مقــرر الوحـــــــدة الثانيــة
التطبيقـــات

<u>تعريف:</u>

التطبيق من س ← ص هو علاقة تربط كل عنصر من المجال س بعنصر وحيد من المجال ص.

<u>مكونات التطبيق:</u>

1- المجال س.

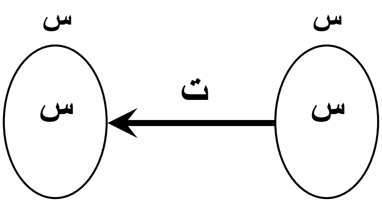
2- المجال المقابل ص.

3- قاعدة التطبيق: هي علاقة تربط كل عنصر من المجال بصورة من المجال المقابل

ويعبر عنها بأسلوبين:

(1) س $\xrightarrow{\text{ت}}$ ت (س)

(2) ت (س) = ص



<u>مدى التطبيق:</u> **هو مجموعة صور عناصر المجال.**

∴ المدى ⊂ ص

<u>مثــال(1):</u> **ر: ط ← ط بحيث ر (س)= س^2+ 1 المطلوب:**

أ) أوجد: ر (3) ، ر (5)، ر (6) ، ر (هـ(، ر (هـ + 1)

ب) أوجد: ر ({0 ، 1})

الحل:

(أ) ر (س) = س^2+ 1 ، ر (3) = $(3)^2$ + 1 = 9 + 1 = 10

ر (5) = $(5)^2$+1 = 25 + 1 = 26 ، ر (6) = $(6)^2$+1 = 36 + 1 = 27

، ر (هـ + 1) = (هـ + 1)^2 + 1

= هـ^2 + 2هـ + 1 + 1 = هـ^2 +2هـ + 2

(ب)

ر $(0) = (0)^2 + 1 = 1$

ر $(1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$\Leftarrow$ ر $(\{1،1\}) = \{1،2\}$

مثــال(2): **ليكن التطبيق ر: ص ← ص قاعدته معرّفة كما يلي:**

1 إذا كان س عدداً زوجياً

0 إذا كان س عدداً فردياً

[أ] ما هي صور كل من الأعداد: −2، −1 ، 0، 1، 2، 3، 4 في هذا التطبيق.

[ب] ما هو مدى التطبيق.

الحل:

[أ] ر $(-2) = 1$ ، ر $(-1) = 0$

ر (صفر)$= 1$ ، ر $(1) = 0$

ر $(2) = 1$ ، ر $(4) = 1$

[ب] المـدى = {0 ، 1}

مثال توضيحي: **س = {1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9}**

ص = {2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، 12 ،14}

القاعدة: **ر (س) = س + 1**

المطلوب:

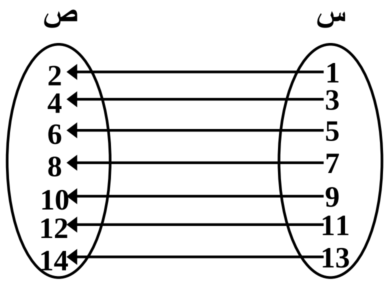
1: مثل التطبيق سهمياً

2: اكتب بيان التطبيق كأزواج مرتبة.

3: عيّن مدى التطبيق: هل المدى = المجال المقابل؟

الحل:

[1]



ر (1) = 1 + 1 = 2

ر (3) = 1 + 3 = 4

ر (5) = 1 + 5 = 6

ر (7) = 1 + 7 = 8

ر (9) = 1 + 9 = 10

[2] بيان التطبيق ن = {(1، 2) ، (3 ، 4) ، (5 ، 6) ، (7 ، 8) ، (9 ، 10)}

[3] المدى = {2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10} ≠ المجال المقابل ص.

مثـال توضيحي: لتكن س = {1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5} ، ص = س

القاعدة معطاة بالجدول التالي

س	1	2	3	4	5
ر (س)	4	2	1	2	4

المطلوب:

أ) ارسم مخططاً سهمياً يمثل هذا التطبيق.

ب) ما هي صورة العدد 3 في هذا التطبيق.

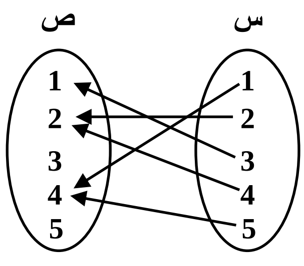
جـ) هل مدى هذا التطبيق يساوي مجاله المقابل.

د) هل هناك عنصر في ص صورة لأكثر من عنصر في س.

هـ) اكتب البيان كأزواج مرتبة.

الحل:

أ) ⇐



ب) ر (3) = 1

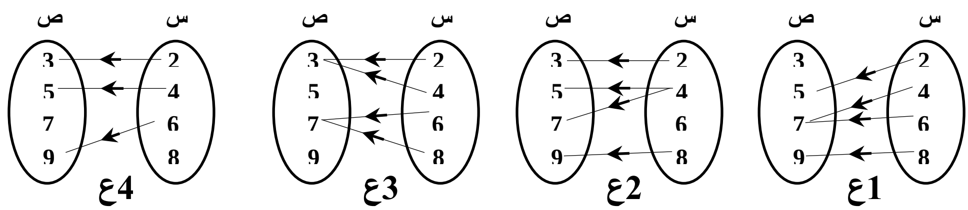
جـ) المدى = {1 ، 2 ، 4} ≠ ص

د) الجواب: نعم 2 صورة للعنصرين 2 ، 4 وكذلك 4 ∈ ص مرتبط بالعنصرين 1 ، 5 ∴ هو صورة لهما.

هـ) البيان ن = { (1 ، 4) ، (2 ، 2) ، (3 ، 1) ، (4 ، 2) ، (5 ، 4) }

إجابة تمارين ومسائل (1/2)

[1] لتكن س = {2 ، 4 ، 6 ، 8} ، ص = {3 ، 5 ، 7 ، 9} بين أياً من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً:



الحـــل:

ع$_1$: يمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من المجال س انطلق منه سهم واحد أي كل عنصر مرتبط والارتباط وحيد.

ع$_2$: لا تمثل تطبيقاً لأكثر من سبب:

(1) 6 $\in$ س لم ينطلق منه سهم (غير مرتبط).

(2) 4 $\in$ س ارتبط لكن الارتباط غير وحيد. إذ انطلق منه سهمين.

ع$_3$: تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من س مرتبط بعنصر واحد فقط من ص.

ع$_4$: لا تمثل تطبيقاً لأن 8 $\in$ س غير مرتبط.

---

[2] إذا كانت العلاقة ع = {(−2 ، 0)، (0 ، 1) ، (1 ، 3) ، (2، −1) ، (3 ، 1)} تمثل تطبيقاً فحدد مجال ومدى هذا التطبيق.

الحـــل:

المجال س = {−2 ، 0 ، 1 ، 2 ، 3}

المدى = {0 ، 1 ، 3 ، −1}

[3] ليكن ت تطبيقاً من س إلى ص حيث س = {أ ، ب ، جـ } ، ص = {0 ، 4 ، 5}

، ت (أ) = 4 ، ت (ب) = 0 ، ت (جـ) = 5

المطلوب:

أ) مثّل التطبيق كأزواج مرتبة.

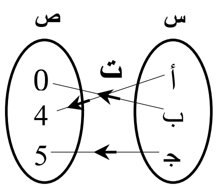
ب) مثّله كمخطط سهمي.

جـ) حدِّد مجاله ومداه.

<u>الحــل:</u>

أ) {(أ ، 4) ، (ب ، 0) ، (جـ ، 5)}

ب)

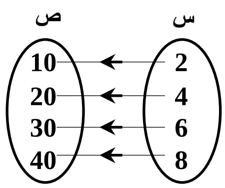


جـ) المجال س = {أ ، ب ، جـ}

المدى = {0 ، 4 ، 5} = ص

---

[4] لتكن س = {2 ، 4 ، 6 ، 8} وعرّفِنا العلاقة ع من س إلى ص بالمخطط السهمي كما في الشكل:



المطلوب:

أ) اثبت أن العلاقة ع تطبيقاً.

ب) حِّدد قاعدة هذا التطبيق.

جـ) حِّدد عناصر مداه.

د) هل مدى هذا التطبيق يساوي مجاله المقابل.

<u>الحــل:</u>

أ) ع تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر من س لهُ صورة واحدة في ص.

ب)لاحظ ت (2) = 10 = 2 × 5

ت (4) = 20 = 4 × 5

∴ كل عنصر من س ارتبط بعنصر من ص

ت (6) = 30 = 6 × 5 يكبره (5 مرات)

ت (8) = 40 = 8 × 5

∴ نستنتج أن القاعدة ت (س) = 5س

جـ(المدى = {10 ، 20 ، 30 ، 40} = ص

د) المدى = ص

---

[5] ليكن ت: ط ← ط تطبيقاً قاعدته ت (س) = 2س + 3

أ) أوجد ت (2) ، ت (4) ، ت (6) ، ت (8)

ب) حدد مدى هذا التطبيق.

<u>الحــل:</u>

لدينا ت (س) = 2س + 3

أ) * ت (2) = 2 × 2 + 3 = 4 + 3 = 7

* ت (4) = 2 × 4 + 3 = 8 + 3 = 11

* ت (6) = 2 × 6 + 3 =12+ 3 = 15

* ت (8) = 2 × 8 + 3 = 16 + 3= 9

ب) * ت (0) = 0 + 3 = 3

* ت (1) = 2 × 1 + 3 = 5

* ت (2) = 2 × 2 + 3 = 7 ∴ المدى = {3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13، ...}

[6] إذا كانت ع علاقة معرفة بالقاعدة ق (س) = س + 1 فبّين أياً من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً؟

أ) ع: ط ← ط

ب) ع : ص ← ط

جـ(ع: ط ← ص

د) ع: ص ← ص

الحــل:

أ) ∀س∈ ط فإن س+1∈ ط ⇐ ق (س)= س + 1 يمثل قاعدة لتطبيق من ط ← ط

ب) ليس قاعدة لتطبيق من ص ← ط لنقض الشيء يكفي مثال:

س = −5 ∈ ص ⇐ ق (−5) = −5 + 1 = −4 ∌ ط

جـ(∀ س ∈ ط ⇐ س ∈ ص ⇐ س +1 ∈ ص ⇐ ق (س) ∈ ص

∴ نعم تمثل قاعدة تطبيق من ط ← ص

د) ∀ س ∈ ص ⇐ س + 1 ∈ ص ⇐ ق (س) ∈ ص

∴ تمثل قاعدة تطبيق.

---

[7] ليكن التطبيق ق: س ← ص مُعرِّفاً بالقاعدة ق (س) = 2 س

حيث س = {2 ، 3 ، 5 ، 7}

ص = {2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، 12 ، 14 ، 16}

حدِّد مدى التطبيق ثم مثِّل هذا التطبيق كأزواجِ مرتبة.

