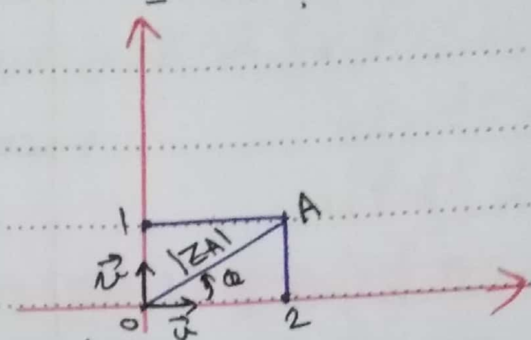
تطبيقات الأعداد العقدية

• تمثيل النقطة بعدد عقدي:



$OB = |Z_B|$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{OA}}) = \arg(Z_A)$

مثال: C نقطة ممثلة بالعدد:

$C = 1 - \sqrt{3}\, i$

أحسب OC ، $(\widehat{\vec{u}, \vec{OC}})$

$OC = |Z_C| = \sqrt{1+3} = 2$

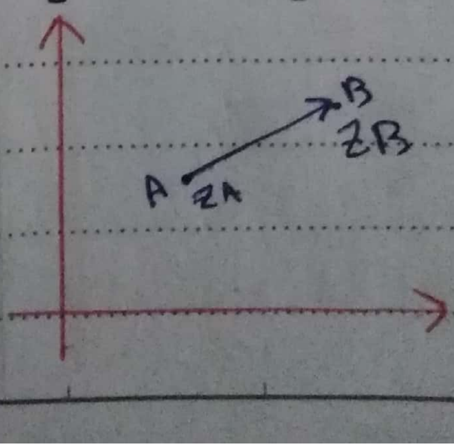
$(\vec{u}, \vec{OC}) = \arg(1 - \sqrt{3}\, i)$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{aligned} \sin(a) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(a) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} a = -\frac{\pi}{3}$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{OC}}) = -\frac{\pi}{3}$

• تمثيل شعاع بعدد عقدي:



$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$

$AB = |Z_B - Z_A|$

$(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(Z_A)$

• منتصف قطعة مستقيمة:

- نعرف أن I منتصف CD فإن

$Z_I = \frac{Z_D + Z_C}{2}$

- نعرف أن G مركز ثقل المثلث ABC فإن:

$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

- نعرف H مرجح للنقاط (C, γ) (A, α) (B, β)

فإن:

$Z_H = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

تمرين: لتكن النقاط A, B, C الممثلة بالأعداد العقدية:

$a = 3 - i$ $b = 1 + i$ $c = 2 + 3i$

المطلوب.

/ /

① أوجد $(\vec{u}, \vec{AB})$

② هل A, B, C على استقامة واحدة

③ أوجد Z_G مركز ثقل المثلث ABC

④ أوجد Z_H الممثل لـ H مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,3)$

1- $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(Z_{\vec{AB}})$

$= \arg(b-a)$

$= \arg(-2+2i)$

$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{AB}}) = \frac{3\pi}{4}$

2- $Z_{\vec{AB}} = b-a = -2+2i$

$Z_{\vec{AC}} = -1+4i$

بما أن $\frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{4}$

فالشعاعين $\vec{AC}, \vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً والنقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة

3- $Z_G = \frac{a+b+c}{3} = \frac{6+3i}{3}$

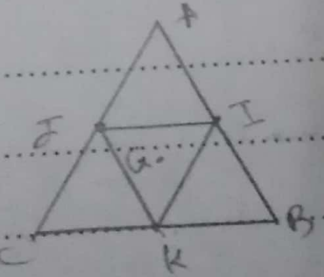
$= 2+i$

4- $Z_H = \frac{a+2b+3c}{1+2+3}$

$= \frac{3-i+2+2i+6+9i}{6}$

$Z_H = \frac{11}{6} + \frac{10}{6}i$

تمرين: ABC مثلث، I, J, K منتصفات الأضلاع BC , AC ,
AB , أثبت أن للمثلثين IJK
مركز ثقل المثلث ذاته



