اختبار لطلاب الثالث الثانوي العلمي 2022 – 2023
رياضيات (بحث المتتاليات -1-)

الاسم :
الدرجة : 300
المدّة : ساعتان

السؤال الأوّل : ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية :

$$1)\ U_n = \frac{n+1}{7^n} \quad , \quad 2)\ V_n = \frac{4}{(n+4)^4} \quad , \quad 3)\ W_n = \frac{n}{(n-1)!} \quad , \quad 4)\ T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

السؤال الثاني : أثبت بالتدريج صحّة ما يلي :

$$1)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \ ; n \geq 1$$

$$2)\ (n+1)! \geq 2^n \ ; n \geq 0$$

السؤال الثالث : a و b و c أعداد حقيقية ، وهي ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسيّة أساسها q .
احسبها إذا علمت أنَّ مجموعها $(\frac{13}{27})$ ، وجداؤها $(\frac{1}{(27)^2})$. ثمَّ استنتج q ، واطراد هذه المتتالية .

السؤال الرابع : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة فيها : $U_0 = -\frac{2}{3}$ و $U_3 = -\frac{11}{3}$. **المطلوب :**

1) احسب r أساس المتتالية ، و U_2 ، واستنتج اطراد المتتالية
2) عبّر عن U_n بدلالة n .
3) احسب المجموع : $S = U_3 + U_4 + \cdots + U_7$.

السؤال الخامس : لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية مُعرّفة بحدّها الأوّل U_0 وبالعلاقة التدريجيّة التالية : $U_{n+1} = \frac{7U_n+2}{U_n+8}$.

المطلوب :

i) عيّن القيم الممكنة لـ U_0 التي من أجلها تكون المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ ثابتة .

ii) بفرض $U_0 = 0$:

1) احسب U_1 و U_2 ، واستنتج اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$.
2) أثبت بالتدريج أنَّ : $0 \leq U_n \leq 1$.
3) لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المُعرّفة بالعلاقة : $V_n = \frac{U_n+2}{U_n-1}$.

a. أثبت أنَّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة يُطلب تعيين كل من أساسها وحدّها الأوّل .

b. اكتب V_n بدلالة n واستنتج أنَّ : $U_n = \frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$.

c. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = V_2 + V_4 + V_6 \ldots + V_{2n}$.

السؤال السادس : نتأمّل متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ مُعرّفة بالتدريج وفق : $\begin{cases} U_0 = 0 \ , \ U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 6U_n - 8U_{n-1} \end{cases}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنَّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $V_n = U_{n+1} - 2U_n$ هندسيّة أساسها 4 .
2) أثبت أنَّ المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $W_n = U_{n+1} - 4U_n$ هندسيّة أساسها 2 .
3) عبّر عن V_n و W_n بدلالة n ، ثمَّ استنتج عبارة U_n بدلالة n .
4) بفرض $U_n = 2^n(2^n - 1)$. ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$.

------- انتهت الأسئلة -------

إعداد : محمود المحمود 0936 838 276

السؤال الأول:

(1

$$U_n = \frac{n+1}{7^n}$$

طريقة 1:

$$U_{n+1} = \frac{n+2}{7^{n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+2}{7^{n+1}}}{\frac{n+1}{7^n}} = \frac{n+2}{7^n \cdot 7} \times \frac{7^n}{n+1}$$

$$= \frac{n+2}{7n+7}$$

$$7n+7 > n+2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{n+2}{7n+7}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow$$

U_n متناقصة تماماً".

طريقة 2:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{7^{n+1}}_{(1)} - \frac{n+1}{7^n}_{(7)}$$

$$= \frac{n+2-7n-7}{7^{n+1}}$$

$$= \frac{-6n-5}{7^{n+1}} < 0$$

$\Leftarrow$ U_n متناقصة تماماً"

حيث: $7^{n+1} > 0$, $-6n-5 < 0$

(2

$$V_n = \frac{4}{(n+4)^4}$$

نفرض التابع: $f(x) = \frac{4}{(x+4)^4}$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-16(x+4)^3}{(x+4)^8} = \frac{-16}{(x+4)^5} < 0$$

f متناقص تماماً" $\Leftarrow$

U_n متناقصة تماماً"