الحــل:

المدى هو مجموعة صور س وفق القاعدة $\boxed{ق\ (س)}$ = $\boxed{2\ س}$

*** ق (2) = 2 × 2 = 4**

* ق (3) = 2 × 3 = 6

* ق (5) = 2 × 5 = 10

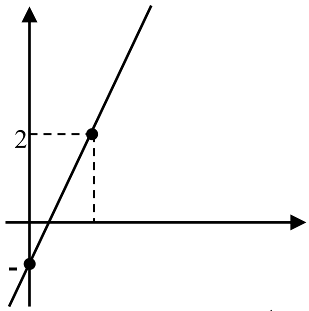
∴ المدى = {4 ، 6 ، 10 ، 14}

* ق (7) = 2 × 7 = 14

∴ بيان التطبيق ن = {(2 ، 4) ، (3 ، 6) ، (5 ، 10) ، (7 ، 14)}

---

[8] إذا كانـت ت تطبيقـاً مـن ح ← ح معرفـاً بالقاعـدة ت (س) = 3س − 1 مثـل هـذا التطبيق بيانياً.



الحـل:

ص = 3س − 1 دالة من الدرجة الأولى

∴ تمثل بيانياً بمستقيم.

لرسمه نختار نقطتين سهلتين.

مثلاً: س = 0 ⇐ ت (0) = 3 × 0 − 1 = −1 (0،−1)

س = 1 ⇐ ت (1) =3×1−1=1−3= 2 (1 ، 2)

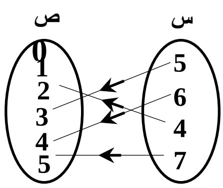
نرتبها بجدول:

س	0	1
ص	1−	2

---

[9] التطبيق ت: س ← ص معرف بالقاعدة ت (س) = س − 2 حيث:

س = {5 ، 6 ،4 ،7} ، ص = {0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5} كـون جـدولاً لهـذا التطبيق ثم ارسم مخططه السهمي.



المخطط

الحـل:

حسب القاعدة

ت (س) = س− 2 ⇐ ت (5) = 5−2 = 3

ت (6) = 6 − 2 = 4

ت (4) = 4 − 2 = 2

ت (7) = 7 − 2 = 5

س	5	6	7	4
ص	3	4	2	5

الجدول

---

[10] لتكن س={−2، −1، 0 ، 2} ، ص = {−3،2،0،1}، والتطبيق م: س ← ص معرفاً بالقاعدة م (س) = $س^2 - 1$ حدد مدى التطبيق ثم مثله جدولياً.

<u>الحـــل:</u>

المدى هو مجموعة صور س وفق القاعدة $\boxed{م (س) = س^2 - 1}$

∴ م (−2) = $(-2)^2 - 1$ = 4 − 1 = 3

م (−1) = $(-1)^2 - 1$ = 1 − 1 = 0

م (0) = $(0)^2 - 1$ = 0 − 1 = −1

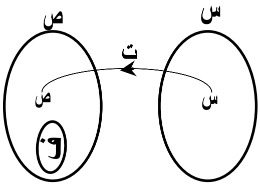
م (1) = $(1)^2 - 1$ = 1 − 1 = 0

م (2) = $(2)^2 - 1$ = 4 − 1 = 3

س	−2	−1	0	1	2
ص	3	0	−1	0	3

الصورة العكسية للتطبيق
معكوس التطبيق

ليكن التطبيق ت: س ← ص اعكس الأسهم تحصل على علاقة: ب$^{-1}$: ص←س تتمتع بالخواص التالية:



[1] ∀ ص ∈ ص فإن: ب$^{-1}$(ص) = {س : س ∈ س}

وهُنا قد تكون المجموعة خالية أي لا توجد صورة عكسية. وقد تكون مؤلفه من عنصر واحد أو أكثر.

[2] إذا كانت ف ⊂ ص فإن ب$^{-1}$(ف) ⊂ س

[3] الصورة العكسية لتطبيق هي علاقة قد تكون تطبيقاً وقد لا تكون تطبيقاً.

مثـال: **هـ : س← ص حيث س = {2 ، 4 ، 6}**

ص = {1 ، 2 ، 3} المعرّف بالقاعدة.

ر (س) = $\frac{س}{2}$

[أ] مثِّل التطبيق سهمياً.

[ب] أوجد هـ$^{-1}$(1) ، هـ$^{-1}$({3 ، 2})

[جـ] هل معكوس التطبق تطبيقاً.

[د] أوجد قاعدة التطبيق العكسي.

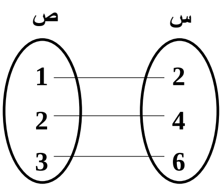
[هـ] أوجد وفق هذه القاعدة الصورة العكسية للعنصر 3 ∈ ص

الحل:

[أ] هـ (2) = $\frac{2}{2}$ = 1

هـ (4) = $\frac{4}{2}$ = 2

هـ (6) = $\frac{6}{2}$ = 3



[ب] $هـ^{-1}(1) = 2$

$هـ^{-1}(\{3 ، 2\})$، = {4 ، 6}

[جـ] لوعكسنا الأسهم لوجدنا كل عنصر انعكس منه سهم وحيد. ∴ $هـ^{-1}$ تطبيق.

[د] $\frac{ص}{1} = \frac{س}{2}$ احصل على س ثم بدِّل المتغيرات

س = 2ص بدل المتغيرات:

⇐ ص = 2س ∴ $هـ^{-1}$ (س) = 2س

[هـ] $هـ^{-1}(3) = 2 \times 3 = 6$

مثـال توضيحي: **ليكن التطبيق ر: س ← ص يحث أن:**

س = {1 ، 2 ، 3 ، 4} ، ص = {أ ، ب ، جـ ، د}

والقاعدة ر (س) =
- **أ إذا كان العدد زوجي.**
- **د إذا كان العدد فردي.**

المطلوب:

[1] مثل التطبيق سهمياً.

[2] إذا عكسنا الاسهم هل يصبح المعكوس تطبيقاً. اذكر السبب وإذا كان هناك أكثر من سبب اذكره وماذا تسمي المعكوس عندئذٍ.

[3] أوجد $ر^{-1}$ (ب)

[4] أوجد $ر^{-1}$ ({ب ، جـ })

[5] أوجد $ر^{-1}$ ({أ ، ب})

الحل:

[1] ر (1) = د

ر (2) = أ

ر (3) = د

ر (4) = أ

[2] إذا عكسنا الاسهم لم يَعُد تطبيقاً للأسباب التالية:

الأول: العنصر ب ∈ ص لم ينعكس منه أي سهم.

∴ غير مرتبط وهذاينافي تعريف التطبيق.

الثاني: أ مرتبط لكن الارتباط غير وحيد.

(سينعكس منهُ سهمين) وهذا ينافي تعريف التطبيق.

∴ المعكوس يُدعى علاقة عكسية.

[3] ر$^{-1}$ (ب) = ϕ

[4] ر$^{-1}$ ({ب ، جـ}) = ϕ

[5] ر$^{-1}$ ({أ ، ب}) = {2 − 4} ⊂ س

مثـال: إذا كان التطبيق ر: ح⟵ ح معرفاً بالقاعدة ر (س) = 1 + 2س + س^2

فما الصورة العكسية للعنصر 36 ؟ وهل لهذا التطبيق معكوس.

الحل: معك ص = 36 نريد س من المجال

لدينا ص = 1 + 2س + س^2

ضع ص = 36 ⇐ 36 = 1 + 2 س + س^2

صفّرها س^2+ 2س + 1 − 36 = 0

س^2 + 2س − 35 = 0

(س + 7) (س − 5) = 0

إمّا س + 7 = 0 ⇐ س = −7

أو س − 5 = 0 ⇐ س = 5

∴ ر$^{-1}$ (36) = {5 ، −7}

∴ بما أن 36 إنعكس منه سهمين.

∴ التطبيق ليس له معكوس.

إجابة تمارين ومسائل (2/2)

[1] ليكن ت: س⟵ ص تطبيقاً معرفاً بالمخطط السهمي الموضح بالشكل والمطلوب:

1) أوجد ب$^{-1}$ (أ) ، ب$^{-1}$ (ب) ، ب$^{-1}$(جـ)

2) أوجد ب$^{-1}$ ({ب ، جـ })

3) بيِّن أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً.

الحل:

(1) ب$^{-1}$ (أ) = { } = ϕ لا توجد صورة عكسية.

ب$^{-1}$ (ب) = {2 ، 3 ، 5}

ب$^{-1}$ (جـ) = {7}

(2) ب$^{-1}$ ({ب ، جـ }) = {2 ، 3 ، 5 ، 7}

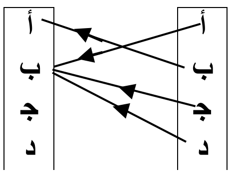
(3) ب$^{-1}$ ليس تطبيقاً لأكثر من سبب:

الأول: أ لم ينعكس منه أي سهم.

الثاني: ب انعكس منها أكثر من سهم. ∴ خالف تعريف التطبيق.

---

[2] ليكن ق تطبيقاً ق: س← س حيث س = {أ ، ب ، جـ ، د} معرفاً بالمخطط السهمي المبيّن بالشكل:



المطلوب: (1) أوجد ق$^{-1}$(ب) ، ق$^{-1}$(جـ)

(2) مثّل التطبيق كأزواج مرتبة.

(3) أوجد معكوس التطبيق.

(4) هل معكوس التطبيق ق تطبيقاً؟ ولماذا؟

الحل: (1) ق$^{-1}$(ب) = {أ ، ب ، جـ } ، ق$^{-1}$(جـ) = { } = ϕ

(2) بيان التطبيق ن = {(أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (جـ ، ب) ، (د ، ب)}

(3) ق$^{-1}$= {(ب ، أ) ، (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ، (ب ، د)}

(4) ق$^{-1}$ ليس تطبيقاً لأكثر من سبب:

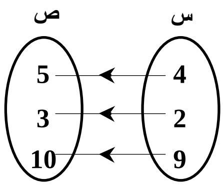
الأول: ب انعكس منها أكثر من سهم.

الثاني: جـ ، د لم ينعكس منهم أي سهم.

[3] إذا كان التطبيق هـ : س ← ص معرفاً بالقاعدة:

هـ(س) = س + 1 حيث س = {4 ، 2 ، 9} ، ص = {5 ، 3 ، 10}

فاثبت أن معكوس التطبيق هـ تطبيقاً.



الحل: هـ(س) = س + 1

هـ(4) = 4 + 1 = 5

هـ(2) = 2 + 1 = 3

هـ(9) = 9 + 1 = 10

اعكس الاسهم فستجد أن كل عنصر من ص انعكس منه سهماً وحيداً. ∴ هـ$^{-1}$تطبيقاً.

