $\vec{AN}=\frac{4}{5}\vec{AI}+\frac{1}{2}\vec{AE}$ $\Leftarrow$ N مركز الابعاد المتناسبة للنقاط

$$\left(I,\frac{4}{5}\right),\left(E,\frac{1}{2}\right),\left(A,1-\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)=\left(A,-\frac{3}{10}\right)$$

نموذج "٢"

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (45 لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

2) ما عدد القيم الحدية محلياً

3) اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$

الحل: 1- عدد حلول المعادلة $f(x)=0$: حل وحيد $x_1 \in]0,1[$

f تابع مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$f(]0,1[) =]-\infty,1[$

وبما أن $0 \in]-\infty,1[$ إذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$f(]1,+\infty[) =]0,1[$

$0 \notin]0,1[$ إذن لا يوجد حل للمعادلة $f(x)=0$ ضمن المجال $]1,+\infty[$

2- عدد القيم الحدية محلياً واحدة فقط $f(1)=1$ وهي قيمة كبرى محلياً.

3- معادلة المماس لـ C عند $x=1$ هي $y=1$

لأن $m=f'(1)=0$ المماس أفقي (يوازي $x'x$) معادلته $y=1$

السؤال الثاني: حل في C المعادلة $z^2 = 1+i2\sqrt{2}$

الحل: $\boxed{z^2 = \omega \Rightarrow z = \sqrt{\omega}}$ حيث ω عدد عقدي.

نكتب المعادلات:

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=3 \\ xy=\sqrt{2} \end{cases}$$ بالجمع نحصل

$2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow$ إما $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}y=\sqrt{2} \Rightarrow y=1$; $\omega_1=\sqrt{2}+i$

$x=-\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2}y=\sqrt{2} \Rightarrow y=-1$; $\omega_2=-\sqrt{2}-i$

• السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرف على $]\frac{1}{2}, +\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم عين $x > A$ لتكون $f(x)$ من المجال

$[1.95 \, , \, 2.05]$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 .$$

مركز المجال $C = \frac{1.95+2.05}{2} = \frac{4}{2} = 2$

نصف قطر المجال $r = \frac{2.05-1.95}{2} = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$

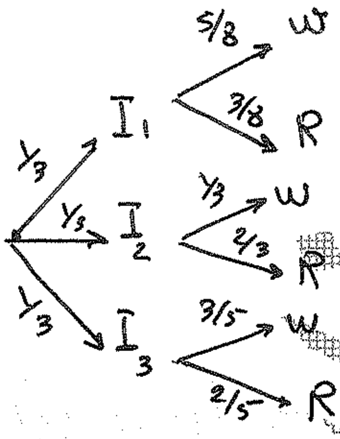
$$|f(x) - c| < r \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{20} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right| < \frac{1}{20} \Rightarrow \left|\frac{3}{x-1}\right| < \frac{1}{20}$$

عندما $x \to +\infty$ فإن

$$\frac{3}{x-1} < \frac{1}{20} \Rightarrow x-1 > 60 \Rightarrow x > 61$$

إذن $A=61$



• السؤال الرابع في المخطط الشجري المرسوم جانباً

الرمز W يدل على الكرات البيضاء

والرمز R يدل على الكرات الحمراء

حيث يتم اختيار كرة عشوائياً كرة واحدة

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

2) إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل:

1) $P(R) = P(I_1 \cap R) + P(I_2 \cap R) + P(I_3 \cap R)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} = \frac{173}{360}$

2) $P(I_1 | R) = \frac{P(I_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173}$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية (240°)

• التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1. اكتب $f(x)$ بالشكل: $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$ وعيّن قيمة كلاً من a و b ثم أثبت أن المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

2. احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

الحل:

كون درجة البسط أكبر من درجة المقام نجري عملية القسمة مباشرة ونكتب

$$f(x)=\text{ناتج القسمة}+\frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ \mp x^2 \mp 3x & x-1 \\ \hline -x-2 & \\ \underline{-x \mp 3} & \\ +1 & \end{array}$$

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

$a=1$, $b=-1$

التابع معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}=]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,+\infty[$ حيث أن معادلة المقارب $y=x-1$

$$f(x)-y=x-1+\frac{1}{x+3}-x+1=\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$$

فالمستقيم $y=x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

مدرس [illegible]
٠٩٤٤٢٠٠٥٢٩

• التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$:

$$U_0=e^3 \quad , \quad U_{n+1}=e\cdot\sqrt{U_n}$$

V_n متتالية معرفة بالشكل $V_n=\ln(U_n)-2$ والمطلوب

1) أثبت أن V_n هندسية وعيّن q و V_0

2) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n.

3) أثبت أن $\lim_{n\to\infty}U_n=e^2$

يتبع

الحل :

$$v_n = \ln(U_n) - 2$$

$$v_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{U_n}) - 2$$

$$v_{n+1} = \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln U_n - 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(U_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln U_n - 2)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

اذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $(q = 1/2)$

$$n=0 \Rightarrow v_0 = \ln(U_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

2) $$v_n = v_0 \cdot q^{n-0} = 1 \cdot (1/2)^n \Rightarrow$$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

مدرس
سامر القاسم
٠٩٤٤٤٢٠٥٥٤٩

لدينا :

$$v_n = \ln(U_n) - 2 \Rightarrow \ln(U_n) = v_n + 2 \Rightarrow$$

$$U_n = e^{v_n + 2} \Rightarrow U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = e^{0+2} = e^2 \quad ; \quad -1 < q = \frac{1}{2} < 1, \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

التمرين الرابع : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

الحل :

$$a = x, \quad b = \frac{1}{x}, \quad n = 8$$

$$T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

$$T_r = \binom{8}{r} \cdot x^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{8}{r} \frac{x^{8-r}}{x^r} = \binom{8}{r} x^{8-2r}$$

حتى يوجد حد مستقل عن x يجب ان يكون الاس = الصفر

$$8 - 2r = 0 \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{8}{4} = \frac{\cancel{8}\times 7\times 6\times 5}{\cancel{4}\times 3\times \cancel{2}\times 1} = 70.$$