حيث: $\forall x \in [0,+\infty[\; (x+4)^5 > 0$

ملاحظة: يوجد أيضاً طريقتان

① معيار النسبة: $\frac{V_{n+1}}{V_n}$

② معيار الفرق: $V_{n+1} - V_n$

(3

$$W_n = \frac{n}{(n-1)!}$$

$$W_{n+1} = \frac{n+1}{(n)!}$$

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} = \frac{n+1}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n}$$

$$= \frac{n+1}{n(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{n}$$

$$= \frac{n+1}{n^2}$$

$\Leftarrow 1 > \frac{n+1}{n^2} \Leftarrow n^2 > n+1$

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{n+1}{n^2} < 1 \Rightarrow$$

W_n متناقصة تماماً" بدءاً من $n = 2$

0936 838 276 إعداد : محمود المحمود

4) $T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$T_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1}$

$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow$

T_n متزايدة تماماً"

ملاحظة: غالباً" لدراسة اطراد سلسلة، فنستعمل دوماً الفرق

السؤال الثاني:

1) نسمي القضية:

$E(n): \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

نثبت صحة القضية من أجل $n = 1$

$E(1): \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n:

$E(n): \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:

$E(n+1): \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{\ell_1} = \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\ell_2}$

$\ell_1 = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{\text{من الفرض}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{n}{n+1}_{(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}_{(1)}$

$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \ell_2 \Rightarrow$

محققة من أجل $n+1$

محققة من أجل n.

2) نسمي القضية: $E(n): (n+1)! \geq 2^n$

نثبت صحة القضية من أجل $n = 0$:

$E(0): 1! \geq 2^0 = 1$ ✓ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n:

$E(n): (n+1)! \geq 2^n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:

$E(n+1): (n+2)! \geq 2^{n+1}$

من الفرض: $(n+2) \times (n+1)! \geq 2^n$

$\Rightarrow (n+2)! \geq 2^n(n+2)$

$\Rightarrow (n+2)! \geq n.2^n + 2^{n+1} < 2^{n+1}$

$\Rightarrow (n+2)! \geq 2^{n+1}$

محققة من أجل $n+1$

محققة من أجل n.

السؤال الثالث:

$$a+b+c=\frac{13}{27} \quad ---- \ ①$$

$$a.b.c=\frac{1}{(27)^2} \quad --- \ ②$$

نعلم أنّ: $\Leftarrow b^2=a.c$

نعوض في ②: $\Leftarrow b^3=\frac{1}{(3^3)^2}$

$$b^3=\left(\frac{1}{3^2}\right)^3 \Rightarrow b=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{9}}$$

نعوض في المعادلتين ① و ②

$$a+\frac{1}{9}+c=\frac{13}{27} \Rightarrow$$

$$a+c=\frac{13}{27}-\frac{1}{\underset{(3)}{9}}=\frac{13-3}{27}$$

$$\Rightarrow a+c=\frac{10}{27} \quad --- \ \text{I}$$

$$a.\frac{1}{9}.c=\frac{1}{9^3} \Rightarrow$$

$$a.c=\frac{1}{81} \quad --- \ \text{II}$$

من II : $\boxed{c=\frac{1}{81.a}}$ ---- III

نعوض في I : $a+\frac{1}{81.a}=\frac{10}{27}$

$$\Rightarrow a^2+\frac{1}{81}=\frac{10a}{27} \quad \times 81$$

$$\Rightarrow 81.a^2+1=30a \Rightarrow$$

$$81a^2-30a+1=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=900-324=576 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=24$$

إما $a_1=\frac{30-24}{162}=\frac{6}{162}=\frac{1}{27}$

$$a_1=\frac{1}{27} \xrightarrow{\text{نعوض في III}} c_1=\frac{1}{3}$$

في هذه الحالة تكون:

$$a=\frac{1}{27}, \quad b=\frac{1}{9}, \quad c=\frac{1}{3}$$

$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{a}=3\\ \frac{c}{b}=3\end{array}\right\}$ $q=3>1 \Rightarrow$ تكون المتتالية متزايدة تماماً

أو $a_2=\frac{30+24}{162}=\frac{54}{162}=\frac{1}{3}$

$$a_2=\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{نعوض في III}} c_2=\frac{1}{27}$$

وفي هذه الحالة تكون:

$$a=\frac{1}{3}, \quad b=\frac{1}{9}, \quad c=\frac{1}{27}$$

$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{a}=\frac{1}{3}\\ \frac{c}{b}=\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ $q=\frac{1}{3}<1$ وتكون المتتالية متناقصة تماماً

$S = 5 \times \dfrac{-\frac{11}{3} - \frac{23}{3}}{2} = 5 \times \dfrac{-34}{6}$

$\Rightarrow \boxed{S = -\dfrac{170}{6} = -\dfrac{85}{3}}$

السؤال الخامس:

