Online center

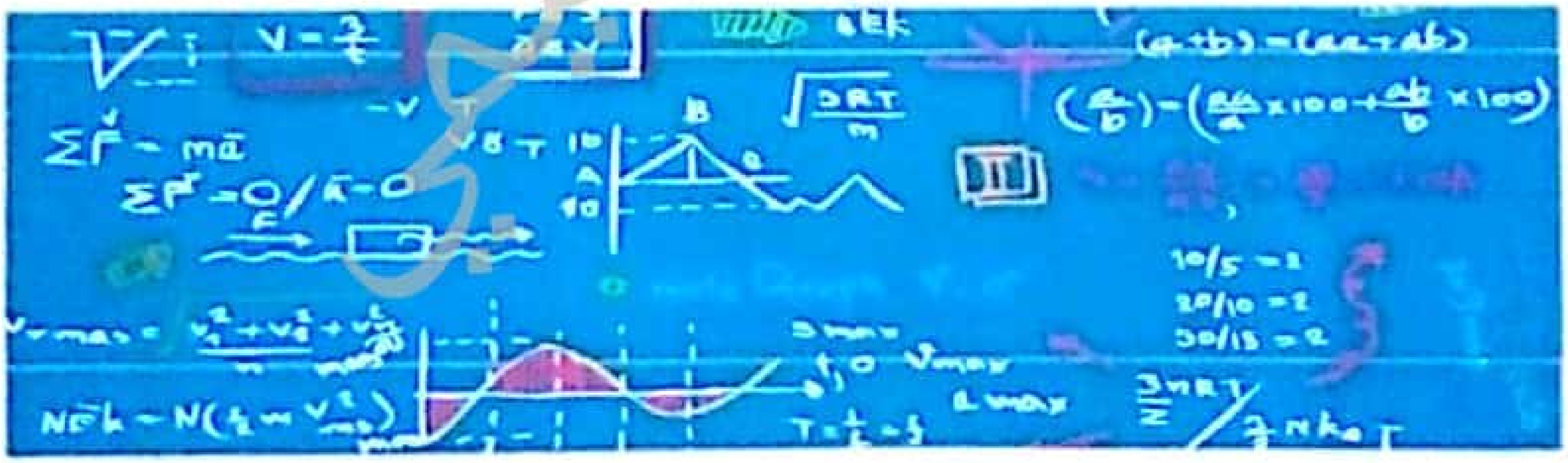
مركز أونلاين التعليمي

طريقك نحو الـ 600

أ.فارس جقل

رياضيات - للصف الثالث الثانوي العلمي

الجلسات الامتحانية المكثفة لمادة الرياضيات في مركز أونلاين لعام 2021



هذه المكثفة لا تنوب عن الكتاب المدرسي
إنما يستفيد منها الطالب بعد أن يتم دراسة المنهاج المقرر للتركيز
على الفقرات الهامة وأنماط المسائل التي تأتي في الامتحان

طريقك نحو الـ 600

مخطط أسئلة الامتحان النهائي ... بكالوريا رياضيات

(2021)

مركز أونلاين التعليمي

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية (40 درجة)

السؤال الأول :

- شكل خط بياني لتابع وأسئلة عليه
- جدول تغيرات تابع وأسئلة عليه
- أحسب Lim وأحسب تكامل
- مخطط شجري (أكمل أو استنتج قيمة احتمال)
- جدول قانون احتمالي لزوج من المتحولات العشوائية

السؤال الثاني

- عقدية
  - اكتب العدد العقدي بالشكل المثلثي أو الجبري أو الأسي
  - أوجد صورة العدد العقدي وفق (تحويلات هندسية)
  - حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية
  - أكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافق العدد العقدي
  - استنتاج Sin, cos اعتماداً على z_1/z_2
  - حل في C جملة المعادلتين أو جد عددين عقديين
  - تطبيق على دوموافر أو أويلر دورة 2017
- إثبات متراجحة
- حل في R المعادلات أو المتراجحات
- حل معادلة تفاضلية + حل مشترك جملة معادلتين
- جدول تجربة برنولية (بنك مكثفة الاحتمالات)
- تحليل توافقي
- *عدد النتائج المختلفة في مسألة سحب

شروحات مكثفة طريقك نحو ال600 على اليوتيوب قناة مركز أونلاين التعليمي افتح قوائم التشغيل

السؤال الثالث

- جد الأعداد C, b, a التي تحقق : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+}$
  (إثبات مقارب مع إيجاد التكامل ..تفريق كسور هام)
- أكتب معادلة المستوى المحوري ..
- المكعب
  - جد إحداثيات الرؤوس مع الرسم
  - إثبات علاقة + حساب مركبات أشعة
  - إثبات ارتباط خطي
- رباعي وجوه
- عين مجموعة النقاط التي تحقق
- اوجد نهاية تابع ثم عين $x \to A$ أو $x \to \infty$

طريقك نحو الـ 600

مخطط أسئلة الامتحان النهائي ... بكالوريا رياضيات

(2021)

مركز أوراس التعليمي

ثانياً : حل التمارين الآتية :(60 درجة)

التمرين الأول

- ادرس قابلية الاشتقاق واكتب معادلة المماس
- منشور في الحدين انشر أو عين الحد
- متتاليات (أثبت هندسية أو حسابية – اكتب U_n بدلالة n -أوجد نهاية متتالية أوجد حدود – أوجد مجموع الحدود ... – برهان متتاليتان متجاورتان – أثبت عنصر راجح أو قاصر -إثبات تزايد أو تناقص متتالية – دراسة التقارب (بنك مكثفة المتتاليات) – أثبت عدد $\leq U_n \leq$ عدد
- اكتب معادلة كرة + عين طبيعة النقاط

التمرين الثاني

- مسألة مخروط أو أسطوانة
- تطبيقات الأعداد العقدية
- الهندسة في الفراغ
  - برهان ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة(والعكس)
  - برهان أربع النقاط تقع على مستوي واحد
  - أثبت نقطة مركز أبعاد متناسبة أوعين مركز الأبعاد
  - أثبت أن المستقيمين متقاطعين + متعامدين + متوازيين + متخالفين
  - إيجاد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين
  - حجم الهرم + إيجاد إحداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية
  - إثبات (إيجاد) مستقيم فصل مشترك لمستويين
  - إثبات مستوي يمس الكرة
  - مسقط نقطة على مستو
  - بعد نقطة عن مستو + بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين ...تقاطع 3 مستويات
  - إثبات مثلث قائم و حساب مساحته
  - اكتب المعادلات الوسطية لمستقيم
  - الوضع النسبي لمستقيم مع مستوي
  - إيجاد معادلة مستوي يعامد مستوي ويمر بنقطتين
- مراجعة النماذج الوزارية + اختبارات الكتاب

التمرين الثالث

- برهان أو إيجاد نهاية عن طريق التعريف

التمرين الرابع

- إثبات مقارب مائل + مسألة هرم أو مكعب

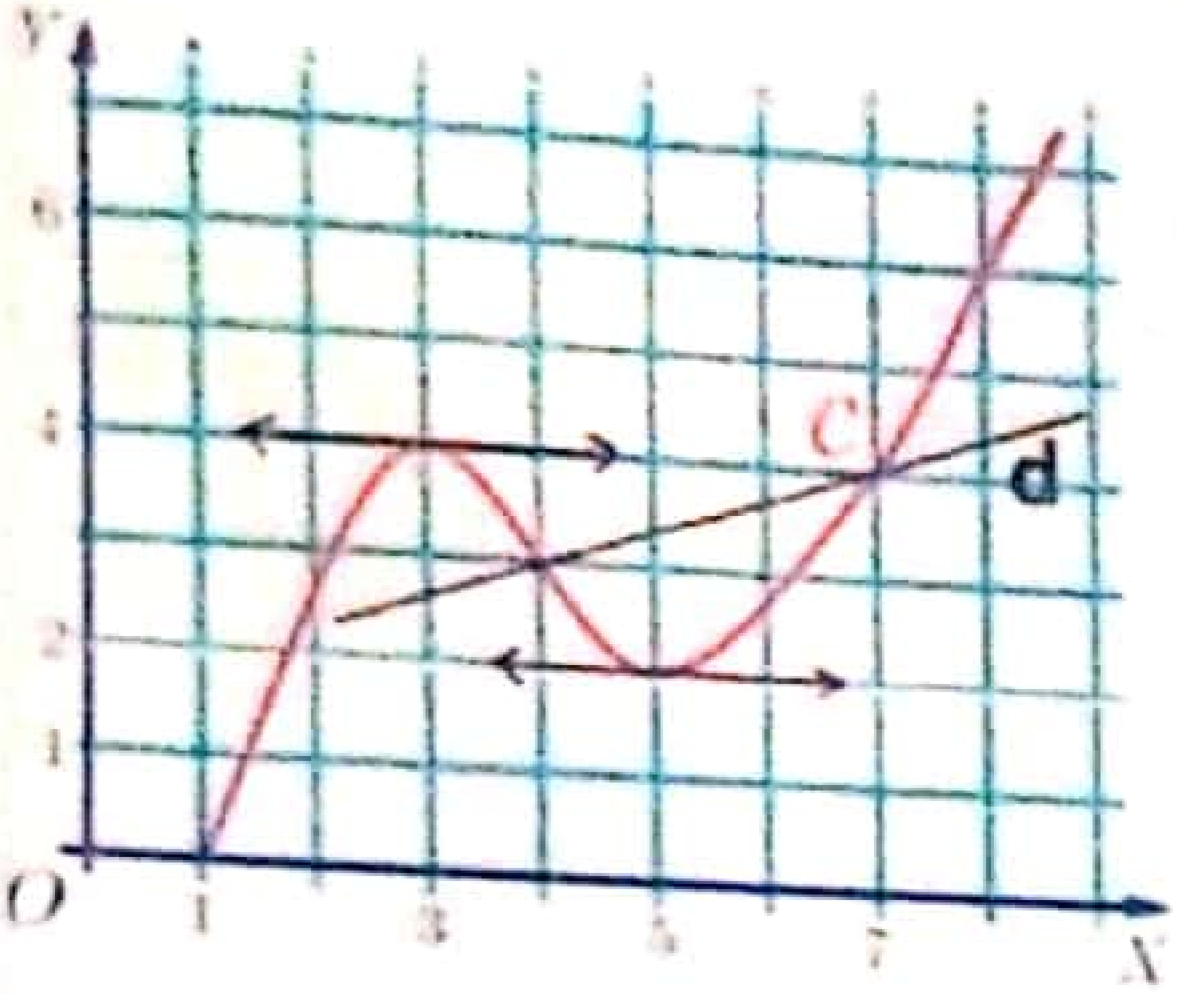
ثالثاً : حل المسائل التالية : (مسألتين لكل مسألة 100 درجة)

- مسألة هندسة .. مكعب أو متوازي مستطيلات
- دراسة تغيرات لم حساب مساحة ضمنه سؤال مؤكد..
- مسألة احتمالات
  - متغير عشوائي..هام..
  - راجع بنك الاحتمالات

أحدهما

قراءة الخط البياني لتابع

تمرين



في الشكل المجاور نجد الخط البياني للتابع f ..المطلوب :

1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(1), f(3), f(5), f'(3), f'(5)$
4. أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها 3
5. أوجد معادلة المستقيم d
6. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$
7. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

الحل

1) $D_f = [1, +\infty[$

2) $[0, +\infty[$

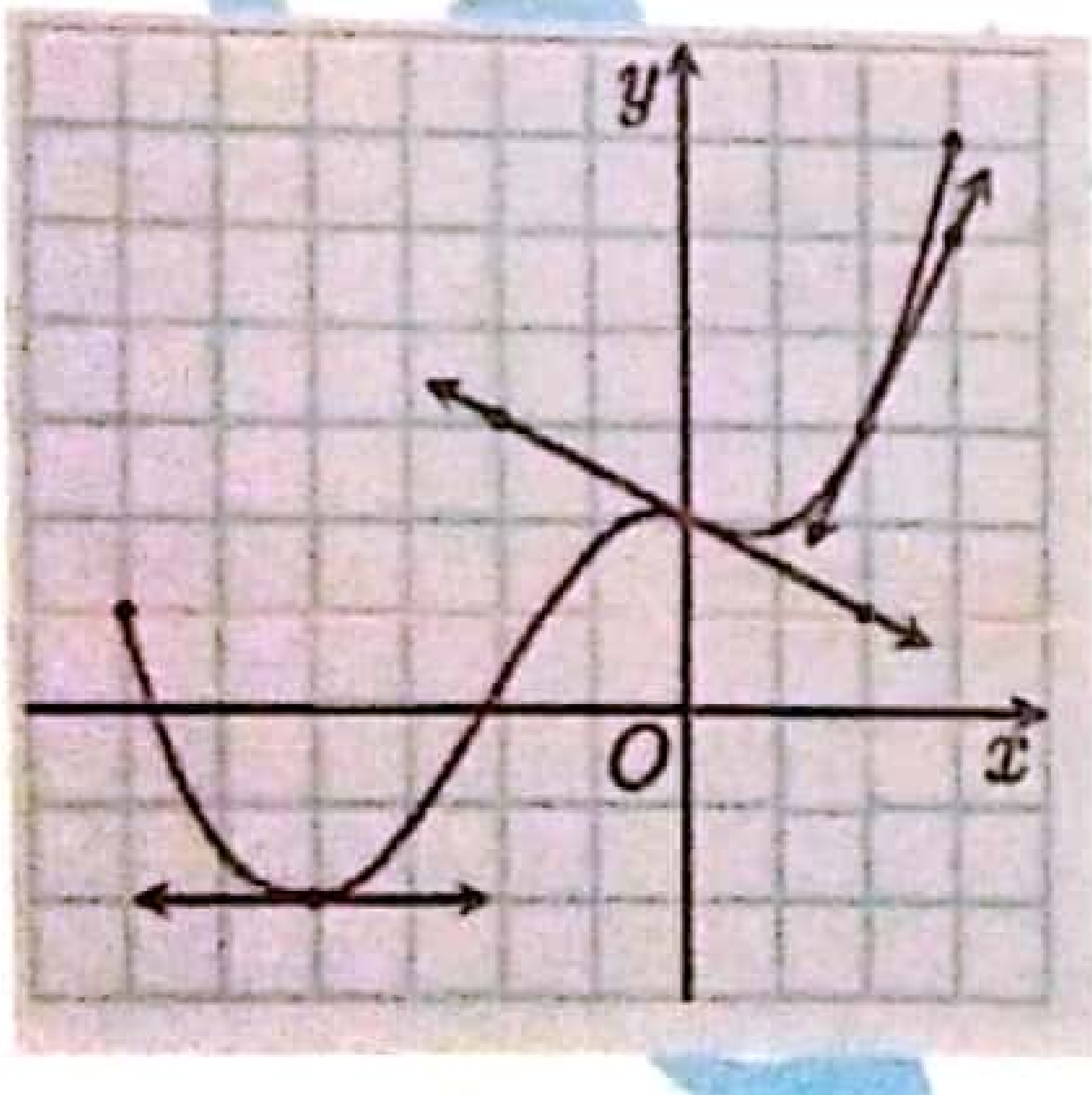
3) $f(1) = 0$ ، $f(3) = 4$ ، $f(5) = 2$ و $f'(3) = 0$ و $f'(5) = 0$

4) $y = 4$

5) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

6) $[3, 5]$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$

تمرين



ليكن الخط البياني للتابع f والمطلوب :

1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(0), f(-4), f(2)$
4. أوجد $f'(0), f'(-4), f'(2)$
5. اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع في النقطة $(2, 3)$
6. ما حلول المعادلة $f(x) = 1$
7. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 3$
8. أوجد $f(\,]-2, 2[\,)$

الحل

1. $D_f = [-6, 3]$
2. $[-2, 6]$
3. $f(2) = 3$ ، $f(-4) = -2$ ، $f(0) = 2$
4. $f'(2) = 2$ ، $f'(-4) = 0$ ، $f'(0) = -\frac{1}{2}$
5. من الطلب السابق : $m = f'(2) = 2$ ⟸ $y = 2x - 1$
6. $x = -6$ و $x = -1.5$
7. $[2, 3]$ .8 $]0, 3]$

قراءة جدول التغيرات

تأمل جدول تغيرات التابع f.. و المطلوب :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

1. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. اكتب معادلات المقاربات الأفقية و الشاقوليه للتابع f .
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.
4. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f ثم حل المتراجحة $f'(x) > 0$.