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD

تحقق $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

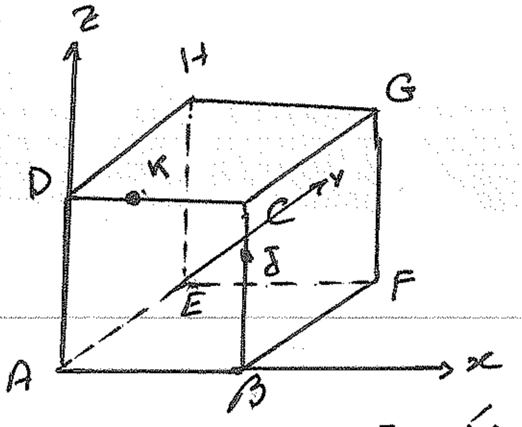
والمطلوب: 1- جد احداثيات النقط G، K، J، E، H في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

2- أثبت ان الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً

3- أثبت ان الأشعة $\overrightarrow{HK}$ ، $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً

4- أثبت ان المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

الحل:



1. احداثيات النقط

$H(0,1,1)$ ، $E(0,1,0)$

$J(1,0,\frac{3}{4})$ ، $K(\frac{1}{4},0,1)$

$G(1,1,1)$

2-
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EJ}=(1,-1,\frac{3}{4})\\ \overrightarrow{EG}=(1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

نلاحظ ان الشعاعين غير مرتبطين خطياً لان المركبات المتقابلة غير متناسبة $\left(\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{0}\right)$

3- لكي نبرهن ان الأشعة $\overrightarrow{HK}$ ، $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً.

يوجد عددان حقيقيان a ، b تحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{HK}=a.\overrightarrow{EJ}+b.\overrightarrow{EG}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{bmatrix}=a.\begin{bmatrix}1\\-1\\3/4\end{bmatrix}+b.\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b=1/4\\-a=-1\\\frac{3}{4}a+b=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

بالحل المشترك نجد $a=1$ ، $b=-3/4$ نعوض هذا الحل في المعادلة (3) فنجد

محققة $\frac{3}{4}-3/4=0\Rightarrow 0=0$

اذن $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{EJ}-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$ بما ان الأشعة $\overrightarrow{HK},\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$ مرتبطة خطياً.

4- بما ان الأشعة $\overrightarrow{HK}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ ، $\overrightarrow{EG}$ مرتبطة خطياً فان المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) .

• التمرين الرابع

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

الحل:

$$a=x \ , \ b=\frac{1}{x} \ , \ n=8$$

$$T_r=\binom{n}{r}\cdot a^{n-r}\cdot b^r=\binom{8}{r}\cdot x^{8-r}\cdot\frac{1}{x^r}=\binom{8}{r}x^{8-2r}$$

حتى يوجد مستقل عن x يجب ان يكون الاس يساوي الصفر

$$8-2r=0 \Rightarrow 2r=8 \Rightarrow r=4$$

$$T_4=\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70.$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100% لكل مسألة)

• المسألة الأولى:

أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=e^x+2-x$

ادرس اطراد التابع g و استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\frac{(x-1)}{e^x}$

1. أثبت ان $f'(x)=\frac{1}{e^x}\cdot g(x)$

2. بيّن ان للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $0<\alpha<\frac{1}{2}$

3. اثبت ان المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

4. ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

الحل:

$$g(x)=e^x+2-x$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0+2+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\infty-\infty \ \text{(حالة عدم تعيين)}$$

$$g(x)=x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty(+\infty+0-1)=+\infty$$

والتابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه

$$g'(x)=e^x-1$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1=e^0 \Rightarrow x=0$$

$$g(0)=1+2-0=3.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

التابع متناقص تماماً على $]-\infty,0]$

ومتزايد تماماً على $[0,+\infty[$

المدرس
علي زلط
0944767824

من الجدول نجد أن

$$g(x)\in[3,+\infty[\;\Rightarrow\; g(x)>0 \quad ; \quad x\in]-\infty,+\infty[$$

ثانياً: التابع $f(x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=1+\frac{1.e^{x}-e^{x}(x-1)}{e^{2x}}$$

$$=1+\frac{e^{x}(1-x+1)}{e^{2x}}=1+\frac{(2-x)}{e^{x}}=\frac{e^{x}+2-x}{e^{x}}=\frac{g(x)}{e^{x}} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{e^{x}}\cdot g(x)>0$$ والتابع متزايد تماماً

$$f(x)=x+\frac{x-1}{e^{x}}=x+\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,+\infty[$

$$f(]-\infty,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$

$0\in]-\infty,+\infty[$ إذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=-1<0\\ f\left(\tfrac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{e^{1/2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{e}}>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0).f\left(\tfrac{1}{2}\right)<0 \qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}$$

-3
$$f(x)-y=x+\frac{(x-1)}{e^{x}}-x=\frac{x-1}{e^{x}}=\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$$

فالمستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

لدينا: $f(x)-y=\dfrac{x-1}{e^{x}}$

$f(x)-y>0$ على $]1,+\infty[$ والخط C يقع فوق المقارب

$f(x)-y<0$ على $]-\infty,1[$ والخط C يقع تحت المقارب

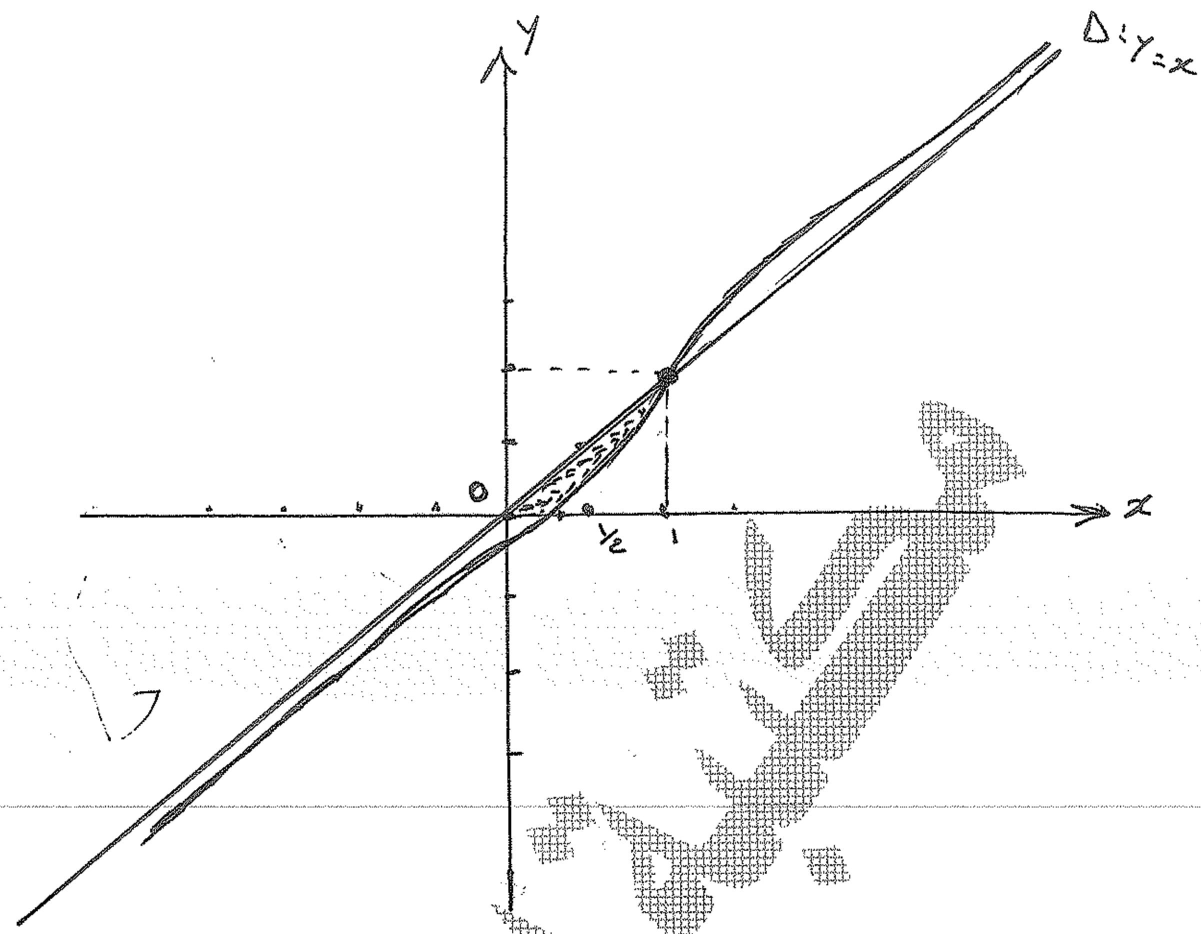
$f(x)-y=0$ عندما $x=1$ فالخط C يشترك مع المقارب بالنقطة $(1,1)$

$$A=\int_0^1[y-f(x)]dx=\int_0^1-\frac{(x-1)}{e^{x}}dx=\int_0^1(1-x)e^{-x}dx$$

$$u=1-x \rightarrow u'=-1$$
$$v'=e^{-x} \rightarrow v=-e^{-x}$$

$$A=\left[(x-1)e^{-x}+e^{-x}\right]_0^1=\left(0+\frac{1}{e}\right)-(-1+1)=\frac{1}{e}>0$$

الرسم ←



مدرس علي زلط
٠٩٢٢٦٧٦٨٢٤

مدرس مطر احمد
٠٩٤٤٢٠٥٥٤٩

• المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب الى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$ ، $C(3,1,-2)$ ، $D(-4,2,1)$ والمطلوب

1- أثبت ان المثلث ABC قائم ثم احسب مساحته

2- أثبت ان الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3- احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه $(D.ABC)$

الحل:

1)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = (1, 2, 4) \\ \vec{AC} = (2, 1, -1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2+2-4 = 0$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC}$$

فالمثلث قائم في A.

$$S(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}(AB).(AC)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+4+16}\cdot\sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{21}.\sqrt{6}$$

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

2-

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB} = 2-6+4 = 0$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{AC} = 4-3-1 = 0$$

اذن $\vec{n}$ يعامد مستقيمين متقاطعين من المستوي فهو يعامد مستويهما ومنه

$$\vec{n} \perp (ABC)$$

معادلة المستوي ABC المار بالنقطة $A(1,0,-1)$ وشعاع ناظم له $\vec{n}(2,-3,1)$ هي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$$

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1) = 0 \Rightarrow 2x-3y+z-1 = 0$$

3-

$$d(D,ABC) = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

حجم رباعي الوجوه:

$$V = \frac{1}{3}S.h$$

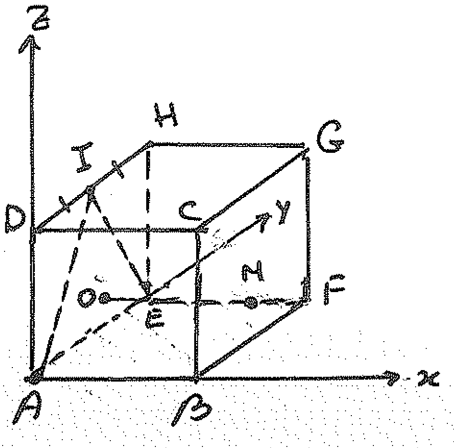
$$V = \frac{1}{3}.S(ABC).d(D,ABC)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{14}.\sqrt{14} = 7$$

مدرس
ماهر اسعد
0944200049

نموذج "٣"

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40° لكل سؤال)



• السؤال الأول: نعد جانباً مكعباً طول ضلعه 1.
نزوده بمعلم متجانس $(A ; \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$.
حيث I منتصف [DH].