$U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 2}{U_n + 8}$

i) U_n ثابتة $\Leftarrow U_{n+1} = U_n$

$\dfrac{7U_n + 2}{U_n + 8} = U_n \Rightarrow$

$7U_n + 2 = U_n^2 + 8U_n \Rightarrow$

$U_n^2 + U_n - 2 = 0 \Rightarrow$

$(U_n + 2)(U_n - 1) = 0 \Rightarrow$

إما $U_n = -2 \Rightarrow U_0 = -2$

أو $U_n = 1 \Rightarrow U_0 = 1$

ii) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 2}{U_n + 8} \end{cases}$

1) $U_1 = \dfrac{7U_0 + 2}{U_0 + 8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

$U_2 = \dfrac{7U_1 + 2}{U_1 + 8} = \dfrac{\frac{7}{4} + 2}{\frac{1}{4} + 8}$

$U_2 = \dfrac{15}{33} \approx 0{,}5$

السؤال الرابع: $U_0 = -\dfrac{2}{3}, U_3 = -\dfrac{11}{3}$

1) $U_3 - U_0 = (3 - 0)r$

$-\dfrac{11}{3} + \dfrac{2}{3} = 3r \Rightarrow -\dfrac{9}{3} = 3r$

$\Rightarrow \boxed{r = -1}$

$U_2 - U_0 = (2 - 0)r$

$U_2 = 2r + U_0 = 2(-1) - \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{U_2 = -\dfrac{8}{3}}$

لدينا كما نعلم: في المتتالية الحسابية

$U_{n+1} - U_n = r = -1 < 0$

$\Leftarrow U_n$ متناقصة تماماً"

2) $U_n - U_0 = (n - 0)r \Rightarrow$

$U_n = nr + U_0 \Rightarrow$

$U_n = n(-1) - \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\boxed{U_n = -n - \dfrac{2}{3}}$

3) $S = U_3 + U_4 + \dots + U_7$

مجموع حدود متتالية حسابية

حدّها الأوّل: $a = U_3 = -\dfrac{11}{3}$

وحدّها الأخير: $l = U_7 = -7 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{23}{3}$

وعدد حدودها: $n = 7 - 3 + 1 = 5$

$S = n \cdot \dfrac{a + l}{2}$

نلاحظ: $0 < \frac{1}{4} < \frac{15}{33} \Leftarrow$

نميّز

$u_0 < u_1 < u_2$

أي أنّ المتتالية متزايدة $\Leftarrow$

لنثبت ذلك بالتدريج

نسمّي القضيّة: $E(n): u_{n+1} > u_n$

نثبت صحّة القضيّة من أجل $n=0$:

$E(0): \quad u_1 > u_0$

محققة ✓ $\frac{1}{4} > 0$

نفرض صحّة القضيّة من أجل n:

$E(n): \quad u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحّة القضيّة من أجل $n+1$:

$E(n+1): \quad u_{n+2} > u_{n+1}$

نفرض التابع: $f(x) = \dfrac{7x+2}{x+8}$

$$f'(x) = \frac{7(x+8) - 7x - 2}{(x+8)^2}$$

$$= \frac{7x + 56 - 7x - 2}{(x+8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{54}{(x+8)^2} > 0$$

f متزايد تماماً"

من الفرض لدينا: $u_{n+1} > u_n$

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$

محققة من أجل $n+1$ $\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

محققة من أجل $n \Leftarrow u_n$ متزايدة

2) نسمّي القضيّة: $E(n): 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

نثبت صحّة القضيّة من أجل $n=0$

$E(0): \quad 0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 1$ ✓ محققة

نفرض صحّة القضيّة من أجل n:

$E(n): \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

نبرهن صحّة القضيّة من أجل $n+1$:

$E(n+1): \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

نستفيد من تزايد التابع f

من الفرض لدينا: $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) \Rightarrow$

$0 < \frac{1}{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow$

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

محققة من أجل $n+1 \Leftarrow$

محققة من أجل n.