هام : مراجعة النماذج النهائية الشاملة لمركز أونلاين

الحل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
2. $y = 0$ (أفقي) ، $x = 1$ (شاقولي)
3. حل وحيد
4. $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ، $]-1 , 1[$

فارس جقل يشعر بالسعادة مع **Hadi Alkhrfan** و٣٣ من الأشخاص الآخرين.
٢٠٢٠ ·

أطباء #سوريا المستقبل
زين هادي منار نجوى سارة هنادي هبة
محمد شادي جودي وئام الأيهم تالا
زهير علي مايا ميس لجين أحمد بشار
جعفر حيدر ايهاب ساندي شهد راما
رمضان رغد دعاء ريما محمود علي
بشار مجد شمس تبارك زينه
..انتظرت هذا اليوم كتيرا لكي أفرح بنجاحكم وأهنئكم
هنيئا لنا ولأهاليكم ولسوريا بكم ..فأنتم أملنا و مستقبلنا

#هامش: يلي نسيان حطلو اشارة أو نسيان اسمو يكتبلي بالتعليقات

تمرين

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف و المستمر على R وخطه البياني C المطلوب :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	3	↘	-2	↗	4	↗	$+\infty$

1) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C .
3) هل $f(2) = 4$ قيمة حدية محلياً ؟
4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في R
5) أوجد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 2 .
6) ماعدد حلول المعادلة $f(x) - e = 0$

الحل

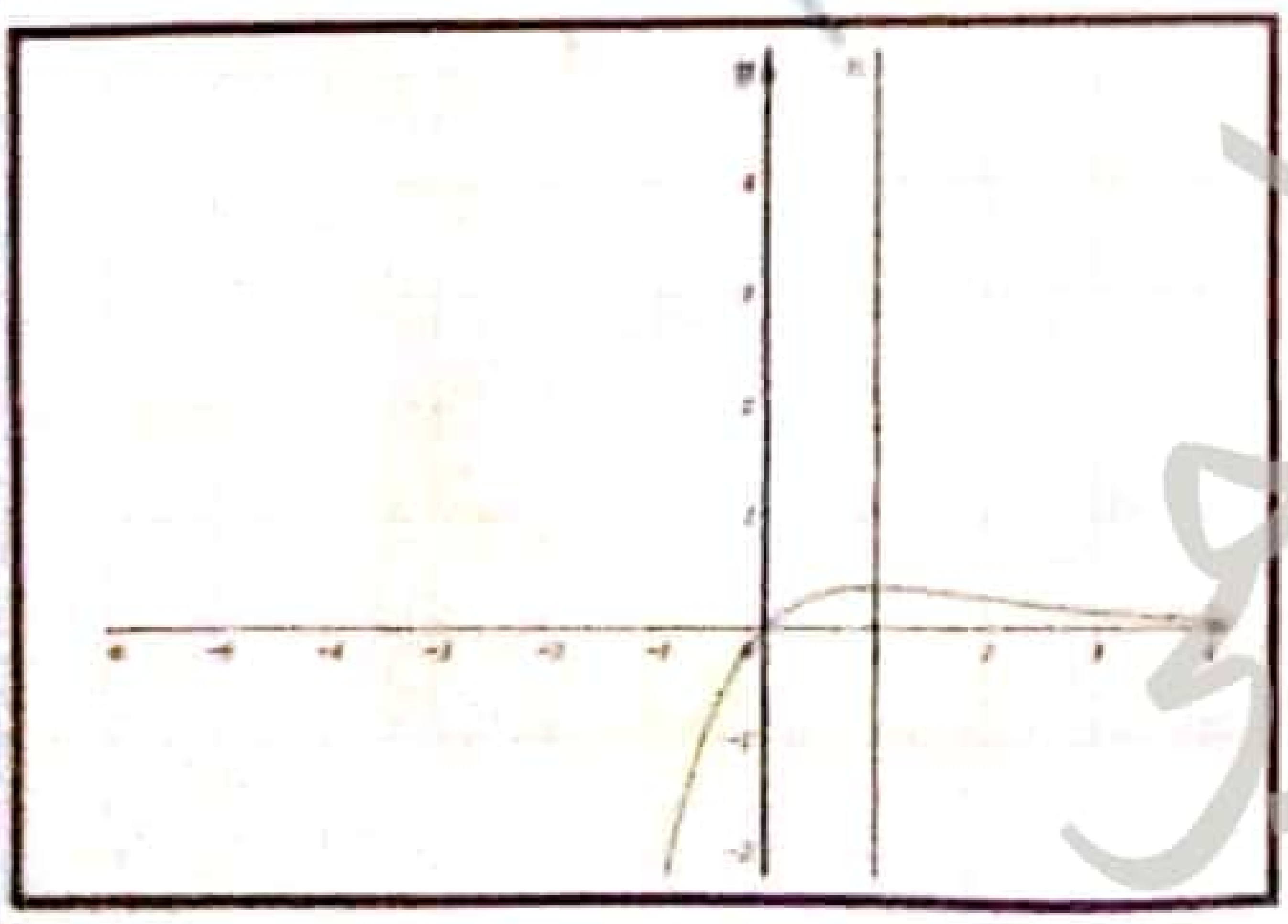
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$
2) معادلة المقارب الأفقي هو $y = 3$
3) كلا ، ليست قيمة حدية.
4) حلان.
5) $y = 4$
6) حلان .

تمرين

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

ليكن الجدول المجاور :
1) أوجد مجموعة التعريف.
2) كم عدد القيم المحلية ، وما هي؟
3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟
4) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
5) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$
6) بفرض أن التابع $f(x) = xe^{-x}$ احسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور xx' المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 0$
7) ارسم الخط البياني اعتماداً على الجدول.

الحل



1) $D =]-\infty , +\infty[$
2) قيمة محلية واحدة هي $f(1) = \frac{1}{e}$
3) $y = 0$ (أفقي)
4) حل وحيد (ينتمي للمجال $]-\infty , 1[$)
5) لا يوجد حلول.
6) نقاط مساعدة $(0,0)$
7) $S = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

بالتجزئة : نفرض $u = x \Rightarrow \grave{u} = 1$

$u = x \Rightarrow \grave{u} = 1$

$$\acute{v} = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}.1dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-1)$$

$$= -\frac{2}{e} + 1$$

8) اوجد قيمة المشتق عند x=1 واكتب معادلة المماس عند هذه النقطة. (وظيفة)

ملاحظات حول النهايات

1) عندما يكون مضمون الـ sin و cos

- $\infty \Leftarrow$ مبرهنة الاحاطة
- $0 \Leftarrow \lim\limits_{\bullet\to 0} \frac{\sin \bullet}{\bullet} = 1$

* تدل على أي مقدار

2) تابع جذر تربيعي

- اخراج عامل مشترك
- الضرب بالمرافق

3) تابع صحيح أو تابع كسري حدودي نعوض ب الحد المسيطر ل x في البسط والمقام عند (∞)

4) في حالة $(0\ \infty)$ تابع أسي و لوغارتمي نستخدم :

$$\lim_{x\to 0^+} (x.\ln x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x.e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} (x.e^{x}) = 0$$

$$\cos(\bullet) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\bullet}{2}\right)$$

$$2\cos^2(\bullet) = 1 + \cos(2\bullet)$$

$$\cos(3\bullet) = 4\cos^3(\bullet) - 3\cos(\bullet)$$

$$\sin(3\bullet) = 3\sin(\bullet) - 4\sin^3(\bullet)$$

$$\sin(2\bullet) = 2\sin(\bullet)\cos(\bullet)$$

5) في حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

نخرج عامل مشترك في البسط والمقام ونختصر ثم نعوض

6) في حالة $\frac{0}{0}$:

أ) نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم lim (تابع كسري).

ب) في التابع الكسري الجذري (نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ثم نختصر ثم نوجد lim).

ج) توابع كسرية لوغاريتمية وأسية نخرج عامل مشترك من البسط و المقام ونختصر ونطبق :

$$\lim_{\bullet\to 0} \frac{\ln(\bullet+1)}{\bullet} = 1 \qquad \lim_{\bullet\to 0} \frac{\bullet}{e^{\bullet}-1} = 1$$

نهايات مميزة

- $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$
- $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e$

أهم أنماط النهايات

وظيفة أوجد النهايات التالية:

1- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}$

2- $\lim_{x\to 3}|x-3|\cos^2\left(\frac{1}{x-3}\right)$

3- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

4- $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4\cos x}{x^2}$

5- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cos x}{3x^2}\right)$

6- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)$

7- $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x}$

8- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{3x}}{x}$

9- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x}$

10- $\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln(1+x)$

11- $\lim_{x\to+\infty}(3+e^x)-x$

12- $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}$

13- $\lim_{x\to+\infty}x-\sin x$

14- $\lim_{x\to-\infty}x\,.\,2^x$

15- $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-e^x$

16- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

17- $\lim_{x\to+\infty}\left(x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

تمرين محلول

احسب $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

$$= \frac{1-\cos x(0)}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ (عدم تعيين)

$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\,\sin x}{x} \quad \frac{\sin x}{x}\to 1$$

$$= 2(0)(1) = 0$$

1) $\lim_{\bullet\to\infty}\frac{\ln\bullet}{\bullet} = 0$

2) $\lim_{\bullet\to\infty}\frac{\bullet}{\ln\bullet} = \infty$

3) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{\ln(1+\bullet)}{\bullet} = 1$

4) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{\bullet}{\ln(1+\bullet)} = 1$

1) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{1-e^{\bullet}}{\bullet} = -1$

2) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{e^{\bullet}-1}{\bullet} = 1$

3) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{\bullet}{e^{\bullet}-1} = 1$

4) $\lim_{\bullet\to+\infty}\frac{e^{\bullet}}{\bullet^n} = +\infty$, 5) $\lim_{\bullet\to+\infty}\frac{\bullet^n}{e^{\bullet}} = 0$

مــثـــال

برهن أن $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$

نفرض البسط كاملاً:

$$f(x)=ln(1+x)$$

$$f(a)=f(0)=ln(1+0)=ln(1)=0$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow \acute{f}(a)=\acute{f}(0)=1$$

$$\acute{f}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نعوض بالقانون:

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-0}{x-0}$$

مــثـــال

الطريقة الامتحانيه للسوال : ليكن $f(x)=e^x-1$ والمطلوب :

أوجد $\acute{f}(0)$ ثم اوجد $f(0)$، $f(x)$ ، ثم استنتج $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

$$f(0)=1-1=0$$

$$\acute{f}(x)=e^x$$

$$\acute{f}(0)=e^0=1$$

نعوض بالقانون: $1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-0}{x-0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

وظيفة أوجد نهاية :

1) $\lim_{x\to ln2}\frac{e^x-2}{x-ln2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{xlnx}{x-1}$

3) $f(x)=\frac{tan\,x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x=1$

5) $\lim_{x\to\pi}\frac{sin\,x}{x-\pi}$

دراسة قابلية الاشتقاق في a

(التابع f مستمر في a)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$\Downarrow$

عدد حقيقي	∞
$\Downarrow$	$\Downarrow$
قابل للاشتقاق	غير قابل للاشتقاق

مثال

ادرس قابلية الاشتقاق عند $x = 1$ من اليمين للتابع $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

التابع مستمر على $]1,0]$

$$f(a) = f(1) = 1 - 2\sqrt{1-1} = 1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-2\sqrt{x-1}-1}{x-1} = \frac{1-2\sqrt{1-1}-1}{1-1}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ عدم تعيين}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$= 1 - \infty = -\infty$$

التابع غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$

إثبات المقارب المائل

سؤال إجباري

نطبق ما يلي :

1) نوجد $f(x) - y_\Delta$

2) نبرهن أن $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

دراسة الوضع النسبي للمقارب المائل و المقارب الأفقي

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$ و نميز حالتين :

-1 $f(x) - y_\Delta > 0$ فالخط C يقع فوق Δ

-2 $f(x) - y_\Delta < 0$ فالخط C يقع تحت Δ

-3 $f(x) - y_\Delta = 0$ (نقطة تقاطع)

مـثـال

ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5} - 2x$ واستنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

لاستنتاج معادلة المقارب المائل

1. نوجد $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
2. نوجد $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$
3. نعوض بالمعادلة $y = ax + b$

$$f(x) = \sqrt{4x^2+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5} = \sqrt{4(+\infty)^2+5} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \frac{|x|.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x} = \frac{x.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$= \sqrt{4+\frac{5}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \sqrt{4+\frac{5}{+\infty}} = \sqrt{4} = 2 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+5} - 2x) = +\infty - \infty$$ (عدم تعيين)

نضرب بالمرافق

$$= \frac{(\sqrt{4x^2+5} - 2x)(\sqrt{4x^2+5} + 2x)}{\sqrt{4x^2+5} + 2x}$$

$$= \frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x} = \frac{5}{+\infty} = 0 = b$$

المقارب المائل: $y = ax + b$

$\Leftarrow y = 2x$

" لا تقل: لا أقدر .. عبارة يجب شطبها او استبدالها بأخرى " مالذي يمكن فعله

فكل شخص يختار طريقه.

فإذا اخترت الهزيمة لنفسك، فعليك ان تتحمل النتائج.