---

[4] ليكن ب$^{-1}$: ط/ {0} ← ط معرفاً بالقاعدة ب$^{-}$ (س) = 3 س − 1

المطلوب:

أ) أوجد ب$^{-1}$(1) ، ب$^{-1}$(5) ، ب$^{-1}$(8)

ب) بين أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً.

الحل:

أ) لإيجاد الصورة العكسية أُفضل إيجاد العلاقة العكسية.

معنا: ص = 3س − 1 نحاول الحصول على س بدلالة ص (تكون هي العلاقة العكسية).

∴ ص + 1 = 3س ⇐ $\boxed{\text{س} = \frac{\text{ص}+1}{3}}$

لإيجاد ب$^{-1}$(1) ضع ص= 1 في العلاقة ⇐ س = $\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$ $\notin$ ط/ {0}

∴ ب$^{-1}$ (1) = ϕ

لإيجاد (5) ضع ص = 5 في العلاقة ⇐ س = $\frac{1+5}{3}=\frac{6}{3}$ = 2 $\in$ ط/ {0}

∴ ب$^{-1}$ (5) = {2}

لإيجاد ب$^{-1}$ (8) ضع ص = 8 ⇐ س = $\frac{1+8}{3} = \frac{9}{3}$ =3 ∴ ب$^{-1}$(8)={3}

ب: ∵ ب$^{-1}$ = ϕ سبب كافٍ لأقوال أن ب$^{-1}$ ليس تطبيقاً.

---

[5] ليكن التطبيق ت: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) س + 3

أوجد: أ) ب$^{-1}$(7) ، ب$^{-1}$(3) ، ب$^{-1}$(−2)

ب) ب$^{-1}$({س: س ∈ ح − 5 ≤ س ≤ 12 })

الحل:

أ) افضل إيجاد العلاقة العكسية ص = س + 3 ⇐ س = س − 3

∴ لإيجاد ب$^{-1}$(7) ضع ص = 7 ⇐ س = 7 − 3 = 4 ∴ ب$^{-1}$(7) = {4}

لإيجاد ب$^{-1}$(3) ضع ص = 3 ⇐ س = 3 − 3 = 0 ⇐ ب$^{-1}$(7) = {0}

لإيجاد ب$^{-1}$(−2) ضع ص = −2 ⇐ س = −2 −3 = −5 ⇐ ب$^{-1}$(−2) = {−5}

ب) لإيجاد ب$^{-1}$([−5 ، 12]) نوجد ب$^{-1}$(−5) ، ب$^{-1}$(12)

لإيجاد ب$^{-1}$(−5) ضع ص = −5 ⇐ س = −5 − 3 = −8

لإيجاد ب$^{-1}$(12) ضع ص = 12 ⇐ س = 12 − 3 = 9

∴ ب$^{-1}$({−5 ، 12}) = {−8 ، 9} ⊂ ح #

---

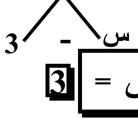
[6] ليكن التطبيق د: ح ← ح معرفاً بالقاعدة د (س) = س^2 + 4س + 7

والمطلوب: (1) د$^{-1}$(8) (2) اثبت أن معكوس التطبيق د ليس تطبيقاً.

الحل:

(1) ضع ص = 28 وأحصل على س من ص = س^2 + 4س + 7

28 = س^2 + 4س + 7 صفِّرها س^2 + 4س + 7 − 28 = 0



س^2 + 4س − 21 = 0

(س+7) (س − 3) = 0

أما س + 7 = 0 ⇐ $\boxed{\text{س} = -7}$ أو س − 3 = 0 ⇐ $\boxed{\text{س} = 3}$

∴ د$^{-1}$ (28) = {3 ، −7}

(2) ∵ 28 انعكس منه سهمان. ∴ د$^{-1}$ ليس تطبيقاً.

---

[7] إذا كان التطبيق هـ: ط ← ط معرفاً بالقاعدة هـ (س) = 2س + 1

أوجد: أ) $هـ^{-1}(3)$ ، $هـ^{-1}(6)$ ، $هـ^{-1}(0)$

ب) $هـ^{-1}$ ({ص: ص ∈ ط ، ص ≤ 5 })

جـ) $هـ^{-1}$ ({ص: ص ∈ ط ، 3 ≤ ص ≤ 9})

د) اثبت أن معكوس التطبيق هـ ليس تطبيقاً.

الحل:

أ) ص = 2س + 1 أفضل ايجاد س بدلالة ص

$$\therefore \text{ص} - 1 = 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ص} - 1}{2}$$

لإيجاد $هـ^{-1}(3)$ ضع ص = 3 ⇐ س = $\frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$\therefore هـ^{-1}(3) = \{1\}$$

لإيجاد $هـ^{-1}$ (6) ضع ص = 6 ⇐ س = $\frac{6-1}{2} = \frac{5}{2} \notin$ ط

$$\therefore هـ^{-1}(6) = \phi$$

لإيجاد $هـ^{-1}(0)$ ضع ص = 0 ⇐ س = $\frac{0-1}{2} = \frac{-1}{2} \notin$ ط

$$\therefore هـ^{-1}(0) = \phi$$

ب) {ص : ص ∈ ط، ص ≤ 5} = {0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5}

لإيجاد $هـ^{-1}(1)$ ضع ص = 1 ⇐ س = $\frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$$\therefore هـ^{-1}(1) = \{0\}$$

لإيجاد $هـ^{-1}(2)$ ضع ص = 2 ⇐ س = $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \notin$ ط

$\therefore$ هـ$^{-1}(2) = \phi$

لإيجاد هـ$^{-1}(4)$ ضع ص = 4 ⇐ س = $\frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} \notin$ ط

$\therefore$ هـ$^{-1}(4) = \phi$

لإيجاد هـ$^{-1}(5)$ ضع ص = 5 ⇐ س = $\frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} \notin$ ط

$\therefore$ هـ$^{-1}(5) = \phi$

بقية العناصر حُسبت من (أ)

$\therefore$ هـ$^{-1}$({ص ، ص $\in$ ط} ص ≤ 5) = {0 ، 2 ، 1}

جـ({ص : ص $\in$ ط ، $3 \leq$ ص ≤ 9} = {3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9}

عوّض عن ص في نفس القاعدة س = $\frac{\text{ص} - 1}{2}$

طبعاً وجدناً هـ$^{-1}(3)$ = {1} ، هـ$^{-1}(4) = \phi$ ، هـ$^{-1}(5)$ = {2} وهكذا نجد:

هـ$^{-1}$ ({3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9}) = {1 ، 2 ، 3 ، 4}

د) هناك عناصر من ط ليس لها معكوس مثلاً هـ$^{-1}(4) = \phi$

$\therefore$هـ$^{-1}$ ليس تطبيقاً.

أنـــــــواع التطبيقات

(1) التطبيق الثابت:

تعريف: **يسمى التطبيق ت: س ← ص تطبيقاً ثابتاً إذا ارتبطت جميع عناصر مجال هذا التطبيق بعنصر واحد فقط من مجاله المقابل:**

∀س ∈ س ⇐ ت (س) = أ = ثابت.

مثال: ت: س ← ص موضح بالشكل المقابل.

لاحظ: ت (5) = ب

ت (4) = ب ∴ ثبتت الصورة.

ت (6) = 6 ∴ ت تطبيق ثابت.

(2) التطبيق المطابق:

تعريف: **يسمى التطبيق ت: س ← ص تطبيقاً مطابقاً (محايداً) إذا ارتبط كل عنصر بنفسه.**

أي ∀س ∈ س فإن ت (س) = س

مثال: ت: ح ← ح قاعدته ت (س) = س هل ت تطبيقاً مطابقاً.

الحل: ت (1) = 1

ت (2) = 2

ت (3) = 3 لاحظ كل عنصر ارتبط بنفسه. ∴ ت تطبيقاً مطابقاً.

(3) التطبيق الغامر (الشامل):

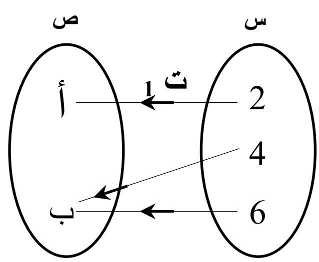
تعريف: **يسمى التطبيق ت: س ← ص غامراً (شاملاً) إذا كان كل عنصر من مجاله المقابل صورة لعنصر أو أكثر من مجاله ويعبر عنه رمزياً:**

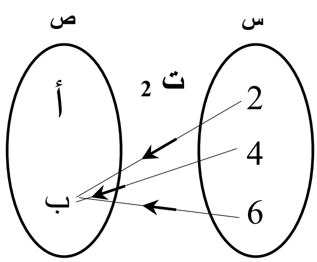
∀ص ∈ ص ∃س ∈ س بحيث ت (س) = ص.

ملاحظة هامة: **كيف نثبت أن التطبيق غامر، إذا كان عدد عناصر مجاله أو مجاله المقابل كبير جداً؟**

الجواب: **نحسب مدى التطبيق ونقارنه مع المجال المقابل فإذا كان المدى = المجال المقابل قلنا التطبيق غامر.**

مثال توضيحي: **أيٌ من التطبيقين التاليين يُمثل تطبيقاً غامراً ولماذا؟**





الجواب:

أولاً: مدى $ت_1$ = {أ ، ب} ، مجاله المقابل ص = {أ ، ب} لاحظ المدى = المجال المقابل

∴ $ت_1$ غامر.

ثانياً: مدى $ت_2$ = {ب} ، مجاله المقابل ص = {أ ، ب}

∴ المدى ≠ المجال المقابل.

∴ $ت_2$ ليس غامراً.

(4) التطبيق المتباين (الأحُادي):

تعريف: **يسمى التطبيق ت : س ← ص تطبيقاً متبايناً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل صورة لعنصر على الأكثر من المجال.**

طرق البرهان: **أ) البرهان المباشر.**

ب) البرهان المعاكس.