1- اعط احداثيات النقاط I و E و A
2- جد احداثيات O مركز ثقل المثلث AEI
3- أين تقع النقطة M التي تحقق:
$$3\vec{FM} = \vec{BA} + \vec{EO}$$
4- احسب $\vec{IA} \cdot \vec{IE}$

الحل:

1) $A(0,0,0)$, $E(0,1,0)$, $I(0,\frac{1}{2},1)$

2) O مركز ثقل المثلث AEI ⇐

$$\left.\begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_E + x_I}{3} = \frac{0+0+0}{3} = \frac{0}{3} = 0 \\ y_O &= \frac{y_A + y_E + y_I}{3} = \frac{0+1+\frac{1}{2}}{3} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2} \\ z_O &= \frac{z_A + z_E + z_I}{3} = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow O(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3})$$

3)
$$\begin{aligned} 3\vec{FM} &= \vec{BA} + \vec{EO} \\ &= \vec{FE} + \vec{EO} \\ &= \vec{FO} \Longrightarrow \vec{FM} = \frac{1}{3}\vec{FO} \end{aligned}$$

M تقع ∈ [OF].

$$\left.\begin{aligned} &\vec{IA}(0, \tfrac{1}{2}, 1) \\ &\vec{IE}(0, \tfrac{1}{2}, -1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{IA} \cdot \vec{IF} = 0 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

• السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$
1- جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D
2- احسب: $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ \hline x+1 & x^2-5x+1 \\ & \mp x^2 \mp x \\ & -6x+1 \\ & \pm 6x \pm 6 \\ & +7 \end{array}$$

$$\boxed{f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}}$$

$a=1$, $b=-6$, $c=7$.

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x-6+\frac{7}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 6x + 7\ln|x+1|\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{4}{2} - 12 + 7\ln 3\right) - \left(0 - 0 + 7\ln 1\right) = 7\ln 3 - 10.$$

• السؤال الثالث: ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أن $\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$ تخيلي بحت

الحل:

• تذكرة:

• $|w| = 1 \Rightarrow w.\bar{w} = 1 \Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

• z عدد حقيقي يكافئ $\bar{z} = z$

z عدد تخيلي بحت يكافئ $\bar{z} = -z$

• $$\overline{\left(\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}\right)} = \frac{\bar{w}.\bar{\bar{z}} - \bar{z}}{-i\bar{w} + i} = \frac{\frac{1}{w}.z - \bar{z}}{-i.\frac{1}{w} + i} = \frac{\frac{z - w\bar{z}}{w}}{\frac{-i + iw}{w}} = -\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$$

وهو عدد تخيلي بحت

• السؤال الرابع: احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = e^{1-\sin x}$

الحل: التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\cos x \cdot e^{1-\sin x}$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية. ($60°$ لكل تمرين)

• التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right) = 1$$

2) $x>0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2+x}{x^2+1}-0}{x} = \frac{x^2+x}{x^3+x} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 1 \in \mathbb{R}$$

فالتابع f اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

$$f'(0) = 1 \Rightarrow m = 1$$

معادلة نصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

$$y = x$$

التمرين الثاني: لتكن $(x_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة:

$$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}, \quad x_0 = 5$$

أ- نعرف $(y_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أن $(y_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية

ب- اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots\cdots + y_{10}$

بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$.

الحل: أ-

$$y_n = x_n + 4$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$y_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n+4) = \frac{6}{5}y_n$$

اذن $(y_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{6}{5}$

ب).

$$n=0 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$

$$n=1 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{5}x_1 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$$

لدينا: $y_n = x_n + 4$.

$$a = y_2 = x_2 + 4 = \frac{224}{25} + 4 = \frac{324}{25}$$

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad n = 10-2+1 = 9$$

$$S = \frac{324}{25}\cdot\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}} = -\frac{324}{\cancel{25}}\times\cancel{5}\cdot\left[1-\left(\frac{6}{5}\right)^9\right]$$

$$= -\frac{324}{5}\left[1-\left(\frac{6}{5}\right)^9\right]$$

• التمرين الثالث: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ والمستوي P الذي يقبل معادلته: $2x-3y+z-5=0$

1- أثبت ان المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين احداثياتها.

2- اكتب معادلة المستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B

الحل:

$\vec{u} = \vec{AB} = (-3, 4, 5)$ شعاع توجيه المستقيم (AB)

$$\vec{n}_p\,(2,-3,1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n}_p = -6-12+5 = -13 \neq 0$$

فالمستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C.

المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB):

$$d=(AB) = \begin{cases} x = x_0+at = 2-3t \\ y = y_0+bt = -1+4t \\ z = z_0+ct = 5t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

نعوض هذه المعادلات في معادلة المستوي P فنجد

$$2(2-3t)-3(-1+4t)+5t-5=0$$

$$4-6t+3-12t+5t-5=0$$

$$-13t+2=0 \Rightarrow t = 2/13$$

احداثيات نقطة التقاطع: $C\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$

2- نفرض شعاع ناظم المستوي Q: $\vec{n}_Q(a,b,c)$

بما ان المستويان P و Q متعامدين فان

$$\vec{n}_p\cdot\vec{n}_Q = 0 \Rightarrow 2a-3b+c=0 \;\; \text{-----}(1)$$

وبما ان $\vec{AB}$ محتوى في المستوي Q فان $\vec{n}_Q\cdot\vec{AB}=0$

$$-3a+4b+5c=0 \;\; \text{----}(2)$$

أصبح لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل لذلك نفرض $c=1$ مثلاً

$$\left.\begin{array}{l} 2a-3b=-1 \\ 3a-4b=5 \end{array}\right\} \Rightarrow a=19,\ b=13$$

فالشعاع $\vec{n}_Q(19,13,1)$ شعاع ناظم للمستوي Q.

معادلة المستوي Q:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$19(x-2)+13(y+1)+1(z-0)=0$$

$$19x+13y+z-25=0.$$

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائياً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

1- ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X.