"لذا كن شجاعا" واختر الطريق الصحيح حتى لو كان صعبا

مثال

ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$:

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 4$ مستقيم مقارب للخط C عند كل من $+\infty$ و $-\infty$

ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ

الحل :-

$$f(x) = (x-4) + \frac{5}{x+2}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{5}{x+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

مما سبق نستنتج ان المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 4$ مستقيم مقارب للخط C

لدراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta = \frac{5}{x+2}$

في المجال : $]-\infty, -2[$ يكون $f(x) - y_\Delta < 0$ فالخط C يقع تحت Δ

في المجال : $]-2, +\infty[$ $f(x) - y_\Delta > 0$ فالخط C يقع فوق Δ

.....(يمكن أن ننظم جدول الوضع النسبي)

تطبيق هام

ليكن التابع المعرّف على $]0, +\infty[$ حيث: $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$

أثبت أن $\Delta: y = x$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لل

خط C بالنسبة للمقارب Δ

الحل

$$f(x) - y_\Delta = \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

ايا كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $\ln(x+1) > \ln(x)$ أي $f(x) - y_\Delta > 0$ فالخط C يقع فوق Δ

مثال (وظيفة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = -2x$ مستقيم مقارب للخط عند $-\infty$

دراسة تغيرات تابع (سؤال إجباري 100 درجة)

مسألة هامة

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

والمستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = x - 1$ ، المطلوب :

1) اثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ و ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ
2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ثم ارسم كل مقارب وجدته وارسم C
3) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C و Δ والمستقيمين $x = 0, x = 2$

الحل

1) f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{-\infty}{+\infty}$$ (عدم تعيين)

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$ (بعد اختصار x)

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

Δ مقارب لـ C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي :

$f(x) - y_\Delta > 0$ لأن $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ فالخط C يقع فوق Δ

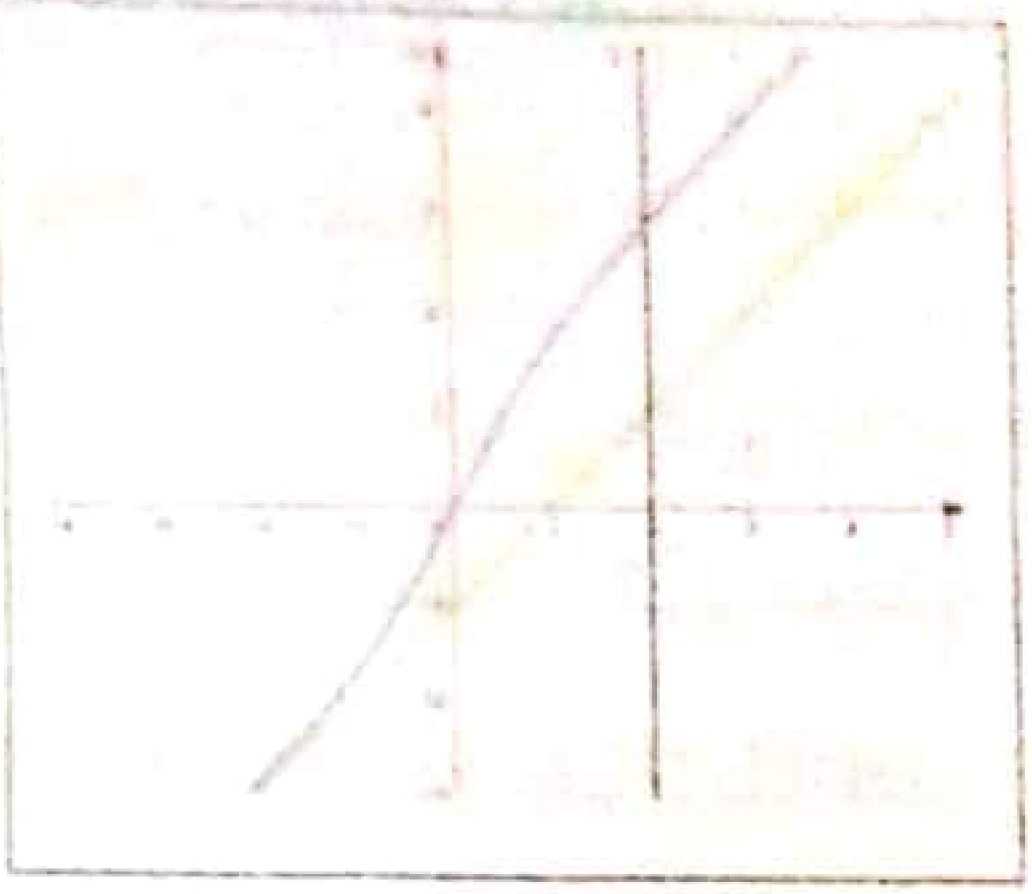
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) دراسة التغيرات :

f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} > 0$$



$S = \int_0^2 [f(x) - y_\Delta]\, dx$ (3

$= \int_0^2 (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})\, dx \qquad = \sqrt{5} + 1$

مسألة هامة

أولاً : ليكن التابع g المعرف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة : $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

أوجد العددين الحقيقيين a و b علماً أن التابع g يقبل قيمة حدية محلياً عند $x = 0$ قيمتها تساوي 2

ثانياً : بفرض التابع f المعرف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة : $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$ و خطه البياني C

1) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب للخط C
2) أوجد نهايات التابع f عند حدود مجموعة تعريفه
3) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ، واستنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]-3, -2[$
4) ارسم المقاربات ثم ارسم الخط C

الحل

أولاً: $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

$g(0) = 2$ نعوض النقطة $(0, 2)$ بالتابع:

$$2 = \frac{0+0+a}{-1} \Rightarrow a = -2$$

$g'(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{(2x+b)(x-1) - 1(x^2+bx+a)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(0+b)(-1) - a}{1}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-b-(-2)}{1} \Rightarrow 0 = -b + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2}$$

ثانياً: $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$

1- $f(x) - y_\Delta = x + 3 + \frac{1}{x-1} - (x - 3)$

$$= \frac{1}{x-1}$$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad y = x + 3$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

وبنفس الطريقة عند $-\infty$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- ‖ -	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	6	↗ $+\infty$

دراسة التغيرات:

التابع مستمر واشتقاق على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 4 - \infty = -\infty$$

$x = 1$ مقارب $y\acute{y}$ والخط C على يساره.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 4 + \infty = +\infty$$

$x = 1$ مقارب // $y\acute{y}$ والخط C على يمينه.

$$\acute{f}(x) = 1 + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow |x-1| = 1$$

إما $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$

$$f(-2) = \frac{2}{3}, f(-3) = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f(-3).f(-2) < 0$$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

لرسم المقارب: $y = x + 3$

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \ (0,3)$

$y = 0 \Rightarrow x = -3 \ (-3,0)$

لرسم الخط البياني:

نوجد نقط مساعدة (نقاط التقاطع مع المحورين)

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x-1} = x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12$$

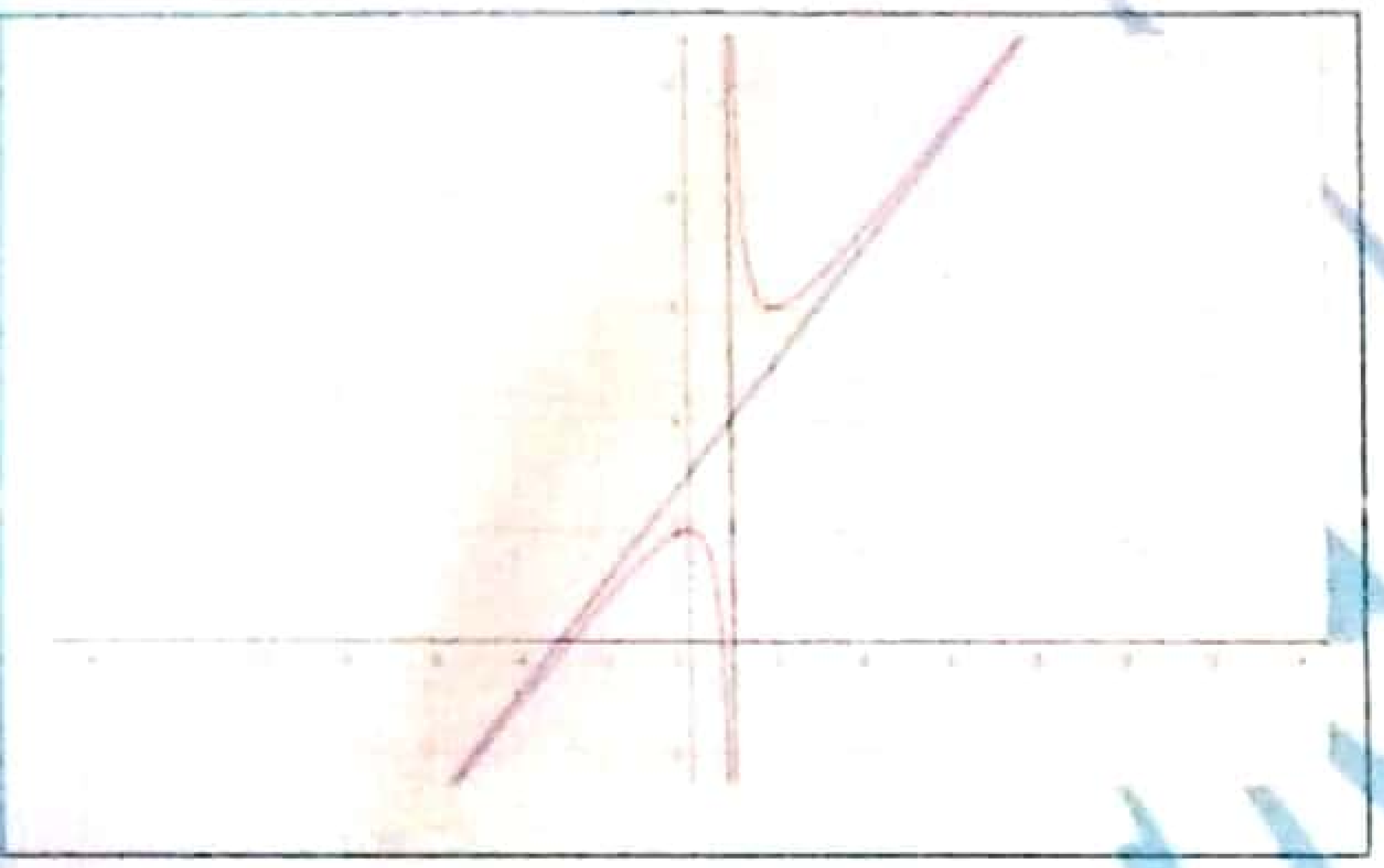
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.7$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$$

قيمة محلية كبرى $f(0) = 2$

قيمة محلية صغرى $f(2) = 6$



تمرين: ادرس تغيرات التابع $f(x) = x\ln x$

التابع مستمر و اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{1-e}{e}$	↗	$+\infty$

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحورين الاحداثيين والمستقيم $x = \frac{1}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(x+3) + \frac{1}{x-1}\right]\ dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

ثم نعوض .....

مسألة هامة جداً

ليكن التابع $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ المعرف على R..المطلوب :

1) أثبت أن التابع فردي واستنتج الصفة التناظرية له .
2) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' وعيّن وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته .
3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
4) أوجد معادلة المماس في النقطة $(0,0)$
5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .
6) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = 0, x = \ln 2$
7) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$ (وظيفة)

الحل

1) $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

* $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$

$$= \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الاحداثيات

2) التابع مستمر على R

في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Leftarrow y = -1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$ والخط البياني C يقع فوق المقارب لأن :

$$\forall x \in R \Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{e^x-1}{e^x+1} + 1 = \frac{2e^x}{e^x+1} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Leftarrow y = 1$ مستقيم مقارب للخط C

في جوار $+\infty$ والخط البياني C يقع تحت المقارب لأن :

$$\forall x \in R \Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{e^x-1}{e^x+1} - 1 = \frac{-2}{e^x+1} < 0$$

3) $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ التابع متزايد تماماً

4) $y = \frac{x}{2}$

6) الخط البياني C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0, \ln 2]$

$$\Leftarrow S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx$$

لحساب هذا التكامل يمكن كتابة f بالشكل :

$$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{-2}{e^x+1} = 1 + \frac{-2}{e^x+1} = 1 + \frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx = \int_0^{\ln 2}\left(1 + \frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx = \ln\frac{9}{8}$$

تذكر !!

$e^x e^{-x} = 1$

تمرين هام جداً

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = ae^{2x} + be^x + 1 \;\; ; \;\; a, b \in R$

أولاً : عيّن قيمة كلاً من a, b إذا علمت أن للتابع f قيمة كبرى أو صغرى محلياً تساوي الصفر عندما $x = 0$

ثانياً : بفرض $a = 1$ و $b = -2$ يصبح التابع ..

$f(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$ ..والمطلوب :

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، واستنتج معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' أو yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته

2) استنتج من تغيرات f أن للمعادلة $e^{-x} + e^x = 2$ حلاً وحيداً .. أوجد هذا الحل .

3) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y = 1$ والمحور yy'

الحل

أولاً: التابع f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي من أجل $x = 0$

ولدينا $f(0) = 0$ قيمة كبرى أو صغرى محلياً

$$\Rightarrow \star \quad \boxed{a + b + 1 = 0}$$

وأيضاً : $f'(0) = 0$ نشتق التابع $f'(x) = 2ae^{2x} + be^x$

$$\Rightarrow \star\star \quad \boxed{f'(0) = 2a + b = 0}$$

بالحل المشترك بين $\star$ و $\star\star$ نجد : $a = 1$ و $b = -2$

ثانياً :

1) دراسة التغيرات على الطالب :

لدراسة الوضع النسبي بين الخط والمستقيم $y = 1$

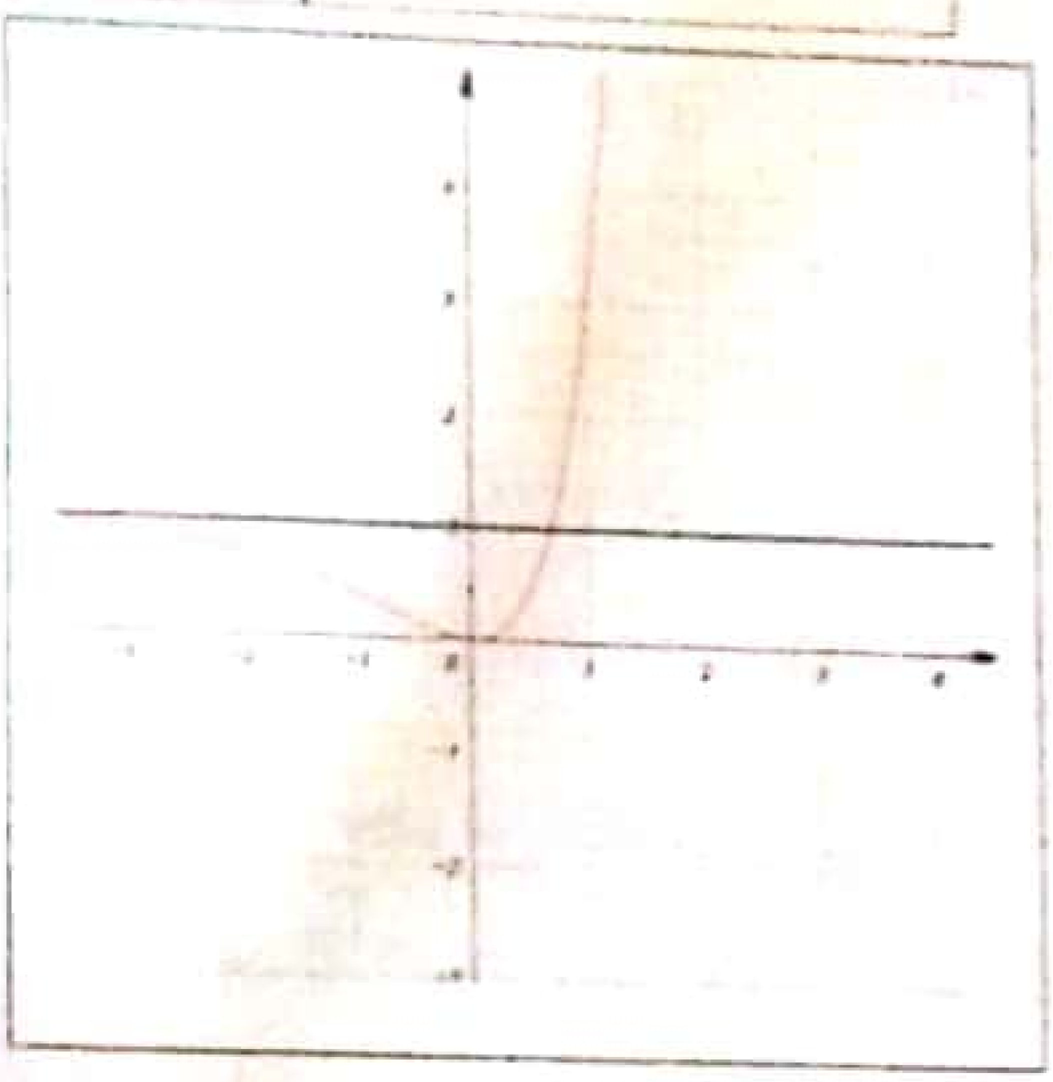
$$f(x) - y_\Delta = e^{2x} - 2e^x = e^x(e^x - 2)$$