أ) البرهان المباشر: **∀$س_1$ ، $س_2$ ∈ س إذا كان $س_1$ ≠ $س_2$ فإن: د ($س_1$) ≠ د ($س_2$)**

ب) البرهان المعاكس: **∀$س_1$، $س_2$∈ س إذا كان ت ($س_1$)= ت ($س_2$) ⇐ $س_1$= $س_2$**

مثال توضيحي: **ت: ح ←ح حيث ت (س) = 2س + 1أثبت أن ت متباين.**

طريقة ثانية بالبرهان المعاكس	طريقة أولى بالبرهان المباشر $\forall$س$_1$، س$_2$ $\in$ ح
لنفرض ت (س$_1$) = ت (س$_2$)	**لنفرض س$_1$ $\neq$ س$_2$ أضرب بـ2**
$\Leftarrow$ 2س$_1$+ × = 2 س$_2$ + ×	**$\Leftarrow$ 2س$_1$ $\neq$ 2س$_2$ أضف 1**
$\Leftarrow$ 2س$_1$=2س$_2$ اقسم على 2	**$\Leftarrow$ 2س$_1$ + 2س$_2$ + 1**
$\Leftarrow$ $\frac{2س_1}{2}$ = $\frac{2س_2}{2}$	**$\Leftarrow$ت(س$_1$) $\neq$ ت (س$_2$)**
$\Leftarrow$ س$_1$= 2س$_2$ $\Leftarrow$ ت متباين.	**$\Leftarrow$ ت متباين.**

(5) التطبيق التقابل:

تعريف: **يسمى التطبيق ت: س$\longleftarrow$ص تقابلاً إذا كان متبايناً وغامراً.**

مثال توضيحي:

بفرض س = {1 ، 2 ، 3}

ص ={4 ، 5 ، 6}

ع = س $\cup$ ص وأن التطبيق ر: ع$\leftarrow$ {0 ، 1}

معرِّف بالقاعدة.

ر (س) = $\begin{cases} 1 \text{ إذا كان س } \in \text{ س} \\ 0 \text{ إذا كان س } \in \text{ ص} \end{cases}$

المطلوب: [أ] مثل التطبيق سهمياً.

[ب] هل ر تطبيق شامل؟ علل إجابتك.

[ج[هل ر تطبيق متباين؟ علل إجابتك.

[د] هل ر تقابل؟ هل ر$^{-1}$تطبيق.

الحل:

[أ] ع = س∪ص = {1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6}

[ب] التطبيق غامر لأن كل عنصر من المجال المقابل مرتبط:

(1) صورة لأكثر من عنصر (المهم أنهُ مرتبط).

(0) صورة لأكثر من عنصر (المهم أنهُ مرتبط).

أو بصورة أخرى:

مدى التطبيق = {1 ، 0} = المجال المقابل.

∴ التطبيق غامر.

[جـ] ر ليس متباين. لأن 1 ≠ 2 مع ذلك ر (1) = ر (2)

تذكـر القانـون: **إذا كان 1 ≠ 2 المفروض ر (1) ≠ ر (2)**

أو يتناقض مع تعريف المتباين [المفروض كل عنصر من المجال المقابل صورة واحدة على الأكثر لعنصر من المجال] وهُنا ما شاء الله (1) ∈ المجال المقابل صورة لـ(3) عناصر من ع.

[د] بما أن (ر) ليس متباين. ∴ ليس تقابل وليس لهُ تطبيق عكسي.

مثال داعم: ر: ص← ص بحيث ر (س) = س^3– 1

المطلوب:

[أ] أوجد صورة الأعداد –1، –2 ، 1 ، 2 في التطبيق (ر).

[ب] هل التطبيق ر شاملاً؟ علل إجابتك.

[جـ] اثبت أن التطبيق ر متباين.

الحل:

[أ] ر $(-1) = (-1)^3 - 1 = -1-1 = -2$

ر $(-2) = (-2)^3 - 1 = -5 - 1 = -9$

ر $(1) = (1)^3 - 1 = 1-1 = 0$

ر $(2) = (2)^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

[ب] ليس غامراً: مثلاً (1) $\in$ المجال المقابل لا يوجد عنصر من المجال مرتبط فيه من القاعدة ص= س$^3-1$ جـرِّب ص = 1 ⇐ 1 = س$^3-1$ ⇐ 2 = س^3 ⇐ س= $\sqrt[3]{2} \notin$ المجال ص $\therefore$ (1) ليس لهُ مقابل في المجال يرتبط فيه.

[جـ] الإثبات.. الشرط: ر (س$_1$) = ر (س$_2$) ⇐ س$_1$ = س$_2$ نفرض ر (س$_1$) = ر (س$_2$) ،

س$^3-1$=س$^3-1$نحذف(−1) من الطرفين⇐ س$_1^3$= س$_2^3$⇐س$_1$=س$_2$⇐ ر متباين.

إجابة تمارين ومسائل (3/2)

[1] بّيِن نوع كل تطبيق من التطبيقات التالية:

الجواب: $ر_1$ تطبيق ثابت.

الجواب: $ر_2$ متباين وغامر. ∴ تقابل.

الجواب: $ر_3$ (1) مطابق. كل عنصر يرتبط بنفسه.

(2) متباين.

(3) غامر.

(4) تقابل.

الجواب: $ر_4$: ليس لهُ نوع معّين.

الجواب: $ر_5$ متباين.

الجواب $ر_6$: (1) (متباين)

(2) غامر.

(3) تقابل.

[2] ليكن ق: س ← ص تطبيقاً معرّف بالقاعدة:

((س رقم من أرقام العدد ص: س ∈ س ، ص (ص)))

س = {5 ، 4 ، 6} ، ص= {2،1 ، 456، 302} أوجد مدى هذا التطبيق وبين نوعه.

الحل:

∴ مدى ق {456}

∴ ق تطبيق (ثابت).

---

[3] الجدول التالي يمثل التطبيق ق (س) على س = {2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6}

*** المطلوب: ارسم مخططاً سهمياً وبين نوع التطبيق؟**

س	2	3	4	5	6
ص	6	5	2	4	4

الجواب:

(1) ليس مطابق.

(2) ليس متباين.

(3) ليس غامر.

(4) ليس تقابل.

∴ لا نوع لهُ.

---

[4] ليكن التطبيق ت: س←ص معرَّفاً بالقاعدة ت (س) = 3س

حيث س = {1 ، 2 ، 3 ، 4}   ،   ص = {0 ، 3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15}

المطلوب: أ) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة.   ب) بيِّن نوعه.

الحل:

أ) ت (س) = 3س

ت (1) = 3 × 1 (1 ، 3)

ت (2) = (3 × 2) = 6 (2 ، 6)

ت (3) = 3 × 3 = 9 (3 ، 9)

ت (4) = (3 × 4) = 12 (4 ، 12)

∴ بيان التطبيق ن = {(1 ،3) ، (2 ، 6) ، (3 ، 9) ، (4 ، 12)}

ب) التطبيق متباين كل عنصرين مختلفين صوريتهما مختلفتين.

---

[5] لتكن س = {أ ، ب ، جـ{ ، ص = {1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 7} بين نوع كل من التطبيقين التاليين من س ← ص.

$د_1$= { (ب ، 3) ، (أ ، 1) ، (جـ ، 5) ، (د ، 7) }

$د_2$= { (أ ، 5) ، (ب ، 3) ، (جـ ، 3) ، (د ، 1) }

الحل:

أولاً: $د_1$ ثانياً: $د_2$

شكـل

(واضح أن $د_1$ متباين) ($د_2$ ليس لهُ نوع معيّن)

---

[6] المخطط السهمي يمثل من س ← س

حيث س = {ب ، جـ ، د} : أ: اكتب بيان هذا التطبيق كأزواج مرتبة.

ب: بيِّن نوعه.

الحل:

أ) بيان التطبيق ن = {(ب ، ب) ، (جـ ، د) ، (د ، جـ)}

ب) متباين – غامر ∴ تقابل.

[7] لتكن ل = {6 ، 7 ، 8 ، 9} ، م = {د ، هـ ، و}

أ) كون تطبيقاً من ل ← م بحيث يكون غامراً وغير متباين.

ب) كون تطبيقاً من م ←ل بحيث يكون متبايناً وغير غامر.

جـ) هل يمكن تكوين تطبيق من ل ←م تقابلاً؟ ولماذا.

الجواب: أ)

ب)

شكـل

جـ) لا يمكن لأن عدد عناصر المجال (ل) = 4 وعدد عناصر المجال المقابل (3) أي أن هناك عنصر من م لابد أن يكون صورة لعنصرين على الأقل من ل.

∴ غير متباين. ∴ لا يكن جعّله تقابل.

---

[8] لتكن س = {2 ، 3 ، 5 ، 6} والتطبيق د: س ← ص

حيث د (س) = س^2−1 ما مدى هذا التطبيق؟ وبين نوعه.

الجواب:

المدى هو مجموعة صور س.

∴ د (س) = س^2−1

د (2) = $(2)^2-1$ = 4−1 = 3

د (3) = $(3)^2-1$ = 9−1 = 8

د (5) = $(5)^2-1$ = 25−1 = 24

د (6) = $(6)^2-1$ = 36−1 = 35 ∴ المدى = {3 ، 8 ، 24 ، 35}

نوعه: متباين كل عنصرين مختلفين صورتيهما مختلفتين.

[9] ق$_1$، ق$_2$ تطبيقان معرّفان كما يلي:

ق$_1$: ط ← ط ، ق$_1$(س) = 2س

ق$_2$: ط ← ط ، ق$_2$(س) = 3س+ 1 ما نوع كلٍ منهما؟

الجواب:

<u>أولاً: ق$_1$ المتباين:</u>

نفرض ق$_1$(س$_1$)=ق$_1$(س$_2$) ⇐ 2س$_1$= 2س$_2$ قسّم على 2⇐ س$_1$=س$_3$ ⇐ق$_1$ متباين.

<u>الغامر:</u> **ص = 2س لنبحث فيما إذا كان لها حل في المجال ط. كيف نعرف؟**

نحصل على س بدلالة ص فيتبين لنا إن كان هناك حل أم لا.

<u>التنفيذ:</u> **ص = 2س ⇐ س = $\frac{ص}{2}$ ليس لها حل دوماً في ط مثلاً لو كانت ص = 5**

⇐ س = $\frac{5}{2}$ ∌ ط ∴ ليس غامر. ∴ ليس تقابل.

<u>ثانياً: ق$_2$ المتباين</u>: **نفرض ق$_2$ (س$_1$) = ق$_2$(س$_2$) ⇐ 3س$_1$+ 1 = 3س$_2$ + 1 الغامر**

⇐ ص = 3س+ 1 لنبحث أن كان لها حلاً في ط: ص−1 =3س ⇐ س = $\frac{ص-1}{3}$ ∴

ليس لها حل دوماً في ط.

توضيح: لو كانت ص = 5⇐ س = $\frac{5-1}{3}$=$\frac{4}{3}$ ∌ ط

∴ ق$_2$ ليس غامر وبالتالي ليس تقابل.

---

[10] إذا كانت س = {س: س ∈ ط ، 3 < س < 8}

ص = {ص: ص ∈ ط، 0 ≤ ص ≤ 9}

وكان د: س⟵ص تطبيقاً حيث د (س) = س + 2

هل التطبيق د تقابل.

الجواب: س = {4 ، 5 ، 6 ، 7}

ص = {0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 }

د (س) = س + 2

د (4) = 2+4 = 6

د (5) = 5 +2= 7

د (6) = 6 + 2= 8

د (7)= 7 + 2= 9 ∴ المدى = {6 ، 7 ، 8 ، 9} ≠ ص

∴ ليس غامر

∴ ليس تقابل.