3) $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n - 1}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{7u_n+2}{u_n+8} + 2}{\frac{7u_n+2}{u_n+8} - 1}$$

$$= \frac{7u_n + 2 + 2u_n + 16}{7u_n + 2 - u_n - 8}$$

$$= \frac{9u_n + 18}{6u_n - 6} = \frac{9}{6}\left(\frac{u_n+2}{u_n-1}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n$$

$v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{2} = q$

$\Leftarrow$ v_n هندسيّة أساسها $q = \frac{3}{2}$

وحدّها الأوّل: $v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 - 1} = -2$

.b $v_n = v_0 . q^n \Rightarrow \boxed{v_n = -2\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \Rightarrow v_n u_n - v_n = u_n + 2$

$\Rightarrow v_n u_n - u_n = v_n + 2 \Rightarrow$

$u_n (v_n - 1) = v_n + 2 \Rightarrow$

$u_n = \frac{v_n + 2}{v_n - 1} \Rightarrow$

$$\boxed{u_n = \frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}}$$

.c $S_n = v_2 + v_4 + v_6 + \dots + v_{2n}$

مجموع حدود متتالية هندسيّة:

أساسها: $q' = q^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

وحدّها الأوّل: $a = v_2 = -\frac{9}{2}$

وعدد حدودها: $n = \frac{2n-2}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n$

$S_n = a \frac{1 - q'^n}{1 - q'} = -\frac{9}{2} . \frac{1 - \left(\frac{9}{4}\right)^n}{1 - \frac{9}{4}}$

$S_n = -\frac{9}{2} . \frac{1 - \left(\frac{9}{4}\right)^n}{-\frac{5}{4}} = -\frac{9}{2} \times \frac{-4}{5}\left(1 - \left(\frac{9}{4}\right)^n\right)$

$= \frac{18}{5}\left(1 - \left(\frac{9}{4}\right)^n\right) \Rightarrow$

$$\boxed{S_n = \frac{18}{5}\left(1 - \left(\frac{9}{4}\right)^n\right)}$$

السؤال السادس:

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 6u_n - 8u_{n-1} \end{cases}$$

1) $v_n = u_{n+1} - 2u_n$

$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1}$

$= 6u_{n+1} - 8u_n - 2u_{n+1}$

$= 4u_{n+1} - 8u_n$

$= 4(u_{n+1} - 2u_n)$

$v_{n+1} = 4 v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4 = q$

$\Leftarrow$ v_n هندسيّة أساسها $q = 4$

2) $w_n = u_{n+1} - 4u_n$

$w_{n+1} = u_{n+2} - 4u_{n+1}$

$= 6u_{n+1} - 8u_n - 4u_{n+1}$

$= 2u_{n+1} - 8u_n$

$= 2(u_{n+1} - 4u_n) = 2w_n$

$\Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = 2 = q \Rightarrow$

w_n هندسيّة أساسها $q = 2$

3)

$v_n = v_0 . q^n$

$\begin{cases} v_0 = u_1 - 2u_0 \\ v_0 = 2 \end{cases}$

$\boxed{v_n = 2(4)^n}$

$w_n = w_0 . q^n$

$\begin{cases} w_0 = u_1 - 4u_0 \\ w_0 = 2 \end{cases}$

$\boxed{w_n = 2(2)^n}$

لدينا:

$v_n = u_{n+1} - 2u_n$

$w_n = u_{n+1} - 4u_n$

بالطرح: $v_n - w_n = -2u_n + 4u_n$

$2(4)^n - 2(2)^n = 2u_n \Rightarrow$

$\boxed{u_n = (4)^n - (2)^n}$

$u_n = (2)^{2n} - (2)^n = 2^n(2^n - 1)$

$\Rightarrow \boxed{u_n = 2^n(2^n - 1)}$

4)

$u_n = 2^n(2^n - 1)$

طريقة 1:

$u_{n+1} - u_n =$

$2^{n+1}(2^{n+1} - 1) - 2^n(2^n - 1) =$

$2^n(2^{n+2} - 2 - 2^n + 1) =$

$2^n(4 . 2^n - 2^n - 1) =$

$2^n(3 . 2^n - 1) \Rightarrow$

$u_{n+1} - u_n = 2^n(3 . 2^n - 1) > 0$

$\Leftarrow$ u_n متزايد تماماً

طريقة 2:

$u_n = 2^n(2^n - 1)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(2^{n+1} - 1)}{2^n(2^n - 1)}$$

$$= \frac{2(2^{n+1} - 1)}{2^n - 1}$$

$2^{n+1} - 1 > 2^n - 1 > 0 \Rightarrow$

$\frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} > 1 \Rightarrow$

$\frac{2(2^{n+1} - 1)}{2^n - 1} > 1 \Rightarrow$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow$

u_n متزايدة تماماً

#MeEn MathTeam

X-Math πac

تدقيق : إيناس دللي

X-Math πac