سندرس الاشارة :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	||	-	0	+	
	C يقع تحت Δ				C يقع فوق Δ

الخط C يشترك مع Δ بالنقطة $(\ln 2, 1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$



2) المعادلة $e^x + e^{-x} = 2$ تكافئ $e^x + \frac{1}{e^x} = 2$

$$\Rightarrow e^{2x} + 1 = 2e^x$$

أي المطلوب : $f(x) = 0$

ومن الجدول نجد أن لهذه المعادلة حل وحيد هو $x = 0$

3) $$S = \int_0^{\ln 2} [y_\Delta - f(x)] \, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (-e^{2x} + 2e^x) \, dx$$

$$= [-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}$$

اهم انماط التغيرات

1) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x$ $\quad D = [1, +\infty[$

2) $f(x) = x + \frac{e^x}{e^x+1}$ $\quad D = R$

3) $f(x) = \ln(\frac{x-2}{2+x})$ $\quad D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

4) $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$ $\quad D = R/\{-1\}$

5) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad D = R$

6) $f(x) = (x-1)e^x$ $\quad D = R$

7) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ $\quad D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

8) $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ $\quad D = R$

9) $f(x) = \exp(\frac{x}{x^2+1})$ $\quad D = R$

10) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+x-2}$ $\quad D = R/\{-2, 1\}$

11) $f(x) = \ln(1+x) - x$ $\quad D =]-1, +\infty[$

12) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\quad D =]0, +\infty[$

13) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

14) $f(x) = x - \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

15) $f(x) = x - x \cdot \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

16) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$ $\quad D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

بنك المسائل الهامة

المسألة الأولى :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = 3e^x - x - 3$

1. أثبت أن المستقيم $d: y = -x - 3$ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي ، ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .
2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر و الآخر α و أثبت أن $-3 < \alpha < -2$
3. ارسم الخط البياني واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور ox و المستقيم $x = \ln 2$

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

برهن أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخطين C و d

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 + 2\ln(\frac{x}{x-1})$ .. والمطلوب :

1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم أثبت أن المستقيم $d: y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C
3. لتكن متتالية معرفة على $n > 1$ وفق $U_n = f(n)$ جد نهاية هذه المتتالية $(U_n)_{n>1}$
4. لتكن $S_n = u_2 + \dots + u_n$ أوجد S_n وما نهاية $(S_n)_{n\geq 2}$

المسألة الرابعة :

ليكن التابع $x \to f(x) = x - \ln x$ المعرف على $I =]0, +\infty[$..والمطلوب :

1. جد $f(1)$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال ثم $f'(1)$
2. ما نهاية $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$

المسألة الخامسة :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على وفق : $f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$ و $g(x) = x\sqrt{x}$

أثبت أن g اشتقاقي عند 0 ثم استنتج أن f اشتقاقي عند 0 ثم أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

1) أثبت أن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
2) هل $\Delta_2 : y = x + 2$ مقارب للخط C عند $-\infty$ ؟ وادرس الوضع النسبي .
3) ادرس تغيرات f وارسم C مع رسم المقاربات .

المسألة السابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-1,+1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^3-x+2}{x^2-1}$

1) أثبت أن المستقيم $d : y = x$ مقارب مائل للخط C
2) احسب A, B حيث $f(x) = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ وجد $I = \int_0^t [f(x) - x] \quad dx$
3) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم d والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

المسألة الثامنة :

ليكن التابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ .. وفق : $f(x) = x - 1 - \ln x$ و خطه البياني C

1) ادرس تغيرات التابع و بين القيم الكبرى و الصغرى محلياً
2) استنتج من تغيرات التابع أن $\ln x < x$ أياً كانت $x \in]0, +\infty[$
3) ارسم الخط البياني C
4) أثبت أن التابع $g(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x$ تابع أصلي للتابع f على المجال $]0, +\infty[$

المسألة التاسعة :

ليكن f المعرف على R وفق $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$ وخطه البياني C

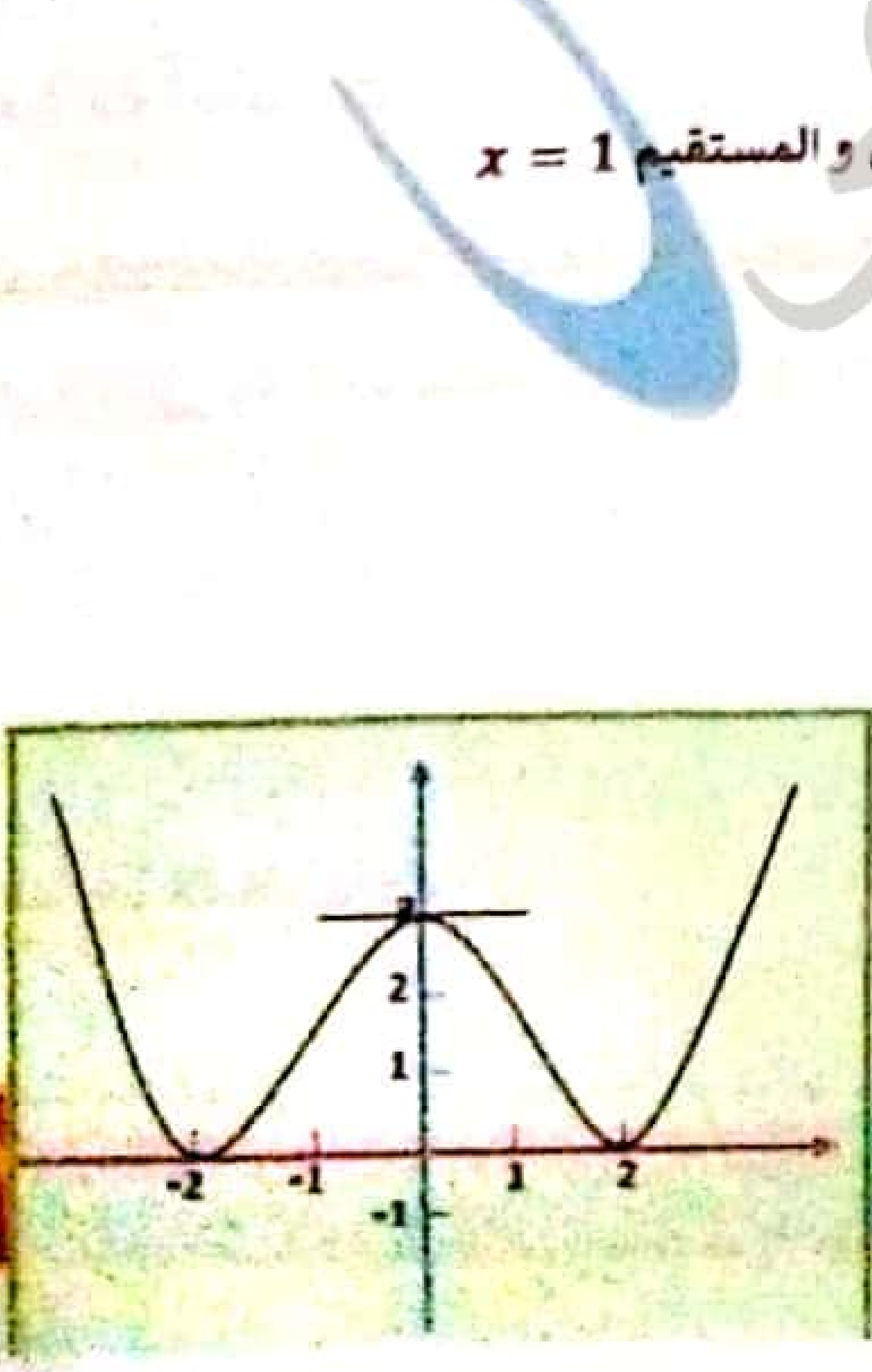
1) أثبت أنه أياً كانت $x \in R$ فإن :

أ- $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$ ب- $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
3) أثبت أن للمعادلة $x(e^x + 1) = e^x - 1$ حل وحيد ثم أوجده
4) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيم $x = 1$

المسألة العاشرة : في الرسم المجاور :

1) كم حل للمعادلة $f(x) = 1$



2) ما هي قيمة $f'(0)$

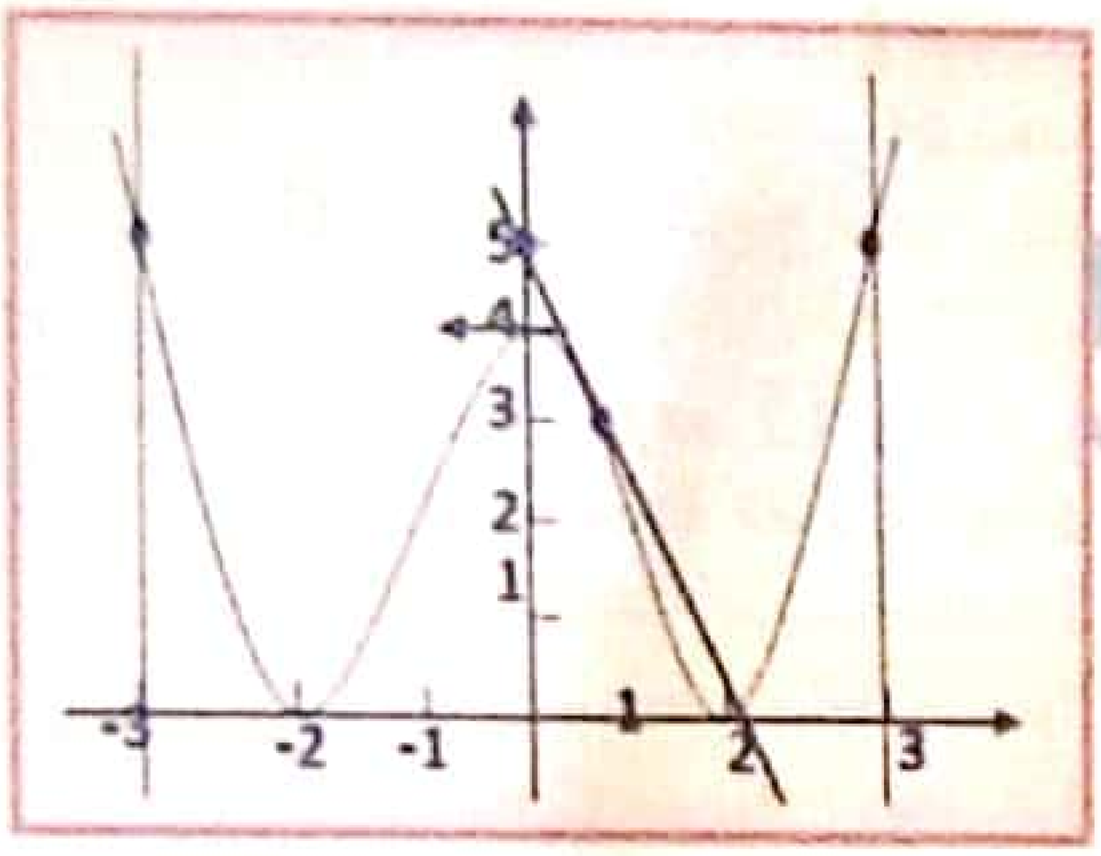
3) كم عدد القيم الحدية الظاهرة بالشكل ، وما هي ؟

4) عين $f(\,]-2,2[\,)$

5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

المسألة الحادية عشر :

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب :



a) أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي .

b) هل التابع زوجي أم فردي؟ علل ذلك.

c) أوجد $f(1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(-1)$.

d) أوجد $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$

e) أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1).

f) أوجد $f(\,]-2,2[\,)$

g) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$.

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

h) نظم جدول تغيرات التابع.

المسألة الثانية عشر :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -1$	

) ما هي القيم الحدية المحلية؟ و ما نوعها ؟

2) هل يوجد مقاربات مائلة؟

3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟

4) ما هي عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ ، واحصرها بمجالات.

5) أوجد مجموعة تعريف التابع f

6) أكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x = 1$

7) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

8) برهن أن للمعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد.

9) أكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = \ln(f(x))$

المسألة الثالثة عشر : نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	$1 \parallel -2$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -3$

2) عين مجموعة تعريف التابع f

3) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C

4) هل يوجد مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه ؟

5) هل f إشتقاقي عند 3 ؟

6) عين القيم الحدية للتابع f ؟

اهم نماذج المتتاليات

مثال : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

1) اثبت أن $0 \le u_n \le 4$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة ، واستنتج أنها متقاربة

الحل :

1) لنبرهن أن المتراجحة $E(n)$: $0 \le u_n \le 4$ بالتدريج كما يلي :

لنبرهن صحة القضية $E(0)$ محققة لأن $0 \le u_0 = 1 \le 4$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $0 \le u_n \le 4$ صحيحة

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$$0 \le u_n \le 4 \Rightarrow 0 + 12 \le u_n + 12 \le 4 + 12$$

$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{12} \le \sqrt{u_n + 12} \le \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{12 + u_n} \le 4 \Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 4$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي بالتدريج وجدنا: $0 \le u_n \le 4$ محققة و ذلك أيا كان العدد الطبيعي n

2) سنبرهن بالتدريج أن $E(n)$: $u_n \le u_{n+1}$ أيا كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة العلاقة $E(0)$ كما يلي :

$$u_0 = 1 , u_1 = \sqrt{12+1} = \sqrt{13} \Rightarrow u_0 \le u_1$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_n \le u_{n+1}$

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$$u_n \le u_{n+1} \Rightarrow u_n + 12 \le u_{n+1} + 12$$

$$\sqrt{u_n + 12} \le \sqrt{u_{n+1} + 12} \Rightarrow u_{n+1} \le u_{n+2}$$

وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ..

قاعدة

لبرهان متتالية هندسية نبرهن أن $u_{n+1} = q . u_n$ حيث q :عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = const$

تطبيق هام

لتكن المتتالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$, $v_n = u_n + 3$

1) برهن (v_n) متتالية هندسية و عيّن أساسها .