نفرض أن G مركز ثقل IJK

$Z_G = \frac{Z_I + Z_J + Z_K}{3}$

$= \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{3}$

$= \frac{2a+2b+2c}{3}$

$$Z_G = \frac{a+b+c}{3}$$

بإذاً G مركز ثقل ABC

حيث G هو مركز ثقل المثلثين ABC، IJK

• خواص arg :

1. $\arg(Z_A) + \arg(Z_B) = \arg(Z_A \cdot Z_B)$

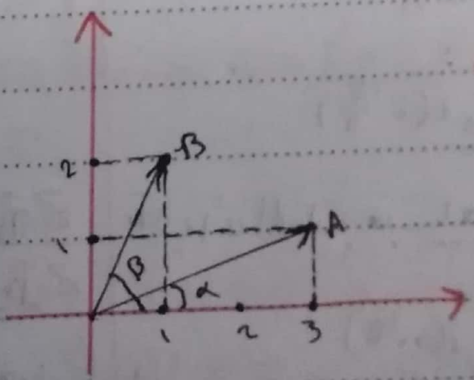
2. $\arg(Z_A) - \arg(Z_B) = \arg\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)$

3. $\arg(Z)^n = n \cdot \arg(Z)$

4. $\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)$

5. $\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$

6. $\arg(\alpha \cdot Z) = \arg(Z)$ ، α موجبة



تمرين

في الشكل المجاور:

1. عين Z_A ، Z_B.

2. احسب $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكل الجبري والأسي

3. احسب $\beta - \alpha$

1. $Z_B = 1 + 2i$ ، $Z_A = 3 + i$

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{3 - i + 6i + 2}{9+1}$$

$$= \frac{5+5i}{10}$$

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

2. $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. $\beta = \arg(Z_B)$

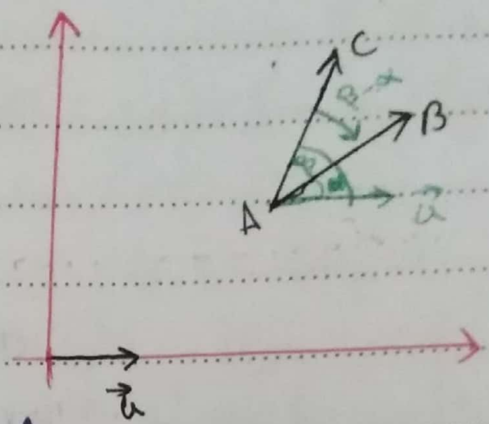
$\alpha = \arg(Z_A)$

$\beta - \alpha = \arg(Z_B) - \arg(Z_A)$

$= \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)$

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}$$

• الزاوية بين شعاعين :



$(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \beta - \alpha$

$= \arg(Z_{\vec{AC}}) - \arg(Z_{\vec{AB}})$

$$(\widehat{\underbrace{\vec{AB}}_{\text{مقام}},\underbrace{\vec{AC}}_{\text{بسط}}}) = \arg\left(\frac{Z_{\vec{AC}}}{Z_{\vec{AB}}}\right)$$

• ملاحظات مهمة :

1 عند حساب النسبة :

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = r.e^{i(a)}$$

$$a = (\underbrace{\vec{CD}}_{\text{مقام}}, \underbrace{\vec{AB}}_{\text{بسط}})$$

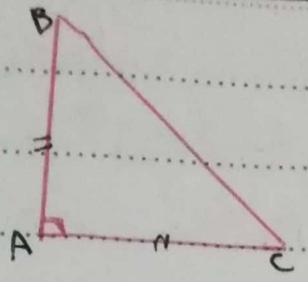
$$r = \frac{AB}{CD}$$

2

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = 1.e^{i(\mp\frac{\pi}{2})}$$