---

[11] إذا كان ق (س) ≠ س^2 بين نوع هذا التطبيق عندما يكون:

أ) ق: ط ← ط ب) ق: ص← ص

الجواب: **أ) ق (س$_1$)= ق (س$_2$)** **س$_1^2$= س$_2^2$** **س$_1$ = + س$_2$** **⇐ ق متباين وليس غامر.** **بفرض ص = 5** **عوض في القاعدة ص = س^2** **⇐ 50 = س^2** **س = ± $\sqrt{5}$ ∉ ط** **∴ ليس تقابل.**	**ب)ليس متباين ولنقض الشيء يكفي مثال:** **−2≠2 لكن ق(−2) = ق (2) = 4** **المفروض ق (−2) ≠ ق (2)** **وليس غامر بفرض ص = −1** **عوّض في القاعدة** **ص = س^2** **−1 = س^2 مستحيل** **∴هناك قيَّم لـ ص ليس لها صور عكسية.**

التطبيق العكسي

تعريف: يكون للتطبيق: س ⟵ص تطبيقاً عكسياً إذا كان ت تقابلاً.

مثال: ر تطبيق ممثل بالشكل المقابل هل ر تطبيق تقابل وهل لهُ تطبيق عكسي.

الحل: ر متباين، وغامر ⇐ ر تقابل.

∴ لهُ تطبيق عكسي. ر$^{-1}$:ص⟵س

مثال توضيحي داعم:

ر: ح⟵ح معرّف بالقاعدة ر (س) = س + 1

هل: ر تقابل ... أوجد تطبيقه العكسي أن أمكن.

الحل:

[1] المتبايـن: الشرط: ر (س$_1$) = ر(س$_2$) ⇐ س$_1$ = س$_2$

بفرض ر (س$_1$)= ر (س$_2$) ⇐ س$_1$+ 1 = س$_2$+ 1 بحذف (1) من الطرفين.

⇐ س$_1$= س$_2$ ⇐ ر متباين.

[2] الغامـــر: نحصل على س بدلالة ص ونتأكد مهما كانت ص∈ح يوجد لها مقابل س∈ح

التنفيذ: ص = س+1 ⇐ س = ص−1 ∈ ح

∴ غامر.

∴ ر تقابل فلهُ دالة عكسية.

القاعدة العكسية لـ: ر$_1$ تقول: احصل على س بدلالة ص ثم بدل المتغيرات: لاحظ معي من الغامر أن س = ص −1 بدل المتغيرات:

⇐ ص = س − 1 ⇐ ص = س − 1

∴ ر$^{-1}$(س) = س−1

مثال: اثبت أن التطبيق ر: ح⟵ح المعرف بالقاعدة ر (س) = 2+3س تقابلاً ثم أوجد معكوسة.

الحل:

المتباين: الشرط ر (س$_1$) = ر (س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$

بفرض ر(س$_1$) = ر (س$_2$) $\Leftarrow$ 3 + 2 س$_1$ = 3 +2 س$_2$ ابعد (3) من الطرفين

= 2س$_1$ = 2س$_2$قسّم على (2)

= س$_1$ = س$_2$ $\Leftarrow$ ر متباين.

الغامر: ص = 3 + 2س (احصل على س بدلالة ص وتأكد من وجود س دوماً في ح $\forall$ص$\in$ ح)

التنفيذ: ص −3 = 2س $\Leftarrow$ س = $\frac{ص - 3}{2}$ بدِّل المتغيرات:

ص= $\frac{س - 3}{2}$

$\therefore$ ر$^{-1}$(س) = $\frac{س - 3}{2}$ وهي قاعدة التطبيق العكسي.

إجابة تمارين ومسائل (4/2)

[1] بيّن أيٌّ من التطبيقات التالية لهُ تطبيق عكسي:

التطبيق ت ليس متباين وليس غامر.

∴ ليس تقابل.

∴ لا يوجد لهُ تطبيق عكسي.

ى: ليس متباين.

∴ ليس تقابل.

∴ ليس لهُ تطبيق عكسي.

ن: تقابل.

∴ لهُ تطبيق عكسي.

حيث $ن^{-1}$: ص ← س

---

[2] د: س ← ص معرفاً بالقاعدة د(س) = $س^3$ ∀س ∈ س حيث أن:

س = {−3، −2، −1 ، 0} ؛ ص = {−27، −8 ، −1 ، 0}

أ) أوجد $د^{-1}$(0) ، $د^{-1}$(−1) ، $د^{-1}$(80)

ب) اثبت أن التطبيق د تقابل.

جـ) مثل التطبيق العكسي بمخطط سهمي.

الحل:

القاعدة د(س) = $س^3$

∴ د (−3) = $(-3)^3$ = −27

د (−2) = $(-2)^3$ = −8

د (−1) = $(-1)^3$ = −1

د (0) = $(0)^3$ = 0

أ) $د^{-1}$(0) = {0} ، $د^{-1}$(−1) = {−1} ، $د^{-1}$(−8) = {−2}

ب) د متباين وغامر

∴ د تقابل.

∴ له دالة عكسية $د^{-1}$ص ⟵س.

جـ)

---

[3] ليكن ر: ح⟵ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة ر (س) = س−1

اثبت أن: ر تقابل ثم أوجد قاعدة $ر^{-1}$:

الحل:

المتباين: نفرض ر($س_1$) = ر($س_2$)

⟸ $س_1$ − 1 = $س_2$− 1 = $س_1$= $س_2$ ⟸ ر متباين.

*** الغامر: لنبحث عن حل المعادلة ص = س − 1 في المجال ح**

∴ نحصل على س بدلالة ص ⟸ ص + 4 = س

لاحظ: ∀ص ∈ ح فإن ص + 1 ∈ ح

∴ لها حل في ح

∴ ر غامر ⟸ ر تقابل.

∴ لهُ تطبيق عكسي $ر^{-1}$. ولإيجاد $ر^{-1}$:

الطريقة: هات س بدلالة ص ثمّ بدل المتغيرات:

لتنفيذ: وجدنا س = ص +1.. بدِّل المتغيرات.

∴ ص = س+1 ∴ $ر^{-1}$(س)= س+1

[4] إذا كان م:ح⟵ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة م (س) $\frac{2س+1}{2}$ فأوجد:

أ) $\text{م}^{-1}(5)$ ، $\text{م}^{-1}(\frac{1}{2})$ ، $\text{م}^{-1}(-3)$

ب) قاعدة التطبيق العكسي لهذا التطبيق.

الحل:

لإيجاد الصورة العكسية: أُفضل إيجاد س بدلالة ص

لدينا: $\frac{\text{ص}}{1} = \frac{2\text{س}+1}{2} \Leftarrow 2\text{ص} = 2\text{س} + 1 \Leftarrow 2\text{ص}-1 = 2\text{س}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{2\text{ص}-1}{2}$

أ) لإيجاد $\text{م}^{-1}(5)$ ضع ص = 5 $\Leftarrow$ س = $\frac{2\times 5-1}{2} = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2}$

$\therefore \text{م}^{-1}(5) = \{\frac{9}{2}\}$

لإيجاد $\text{م}^{-1}(\frac{1}{2})$ ضع ص = $\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ س = $\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{2} = \frac{1-1}{2} =$ صفر

$\therefore \text{م}^{-1}(\frac{1}{2}) =$ {صفر}.

لإيجاد $\text{م}^{-1}(-3)$ ضع ص = -3 $\Leftarrow$ س = $\frac{2\times -3-1}{2} = \frac{-6-1}{2} = \frac{-7}{2}$

$\therefore \text{م}^{-1}(-3) = \{\frac{-7}{2}\}$.

ب) لإيجاد قاعدة التطبيق العكسي هات س بدلالة ص ثمَّ بدِّل المتغيرات بالحقيقة. وجدنا أن س = $\frac{2\text{ص}-1}{2}$

$\therefore$ بدِّل المتغيرات: ص = $\frac{2\text{س}-1}{2}$ أي $\text{م}^{-1}(\text{س}) = \frac{2\text{س}-1}{2}$

---

[5] إذا كان ت: ح$\rightarrow$ح تطبيقاً معرّفاً بالقاعدة ت (س) = س^3-8 فاثبت أن ب: تقابل ثم أوجد قاعدة ب^{-1}.

الحل:

المتباين: نفرض ت $(س_1)$= ت $(س_2)$

$\Leftarrow$ $س_1^3 - 1 = س_2^3 - 1$

$\Leftarrow$ $س_1^3 = س_2^3$ $\Leftarrow$ بالجذر التكعيبي $س_1 = س_2$ $\Leftarrow$ ت متباين.

* الغامر: نبحث عن حل المعادلة ص =$س^3 - 8$ في المجال ح.

∴ احصل على س بدلالة ص.

ص = $س^3 - 8$ $\Leftarrow$ ص+8 = $س^3$ $\Leftarrow$ س= $\sqrt[3]{ص+8}$ $\in$ ح

∴ دوماً لها حل في ح ∴ ت غامر $\Leftarrow$ ت تقابل ∴ لهُ دالة عكسية .

ولإيجاد $ب^{-1}$:نعيدالفكرة: هات س بدلالة ص ثمّ بدِّل المتغيرات لِحُسن الحظ س= $\sqrt[3]{ص+8}$ موجودة. ∴ بدِّل المتغيرات.

ص = $\sqrt[3]{ص+8}$ $\Leftarrow$ $ب^{-1}(س)$ = $\sqrt[3]{س+8}$

---

[6] أوجد قاعدة التطبيق العكسي لكل من التطبيقين التاليين و المعرفين في ح←ح.

أ) $ت_1(س) = \frac{1}{2}$ س + 8 ب) $ت_2(س)$ = 6 − 5س

الحل: الفكرة احصل على س بدلالة ص ثمَّ بدِّل المتغيرات:

أ) ص = $\frac{1}{2}$ س + 8 أضرب كل حد بـ(2) $\Leftarrow$ 2ص = س + 16

$\Leftarrow$ 2ص − 16 = س بدِّل المتغيرات ص = 2س − 16

$\Leftarrow$ $ت_1^1$ (س) = 2س − 16

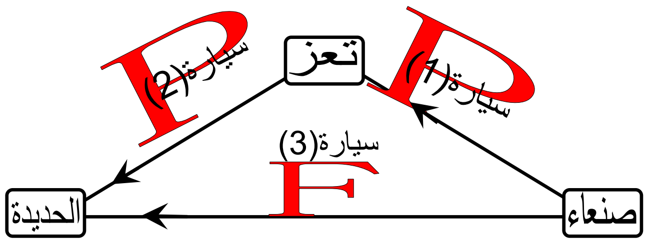
ب) ص = 6−5 س $\Leftarrow$ 5س = 6− ص فقط نقلت من طرف إلى طرف.

$\Leftarrow$ س = $\frac{6 - ص}{5}$ بدِّل المتغيرات.