2- احسب كلاً من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج قيمة $P(X=2)$

3- احسب توقع X وانحرافه المعياري

الحل: 1- مجموعة القيم التي يأخذها X هي: $X(\Omega)=\{1,2,3\}$

2- $P(X=1)$ هو احتمال الكرات الثلاث المسحوبة من لون واحد.

$$P(X=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4+1}{8\times 7}=\frac{5}{56}$$

$P(X=3)$ هو احتمال الكرات الثلاث من ألوان مختلفة

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{4\times3\times1}{56}=\frac{12}{56}$$

$P(X=2)$ هو احتمال الكرات الثلاث من لونين مختلفين وهو متمم للحدثين السابقين

$$P(X=2)=1-\left[P(X=1)+P(X=3)\right]$$

$$=1-\left(\frac{5}{56}+\frac{12}{56}\right)=1-\frac{17}{56}=\frac{39}{56}$$

3- جدول القانون الاحتمالي

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot P_i=\frac{5+78+36}{56}=\frac{119}{56}$$

التباين:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot P-\left[E(X)\right]^2$$

$$=1^2\cdot\frac{5}{56}+2^2\cdot\frac{39}{56}+3^2\cdot\frac{12}{56}-\left[\frac{119}{56}\right]^2$$

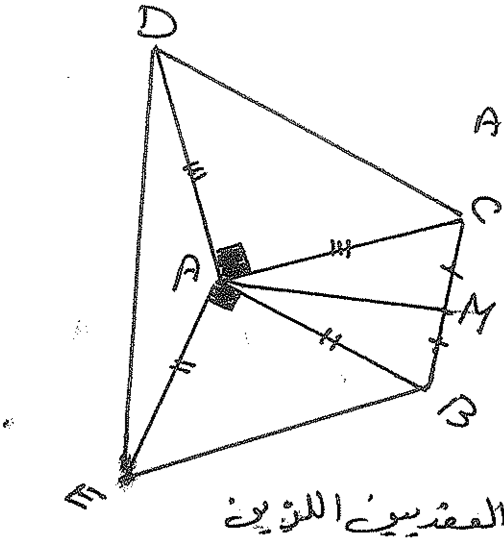
$$=\frac{5+156+108}{56}-\frac{(119)^2}{(56)^2}=\frac{269}{56}-\frac{(119)^2}{(56)^2}$$

$$V(X)=\frac{17485-14161}{(56)^2}=\frac{3324}{(56)^2}$$

الانحراف المعياري

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{3324}}{56}.$$

ثالثاً حل المسائل الآتيين :



المسألة الأولى : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً .

لتكن M منتصف $[AC]$ ولتكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساوي الساقين مباشرين .

نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A ونرمز بالرمزين b و c الى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C .

1- احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و C و M بالترتيب .

2- احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج ان $[AM]$ هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$

3- نفترض ان A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$. احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

الحل :

E صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\Leftarrow$

$e = e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot b \Rightarrow e = -ib$

D صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\Leftarrow$

$d = e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot c \Rightarrow d = ic.$

وبما أن M منتصف $[BC]$ فان العدد العقدي m الذي يمثل النقطة M هو

$$m = \frac{b+c}{2}$$

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = \frac{2i\cancel{(c+b)}}{\cancel{b+c}} = 2i$$

وهو تخيلي بحت وبالتالي

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ED}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AM \perp ED.$

اذن $[AM]$ هو ارتفاع في المثلث AED

نستنتج أنه

$\frac{\overrightarrow{ED}}{\overrightarrow{AM}} = 2i \Rightarrow \left|\frac{\overrightarrow{ED}}{\overrightarrow{AM}}\right| = |2i| \Rightarrow$

$\frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow ED = 2AM.$

• المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

بالعلاقة: $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

1- احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

2- أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f.

3- ارسم الخط C في معلم متجانس.

4- لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $U_n=f(n)$ نضع

$$S_n=U_1+U_2+\dots+U_n$$

أثبت أن:

$$S_n=\ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

الحل: 1

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln(1)=0\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(1)=0\end{array}\right.$$ $y=0$ مقارب منطبق على xx'

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$: $x=-2$ مقارب شاقولي (يوازي yy') والخط C يقع على يسار المقارب باتجاه oy^-

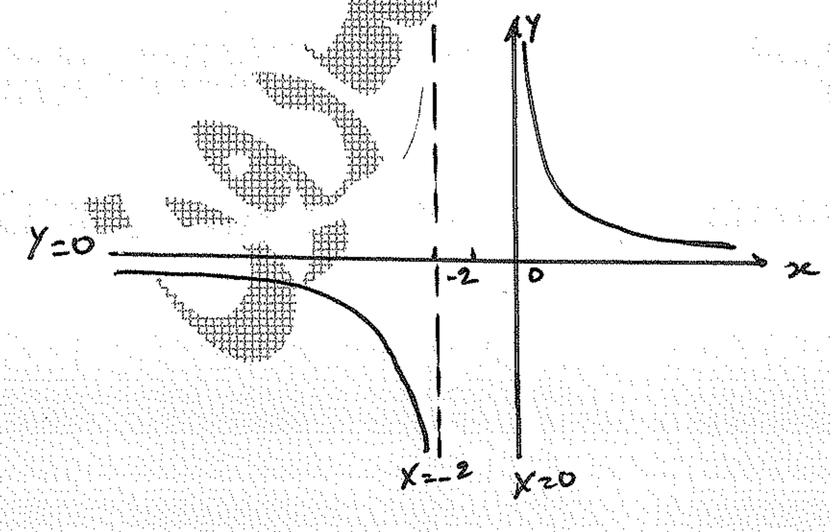
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$: $x=0$ مقارب منطبق على yy' والخط C يقع على يمين المقارب باتجاه oy^+

التابع اشتقاقي على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$

$$f'(x)=\frac{-2}{x(x+2)}<0$$

فالتابع متناقص تماماً.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	//////	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖	//////	‖ $+\infty$	↘	0



بما أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة
$(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$ فإن.