$\vec{AB}$, $\vec{CD}$ متعامدين ومتساويين

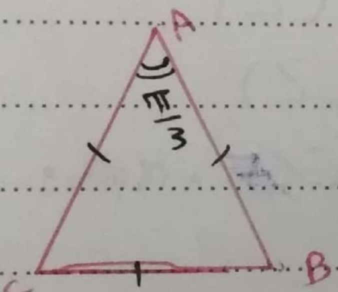
3



$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = 1.e^{i(\mp\frac{\pi}{2})}$$

يعني أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

4



$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = 1.e^{i(\mp\frac{\pi}{3})}$$

يعني أن المثلث متساوي الأضلاع.

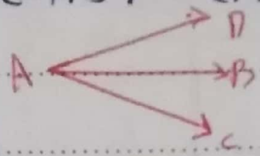
5

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AB}}} = r.e^{i(0,\pi)}$$

A,B,C على استقامة واحدة

6) $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AC}}} = \frac{Z_{\vec{AD}}}{Z_{\vec{AB}}}$

$(\widehat{\vec{AC},\vec{AB}}) = (\widehat{\vec{AB},\vec{AD}})$



إذاً $\vec{AB}$ منصف الزاوية $(\widehat{\vec{AC},\vec{AD}})$

7) إذا كانت $|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

M هي نقاط محور القطعة المستقيمة AB

8) $|Z_M - Z_A| =$ ثابت

M هي دائرة مركزها A نصف قطرها

$R =$ ثابت

مسألة (د.واه 2 أولى)

ثلاث نقاط ممثلة بالأعداد A, B, C

$a = 3+i \quad b = 2+4i \quad c = -i$

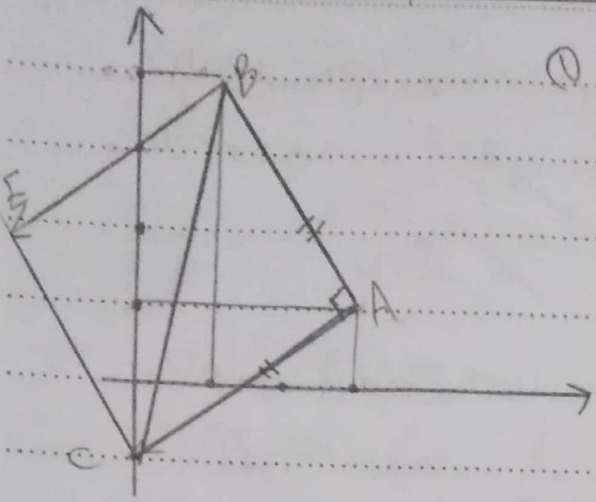
1) وضع النقاط A, B, C

2) أثبت أن ABC قائم ومتساوي الساقين

3) ما العدد e المختلط E التي تجعل

ABEC مربع

(1)



(2)

$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{AC}} = \frac{b-a}{c-a}$

$= \frac{(-2+3i)(-3+2i)}{(-3-2i)(-3+2i)}$

$= \frac{6-4i-9i-6}{9+4} = \frac{-13i}{13} = -i$

$= 1 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

$i = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2})} \qquad -i = 1 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

$r = 1 \Rightarrow AB = AC$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AB \perp AC$

فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

(3)

$\vec{AC} = \vec{BE}$

$c - a = e - b$

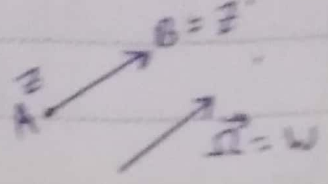
$-i - 2 - i = e - 1 - 4i$

$e = -2 - 2i + 1 + 4i$

$e = -1 + 2i$

• التحويلات الهندسية باستخدام الأعداد المركبة

• الانسحاب:



- B صورة A وفق الانسحاب متجهه $\vec{\Omega}$

$$\vec{AB} = \vec{\Omega}$$

$$z' - z = w$$

$$z' = z + w$$

صورة = النقطة + شعاع

مثال: أوجد العدد e الممثل لـ E صورة $B(1+3i)$ وفق الانسحاب متجهه $2\vec{u} - 5\vec{v}$

$$e = b + (2 - 5i)$$

$$e = 1 + 3i + 2 - 5i$$

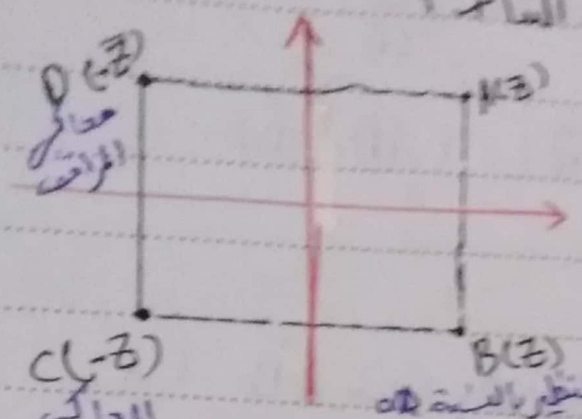
$$e = 3 - 2i$$

مثال: ما التحويل الممثل بالعلاقة $c = b - 2 - 3i$

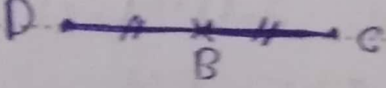
صورة B وفق الانسحاب متجهه

$$\vec{\Omega} = -2\vec{u} - 3\vec{v}$$

• التناظر:

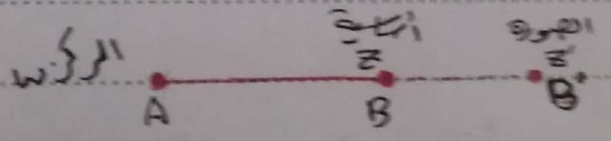


- C نظيرة D بالنسبة لـ B فإن



$$b = \frac{d + c}{2}$$

• التحاكي:



- B' صورة B وفق تحاكي مركزه A نسبته K

$$= K = \left(\frac{AB'}{AB}\right) = \frac{z' - w}{z - w}$$

$$z' - w = K(z - w)$$

صورة - مركز = K(النقطة - مركز)

صورة مركز نسبة الأصل المركز

تمرين: أوجد العدد المثل لـ E
صورة $C(1+2i)$ وفق تحاكي
مركزه $B(2-i)$ ونسبة $k=\frac{1}{3}$

E صورة C وفق تحاكي مركزه B ونسبة

$$k=\frac{1}{3}$$

$$e-b=k(c-b)$$

$$e-2+i=\frac{1}{3}(1+2i-2+i)$$

$$e-2+i=\frac{1}{3}(-1+3i)$$

$$e-2+i=\frac{-1}{3}+i$$

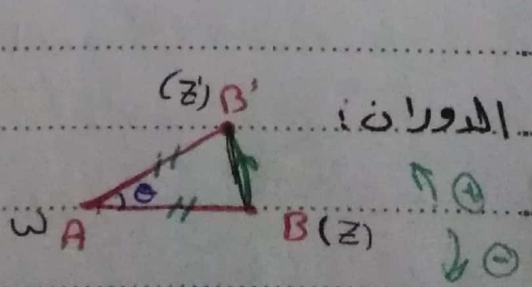
$$e=\frac{5}{3}$$

تمرين: ما التحويل المثل بالعلاقة:

$$b-1-i=3(c-1-i)$$

B صورة C وفق تحاكي
مركزه $(1+i)$
نسبة $k=3$

• الدوران:



B' صورة B وفق دوران مباشر
مركزه A زاوية θ

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB'}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}=1\cdot e^{i(\theta)}$$

$$\frac{z'-w}{z-w}=e^{i(\theta)}$$

$$z'-w=e^{i(\theta)}(z-w)$$

صورة - مركز = $e^{i(\theta)}$ (السابقة - مركز)