ص = $\frac{6 - س}{5}$ ∴ $ت_2^1(س) = \frac{6 - س}{5}$

مفهوم تركيب التطبيقات أو تحصيلها (o)

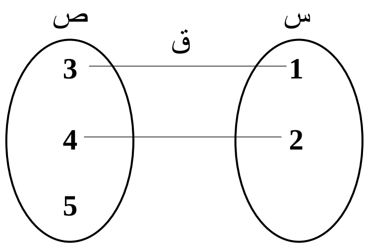
لو قِّدر لشخص الانتقال من صنعاء إلى الحديدة سالكاً الطريق التالي:



استقل سيارة س$_1$ من صنعاء إلى تعز وسيارة س$_2$ من تعز إلى الحديدة كان ممكن له أن يستقل سيارة س$_3$ تنقله مباشرة من صنعاء إلى الحديدة إن عمل السيارة س$_3$ هل تحصيل لعمل السيارتين س$_1$، س$_2$ ونعبِّر عنه رياضياً.

س^3= س$_2$ O س$_1$ وضعت س$_1$ على سيارة(O) لأنها هي التي تتحرك أولاً.

*** ليكن لدينا التطبيقين.**



لنعيد رسمهم بشكل تمثيلي:

(O ق هو تحصيل (تركيب) التطبيقين ق، ر حيث رO ق: س←ع).

<u>لمعرفة قاعدة هذا التطبيق سأقوم بالمناقشة التالية:</u>

أولاً: (رO ق) (1) = 7 من الشكل (1)

ثانياً: ر (3) = 7 وبما أن 3 هي صورة (1) وفق ق أي ق (1) = 3

بدل عنها في ر(3): أصبح ر (ق(1)) = 7 ←(2) من (1) ، (2)

نجد (ر O ق) (1) = ر (ق(1)) ماذا حصل؟ حصل أنهُ مسحنا دائرة وأثرنا بالمجاور (ق يجاور (1)) أما (ر بعيد)

∴ بشكل عام (ر O ق) (س) = ر (ر(س))

تركيب التطبيقات

تعريف: إذا كان ت: س ← ص ، ق: ص ← ع فإن (ق O ت) يُدعى تركيب التطبيقين ومعرّف كما يلي: ق O ت: س ← ع.

قاعدة: (ق O ت)(س) = ق (ت(س)) ∀س ∈ س

تحذير: التركيب غير ممكن إلاّ إذا كان مدى ت ⊂ مجال ق.

مثال توضيحي: ت: ح ← ح قاعدته ت (س) = س

ر: ص ← ص قاعدته ر (س)= س

المطلوب:

1) هل التركيب ر O ت ممكن؟ أوجد قاعدته إن كان ممكناً.

2) هل التركيب (ت O ر) ممكناً؟ أوجد قاعدته إن أمكن.

الحل:

1) المفروض مدى ت ⊂ مجال ر هل هذا محقق هنا؟

بالحقيقة مدى ت = خ لأن ت تطبيق مطابق ... مجال ر = ص

∴ بسهولة: مدى ت ⊄ مجال ر

∴ لا يمكن التركيب.

2) ت O ر ممكناً إذا كان مدى ر ⊂ مجال ت. هل هذا محقق؟

بالحقيقة مدى ر = ص لأن ر تطبيق مطابق.

مجال ت = ح

∵ ص ⊂ ح

∴ مدى ر ⊂ مجال ت

∴ الحمد لله التركيب ممكن.

قاعدته: (ت O ر) (س) = ت(ر(س)) = ت (س) = س

أيضاً هو الآخر ت O ر تطبيق مطابق. مثال

$(ب \circ ر)(5) = 5$ ، $(ب \circ ر)(7) = 7$

<u>مثال توضيحي:</u> **ليكن** $ر_1$: ح←ح تطبيقاً معّرفاً بالقاعدة.

$ر_1$ (س)= $س^2-2$

$ر_2$: ح←ح تطبيقاً معِّرفاً بالقاعدة.

$ر_2$ (س)= س +2

أ) أوجد تعريفاً لكل من التطبيقين $ر_2 \circ ر_1$ ، $ر_1 \circ ر_2$

ب) أوجد $(ر_1 \circ ر_2)$ (3) ، $(ر_2 \circ ر_1)$ (3) ... ماذا تستنتج؟

جـ(أوجد $(ر_1 \circ ر_2)$ (−1) ،$(ر_2 \circ ر_1)$ (−1).

الحل:

أ) قاعدة $(ر_2 \circ ر_1)$ (س) = $ر_2$ ($ر_1$ (س)) = $ر_2$ ($س^2-2$)

= $س^2 - 2 + 2$ = $س^2$

قاعدة: $(ر_1 \circ ر_2)$ (س) = $ر_1$($ر_2$ (س)) = س (س+2)

= $(س+ 2)^2 - 2$ = $س^2 +$ 4س + 4 − 2 = $س^2 +$ 4س + 2

ب) وجدنا $(ر_2 \circ ر_1)$ (س) = $س^2$ ⇐ $(ر_2 \circ ر_1)$ (3) = $(3)^2$ = 9

وجدنا $(ر_1 \circ ر_2)$ (س) = $س^2 +$ 4س + 2

∴ $(ر_1 \circ ر_2)$ (3) = 9 + 12 + 2 = 23

نستنتج أن:

$ر_1 \circ ر_2 \neq ر_2 \circ ر_1$ تركيب التطبيقين غير إبدالي.

جـ($(ر_1 \circ ر_2)$ (−1) = $(−1)^2 +$ 4 (−1) + 2

= 1 − 4 + 2 = −1

$(ر_2 \circ ر_1)$ (−1) = $(−1)^2$ = 1

مثال: ر: ح ← ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة ر (س) = س +1

أ) هل هذا التطبيق متباين؟ هل شامل؟ هل تقابل؟

ب) هل ر$^{-1}$ موجود وإذا كان موجوداً فعرف ر$\circ$ ر$^{-1}$، ر$^{-1}\circ$ ر وماذا تستنتج؟

الحل:

أ) المتباين: الشرط ر(س$_1$) = ر(س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$

نفرض ر (س$_1$) = ر (س$_2$)

س$_1$ + 1 = س$_2$ + 1 $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$ $\Leftarrow$ ر متباين.

الغامر: $\forall$ ص $\in$ ح $\exists$ س $\in$ ح بحيث ر (س) = ص

$\therefore$ ص = س + 1 $\Leftarrow$ س = ص − 1 $\in$ ح

$\therefore$ ر غامر (شامل).

$\therefore$ ر تقابل.

ب) بما أن ر تقابل.

$\therefore$ لهُ تطبيق عكسي ر$^{-1}$

لنوجد قاعدته: لقد وجدنا س = ص −1 بدِّل المتغيرات.

ص = س − 1 أي ر$^{-1}$(س) = س − 1

$\therefore$ (ر$\circ$ ر$^{-1}$) (س) = ر (ر$^{-1}$(س)) = ر (س− 1)

= س − 1 + 1 = س

$\therefore$ تطبيق مطابق.

(ر$^{-1}\circ$ ر) (س) = ر$^{-1}$(ر(س)) = ر$^{-1}$(س+1) = س + 1−1 = س

$\therefore$ تطبيق مطابق (المحايد بالتطبيقات)

إجابة تمارين ومسائل (5/2)

[1] لتكن س = {2 ، 4 ، 6}

ص = {1 ، 8 ،10}

ع = {11 ، 13}

ق$_1$، ق$_2$ تطبيقين معرفين على النحو التالي:

ق$_1$: س ← ص بحيث ق$_1$(2) = 8 ، ق$_1$ (4) = 10 ، ق$_1$ (6) =1

ق$_2$: ص ← ع بحيث ق$_2$(1) = 11 ، ق$_2$ (8) = 13 ، ق$_2$(10)=11

المطلوب:

أ) هل ممكن تركيب ق$_2$ o ق$_1$ أم ق$_1$ o ق$_2$

ب) اكتب مجال ق$_2$ o ق$_1$ ثم أوجد مداه ثم ارسم مخطط سهمي.

الحل:

أ) ق$_2$ o ق$_1$ هذا التركيب ممكن لمَّا مدى ق$_1$ ⊂ مجال ق$_2$

لاحظ مدى ق$_2$= {1 ، 8 ، 10} ⊂ ص = مجال ق$_2$

∴ التركيب ممكن.

ب) ق$_1$ o ق$_2$: فتش عن مدى ق$_2$ وتأكد إذا كان ⊂ مجال ق$_1$

التنفيذ: مدى ق$_2$ = {1 ، 13} ⊄ س = مجال ق$_1$ التركيب غير ممكن.

مجاله المقابل ع = {1 ، 13}

∴ حصل كل سهمين متتالين فستجد

---

[2] لتكن س = {3 ، 5 ، 7 ، 9}

ق ، ه تطبيقين من س ← س معرَّفين بالمخططين السهميين.

أ) أوجد (ق$_2$ o ق$_1$) (3) ، (ه o ق) (7)

ب) ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق (ق∘ ه)

جـ) هل (ه ∘ ق) (9) = (ه ∘ ق) (9)؟ بيِّن رأيك.

الحل:

أ) (ه ∘ ق) (3) = ق (ه (3)) = ق (3) = 5

(ه ∘ ق) (7) = ه (ق (7)) = ه (9) = 9

ب)

1) التركيب ممكن.

2) حصل كل سهمين متتاليين لتجد قاعدة التركيب كالتلاي:

جـ) (ه ∘ ق) (9) = ق (ه (9)) = ق (9) = 9

(ه ∘ ق) (9) = ه (ق (9)) = ه (9) = 9

نعم: (ه ∘ ق) (9) = (ه ∘ ق) (9)

لأنـهُ أصلاً: ه تطبيق مطابق.

أي المحايد بالنسبة للتطبيقات.

---

[3] ر ، ق ، ت ثلاث تطبيقات من ح←ح معرّفة على النحو التالي:

ر(س) = 3س ، ق (س) = س + 1 ت(س) = 3 + 1

أوجد:

(أ) (ر ∘ ق) (5)

(ب) (ق ∘ ر) (−3)

(جـ((ر ∘ ر) (6)

(د) (ت ∘ ق)(2س)

(هـ((ر ∘ ت) (م + 1)

(و) [ر∘ق∘ت] (2)

الحل:

أ) (ر ∘ ق) (5) = ر (ق(5)) = ر (1+5) = ر(6) = 3 × 6 = 18

ب)(ق ∘ ر) (−3) = ق(3×−3) = ق(−9) = −9 + 1 = − 8

جـ((ر ∘ ر) (6)= ر (ر(6)) = ر (3 × 6) = ر (18) = 3 × 18 = 54

د) (ت ∘ ق) (2س) = ت (2س+1)

= 3 (2س+1) + 1 = 6س + 3 +1 =6س +4

هـ((ر ∘ ت) (م +1) = ر(ت) (م +1)= ر (3(م+1) +1)

= ر (3م+ 3+1) = ر(3م+4) = 3(3م+4) = 9م + 12

و) [ر∘ق∘ت](2) = (ر ∘ ق) (ت (2))

= (ر∘ ق× 7) = ر(ق(7))= ر(7 +1)

= ر (8) = 3 × 8 = 24

---

[4] إذا كان ت$_1$: ط← ط حيث ت$_1$(س) = 2س

ت$_2$: ص ←ص حيث ت$_2$(س) = س^2 والمطلوب:

أ) أوجد صورة العناصر 2، 5، س + 3 في التطبيق ت$_1$∘ ت$_2$، ت$_2$∘ ت$_1$.