A في المبدأ

$$z_A = \frac{1.b + 1.c + 3.e + 2d}{1+1+3+2} = \frac{b + c + 3(-ib) + 2(ic)}{7}$$

$$0 = \frac{b(1-3i) + c(1+2i)}{7} \Rightarrow b(1-3i) + c(1+2i) \Rightarrow$$

$$\frac{c}{b} = \frac{-1+3i}{1+2i}$$

$$= \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1+2i)} = \frac{-1+2i+3i+6}{1+4} = \frac{5+5i}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{b} = 1+i$$

$$\arg\left(\frac{c}{b}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \theta$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

إذن

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c}{b}\right) = \theta = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي

$$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$$

مدرس
ماهر صبر
٠٩٤٤٢٠٠٥٤٩

$$U_n = f(n) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$U_1 = f(1) = \ln\left(\frac{3}{1}\right) = \ln 3$$

$$U_2 = f(2) = \ln\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$U_3 = f(3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$U_4 = f(4) = \ln\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$S_n = \ln 3 + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{6}{4} + \cdots\cdots + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

حسب خواص اللوغاريتم

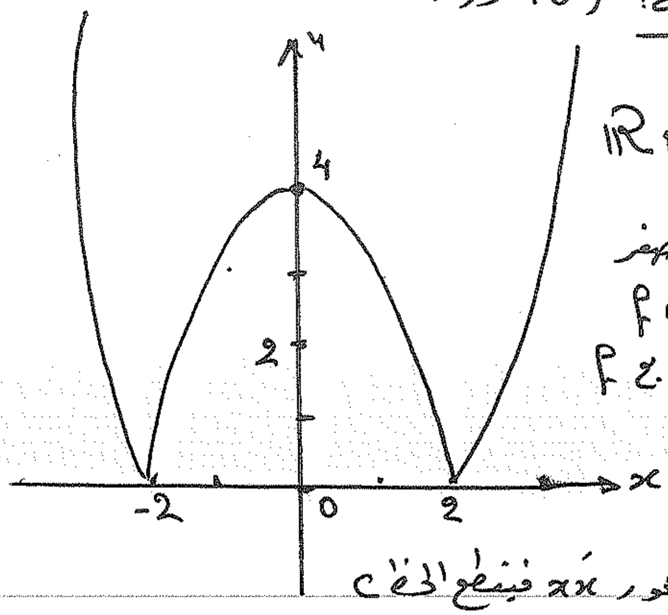
$$S_n = \ln\left(\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{4}}{2}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\frac{6}{\cancel{4}}\cdots\cdots\frac{\cancel{n}}{n-2}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+2}{\cancel{n}}\right)$$

$$S_n = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

مدرس
ماهر
أبو عجيلة
٩٢٢٢٠٥٥٤٩.

نمـوذج "٤"

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



• السؤال الأول:

يُعطى جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

والمطلوب: 1- كم حلاً للمعادلة $f(x) = 2$

2- احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر

3- عيّن صورة المجال $I = [-2, 2]$ وفق f

4- كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f

الحل:

1- عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ تساوي أربع حلول.

توضيح: نرسم مستقيماً $y = 2$ موازياً للمحور $x'x$ فيقطع الخط C بأربع نقاط.

2- $f(0) = 4$ إذن نقطة التماس $(0, 4)$ والمماس عند هذه النقطة يوازي المحور $x'x$ عندئذ $f'(0) = m = 0$.

3- $f(I) = f([-2, 2]) = [0, 4]$

4- قيمة كبرى محلياً $f(0) = 4$

عدد القيم المحلية الصغرى تساوي 2 وهما: $f(2) = 0$, $f(-2) = 0$

• السؤال الثاني

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$

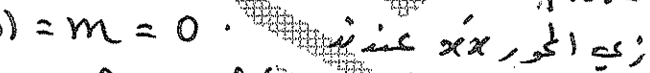
الحل:

$f_1(x) = \ln(x+1)$; $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$; $D_{f_1} =]-1, +\infty[$

$f_2(x) = \ln x$; $x > 0$; $D_{f_2} =]0, +\infty[$

$f_3(x) = \ln(x-1)$; $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $D_{f_3} =]1, +\infty[$ $\Rightarrow$

مجموعة حلول المعادلة: $D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} =]1, +\infty[$



$\ln[(x+1) \cdot x] = \ln(x-1) \Rightarrow x^2 + x = x - 1 \Rightarrow$

$x^2 = -1$

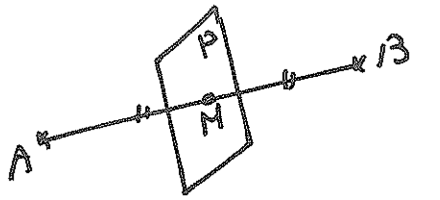
مستحيلة الحل (لأن العدد السالب ليس له جذر تربيعي)

وبالتالي المعادلة لا تقبل حلولاً.

المدرس علي ... ٠٩٤٤٦٧٧٢٦٤

• **السؤال الثالث:** اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
حيث $A(2,-1,3)$, $B(4,3,-1)$

الحل:



M منتصف $[AB] \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ z_M &= \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(3,1,1)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}(2, 4, -4)$$

معادلة المستوي المحوري

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$
$$2(x-3) + 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$
$$2x + 4y - 4z - 6 = 0$$
$$x + 2y - 2z - 3 = 0$$

• **السؤال الرابع:** ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$.

الحل:

$$a = \frac{y^2}{x}, \quad b = \frac{x}{y}, \quad n = 8$$

$$T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

$$T_r = \binom{8}{r} \cdot \left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$T_r = \binom{8}{r} \cdot \frac{y^{16-2r}}{x^{8-r}} \cdot \frac{x^r}{y^r} = \binom{8}{r} \cdot y^{16-3r} \cdot x^{2r-8}$$

$$16 - 3r = 1 \Rightarrow 3r = 15 \Rightarrow r = 5$$
$$2r - 8 = 2 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

$$T_5 = \binom{8}{5} \cdot x^2y = \binom{8}{3} x^2y = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} x^2y = 56\, x^2y$$

أمثال الحد x^2y تساوي 56.