تمرين: $a=1+i$ $b=2-2i$
أوجد العدد C صورة A وفق دوران
مركزه B زاوية $\frac{\pi}{3}$

C صورة A وفق دوران مركزه B
زاوية $\frac{\pi}{3}$

$$c-b=e^{i(\frac{\pi}{3})}(a-b)$$

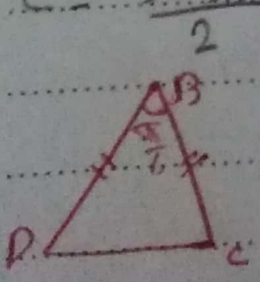
$$c-2+2i=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})(1+i-2+2i)$$

$$c-2+2i=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-1+3i)$$

$$c-2+2i=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

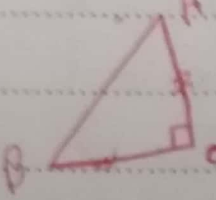
$$c=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}+2-2i$$

$$c=\frac{3-3\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$



ملاحظة:
① الشيء الدال على الدوران
هو وجود مثلث متساوي الساقين.

② الرأس الثالث هو مركز الدوران
③ زاوية الرأس هي زاوية الدوران
④ زاويتا القاعدة احدهما موجبة والأخرى
حسب الدوران دوماً مباشر او غير مباشر
من $\hat{BDC}$ مباشر
C صورة D وفق دوران مباشر مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{6}$



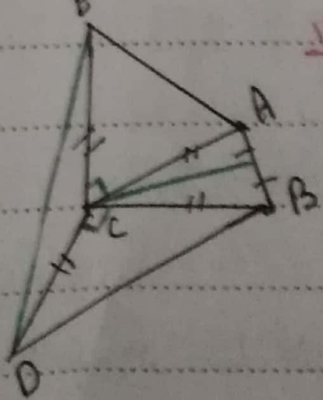
مثال ②

من $\hat{CBA}$ غير مباشر
A صورة B وفق دوران غير مباشر مركزه C زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$a-c=e^{i(-\frac{\pi}{2})}(b-c)$

$a-c=-i(b-c)$

مسألة



في المعلم $(c, \vec{u}, \vec{v})$
a, b الأعداد المركبة الممثلة لـ A B
① أوجد e, d بدلالة a, b
② أوجد m العدد الممثل لـ M منتصف AB بدلالة a, b
③ أثبت أن $ED \perp CM$ وأن $ED = 2CM$
④ عين c م ا م للنقاط (C,3) (D,3) (E,2) (A,1) (B,1) احسب $\frac{a}{b}$ واستنتج قياس $\hat{C}$

في المعلم $(c, \vec{u}, \vec{v}) \Leftarrow c = 0$
المثلث CAE مباشر
E صورة A وفق دوران مباشر مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$e-c=e^{i(\frac{\pi}{2})}(a-c)$

$e-0=i(a-0)$

$e=ia$

المثلث CBD غير مباشر
D صورة B وفق دوران غير مباشر مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$d-c=e^{i(-\frac{\pi}{2})}(b-c)$

$d-0=-i(b-0)$

$d=-ib$

$$\frac{a}{b} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

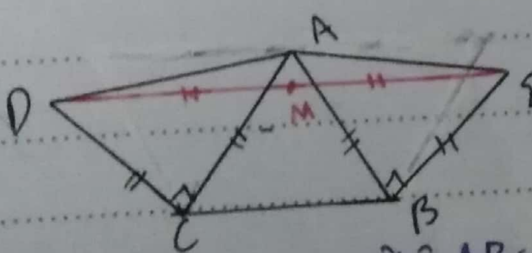
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\hat{C} = 45$$

مسألة تعز



ABC مثلث

ACD , ABE قائمان متساويا الساقين

M منتصف ED

1. احسب بدلالة a , b , c العددان e , d
2. احسب العدد m الممثل لـ M منتصف ED
3. بين كيف تتحول M عندما تتحرك A من المستوي.