ب) هل تركيب ت$_1$، ت$_2$ غير تبديلي؟ بين رأيك.

الحل:

أ) أولاً: (ت$_1$∘ ت$_2$)

o (ت$_1$∘ ت$_2$) (2)= ت$_1$ (ت$_2$ (2)) = ت$_1$ (2^2) = ت$_1$ (4) = 2× 4 = 8

- (ت$_1 \circ$ ت$_2$) (5) = ت$_1$(ت$_2$(5)) = ت$_1$ (5^2) = ت$_1$ (25) = 2 × 25 = 50
- (ت$_1 \circ$ ت$_2$) (س+3) = ت$_1$(ت$_2$ (س+3)) = ت$_1$((س+3)^2) = 2(س+3)^2

ثانياً:

- (ت$_2 \circ$ ت$_1$) (2) = ت$_2$ (ت$_1$(2)) = ت$_2$ (2×2) = ت$_2$ (4) = (4)^2 = 16
- (ت$_2 \circ$ ت$_1$) (5) = ت$_2$ (ت$_1$(5)) = ت$_2$ (2×5) = ت$_2$ (10) = (10)^2 = 100
- (ت$_2 \circ$ ت$_1$) (س + 3) = ت$_2$(ت$_1$(س+3)) = ت$_1$(2(س+3)) = 4(س+3)^2

ب) لنقض الشيء يكفي مثال. وجدنا (ت$_1 \circ$ ت$_2$) (2) = 8

(ت$_2 \circ$ ت$_1$) (2) = 16 ∴ ت$_1 \circ$ ت$_2$ ≠ ت$_2 \circ$ ت$_1$

∴ التركيب غير إبدالي.

---

[5] إذا كان ق: ح ⟵ ح حيث ق (س) = 5س + 1

هـ: ح ⟵ ح حيث هـ (س) = س^2

استنتج قواعد: (1) (ق $\circ$ هـ((س) (2) (هـ $\circ$ ق)(س)

الحل:

(1) (ق $\circ$ هـ((س) = ق (هـ (س)) = ق(س^2)= 5(س^2)+1

= 5س^2 + 1

(2) (هـ $\circ$ ق) (س) = هـ)ق (س)) = هـ)5س+1) = (5س + 1)^2 #

---

[6] لتكن د: ح ⟵ ح حيث د (س) = 2س+1

هـ: ح ⟵ ح حيث هـ (س) = 5س+7

المطلوب: (أ) أوجد (هـ$^{-1} \circ$ د$^{-1}$). (ب) (هـ $\circ$ د)$^{-1}$

الحل:

أ) لاحظ لحساب قاعدة هـ$^{-1} \circ$ عليك حساب د$^{-1}$، هـ$^{-1}$ أولاً.

∴ لحساب د$^{-1}$ نتبع الخطوات التالية:

نحسب س بدلالة ص ثمَّ نبدِّل المتغيرات.

التنفيذ: ص = 2س+ 1 $\Leftarrow$ ص − 1 = 2س $\Leftarrow$ س = $\frac{\text{ص}-1}{2}$

بدِّل المتغيرات ص = $\frac{\text{س}-1}{2}$ $\Leftarrow$ د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{س}-1}{2}$

وبالمثل:

لإيجاد هـ$^{-1}$: ص=5س +7 $\Leftarrow$ ص − 7= 5س $\Leftarrow$ س = $\frac{\text{ص}-7}{5}$

بدِّل المتغيرات: ص = $\frac{\text{ص}-7}{5}$ $\therefore$ هـ$^{-1}$(س) = $\frac{\text{ص}-7}{5}$

$\therefore$ (هـ$^{-1}$ $\circ$ د$^{-1}$) (س) = هـ$^{-1}$(د$^{-1}$(س)) = هـ$^{-1}$($\frac{\text{س}-1}{2}$)

$$= \frac{\frac{\text{س}-1}{2}-7}{5} = \frac{\frac{\text{س}-1-14}{2}}{5} = \frac{\text{س}-15}{2\times 5} = \frac{\text{س}-15}{10}$$

ب) لحساب (هـ $\circ$ د)$^{-1}$

لنحسب (1) هـ $\circ$ د. (2) نحصل على س بدلالة ص.

(3) نبدِّل المتغيرات.

التنفيذ:

(1) (هـ $\circ$ د) (س) = هـ (د(س)) = هـ (2س +1)

= 5 (2س + 1) +7 = 10س + 5 + 7 = 10س +12

(2) نفرض ص =10س + 12 $\Leftarrow$ ص −12 = 10س = س = $\frac{\text{ص}-12}{10}$

(3) بدِّل المتغيرات:

ص = $\frac{\text{س}-12}{10}$ $\Leftarrow$ (هـ $\circ$ د)$^{-1}$ (س) = $\frac{\text{س}-12}{10}$ #

تمارين عامة على التطبيقات

[1] أيَّ المخططات السهمية الآتية تمثل تطبيقاً وبيِّن نوعه:

الجواب: (أ) ليس تطبيق.

(ب) تطبيق متباين.

(ج) تطبيق تقابل.

---

[2] صل كل تطبيق من العمود (أ) بنوعه من العمود (ب) فيما يلي:

[3] الجدول التالي يمثل التطبيق ت: س ← ص

حيث س = {3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11}

ص = {6 ، 8 ،14،12،10 }

س	3	5	7	9	11
د(س)	6	8	10	12	14

أ) أكمل:

ت (3) = 3 + ... الجواب: أضف 3 لتصبح ت (3) = 6

ت (5) = 5 + ... الجواب + 3

ت (7) = 7 + ... الجواب + 3

ب) أوجد قاعدة هذا التطبيق:

الجواب:

من (أ) فهمت القاعدة كل عنصر يذهب إلى نفسه + 3

∴ ت(س) = س + 3

جـ(بين نوعه:

الجواب:

متباين وغامر. ∴ تقابل.

د) أوجد ب^{1}(8) ، ب^{1}(12) ، ب$^{-1}$(14)

الجواب: ب$^{-1}$(8) = {5} . ، ب$^{-1}$ (12)= {9} ، ب$^{-1}$ (14) = {11}

هـ(هل معكوس التطبيق ت تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد:

الجواب: قلنا ت تقابل ∴ له تطبيق عكسي ب$^{-1}$

يمكن إيجاد قاعدته بالملاحظة:

في التطبيق ت لاحظ: أضفنا 3 إلى العنصر والآن نطرح (3)

في العكس ∴ $ب^{-1}$(س) = س − 3

التحقيق: $ب^{-1}$(14) = 14 −3 =11 وهذا صحيح #

---

[4] ليكن التطبيق ت: س ← ص معرَّفاً بالقاعدة ت(س) = س + 1

حيث س = {3 ، 5 ، 7}

ص= {10، 12، 14 ، 15}

أ) عبِّر عن التطبيق كأزواج مرتبة.

د) أوجد $ب^{-1}$(15) ، $ب^{-1}$(12).

ب) أوجد مدى هذا التطبيق.

ه(هل معكوس التطبيق ت تطبيق.

ج(هل هذا التطبيق تقابل.

الحل:

أ) ت (س) = س + 7

ت (3) = 3 + 7 = 10 (3 ، 10)

ت (5) = 5 + 7 = 12 (5 ، 12)

ت (7) = 7 + 7 = 14 (7 ، 14)

∴ بيان التطبيق ن= { (3 ، 10)، (5 ، 12)، (7 ، 14) }

ب) مدى التطبيق {10 ، 12 ، 14}

ج(كلاّ: لأنه ليس غامر. لاحظ 15 ∈ ص ليست من المدى.

د) $ت^{1}$(15) = ϕ ، $ت^{1}$(12) = {5}

ه(كلاّ: لأنه 15 غير مرتبط.. لا ينعكس منه سهم.

---

[5] ليكن التطبيقات ت، ق معرّفين كالآتي:

ت: ط ← ط ، ت (س) = س + 2

ق: ط ← ط ، ق (س) = 2س

المطلوب:

أ) ما نوع كلاً منهما. ب) أوجد قاعدته $ب^{-1}$، $ق^{-1}$

جـ(أوجد ق (ت o ق) (س) ، (ق o ت) (س)

الحل:

أ) بالنسبة لـ: ت

* التباين: ت($س_1$) = ت($س_2$) ⇐ $س_1$ +2= $س_2$ + 2 ⇐ $س_1$ = $س_2$ ⇐ ت متباين

* الغامر: القاعدة ص = س+ 2 ⇐ س = ص −2 ليس لها دوماً حل في ط.

بدليل: خذ ص = 1 ∈ ط ⇐ س= 1−2 = −1 ∌ ط ∴ ليس غامر.

بالنسبة لـ:ق

* المتباين ق($س_1$)= ق ($س_2$) ⇐ 2$س_1$= 2$س_2$ ⇐ $س_1$$س_2$

⇐ ق متباين.

* الغامر: ص =2س ⇐ س = $\frac{ص}{2}$ ليس لها حل دوماً في ط.

بدليل لو كان ص = 1⇐ ط ⇐ س = $\frac{1}{2}$ ∌ ط ∴ ليس غامر.

ب) قاعدة معكوس ت هي: س = ص −2 ⇐ انتبـه: $ت^{-1}$ ليس تطبيق.

قاعدة معكوس ق هي: س = $\frac{ص}{2}$ ⇐ انتبـه: $ق^{-1}$ ليس تطبيقاً.

جـ(* (ت o ق) (س) = ت (ق(س)) = ت (2س)

* (ق o ت) (س)= ق (ت(س)) = ق (س+2)= 2 (س+2) = 2س+ 4

---

[6] إذا كانـت ل = {أ ، ب ، جـ } ، م {1 ، 3 ، 5} كـوِّن فـي كـل مـرة تطبيقـاً مجالــه ل ومجاله المقابل م بحيث يكون:

أ) ثابتاً. ب) متبايناً. جـ(غامراً.

د) تقابلاً. هـ(غير متباين. و) غير غامر.