المدرس
٠٩٤٤٢٠٥٠٤٩

ثانياً حل التمرينات الأربعة الآتية (60 درجة لكل تمرين)

• **التمرين الأول.**

إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أياً كان x من $\mathbb{R}^*$

أوجد نهاية التابع f عند الصفر

الحل:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1-1}{0} + \frac{1}{2} = \frac{0}{0} \quad (\text{حالة عدم تعيين})$$

الطريقة الأولى:

$$f(x) = -\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

المدرس ماهر ابو ... 0944400029

الطريقة الثانية:

$$f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{1+1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

• **التمرين الثاني:**

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n} \quad ، \quad U_0 = \frac{1}{2}$$

1) أثبت أن $0 < U_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$

2) نعرف $(V_n)_{n \geq 0}$ حيث $V_n = \frac{1}{U_n} - 1$ أثبت أن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج V_n بدلالة n

3) اكتب U_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

الحل:

1- الإثبات بالتدريج

نبرهن صحة الخاصة $E(0)$: $0 < U_0 = \frac{1}{2} < 1$

فالخاصة $E(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي $0 < U_n < 1$ ولنبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ أي $0 < U_{n+1} < 1$

الإثبات: لدينا

$$0 < U_n < 1 \Rightarrow 0 > -U_n > -1 \Rightarrow 2 > 2 - U_n > +1 \Rightarrow$$

$$1 < 2 - U_n < 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{2 - U_n} > \frac{1}{2} \Rightarrow U_n > \frac{U_n}{2 - U_n} > \frac{1}{2} U_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} U_n < \frac{U_n}{2 - U_n} < U_n \Rightarrow \frac{1}{2} U_n < U_{n+1} < U_n \quad \dots (1)$$

$$0 < U_n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} U_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} U_n < U_{n+1} < U_n < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

$$0 < U_{n+1} < 1$$

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كانت n من $\mathbb{N}$

2ـ

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2}{u_n} - 1 - 1 = \frac{2}{u_n} - 2$$

$$v_{n+1} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \Rightarrow v_{n+1} = 2 \cdot v_n$$

اذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$

بما أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فإن

$$v_n = v_0 \cdot q^{n-0} \Rightarrow$$

$$v_n = \left(\frac{1}{u_0} - 1\right)\cdot(2)^n = (2-1)\cdot 2^n = 2^n$$

مدرس
ماهر اسبر
٠٩٤٤٤٢٠٥٠٤٩

3ـ لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} = v_n + 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1+v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{1+2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$q = 2 > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$$

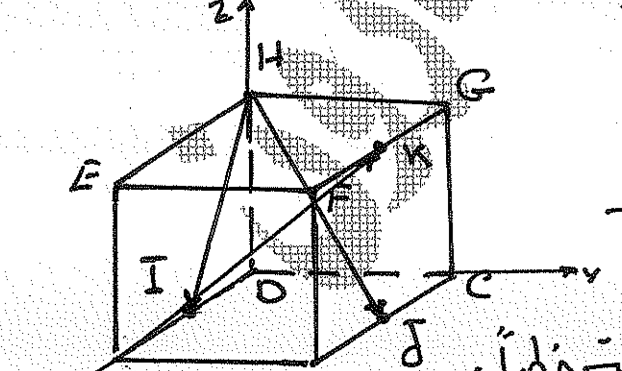
• **التمرين الثالث:** مكعب $ABCDEFGH$. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$.

1ـ باختيار معلم متجانس $(D;\vec{DA},\vec{DC},\vec{DH})$ احسب مركبات كل من الأشعة: $\vec{HJ}$ ، $\vec{HI}$ ، $\vec{AK}$

2ـ أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة:

$$\vec{AK} = a\cdot\vec{HI} + b\cdot\vec{HJ}$$

ثم استنتج أن الأشعة: $\vec{HJ}$ و $\vec{HI}$ و $\vec{AK}$ مرتبطة خطياً.



الحل:

مدرس: ماهر اسبر
٠٩٤٤٤٢٠٥٠٤٩

$A(1,0,0)$, $H(0,0,1)$, $I(\frac{1}{2},0,0)$

$J(\frac{1}{2},1,0)$, $K(\frac{1}{2},1,1)$

$\overrightarrow{AK}=(-\frac{1}{2},1,1)$

$\overrightarrow{HI}=(\frac{1}{2},0,-1)$

$\overrightarrow{HJ}=(\frac{1}{2},1,-1)$.

-2

$\overrightarrow{AK}=a\cdot\overrightarrow{HI}+b\cdot\overrightarrow{HJ}$

$(-\frac{1}{2},1,1)=a(\frac{1}{2},0,-1)+b(\frac{1}{2},1,-1)$

$-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \Longrightarrow a+b=-1 \;\ldots (1)$

$1=b \Longrightarrow b=1$

$1=-a-b \;\ldots (3)$.

ومنه $a=-2$ نعوض هذا الحل في (3) فنجد

$1=2-1=1$ محققة

اذن

$\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HJ}$

وحسب المبرهنة: فان الاشعة $\overrightarrow{AK}$ ، $\overrightarrow{HI}$ ، $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

التمرين الرابع: عيّن العددين z_1 و z_2 حيث:

$2z_1-z_2=-3 \;\ldots\ldots (1)$

$2\overline{z_1}+\overline{z_2}=-3+2i\sqrt{3} \;\ldots (2)$

الحل:

الطريقة الاولى: نأخذ مرافق طرفي المعادلة (1) فنجد

$2\overline{z_1}-\overline{z_2}=-3$

$2\overline{z_1}+\overline{z_2}=-3+2i\sqrt{3}$

بالجمع

$4\overline{z_1}=-6+2i\sqrt{3} \Longrightarrow \overline{z_1}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow$

$z_1=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ نعوضها في (1) فنجد

$z_2=\sqrt{3}i$

الطريقة الثانية: نأخذ مرافق طرفي المعادلة (2) مع ملاحظة أن $\overline{\overline{z}} = z$

$$2z_1 + z_2 = -3 - 2i\sqrt{3}$$
$$2z_1 - z_2 = -3$$

بالجمع

$$4z_1 = -6 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نعوض في (1) فنجد:

$$\cancel{-3} - i\sqrt{3} - z_2 = \cancel{-3} \Rightarrow z_2 = i\sqrt{3}$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين. (90 درجة للأولى و 110 للثانية).

المسألة الأولى: صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً.

وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل

والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل

احسب الاحتمالات التالية:

1- A و B و $A|B$

2- إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه

الحل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{31}{35}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{18+4}{35} = \frac{22}{35}$$

A: (ح,س,س) أو (ح,ح,س) أو (ح,ح,ح)

B: (س,س,ح) أو (س,س,س).