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) إذا كانت $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ احسب $\lim_{n\to+\infty} s_n$

الحـــل

1) $v_n = u_n + 3$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 \Rightarrow$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 3) + 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n - 1 + 1$$

$q = \frac{1}{3}$ متتالية هندسية أساسها v_n $\Leftarrow$ $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

$v_0 = 4 \Leftarrow v_0 = u_0 + 3$ حيث $v_n = q^n v_0$

$$\Rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n - 3$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

2) $s_n = v_0 + \dots + v_n$

s_n هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول v_0 و أساسها $q = \frac{1}{3}$

و عدد حدودها $n + 1$

$$s = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) = 6 - \frac{2}{3^n}$$

بما أن : $q = 3 > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (3)^n = \infty$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 6 - 0 = 6$$

قاعدة

لبرهان متتالية حسابية نبرهن أن $u_{n+1} = u_n + r$ حيث r : عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن

$$u_{n+1} - u_n = const$$

مثال

أيُّ المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ الآتيتين حسابية

1) $u_n = 3n + 1$

2) $v_n = n^2 + 1$

الحـــل

1) $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 1 - (3n + 1) = 3 \in \mathcal{R}$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية حدها الأول 1 و أساسها 3

2) (ليس ثابت) $v_{n+1} - v_n = (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ ليست متتالية حسابية

• $S = (\text{عدد الحدود}) \times \dfrac{\text{أول حد} + \text{آخر حد}}{2}$	• $S = (\text{الحد الأول}) \times \dfrac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$
• $u_{\star} - u_{\heartsuit} = (\star - \heartsuit)r$	• $\dfrac{u_{\star}}{u_{\heartsuit}} = q^{\star - \heartsuit}$

تطبيق امتحاني هام

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$, $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ برهن أنهما متجاورتين .

الحل

دراسة اطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

دراسة اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

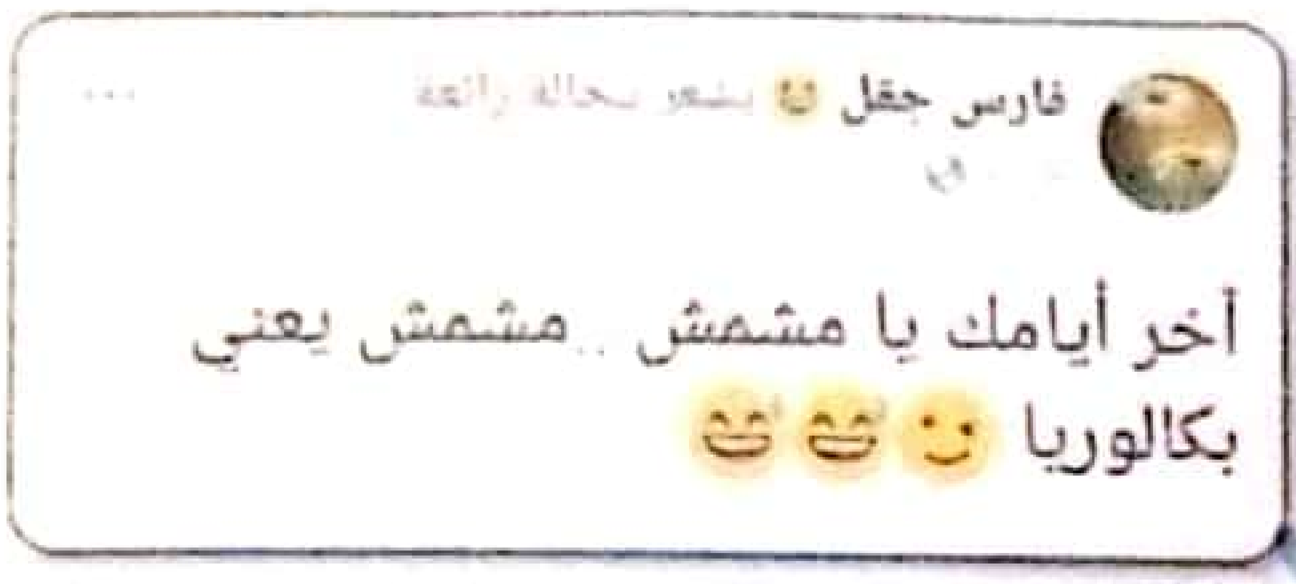
فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .



تطبيق هام

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ متزايدة تماماً .

الحـــل

سنبرهن بالتدريج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً كما يلي :

$E(n): u_n < u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي :

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \Rightarrow u_1 > u_0$ محققة

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_{n+1} > u_n$ ... (*)

و لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$u_{n+1} > u_n$ (حسب *)

نربع الطرفين : $u_{n+1}^2 > u_n^2$

نضيف 1 للطرفين: $u_{n+1}^2 + 1 > u_n^2 + 1$

نجذر الطرفين: $\sqrt{1 + u_{n+1}^2} > \sqrt{1 + u_n^2}$

فحسب البرهان بالتدريج فإن $u_{n+2} > u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

تمرين

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة : $v_n = \frac{1}{U_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n

الحل

$$u_0 = 1 \ , u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

① إثبات ان $u_n > 0$: E(n)

1- نبرهن صحة القضية من اجل n = 0:

محققة $u_0 > 0 \Rightarrow 1 > 0$

2- نفرض صحة القضية من أجل n أي:

$\boxed{u_n > 0}$

3- نبرهن صحة القضية من اجل n + 1 :

$u_{n+1} > 0$

نقسم البسط على المقام:

نبرهن : $1 + \frac{-1}{1+u_n} > 0$

ننطلق من: $u_n > 0$

نضيف (1): $1 + u_n > 1$

نقلب: $\frac{1}{1+u_n} < 1$

نضرب ب (-1): $\frac{-1}{1+u_n} > -1$

نضيف (1) : $1 + \frac{-1}{1+u_n} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

② $v_n = \frac{1}{u_n}$

لاثبات أن المتتالية حسابية يجب أن يكون:

$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n =$ عدد ثابت

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} = 1 \cdot \frac{1+u_n}{u_n}$$

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 = const$$

$\Leftarrow$ المتتالية حسابية أساسها $r = 1$

كتابة ϑ_n بدلالة n :

$$\vartheta_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \vartheta_n = \vartheta_0 + (n-0)1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta_n = 1 + n}$$

ستنتاج عبارة u_n :

$$\vartheta_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\vartheta_n} = \frac{1}{n+1}$$

بنك التمارين الهامة

التمرين الأول :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق .. $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$ عند كل $n \geq 0$

أثبت بالتدريج أن $0 \leq u_n \leq 5$ أياً كان n و أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً ثم استنتج تقاربها و حدد نهايتها

التمرين الثاني :

لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$: $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ، $t_n = 1 - \frac{1}{n}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة .

التمرين الثالث :

ليكن التابع f المعرف على $R/\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

1) أوجد النهاية على أطراف مجموعة التعريف و اكتب معادلة كل مقارب لخطه C_f

2) أثبت أن التابع متزايد تماماً ونظم جدول التغيرات

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة : $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n+1}$ ، $u_0 = 2$

I) أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً و أن $0 \leq u_n \leq 2$ II) استنتج تقارب المتتالية و أوجد نهايتها .

التمرين الرابع :

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي : $v_0 = \frac{1}{2}$ و $v_{n+1} = \frac{5v_n+4}{v_n+2}$ والمطلوب :

1) ادرس جهة اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$.

2) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $u_n = \frac{v_n-4}{v_n+1}$

I) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم عيّن حدها الأول وأساسها

II) أوجد عبارة u_n بدلالة n ، ثم أستنتج عبارة v_n بدلالة n وعيّن نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$

التمرين الخامس :

لتكن المتتالية $u_0 = e^3$ ، $u_{n+1} = e(u_n)^{\frac{1}{2}}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل : $v_n = \ln(u_n) - 2$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية و عين $v_0 . q$

2) اكتب $(v_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) أثبت أن المتتالية u_n متقاربة

التمرين السادس :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \geq 0$

1) أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

التمرين السادس : أثبت أن المتتاليتان: (u_n), (v_n) متجاورتان حيث :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ و

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

قواعد حساب التوابع الأصلية

1) $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax \; ; a \in R$

مثال: $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x$

2) $f(x) = g^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)(g')}$

حيث g كثير حدود درجة أولى

و $n \in R \backslash \{-1\}$

مثال: $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{(4)(1)}$

مثال: $f(x) = (2x+5)^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(2x+5)^4}{(4)(2)}$

3) $f(x) = \dfrac{g'}{g} \Rightarrow F(x) = \ln|g|$

$|g| = g : g > 0$

$|g| = -g : g < 0$

مثال:

$f(x) = \dfrac{5}{x-1} = 5\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \; ; I =]-\infty, 1[$

- $\Rightarrow F(x) = 5\ln|x-1|$
- $F(x) = 5\ln(-x+1)$

4) $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} \; ; a \neq 0$

مثال: $f(x) = e^{3x+1} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{3} e^{3x+1}$

5) $f(x) = g^n . g' \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)}$

مثال:

$f(x) = \dfrac{[\ln x]^2}{x} = \dfrac{1}{x}.(\ln x)^2$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{3}$

قاعدة هامة:

$f(x) = \dfrac{\star'}{\sqrt{\star}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{\star}$

6) $f(x) = \star' . e^{\star} \Rightarrow F(x) = e^{\star}$

مثال: $f(x) = xe^{x^2} = \dfrac{1}{2}(2x)e^{x^2}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$

7) $f(x) = \sin(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{\star'}\cos(\star)$

8) $f(x) = \cos(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}\sin(\star)$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}.\tan(\star)$

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}(-\cot(\star))$

قاعدة هامة:

$\sin^2(\star) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2\star)$

$\cos^2(\star) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2\star)$

مجالات و ملاحظات للتابع الأصلي من جداول الكتاب صـــ 213+225ـــ

التكامل بالتجزئة : لدينا عدة أشكال:

1) $\int_a^b x^n e^{\alpha x} dx$

2) $\int_a^b x^n \sin \alpha x \, dx$

3) $\int_a^b x^n \cos \alpha x \, dx$

نفرض

$x^n = u$

والثاني v'

القانون:-

$$\int_a^b u\, v' = [u\, v]_a^b - \int_a^b v u'$$

4) $\int_a^b x^n \ln \alpha x \;\; dx$

نفرض $u = \ln x$

$v' = x^n$

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

حيث F تابع أصلي للتابع f

خواص التكامل المحدد :

1. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\int_a^b kf = k \int_a^b f$ حيث $k \in R$
3. $\int_a^b f = - \int_b^a f$
4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ حيث $c \in [a, b]$

مثال

$$I = \int_0^\pi x \sin x \;\; dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int_0^\pi x\sin x \;\; dx = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \, dx$$
$$= [-x \cos x + \sin x]_0^\pi$$

مثال هام

$$I = \int_0^1 x^2 . \cos x \;\; dx$$

$$u' = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = [x^2 . \sin x]_0^1 - 2 \int_0^1 x \sin x \, dx$$

$$I' = \int_0^1 x \sin x \, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$I' = [-x\cos x]_0^1 - \int_0^1 -\cos x \, dx$$

$$= [-x\cos x + \sin x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \left[x^2 . \sin x \;-2\left[-x\cos x + \sin x\right]\right]_0^1 = F(1) - F(0)$$

أهم خواص اللوغارتم

1) $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3) $e^{\ln x} = x$

4) $\ln a^n = n\ln a$

5) $\ln e^x = x\ln e = x$

$$I = \int_0^e x . \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^e - \int_0^e \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{2}\right]_0^e$$

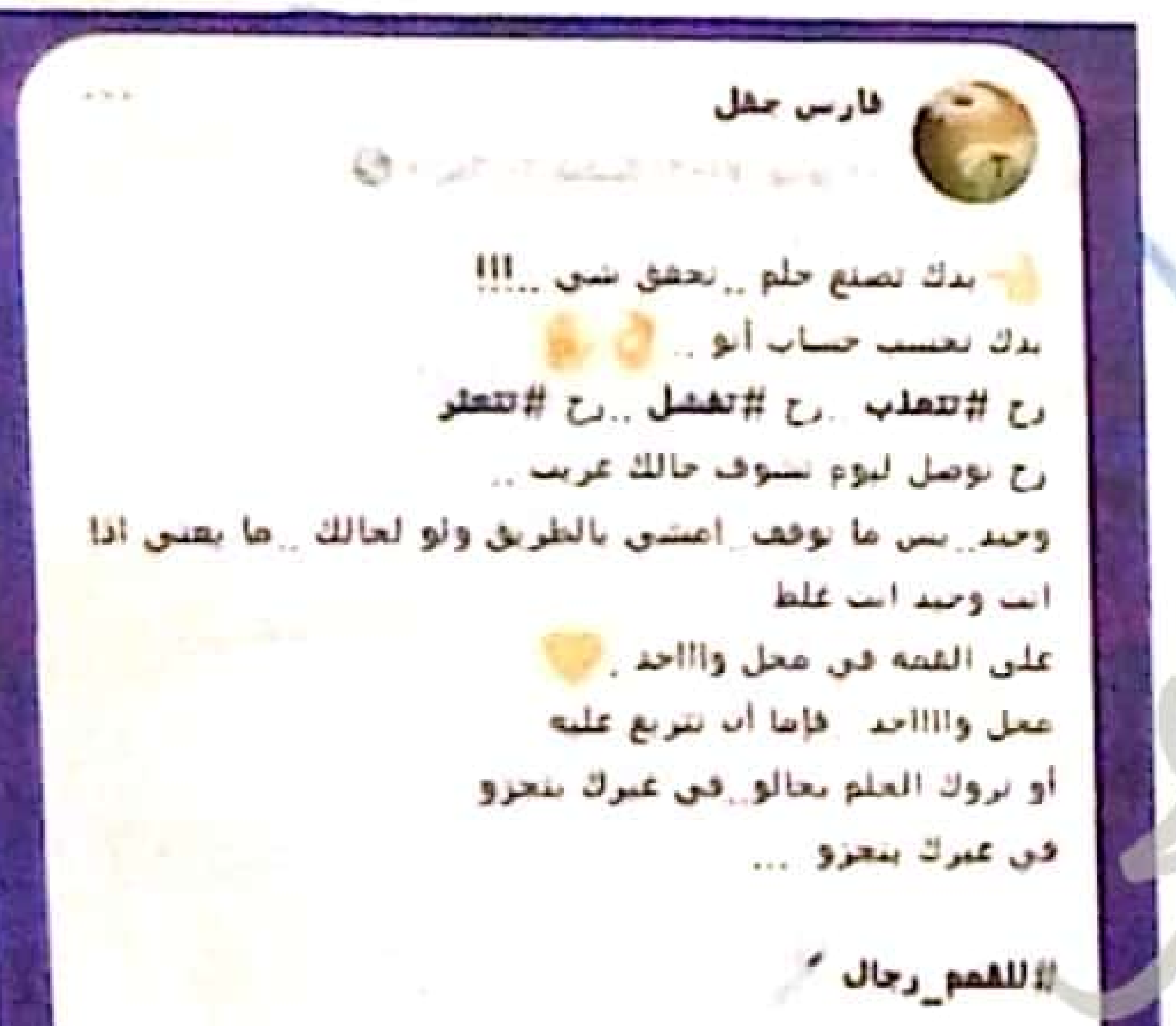
مثال

$$I = \int_0^e \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow [x\ln x]_0^e - \int_0^e x . \frac{1}{x} dx = [x\ln x - x]_0^e$$



$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \int_1^e \ln x . x^{-2} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \Rightarrow v \;\; = \frac{-1}{x}$$

$$I = \left(\frac{-\ln x}{x}\right)_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} . \frac{-1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} . \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e x^{-2} \, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = F(e) - F(1)$$

ترتيب قوة التوابع :

1) التابع اللوغارتمي.(الأقوى)

2) كثيرة الحدود.

3) المثلثية.