[7] ليكن التطبيق ت: س ← ص معرفاً بالقاعدة ت (س) = س +2

حيث: س = {س: س ∈ ط ، 5 ≤ س ≤ 9}

ص = {ص: ص ∈ ط ، 7 ≤ ص ≤ 11}

اثبت أن ب$^{-1}$ تطبيق:

الجواب: س = {5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9}

ص = {7، 8، 10،9 ، 11}

ت (5) = 5 + 2 = 7

ت (6) = 6 + 2 = 8

ت (7) = 7 + 2 = 9

ت (8) = 8 + 2 = 10

ت (9) = 9 +2 = 11

∴ ت تقابل فله تطبيق عكسي.

لإيجاد قاعدته ص = س + 2 ⟸ س = ص − 2 بدّل المتغيرات.

ص = س − 2 ⟸ ب$^{-1}$(س) = س −2

---

[8] إذا كان التطبيق ت$_1$= ح ← ح معرَّفاً بالقاعدة ت$_1$(س) = س^2+ 1

والتطبيق ت$_2$: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت$_2$(س) = س + 2

أ) أوجد قاعدة (ت$_1$ o ت$_2$) (س) ، (ت$_2$ o ت$_1$) (س) وقارن بينهما.

ب) أوجد (ت$_1$ o ت$_2$) (س) = ت$_1$(ت$_2$(س)) = ت$_1$ (س +2)

الحل:

أ) * (ت$_1$ o ت$_2$) (س) = ت$_1$ (ن$_2$(س)) = ت$_1$ (س+2) = ت$_1$(س + 2)

* (ت$_2$ o ت$_1$) (س) = ت$_2$ (ت$_1$(س)) = ت$_2$ (س^2+1) = س^2+1+2= س^2 + 3

∴ (ت$_1$ o ت$_2$) (س) ≠ (ت$_2$ o ت$_1$) (س)

ب) (ت$_1$ o ت$_2$) (3) = ت$_1$(ت$_2$(3)) = ت$_1$(3+2) = ت$_1$ (5)

 # $26 = 1 + (5)^2 =$

[9] ما نوع التطبيق ق: ط ← ط المعرِّف بالقاعدة ق (س) = 7

الحل:

ق (1) = 7 ، ق (0) = 7 ، ق (2) = 7

∴ ق تطبيق ثابت.

---

[10] ما نوع التطبيق ت: س← ص المعرِف بالقاعدة ت (س) = س^2

الحل: ∵ مجاله س ومجاله المقابل ص مجهولين لا تستطيع معرفة نوعه.

---

[11] ليكن التطبيق ت: ط ← ط معرَّفاً بالقاعدة ت (س) = س اثبت أن التطبيق تقابل.

الحل:

المتباين: ت (س$_1$) ، ت (س$_2$) ⇐ س$_1$ = س$_2$ ⇐ ت متباين

الغامر: ص = س ∀ص ∈ ط فإن س = ص ∈ ط ∴ لها حل دوماً.

∴ غامر. ∴ تقابل.

---

[12] إذا كان ت : س←ح [حيث س مجموعة الأعداد الزوجية] معرفاً بالقاعدة ت (س) = س^2

فأوجد: أ) ت (2) ، ت (18) ، ت (112)

ب) ت$^{-1}$(25) ، ت$^{-1}$(34)

جـ(هل ت$^{-1}$ تطبيق... أوجد قاعدته إن وجد.

الحل:

أ) ت (س) = س^2 ⇐ ت (2) = $(2)^2 = 4$

*** ت (18) = $(18)^2 = 324$ ، * ت (112) = $(112)^2 = 12544$**

ب) لنوجد س بدلالة ص.

التنفيذ: ص = س^2 ⇐ س = ± $\sqrt{}$ص

لإيجاد ت$^{-1}$(25) ضع ص = $\sqrt{25}$ ⇐ س = ± $\sqrt{25}$

⟸ س = ± 5 ∌ س ∴ $ت^{-1}(25)$ = ϕ

لإيجاد $ت^{-1}(34)$ ضع ص = 34 ⟸ س = ± $\sqrt{34}$ ∌ س

∴ $ت^{-1}(34)$ = ϕ

جـ(لقد وجدنا $ت^{-1}(25)$ = ϕ

∴ لا يوجد معكوس لـ(25)

∴ $ت^{-1}$ ليس تطبيق ولا توجد لهُ قاعدة.

---

[13] ليكن التطبيق ت: ح⟵ح معرفاً بالقاعدة ت(س) = 3س

أ) بيّن نوع هذا التطبيق. ب) أوجد التطبيق العكسي لهُ.

الحل:

أ) المتباين: ت $(س_1)$ = ت $(س_2)$

⟸ $3س_1 = 3س_2$ ⟸ $س_1 = س_2$ ⟸ ت متباين.

* الغامر: حل المعادلة ص = 3س في ح.

التنفيذ: س = $\frac{ص}{3}$ ∈ ح ∴ ت غامر.

∴ ت تقابل وله تطبيق عكسي.

ب) أذكرك بالخطة: هات س بدلالة ص ثمَّ بدِّل المتغيرات لحسن الحظ معنا س = $\frac{ص}{3}$ بدّل المتغيرات:

ص = $\frac{س}{3}$ ⟸ $ت^{-1}(س)$ = $\frac{س}{3}$ #

---

[14] هل من الممكن أن يكون التطبيق الثابت غامراً؟

الجواب: نعم ممكن عندما يكون المجال المقابل عنصر واحد.

---

[15] ليكن التطبيق ت: ح⟵ح معرفاً بالقاعدة ت(س) = 3س− 3

* اثبت أن ت تقابل وأوجد قاعدة التطبيق العكسي.

الحل: المتباين: نفرض ت $(س_1)$ = ت $(س_2)$

⟸ $3س_1 - 3 = 3س_2 - 3$ ⟸ $3س_1 = 3س_2$ ⟸ $س_1 = س_2$

⟸ ت متباين.

الغامر: هات س بدلالة ص ثمَّ حاول حل المعادلة في المجال:

$$\text{ص} = 3\text{س} - 3 \Leftarrow \text{ص} + 3 = 3\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص} + 3}{3} \in \text{ح}$$

∴ ت غامر ⇐ ت تقابل ⇐ لهُ تطبيق عكسي.

لإيجاد قاعدة ت^{-1}: لدينا س = $\frac{\text{ص} + 3}{3}$ بدِّل المتغيرات

$$\text{ص} = \frac{\text{س} + 3}{3} \qquad \therefore \text{ت}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} + 3}{3}$$

---

[16] ليكن هـ: ح→ح معرَّفاً بالقاعدة هـ (س) = 3س + 5

اثبت أن التطبيق هـ تقابل ثم أوجد قاعدة التطبيق العكسي.

الحل:

المتباين: نفرض هـ (س_1) = هـ (س_2)

$$3\text{س}_1 + 5 = 3\text{س}_2 + 5 \Leftarrow 3\text{س}_1 = 3\text{س}_2 \Leftarrow \text{س}_1 = \text{س}_2$$

⇐ ت متباين.

الغامر: $\text{ص} = 3\text{س} + 5 \Leftarrow \text{ص} - 5 = 3\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص} - 5}{3} \in \text{ح}$

للحصول على قاعدة نحصل على س بدلالة ص ثمَّ نبدَّل المتغيرات.

انتبه: لحسن الحظ معنا س = $\frac{\text{ص} - 5}{3}$

∴ بدل المتغيرات ص = $\frac{\text{ص} - 5}{3}$

∴ $\text{هـ}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{ص} - 5}{3}$ #

حل اختبار الوحدة (الثانية)

[1] بيِّن نوع التطبيق ت: ح⟵ح والمعرَّفة بالقاعدة ت (س) = 2س+ 5

الحل:

*** المتباين: ت(س$_1$) = ت (س$_2$)**

⇐ 2س$_1$ + 5 = 2س$_2$ + 5 ⇐ 2س$_1$ = 2س$_2$

⇐ س$_1$ = س$_2$ ⇐ ت متباين.

*** الغامر: ص =2س + 5 ⇐ ص− 5 = 2س ⇐ س = $\frac{\text{ص} - 5}{2}$ ∈ ح.**

∴ ت غامر. ∴ ت تقابل. ∴ له تطبيق عكسي.

---

[2] ليكن التطبيق هـ: ص⟵ص معرِّفاً بالقاعدة:

هـ (س) = 4س+ 3

أ) أوجد هـ$^{-1}$(5) ، هـ$^{-1}$(−3) ، هـ$^{-1}$(− ص)

ب) هل معكوس التطبيق هـ تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد:

الحل:

أ) ص = 4س+ 3 ⇐ ص −3 = 4س ⇐ س = $\frac{\text{ص} - 3}{4}$

لإيجاد هـ$^{-1}$(5) ضع ص = 5 ⇐ س = $\frac{5 - 3}{4}$ = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$ ∌ ص

∴ هـ$^{-1}$(5) = ϕ

لإيجاد هـ$^{-1}$(−3) ضع ص = −3 ⇐ س = $\frac{-3 - 3}{4}$ = $\frac{-6}{4}$ = $\frac{-3}{2}$ ∌ ص

∴ هـ$^{-1}$(−3) = ϕ

لإيجاد هـ$^{-1}$(− ص) ضع ص بـ −ص ⇐ س = $\frac{-\text{ص} - 3}{4}$

∴ هـ$^{-1}$(− ص) غير معرف أكانت موجودة أم لا. لأن ص مجهول ولا نستطيع أن نقرر.

ب) ∵ هـ$^{-1}$(5) = ϕ ∴ هـ ليس له تطبيق عكسي.

---

[3] إذا كان التطبيق ق: ح←ح والمعرِّف بالقاعدة: ق (س) = س + 1

والتطبيق ت: ح←ح والمعرف بالقاعدة ت: (س) = 3س + 4

أ) هل (قOت) (س) = (ت O ق) (س) ؟

ب) أوجد (تOق) (3)

الحل:

أ) (قOت) (س) = ق (ت(س)) = ق (3س+4)

= 3س + 4 +1 =3س+ 5

*** (تOق) (س) = ت (ق (س)) = ت (س+1)**

= 3 (س+1) + 4 = 3 س +7

∴ (قOت) (س) ≠ (ب O ق) (س)

ب) (تOق) (3) = ت(ق (3)) = ت (1+3) = ت (4)

= 3 × 4 + 4 = 12 + 4 = 16

---

[4] ليكن ت: س ←ص تطبيقاً موضحاً بالمخطط السهمي:

أوجد:

أ) ت$^{-1}$(4) ، ت$^{-1}$(64)

ب) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة.

جـ(هل معكوس التطبيق تطبيق؟ ولماذا؟

الحل:

أ) ت$^{-1}$(4) = {2 ، 4}

ب) ت$^{-1}$(64) = { } = ϕ

جـ(∵ ت$^{-1}$(64) = ϕ ∴ ليس لهُ تطبيق عكسي.