$A \cap B$: (س,س,ح).

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{35}}{\frac{22}{35}} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

2 -

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_i P_i=\frac{0+18+24+3}{35}=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_i^2 P_i-[E(X)]^2$$

$$=0+1\cdot\frac{18}{35}+4\cdot\frac{12}{35}+9\cdot\frac{1}{35}-\left(\frac{9}{7}\right)^2$$

$$=\frac{18+48+9}{35}-\frac{81}{49}$$

$$=\frac{\cancel{75}}{\cancel{35}}-\frac{81}{49}=\frac{15}{7}-\frac{81}{49}=\frac{108-81}{49}=\frac{27}{49}$$

• المسألة الثانية

لتكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2e^{-x}+x-2$ خطه البياني C.

1- أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة لمقاربه

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبيّن أنه يبلغ قيمة حدية محلية عيّنها وبيّن نوعها

3- استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمز له بالرمز α أثبت أن $1<\alpha<2$

4- ارسم المقارب المائل ثم ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=\ln 3$ و $x=\ln 2$ و $y=x-2$

الحل:

١. معادلة المقارب المائل من الشكل $y = mx + h$ ، حيث:

$$m = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{2e^{-x} + x - 2}{x} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2}{xe^{x}} + 1 - \frac{2}{x} \right]$$

$$= 0 + 1 - 0 = 1 \in \mathbb{R}.$$

$$h = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} [2e^{-x} + \cancel{x} - 2 - \cancel{x}] = 0 - 2 = -2$$

فالمستقيم المقارب المائل في جوار $+\infty$:

$$y = x - 2$$

لدراسة الوضع النسبي للخط C بالنسبة الى مقاربه

$$f(x) - y = 2e^{-x} + x - 2 - x + 2 = 2e^{-x} > 0$$

أيا كان $x \in \mathbb{R}$ فالخط C يقع فوق المقارب

2) التابع مستمر واشتقاقي في $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

مدرس ماهر اسعد

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \infty - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty - \infty \text{ (حالة عدم تعيين)}$$

لإزالته

$$f(x) = x\left(\frac{2e^{-x}}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$= x\left(\frac{2}{xe^{x}} + 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(-\infty + 1 - 0) = +\infty$$

$$f'(x) = -2e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow$$

$$x = \ln 2 \quad , \quad f(\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \ln 2 - 2$$

$$= \ln 2 - 1$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

للتابع قيمة حدية محلية صغرى $f(\ln 2) = \ln 2 - 1$.

ملاحظة

$\ln 2 - 1 = \ln 2 - \ln e = \ln\left(\frac{2}{e}\right) < 0 \quad ; \quad \frac{2}{e} < 1$

f مستمر ومتناقص تماما ع $]-\infty, \ln 2[$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ f(\ln 2) = \ln 2 - 1 < 0 \end{cases}$ اذن المعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد ع $]-\infty, \ln 2[$ والجذر هو $\alpha_1 = 0$ لأنه

$f(\alpha_1) = f(0) = 2 + 0 - 2 = 0.$

f مستمر ومتزايد تماما ع $]\ln 2, +\infty[$

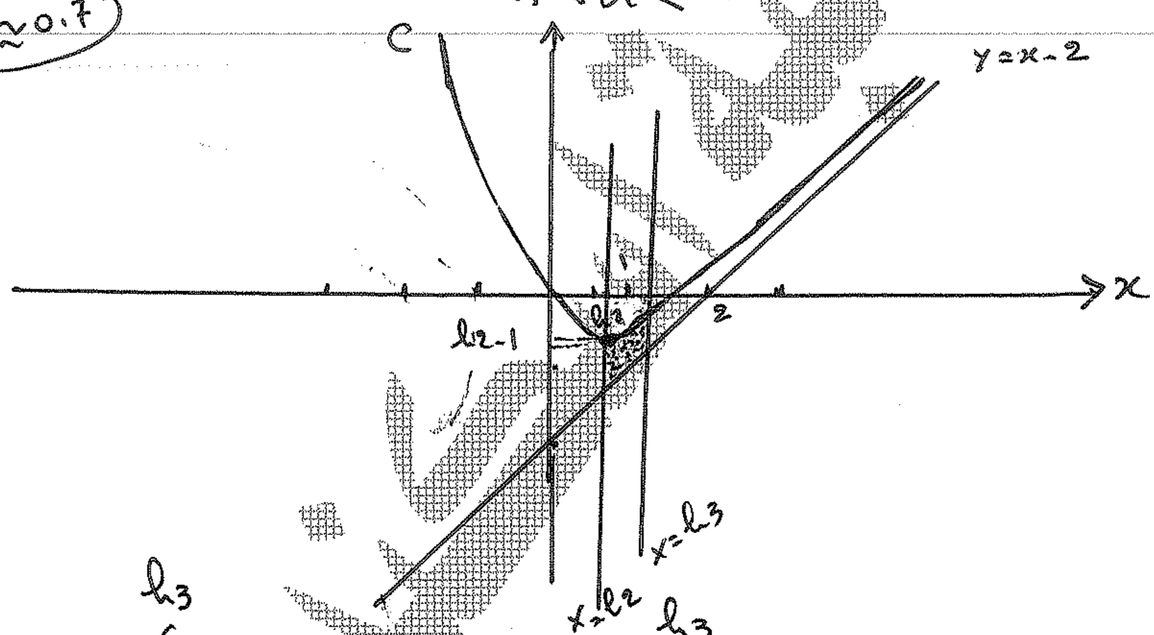
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ f(\ln 2) = \ln 2 - 1 < 0 \end{cases}$ اذن المعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد ع $]-\infty, \ln 2[$

$\alpha \in]-\infty, \ln 2[$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = \frac{2}{e} + 1 - 2 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \\ f(2) = \frac{2}{e^2} + 2 - 2 = \frac{2}{e^2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

اذن $1 < \alpha < 2$

$\ln 2 \simeq 0.7$



$$A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (f(x) - y)\, dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-2e^{-x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = -2e^{-\ln 3} + 2e^{-\ln 2}$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$$