4) الأسية.

نفرض التابع الأقوى u والآخر v'

حساب تكامل التوابع الكسرية : نفرق الكسر ثم نكامل

تفريق الكسور :

نميز حالتين : (إذا كانت عوامل المقام مختلفة من الدرجة الأولى)

الحالة الأولى : درجة البسط أقل من درجة المقام عندها نفرق الكسر كما يلي:

$$f(x) = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

نحلل المقام للشكل: $(x - r_1)(x - r_2)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\text{البسط}}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{A}{(x - r_1)} + \frac{B}{(x - r_2)}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x - r_1)$ ثم نجعل x تسعى إلى r_1

ولحساب B نضرب الطرفين بـ $(x - r_2)$ ثم نجعل x تسعى إلى r_2

طريقة ثانية : نوحد المقامات ثم نطابق بين الطرفين ونحل المعادلات الناتجة

مثال

أوجد التابع الأصلي للتابع f على المجال $]2, 4[$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$$

نفرق الكسر إلى مجموع كسور جزئية

نحلل المقام: $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$

$$\Rightarrow \star \boxed{f(x) = \frac{x}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{A}{(x - 4)} + \frac{B}{(x - 2)}}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x - 4)$ ثم نجعل x تسعى إلى 4

$$\frac{x}{x - 2} = A + \frac{B(x - 4)}{x - 2}$$

طريقة ثانية : نوحد المقامات فنجد :

$$\frac{x}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A - 4B}{(x - 4)(x - 2)}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$$A + B = 1 \ldots (1)$$

$$-2A - 4B = 0 \ldots (2)$$

بالحل المشترك نجد :

$$B = -1 , A = 2$$

نجعل x تسعى إلى 4

$$\Rightarrow A = \frac{4}{4-2} \Rightarrow A = 2$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-2)$ ثم نجعل x تسعى إلى 2

$$\Rightarrow \quad B = \frac{2}{2-4} \qquad \Rightarrow B = -1$$

نعوض في *

$$f(x) = \frac{2}{x-4} + \frac{-1}{x-2}$$

$$F(x) = 2\ln(-x+4) - \ln(x-2) + k$$

احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2-6x+8}\,dx$

بعد التفريق ينتج:

$$\int_0^1 \frac{2}{x-4}\,dx + \int_0^1 \frac{-1}{x-2}\,dx$$

$$= [2\ln|x-4| - \ln|x-2|]_0^1 = F(1) - F(0)$$

مثال

احسب التكامل :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

نحلل المقام لكي نفرق الكسر :

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x+1)$ ثم نجعل x تسعى إلى (1-)

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{1} \Rightarrow A = -1$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x+2)$ ثم نجعل x تسعى إلى (2-)

$$\Rightarrow \frac{-3}{-1} = B \qquad \Rightarrow B = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{-1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{x+2}\,dx \quad = [-\ln|x+1| + 3\ln|x+2|]_0^1 = \ldots$$

الحالة الثانية : إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام ونعود للحالة الأولى

حالة خاصة : إذا كانت عوامل المقام درجة أولى مكررة مثل $(x+1)^2$ فإننا نفرق الكسر كما يلي

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}$$ ثم نطابق بين الطرفين

تمرين هام

احسب ما يلي : $\int_0^{\ln 3} e^x(1-e^x)^5\,dx$

$$= -\int_0^{\ln 3} -e^x(1-e^x)^5\,dx$$

$$= -\left[\frac{(1-e^x)^6}{6}\right]_0^{\ln 3} = -\frac{32}{3}$$

أهم أنماط المعادلات و المتراجحات المتوقعة في الكتابين

السؤال الأول: حل في R المعادلة : $9^x-3^{x+1}+2=0$ $\quad D=R$

الحل: نلاحظ أن : $9^x=3^{2x}$

$3^{x+1}=3.3^x$

لذا نفرض $t=3^x$ عندئذ : $3^{2x}-3.3^x+2=0$

$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$

إما : $t_1=1 \Rightarrow 3^{x_1}=1 \Rightarrow \ln(3^{x_1})=\ln 1 \Rightarrow x_1.\ln 3=0$

$\Rightarrow \boxed{x_1=0}$ مقبول

أو : $t_2=2 \Rightarrow 3^{x_2}=2 \Rightarrow \ln(3^{x_2})=\ln 2 \Rightarrow x_2.\ln 3=\ln 2$

$\Rightarrow \boxed{x_2=\frac{\ln 2}{\ln 3}}$ مقبول

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

السؤال الثاني : أثبت أن $\ln x \le x-1$ أيا كان $x>0$ باختيار $x=e^{1/3}$, $x=e^{-1/3}$ احصر e.

الحل: المتراجحة المعطاة تكافيء : $\ln x - x+1 \le 0$

لناخذ التابع f المعرف والاشتقاقي على R^{+*} وفق: $f(x)=\ln x - x+1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow x=1 \quad f(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

نلاحظ من الجدول : أيا تكن $x>0$ فإن : $f(x)\le f(1)=0$

$\ln x - x+1 \le 0 \Rightarrow \boxed{\ln x \le x-1}$

حصر العدد e: نعوض $e^{\frac{1}{3}}$ في المتراجحة :

$$\ln e^{\frac{1}{3}} \le e^{\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{1}{3}\le e^{\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{4}{3}\le e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{64}{27}\le e}$$

$$\ln e^{\frac{-1}{3}} \le e^{\frac{-1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{-1}{3}\le e^{\frac{-1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{2}{3}\le e^{\frac{-1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{27}\le\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\frac{27}{8}\ge e} \qquad \Rightarrow \frac{64}{27}\le e\le\frac{27}{8}$$

السؤال الثالث : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$

الحل: بالإتمام لمربع كامل :

$$z^2-(1+2i)z+\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2-\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2+3+3i=0$$

$$\Rightarrow \left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=-\frac{15}{4}-2i$$

$$\Rightarrow \left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(-15-8i)$$

لنفرض أن $\omega=a+bi$ الجذر التربيعي لـ $-15-8i$ عندئذ:

$$\omega^2=(a^2-b^2+2abi)=-15-8i$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17 \\ a^2-b^2=-15 \\ a.b=\frac{-8}{2}=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a^2=2$$

$$a^2=1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow b=-4 \\ a=-1 \Rightarrow b=4 \end{cases} \Rightarrow \omega_1=1-4i$$

$$\omega_2=-1+4i$$

$$\Rightarrow z_1-\frac{1+2i}{2}=\frac{1-4i}{2} \Rightarrow z_1=\frac{1-4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1=1-i}$$

$$z_2-\frac{1+2i}{2}=\frac{-1+4i}{2} \Rightarrow z_2=\frac{-1+4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2=3i}$$

السؤال الرابع : أثبت أنه أيا كانت x من $]-1,+\infty[$ كان:

$$\frac{x}{1+x}\le \ln(x+1)$$

الحل: حل المتراجحة يكافيء:

$$\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}\ge 0$$

نفرض التابع: $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}$ المعرف والاشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ من الجدول ان $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى.

أيا تكن $x\in]-1,+\infty[$ فإن $0=f(0)\le f(x)$ ومنه

$0\le \ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ وبالتالي: $\frac{x}{x+1}\le \ln(x+1)$

السؤال الخامس: حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$

لاحظ أن : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

الحل: نلاحظ ان امثال المعادلة حقيقية عندئذ نطبق طريقة المميز حيث :

$$a = 1 \;, b = -2(1-\sqrt{3}) \;, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4(1)(8)$$

$$= 4(1-2\sqrt{3}) - 32 = 4(4-2\sqrt{3}) - 32$$

$$= 16 - 8\sqrt{3} - 32 = -16 - 8\sqrt{3} = -4(4+2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \Delta = 4i^2(1+\sqrt{3})^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$$

$$z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$$

$$z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})}$$

السؤال السادس: حل المعادلة $4^x = 5^{x+1}$

الحل: نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد $\ln(4^x) = \ln(5^{x+1})$

$x.\ln 4 = (x+1)\ln 5$ ((عواص ln))

$$x.\ln 4 - x.\ln 5 = \ln 5$$

$$\Rightarrow x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}}$$


مركز أونلاين التعليمي يشعر بالأمل مع ...
فارس حقل

#بكالوريا_تاسع_طلابنا_الغوالي
بعرف انكن تعبانين كتير وبعرف انكن مضغوطين كتير وبعرف انكن خايفين كتير
بس بعرف انكن كدا قدها وقدود
اوثقوا بأنفسكن و توكلوا عالله واعرفوا انو ربنا مارح يضيع تعبكن
اعرفوا ان نحن اساتذتكن واهاليكن عم ندعيلكن و نحلم بنجاحكن و نحن جنبكن مارح نتخلا عنكن لآخر لحظة
صدقوني هالتعب وهالجهد بعدها رح ترتاحوا وتعيشوا مستقبلكن الزاهر
الوقت كافي جدا صدقوني و يلي ما فيش بيقدر يلحق بس نظموا وقتكن و كثفوا جهودكن

محبتكم | فارس حقل

السؤال السابع: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل: نلاحظ أن : $|1 + i2\sqrt{2}| = \sqrt{1+8} = 3$

نفرض $Z = a + ib$ عندئذ : $2ab = 2\sqrt{2}$ ...... (1)

$a^2 - b^2 = 1$ ...... (2)

$a^2 + b^2 = 3$ ...... (3)

نجمع (2) مع (3) نجد : $2a^2 = 4$ ومنه $a^2 = 2$:

$$\begin{cases} \text{إما } a = \sqrt{2} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow z = \sqrt{2} + i \\ \text{أو } a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

السؤال الثامن : حل في R المعادلة الآتية :

$$-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

الحل : شرط الحل: $x > 1$

$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1) \Rightarrow \ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

مقبول $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مرفوض $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$

السؤال التاسع: عين العددين z_1 , z_2 حيث:

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق المعادلة الأولى ثم نجمع المعادلتين كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} 2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 &= -3 + i2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4\bar{z}_1 = -6 + i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -i\sqrt{3}}$$

السؤال العاشر: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$e^x - \frac{1}{e}e^y = 1$$
$$2e^x + e^y = 4 + e$$

الحل: $D = R$ نفرض : $X = e^x$, $Y = e^y$ عندئذ :

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 \;\ldots\ldots\ldots\; ① \\ 2X + Y = 4 + e \;\ldots\ldots\; ② \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ(-2) ونجمع :

$$\begin{cases} -2X + \frac{2}{e}Y = -2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases} \Leftarrow \text{نجمع} \; \left(\frac{2}{e} + 1\right) Y = 2 + e \Leftarrow \boxed{Y = e}$$

ومنه : $e^y = e \Leftarrow \boxed{y = 1} \Leftarrow \boxed{x = ln2}$

السؤال الحادي عشر : حل المعادلة التفاضلية : $2y' + y = 1$ ثم عين حلها الذي يحقق $f(-1) = 2$

الحل: $2y' + y = 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2}y + \frac{1}{2}$

لدينا معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث:

$$b = \frac{1}{2} \quad , a = \frac{-1}{2}$$

ومجموعة حلولها من الشكل : $ke^{ax} - \frac{b}{a}$ وبالتالي :

$$y = ke^{\frac{-1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} \Rightarrow y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

لحساب قيمة k نعوض الشرط:

$$2 = ke^{\frac{-1}{2}(-1)} + 1 \Rightarrow 1 = ke^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k = e^{\frac{-1}{2}}$$

فـ حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{\frac{-1}{2}} \cdot e^{\frac{-1}{2}x} + 1 \Rightarrow y = e^{\frac{-1}{2}(x+1)} + 1$$

السؤال الثاني عشر : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$2\ln x + \ln y = 7 \quad (1)$$
$$3\ln x - 5\ln y = 4 \quad (2)$$

الحل: شرط الحل $y > 0$, $x > 0$ نفرض $\ln y = b$, $\ln x = a$

$$2a + b = 7$$
$$3a - 5b = 4$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 5 :

$$10a + 5b = 35$$
$$3a - 5b = 4$$

بالجمع :

$$13a = 39 \Rightarrow a = \frac{39}{13} = 3$$
$$a = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

نعوض في (2)

$$3(3) - 5b = 4 \Rightarrow 9 - 5b = 4 \Rightarrow -5b = -5$$
$$b = 1 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$$

السؤال الثالث عشر: أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى : $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها 2- من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل : ميل المماس $\frac{1}{2}$ في النقطة التي فاصلتها 2-

(x) بعلاقة المشتق

y'

$$y' = -2y$$
$$\Rightarrow \boxed{y = ke^{-2x}}$$

الشرط : نشتق :

$$y' = -2ke^{-2x}$$
$$f'(-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -2ke^{-2(-2)} \Rightarrow k = \frac{1}{-4e^4}$$

⇐ الحل هو :

$$y = \frac{1}{-4e^4}e^{-2x}$$

السؤال الرابع عشر: حل المعادلة الآتية:

$$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

الحل: $D = R$

$$e^{3x}.e + 4e^{2x}.e + 5e^{x}.e = 0$$

$$ee^{x}(e^{2x} + 4e^{x} - 5) = 0$$

$ee^{x} = 0$ مستحيلة

$$(e^{x} - 1)(e^{x} + 5) = 0$$

$$e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$e^{x} + 5 = 0 \Rightarrow e^{x} = -5$ مستحيلة الحل

السؤال الخامس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\frac{e^{x} - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^{x} - 2}{e^{x} + 2}$$

الحل: $D = R$

$$(e^{x} - 1)(e^{x} + 2) < (e^{2x} + 1)(e^{x} - 2)$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 2e^{x} - e^{x} - 2 < e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x} - 2$$

$$\Rightarrow e^{3x} - 3e^{2x} > 0$$

$$e^{2x}(e^{x} - 3) > 0$$

ندرس: إشارة المقدار $e^{x} - 3$ فقط لأن $e^{2x} > 0$ أيا كان $x \in R$

$$e^{x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{x} = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

ننظم جدول فنجد حلول المتراجحة هي:

$$]\ln 3 \ , +\infty[$$

السؤال السادس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\ln(x^2 + 3x) > \ln(2x + 2)$$

شرط الحل هو: $]-1 \ , +\infty[$ ومنه:

$$x^2 + 3x > 2x + 2$$

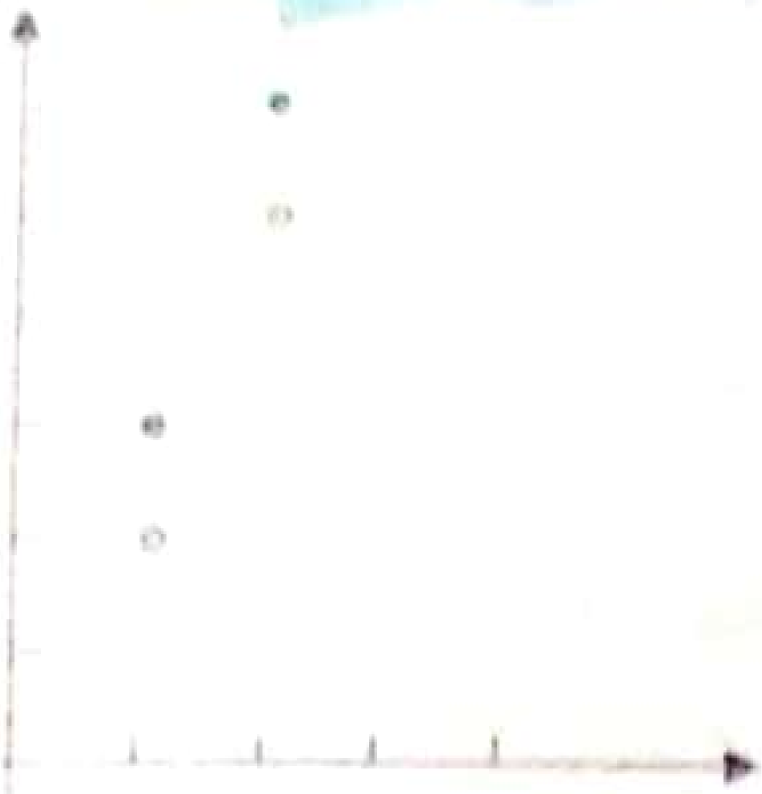
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$$