(2)

$$m = \frac{a+b}{2}$$

(3)

$$\frac{Z_{\overrightarrow{DE}}}{Z_{\overrightarrow{CM}}} = \frac{e-d}{m-c} = \frac{ia+ib}{\frac{a+b}{2} - 0} = \frac{i(a+b)2}{a+b} = 2i = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$r = 2 \Rightarrow \frac{DE}{CM} = 2 \Rightarrow DE = 2CM$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow DE \perp CM$$

(4)

$$c = \frac{a+b+2e+3d}{1+1+2+3}$$

$$0 = \frac{a+b+2ia-3ib}{7}$$

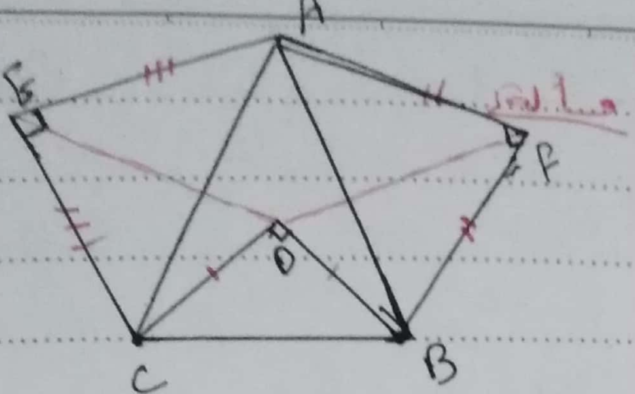
$$a+b+2ia-3ib = 0$$

$$a+2ia = -b+3ib$$

$$a(1+2i) = b(-1+3i)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-1+2i+3i+6}{1+4}$$



المثلثان AEC ، BDC ، AFB

قائمة متساوية الساقين

① أوجد f ، d ، e بدلالة a, b, c

② أوجد $Z_{\vec{AF}}$ ، $Z_{\vec{ED}}$

③ ما نوع الرباعي $AFDE$

① المثلث FAB مباشر

B صورة A وفق دوران مباشر مركزه F

زاويته $\frac{\pi}{2}$

$b - f = i(a - f)$

$b - f = ia - if$

$b - ia = f - if$

$b - ia = f(1 - i)$

$f = \frac{b - ia}{1 - i}$

DCB مباشر

B صورة C وفق دوران مباشر مركزه c

زاويته $\frac{\pi}{2}$

المثلث BAE غير مباشر

E صورة A وفق الدوران غير المباشر مركزه B

زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$e - b = -i(a - b)$

$e = b - ia + ib$

المثلث CAD مباشر

D صورة A وفق دوران مباشر مركزه B

زاويته $\frac{\pi}{2}$

$d - c = i(a - c)$

$d - c = ia - ic$

$d = c + ia - ic$

②

$m = \frac{e + d}{2}$

$m = \frac{b - ia + ib + c + ia - ic}{2}$

$m = \frac{b + c + ib - ic}{2}$

M تبقى ثابتة لأن العدد m لا يتعلق بالعدد (a).

$b - d = i(c - d)$

$b - ic = d - id$

$d = \frac{b - ic}{1 - i}$

$E \to A$

A صورة E بدوران مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$a - e = i(c - e)$

$e = \frac{a - ic}{1 - i}$

$Z_{\vec{AF}} = f - a$

$= \frac{b - ia}{1 - i} - \frac{a}{1}$

$= \frac{b - ia - a + ia}{1 - i}$

$Z_{\vec{AF}} = \frac{b - a}{1 - i}$

$Z_{\vec{ED}} = d - e$

$= \frac{b - ic - a + ic}{1 - i}$

$Z_{\vec{ED}} = \frac{b - a}{1 - i}$

$\vec{AF} = \vec{ED}$

③ الشكل متوازي أضلاع