وهذه المتراجحة محققة عندما $x < -2$ أو $x > 1$ ...نقاطع مع شرط الحل $x > 1$

فنجد مجموعة الحلول هي: $]1 \ , +\infty[$

$x-1 < E(x) \le x$

تابع الجزء الصحيح



مثال : ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق العلاقة

$f(x) = 2x + E(x)$ والمطلوب :

1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

الحل :
$$f(x) = \begin{cases} 2x & ;[0,1[\\ 2x+1 & ;[1,2[\\ 2(2)+2 = 6 & ;x=2 \end{cases}$$

2) ارسم الخط البياني C على المجال $[0,2]$

3) أوجد نهاية $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^2+1}$

الحل:
$$x-1 < E(x) \le x$$
$$\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{E(x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^2+1} = 0$$

4) نعرف تابع $g(x) = 2x + \frac{E(x)}{x^2+1}$

أثبت أن $y = 2x$ مقارب مائل في جوار ∞

الحل:
$$g(x) - y_\Delta = \frac{E(x)}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) - y_\Delta = \lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^2+1} = 0$$ فهو مقارب مائل

x في غاية الكبر

مثال : ليكن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ المعرف على $R\backslash\{+1\}$

أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم أعط عدد حقيقي A يحقق $x > A$ فإن : $f(x) \in]2.9\,,3.1[$

الحل :
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\varepsilon = 3 - 2.9 = 0.1 \qquad , \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x-1} = 3 = l$$

نعوض بالقانون :
$$|f(x) - 3| < 0.1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{3x+2}{x-1} - 3\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{5}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{5}{x-1} < \frac{1}{10} \Rightarrow x > \underset{A}{51}$$

لأن x كبيرة

ملاحظة هامة جداً : نفس السؤال سيأتي بالمتتاليات ولكن n عوضاً عن x

و u_n عوضاً عن $f(x)$

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على $I =]e^{-1}, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$:

1. جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط : إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]0.9, 1.1[$
2. احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$

عين عدد طبيعي n يحقق الشرط إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n \in]2.99, 3.01[$

استنتاج خط بياني C' لتابع جديد g بدلالة الخط البياني C لتابع f معطى مسبقاً

أولاً : نرسم الخط البياني C للتابع القديم f

ثانياً : نكتب التابع الجديد g بدلالة التابع القديم f

ثالثاً : نستنتج العلاقة بين C' و C حسب ما يلي :

$g(x) = -f(x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = -f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات
$g(x) = f(x) + b$	C' ينتج عن C بانسحاب متجهه $(0, b)$
$g(x) = f(x + a)$	C' ينتج عن C بانسحاب متجهه $(-a, 0)$
$g(x) = \lvert f(x)\rvert$	الجزء الأول من C': هو الجزء من C الواقع فوق محور الفواصل الجزء الثاني : هو نظير الجزء من C الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(\lvert x\rvert)$	الجزء الأول من C': هو الجزء من C الواقع على يمين محور التراتيب الجزء الثاني : هو نظير الجزء الأول بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = f(x)$ حيث $D_g \subseteq D_f$	C' هو الجزء من C الواقع ضمن D_g
$g(x) = af(x)$	C' ينتج عن C بالتحويل النقطي $(x, y) \to (x, ay)$

الجدول من إعداد المدرس : واصف خضرة

رابعاً : نرسم الخط البياني C' للتابع الجديد g

ملحق تدريبي .. الجزء الأول

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$

وفق : $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$ .. والمطلوب :

1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ، دل على القيمة الصغرى محليا للتابع f و استنتج أن للخط البياني C مقارب يوازي yy'
2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما x_1 يحقق $1 > x_1 > 0$ ثم أوجد الجذر الآخر x_2
3. أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x - 5$ مقارب للخط C
4. ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$, $x = 4$

المسألة الثانية :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,1]$ وفق : $f(x) = x\sqrt{1-x}$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها ثم أثبت أن $f(1)$ قيمة صغرى محليا للتابع f

2) أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال $]-\infty,1]$

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على D.وفق : $f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) أوجد مجموعة تعريف التابع f ثم أوجد معادلة المقارب للخط C الموازي ل yy'

2) أثبت أن المستقيم Δالذي معادلته $\Delta: y = x$ مقارب للخطC في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - x$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها و بين ما له من قيم كبرى أو صغرى محليا

3) استنتج أن للمعادلة $x = e^x - 1$ جذرا وحيدا يطلب إيجاده

المسألة الخامسة :

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$وفق : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها

2) دل على قيمه الكبرى أو الصغرى محليا

3) استنتج من جدول التغيرات أن مجموعة حلول المتراجحة $x < 2\sqrt{x}$ هي $]0,4[$

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع : $f(x) = x\ln x$ ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها و أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

*ثم أوجد مجموعة التوابع الأصلية للتابع f في المجال $]0,1]$

المسألة السابعة :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ خطه البياني C أوجد كل مقارب للخط C يوازي احد المحورين الاحداثيين

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وبين ما له من قيم كبرى محليا و ماله من قيم صغرى محليا
2. برهن أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية ثم ارسم الخط C.
3. انطلاقاً من C ارسم الخط البياني للتابع g المعطى بالعلاقة : $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
4. احسب مساحة السطح المحصور بالخط C والمستقيمين $x = -1 , x = 1$

المسألة الثامنة :

أثبت أن $\frac{x^2-1}{x^2+1} \le \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1}$ أيا يكن x .. استنتج نهاية $f(x) = \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1}$ عند ∞

المسألة التاسعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال I ..برهن أن المستقيم d مقارب..

1) $d: y = x$; $f(x) = \ln(1+e^x)$ عند $+\infty$

2) $d: y = x - 1$; $f(x) = x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

المسألة العاشرة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

أوجد $f'(x)$ واستنتج مشتق التابع $f(\ln x)$ ومشتق $g(x) = \frac{2\cos x}{\cos x+1}$

المسألة الحادية عشر :

أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ جذرا وحيدا α يقع في المجال $]-1,0[$

المسألة الثانية عشر :

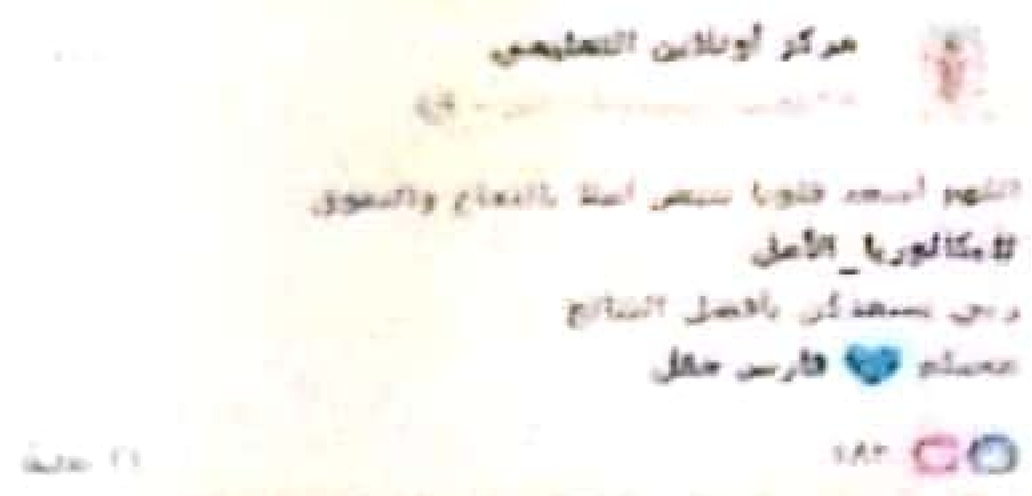
ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = 2xe^{-x} - \frac{2}{e}$

1) ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها و عين المقاربات و القيم المحلية وارسم C
2) احسب مساحة السطح المحدد بـ C و المستقيمات $x = 1$ و $x = 0$ و $y = -\frac{2}{e}$

المسألة الثالثة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (ax+b)e^x$

1) احسب قيمة كل من a و b لكي يكون للتابع قيمة حدية محليا -1 عند 0
2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وارسم C
3) احسب مساحة السطح المحدد ب C والمحور Ox والمستقيم $x = 1$ والمستقيم $x = 0$



المسألة الرابعة عشر :

f و g هما تابعان المعرفان على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

و $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ، و h هو التابع المعرف على R وفق $h = \frac{g}{f}$

احسب كلا من $f'(x)$ و $g'(x)$ وأثبت أن $h' = \frac{1}{f^2}$

المسألة الخامسة عشر :

f هو التابع المعرف على المجال $I = R^{*+}$ وفق : $f(x) = 2 + \ln x$ بين أن f أشتقاقي على I
واحسب $f'(x)$ واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1 ، استنتج $f'(\sqrt{x})$

المسألة السادسة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^+ بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}$ و المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$: حيث $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$

1) تحقق أن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}$ و أثبت أن $0 \leq f(x) \leq 1$ و أيضا $0 \leq u_n \leq 1$
2) أثبت أن $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

المسألة السابعة عشر :

لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $t_n = -\frac{1}{n}$ أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة

المسألة الثامنة عشر :

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

1) ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني C_f و مقارباته ثم أثبت أن $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل
2) احسب احداثيات نقطة تقاطع المستقيم $d : y = x$ مع C_f ثم ارسم d على الشكل السابق
3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $u_0 = 2$
ونعلم أن $u_n \geq 0$ أياً يكن n
برهن بالتدريج $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

المسألة التاسعة عشر :

1) حل في R جملة المعادلتين : $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$

2) إذا كان $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\, dx$, $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\, dx$ فاحسب $I - 3J$, $I + J$ واستنتج قيمة كل من I , J

المسألة العشرون :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \cdots - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$.

❖ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة .

المسألة الحادية و العشرون :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \sin x$ وبافتراض أن f أشتقاقية n مرة على R

أثبت بالتدريج أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin(\frac{\pi}{2}n + x)$.

المسألة الثانية والعشرون :

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق : $x_0 = 3$ ، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ ، $y_n = x_n + 3$

1) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم اكتب y_n ثم x_n بدلالة n

2) نضع $s_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $s'_n = x_0 + \cdots + x_n$ احسب كلا من s_n و s'_n بدلالة n

3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(s_n)_{n\geq 0}$ و $(s'_n)_{n\geq 0}$

المسألة الثالثة والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}})$

1) أثبت أن التابع f زوجي واستنتج الصفة التناظرية للخط C

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

3) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور xx' والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول xx'

المسألة الرابعة والعشرون:

لتكن مجموعة التوابع $f_\lambda(x) = \ln(x^2 + \lambda)$ حيث λ وسيط حقيقي

أولاً : عين قيمة الوسيط λ ليمر خطه البياني بالنقطة $(2, \ln 3)$

ثانيا : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'

2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها

3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C

4) إذا كان C_1 الجزء من الخط C الذي تكون فاصلة كلٍ من نقطة موجبة فاكتب معادلة المماس للخط C_1 في نقطة تقاطعه مع محور xx'

المسألة الخامسة والعشرون:

لتكن مجموعة التوابع : $f(x) = ae^{-x} + b$

أولاً أوجد التابع العددي الذي يمر خطه البياني من مبدأ الإحداثيات ويكون المستقيم $y = 2$ مستقيما مقارباً للخط البياني للتابع f

ثانياً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = -2e^{-x} + 2$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور xx' أو المحور yy'
2) ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولا بها
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) اكتب معادلة مماس الخط C الذي ميله يساوي 2
5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المماس السابق و المستقيم $x = 1$

المسألة السادسة والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{0\}$ وفق : $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ وليكن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$

1) عين a, b إذا علمت أن المستقيم d يمس C في نقطة من محور xx'
2) ادرس تغيرات f : $f(x) = \frac{2x-1}{4x}$ المعرف على $R\setminus\{0\}$ ونظم جدولاً بها ثم أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و d و المستقيم $\Delta: x = 2$
5) أوجد معادلة مماس آخر لـ C يوازي المماس d

المسألة السابعة والعشرون:

ثانياً : ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$ خطه البياني C

1) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها
2) استنتج من جدول التغيرات أنه إذا كان $b \in R$ كانت المعادلة $be^x = 2 - b$ غير قابلة للحل عندما $b \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ ولها جذر وحيد عندما $b \in]0,2[$
3) أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة وبين وضع C بالنسبة إلى كل مقارب له
4) أوجد معادلة المماس Δ للخط C في النقطة $A(0, 1)$
5) ارسم كل مقارب للخط C وارسم Δ ثم ارسم C

النجاح لا ينتظر احد ، بل يتطلب الكثير من الجهد والعمل الشاق وانتهاز الفرص

المسألة الثامنة والعشرون:

ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\{-2,0\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2x}$

1) أثبت أن f يكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{g(x)}{x^2+2x}$
2) ابحث عن كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته
3) أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب للخط C ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المقارب Δ

المسألة التاسعة والعشرون:

ليكن التابع f المعرف على $]-\infty,3]$ وفق $f(x)=x\sqrt{3-x}$ خطها البياني C

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها ثم عين ما للتابع f من قيم كبرى وصغرى محلياً
2) ارسم الخط C
3) أثبت أن التابع g المعيَّن بالعلاقة : $g(x)=\frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{3-x}$ هي تابع أصلي على المجال $]-\infty,3]$ للتابع f
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور xx' و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$, $x=0$

هام : تابعوا نماذج و توقعات جميع المواد على صفحة (مركز أونلاين التعليمي) على الفيس بوك

المسألة الثلاثون:

f هو التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

1) أثبت أن $\frac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{x-1}$ أيا يكن $x>1$
2) استنتج نهاية f عند $+\infty$

المسألة الحادية والثلاثون:

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$

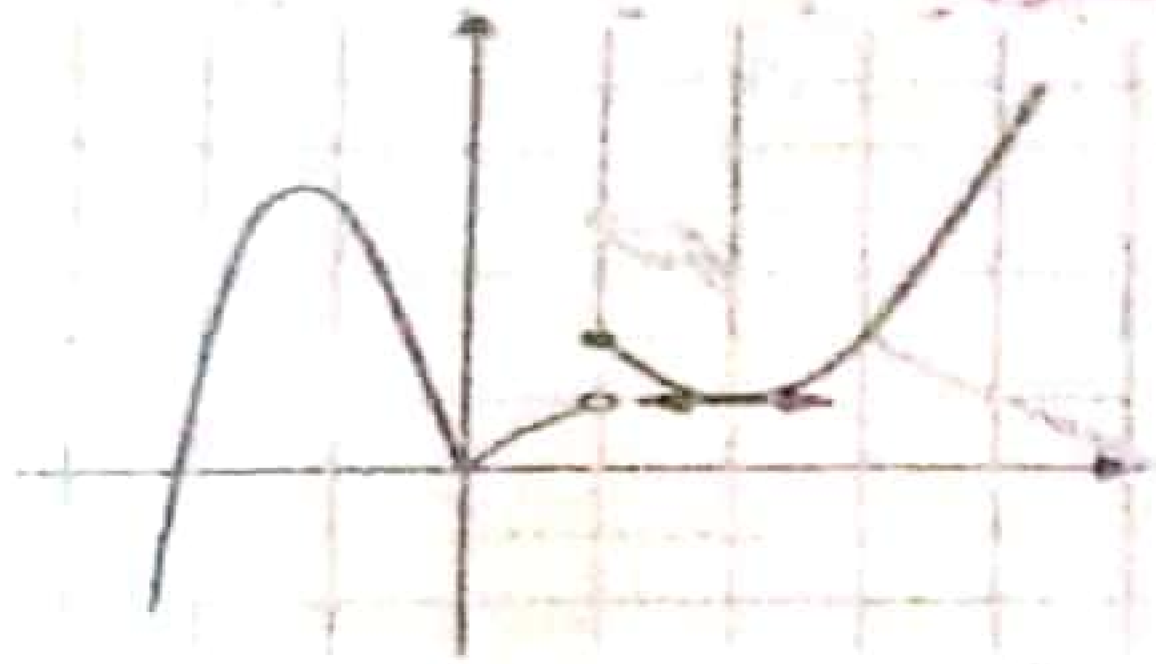
1) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2) عين عددين a , b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ أياً كان x
3) استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على R

المسألة الثانية والثلاثون:

ليكن التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x+1}$

1) ادرس تغيرات التابع f
2) تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]0,+\infty[$

المسألة الثالثة والثلاثون :



1. ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 5$
2. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$
3. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع علل ذلك
4. ماعدد القيم الحدية للتابع f
5. ماقيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$
6. أيكون التابع f اشتقاقيا عند $x = 1$

المسألة الرابعة والثلاثون :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; \ x \neq 0 \\ m & ; \ x = 0 \end{cases}$ والمطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند الصفر
2. عيّن قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

المسألة الخامسة والثلاثون :

يكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$ و المطلوب :

1. عيّن العددين الحقيقيين a , b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1, 0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$
2. من أجل $a = 4$, $b = -4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

المسألة السادسة و الثلاثون : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب :

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
2. أثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq0}$
3. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعيا n_0 يحقق أيا كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9 , 2.1[$

المسألة السابعة و الثلاثون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ و المطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. في معلم متجانس ارسم الخط C
4. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و محوري الاحداثيات و المستقيم $x = 1$
5. استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق : $g(x) = 2xe^x$
6. أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$

المسألة الخامسة و الثلاثون : المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ معرفة وفق : $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3 ، جد عدد طبيعي u_0 يحقق $u_n \in]2.99, 3.01[$ عند كل n أكبرتماماً من u_0

المسألة التاسعة والثلاثون : إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أيا يكن x من R^* أوجد نهاية التابع f عند الصفر

المسألة الأربعون : ليكن C الخط البياني f المعرف على $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \ln\frac{x+2}{x}$

1. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f
2. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
3. ارسم الخط C في معلم متجانس
4. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n = f(n)$ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   أثبت أن $S_n = \ln(\frac{(n+2)(n+1)}{2})$

المسألة الواحدة والأربعون : أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطراد التابع g و استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

1. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
2. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\frac{1}{2} > \alpha > 0$
3. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
4. ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم Δ و المستقيمين $x = 0 , x = 1$

المسألة الثانية والأربعون : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة : $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ و $x_0 = 5$

1. احسب x_1 , x_2 , x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية
2. نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية
3. اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$

المسألة الثالثة و الأربعون :

أثبت صحة المساواة $\cos^2 x . \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$ ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x \quad dx$

المسألة الرابعة و الأربعون : ليكن C الخط البياني المعرف على R بالصيغة : $f(x) = xe^{-x}$

1. احسب نهاية التابع f عند $-\infty$, $+\infty$ ، احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f و نظم جدولاً بتغيراته و عيّن قيمته الحدية ثم ارسم C
2. احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيمين الذين معادلتهما $x = 0$, $x = 1$
3. بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين
4. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ و $u_0 = 1$
   1) أثبت أن $0 < u_n < 1$ وذلك مهما كان الدليل n
   2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ، ثم بين تقاربها و احسب نهايتها

المسألة الخامسة و الأربعون : ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$

وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ احسب كلا من $g(1), g'(x), g'(1)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}$

المسألة السادسة و الأربعون :

أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x(\ln x)^2$

1. أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x) = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$
2. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها

ثانيا : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $g(x) = -2x\ln x$

أثبت أنه عند $x > 0$ يكون $f(x) - g(x) = xf'(x)$ و استنتج الوضع النسبي للخطين C_f ، C_g

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0, +\infty[$

1. بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x هي $y = xf'(x_0) + g(x_0)$
2. ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_g عند النقطة التي فاصلتها x_0

المسألة السابعة و الأربعون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الاحداثيين و عيّن قيمته الحدية مبينا نوعها
2. ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C
3. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = \frac{1}{e}$, $x = \frac{1}{e^2}$

المسألة الثامنة و الأربعون : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان كما يلي :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{4n}$ أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان

المسألة التاسعة و الأربعون : ليكن التابع f المعرف بالصيغة : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - |x|$

احسب النهايتين $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

المسألة الخمسون : حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عيّن حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

المسألة الواحدة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها و استنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه
2. ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C
3. بيّن أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد □ و أن هذا الحل ينتمي إلى المجال $]-2, -1[$ واستنتج أن □ تحقق المعادلة $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = 1$, $x = 0$
5. استنتج مجموع تعريف التابع $x \to g(x) = \ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

المسألة الثانية والخمسون :

لتكن المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ والمطلوب :

1. أثبت أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً
2. أثبت أن s_n تكتب بالشكل $s_n = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3^n})$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$

المسألة الثالثة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة التعريف واكتب معادلة كل مقارب وجدته .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0, 2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C, T
4. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T و الخط البياني C
5. ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ، استنتج الخط البياني C' للتابع g

المسألة الرابعة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \ln(x)$ والمطلوب :

1. أوجد مجموعة تعريف التابع ثم أوجد كل مقارب للخط البياني C .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الصغرى محلياً
3. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط البياني C
4. استنتج رسم الخط C' للتابع f' المعرف وفق $f'(x) = \frac{-1}{8}x^2 + \ln(-x)$

المسألة الخامسة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = x + x(\ln x)^2$ المعرف على $I =]0, +\infty[$ ولنكن $g(x) = (\ln(x) + 1)^2$ المطلوب :

1. أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$
2. أثبت $f'(x) = g(x)$
3. حل المعادلة $g(x) = 0$
4. نظم جدول بتغيرات f
5. اكتب معادلة المماس Δ في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

المسألة السادسة والخمسون : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1. أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n
2. استنتج أن العدد $\frac{5}{2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

المسألة السابعة والخمسون : في الشكل المجاور خط بياني C للتابع f و المطلوب :

1. مامعادلة المستقيم المقارب للخط C وما الوضع النسبي للخط C مع المقارب ؟
2. يقبل f قيما حدية حددها وحدد نوعها
3. في حالة عدد حقيقي K عين بدلالة K عدد حلول المعادلة $f(x) = K$

المسألة الثامنة والخمسون : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة وفق: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل $n \geq 1$ معرفة وفق $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

1. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم يطلب تعيين أساسها
2. استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

المسألة التاسعة والخمسين : (u_n) متتالية معرفة على N بـ: $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

1. عين العدد الحقيقي a بحيث يكون (u_n) متتالية ثابتة
2. ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ والخط البياني C للتابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
3. بفرض $a = 0$ باستعمال الرسم السابق مثّل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود u_4, u_3, u_2, u_1, u_0

المسألة الستون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب :

1. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها
3. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$
4. في معلم متجانس ارسم الخط C
5. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع : $g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$

المسألة الواحدة و الستين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$

المطلوب :

1. أثبت أن $2^n \geq n$ أيا كان العدد الطبيعي $n \geq 1$
2. استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

المسألة الثانية و الستين : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

والمطلوب :

1. اثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

المسألة الثالثة و الستين : أثبت أن $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أيا كان $x > -1$

المسألة الرابعة و الستين : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x - E(x)$

1. اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$
2. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

المسألة الخامسة و الستين : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية :

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ $\quad u_0 = 3$ عند كل n و المطلوب :

1. اثبت أن التابع متزايد تماما على
2. اثبت بالتدريج أن أيا كان العدد الطبيعي
3. استنتج أن المتتالية متقاربة و احسب نهايتها

المسألة السادسة و الستين : ليكن التابع $f : x \to ln\, x$ المعرف و المستمر على $I =]0, +\infty[$ ، عين تابعا أصليا للتابع f

المسألة السابعة و الستين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجيا وفق: $U_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$, $u_0 = \frac{5}{2}$

1- ارسم في معلم متجانس المستقيم Δ الذي معادلته $Y = x$ والخط c الممثل للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

2- باستعمال الرسم السابق مثل على محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3, u_4

3- ليكن $V_n = u_n - 6$:

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية,عين أساسها وحدها الأول

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

جلسة امتحانية لمراجعة التحليل

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني التابع المعرف على R وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

المطلوب: 1 احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2 أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

السؤال الثاني:

حل المعادلة: $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في R.

السؤال الثالث: حل المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln 4, 1)$

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{-3\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 2}{x + 3}$$

1 اكتب التابع f بالشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x+3}$$

2 أثبت أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

3 احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

السؤال الخامس: أثبت أن:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$$

ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1}$

السؤال السادس: ليكن التابع: $f(x) = x - \ln x$ المعرف على $I =]0, +\infty[$ والمطلوب:

1 جد $f'(x)$ واحسب $f(1)$ على المجال ثم $f'(1)$

2 ما نهاية $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$

3 استنتج سنن التابع $f(\ln x)$ واستنتج سنن التابع $h(x) = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x}$

السؤال السابع: 1 حل في R جملة المعادلتين:

$$x - 3y = 2\ln 2$$

$$x + y = 4\ln 2$$

2 إذا كان $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\,dx$ ، $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\,dx$

احسب $I - 3J$ ، $J + I$ ماستنتج قيمة كل من I, J

السؤال الثامن: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{-2, 2\}$ وفق $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2-4}$ والمطلوب:

1 ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وعين القيم الحدية الكبرى محلياً، وأوجد معادلة كل مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو يوازي المحور $y'y$

2 ارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C

3 احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x = -1$ ، $x = 1$

السؤال التاسع: ليكن f التابع المعرف على المجال $]2, +\infty[$ وفق $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

1 ادرس تغيرات f على المجال $]2, +\infty[$ ونظم جدولاً بها

2 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

3 اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3

السؤال العاشر: أثبت أن $\ln x \le x - 1$ أيا كان $x > 0$ باختيار $x = e^{1/e}$ ، $x = e^{-1/e}$ العدد e

السؤال الحادي عشر: أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$ ، ثم أعط عدداً حقيقياً α يحقق الشرط إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9 , 3.1[$

السؤال الثاني عشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج المقاربات الموازية لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه.

2) ارسم كل مقارب وجدته ، وارسم C

السؤال الثالث عشر: أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثم بيّن $\alpha \in]-1 , 0[$

السؤال الرابع عشر: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = xe^{-x}$ والمطلوب: 1) احسب $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$

2) أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

السؤال الخامس عشر: حل المعادلة

$$4^x = 5^{x+1}$$

السؤال السادس عشر: ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x+1}$$

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ أيا يكن x من D

2) احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

السؤال 21: ليكن التابع $f(x) = e^x - 1$

1) حل المتراجحة $f(x) \le 0$

2) احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

السؤال السابع عشر: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين ، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

السؤال الثامن عشر: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$-\ln(x+1) + \ln x \quad \ln(x-1)$$

السؤال التاسع عشر: إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أيا يكن x من $\mathbb{R}^*$ ، أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

السؤال العشرون: أولاً ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = e^x + 2 - x$ ، ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$ ،

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

1) أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$

2) بيّن أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

3) أثبت أن المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

جلسة لمراجعة المتتاليات

التمرين الأول

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = 3n+1$

1. أثبت أنها حسابية وعين أساسها ثم احسب المجموع $U_0+U_1+U_2+\dots+U_{10}$
2. برهن أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - 3$

نعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ حيث: $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

1. أثبت (V_n) هندسية ثم عين أساسها وحدها الأول.
2. اكتب U_n بدلالة n.

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n+1}$ و $U_0 = 2$

1. أثبت أن $U_n \geq U_{n+1} \geq 1$
2. استنتج أن (U_n) متناقصة.

التمرين الرابع:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية منها $U_1 = 6$ و $U_0 = -2$

1. أوجد أساس المتتالية ثم اكتب U_n بدلالة n
2. احسب المجموع $S = U_2 + U_3 + \dots + U_{10}$

التمرين الخامس:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية منها $q = 2$ ، $U_0 = -2$

1- احسب U_5

2- احسب المجموع $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين السادس:

لتكن المتتاليات $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان كما يلي:

$V_n = U_n + \frac{1}{4n}$

$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

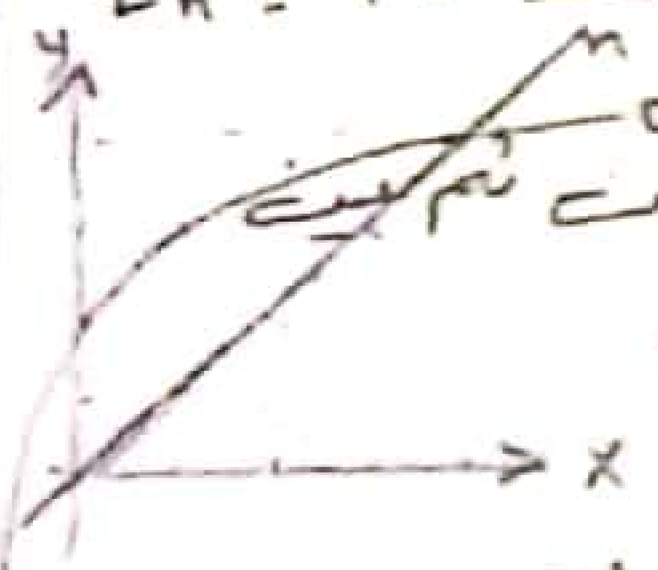
• أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان

التمرين السابع:

لتكن المتتاليات المعرفتان وفق:

$t_n = 1 - \frac{1}{n}$ و $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

• أثبت أنهما متجاورتان ثم بين نهايتهما المشتركة



التمرين الثامن:

نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{5U_n + 4}{U_n + 2}$

1- باستعمال الرسم ، مثل على محور الفواصل U_0, U_1, U_2, U_3 دون حساب الحدود

2- ضع تخمينا حول اتجاه المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها

التمرين التاسع:

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

2- أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ، ثم استنتج حصرا لحدود المتتالية (S_n) وبين أنها متقاربة.