المراجعة الذهبيّة في المتتاليات

تستهدف سلسلة المراجعة الذهبيّة جميع أفكار منهاج الرياضيات للبكالوريا العلمي لكيلا يغفل الطالب عن أي فكرة في منهاجه وتساعده في استحضارها وتنظيمها بالشكل الصحيح.

يتضمن الملف أهم أفكار بحث المتتاليات و التي تتلخص بتعريف المتتالية – الإثبات بالتدريج – معايير دراسة اطّراد متتالية – المتتاليات الحسابيّة و الهندسيّة - مجاميع شهيرة بالإضافة إلى ملاحظات تفيد في حلّ المسائل مع مثال تطبيقي مقتبس من أحد الدورات السابقة .

إعداد و تنسيق : أ. عبد الله منافيخي و أ. عبد الملك خير الله

٢٠٢٠/١١/١٦

أولاً: تعريف المتتالية :

تعطى المتتالية بطريقتين :

بتعريف صريح من النمط $u_n = f(n)$

حيث تعطى u_n بدلالة n .

مثال: $u_n = n^2 + n$

بتعريف تدريجي من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

في هذه الحالة يكتب كل حد بدلالة حدود سبقته.

مثال : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة تدريجيّاً وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

تذكر:

الرمز n يدلّ على مجهول ينتمي إلى الأعداد الطبيعية $n \in \mathbb{N}$

حيث $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ ويُستخدَم الرمز $\mathbb{N}^*$ ليدلَّ على المجموعة $\mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1,2,3,\dots\}$.

ثانياً: الإثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي) :

كيف نبرهن صحة علاقة بالتدريج ؟

١) نكتب القضية الواجب إثباتها $E(n)$ (كثير من الطلاب يغفل عنها بالرغم من أنّ عليها جزئين بالسلم ☺)

٢) نثبت صحة العلاقة من أجل حد البدء n_0

٣) نفترض صحة $E(n)$ و نبرهن صحة $E(n+1)$.

و من أهم التطبيقات على الاستقراء الرياضي :

- إثبات مساواة
- إثبات صحة متراجحة (و يندرج تحتها دراسة اطّراد متتالية معرّفة بالتدريج)
- إثبات أنّ مقداراً طبيعيّاً A يقبل القسمة على عدد طبيعيّ .

مثال : أثبت من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أنّ :

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N} .$$

الحل : هنا $n_0 = 0$

نتأمل القضيّة E بحيث : $E(n): \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

$E(0)$ محققة لأنّ $\frac{0(0+1)}{2} = 0 \in \mathbb{N}$

نفرض صحّة $E(n)$ أي نفرض أنّ $\frac{n(n+1)}{2} = k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

نبرهن صحّة $E(n+1)$:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= k + n + 1 \in \mathbb{N}$$

فالقضيّة صحيحة و قد أثبتنا ذلك بالتدريج .

ثالثاً: معايير اطّراد متتالية :

نميّز الحالات الآتية :

جهة اطراد المتتالية	معيار الفرق	معيار النسبة	دراسة اطّراد التابع الذي يحقق $u_n = f(n)$
$u_{n+1} = u_n$ المتتالية ثابتة	$u_{n+1} - u_n = 0$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	$f'(x) = 0$
$u_{n+1} \geq u_n$ المتتالية متزايدة	$u_{n+1} - u_n \geq 0$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$	$f'(x) \geq 0$
$u_{n+1} > u_n$ المتتالية متزايدة تماماً	$u_{n+1} - u_n > 0$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	$f'(x) > 0$
$u_{n+1} \leq u_n$ المتتالية متناقصة	$u_{n+1} - u_n \leq 0$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$	$f'(x) \leq 0$
$u_{n+1} < u_n$ المتتالية متناقصة تماماً	$u_{n+1} - u_n < 0$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	$f'(x) < 0$

ملاحظات: -يجوز استخدام معيار النسبة إذا و فقط إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماماً أي $u_n > 0$.

-تكون المتتالية مطّردة إذا حقّقت أحد الشروط السابقة وإلا تكون غير مطّردة.

كيف ندرس جهة اطّراد متتالية معرّفة بالتدريج ؟

لدراسة اطراد متتالية معطاة بعلاقة تدريجية نستخدم طريقة البرهان بالتدريج (الاستقراء الرياضي) و يمكن الاستعانة بتابع مساعد .

مثال :

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 \end{cases}$

الحل :

نلاحظ أن $u_1 = {u_0}^2 = 1$ و كذلك $u_2 = 1$ لذلك تبدو المتتالية u_n ثابتة .

نتأمل القضية :

$$E(n):\ u_{n+1} = u_n$$

$E(0)$ محققة لأن $u_1 = u_0 = 1$

نفرض صحة $E(n)$ أي نفترض أن $u_{n+1} = u_n$

و نبرهن صحة $E(n+1)$

من الفرض :

$$u_{n+1} = u_n$$

نربّع :

$${u_{n+1}}^2 = {u_n}^2$$

$$u_{n+2} = u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة و منه $E(n)$ محققة مهما تكن $n \geq 0$

ملاحظة : في بعض الحالات يمكن الاستغناء عن البرهان بالتدريج في دراسة اطّراد هذا النوع من المتتاليات

مثال : المتتالية $u_{n+1} = u_n + 2n$ متزايدة لأنّ $u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0$.

طريق الألف ميل يبدأ بخطوة
و طريق ال ٦٠٠ يبدأ من هنا ♥

رابعاً: المتتالية الحسابيّة و المتتالية الهندسيّة:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r $u_{n+1} = u_n + r$	كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد حقيقي q $u_{n+1} = u_n . q$
أساس المتتالية الحسابية r	أساس المتتالية الهندسية q
$u_n = u_0 + n.r$	$u_n = u_0 . q^n$
$u_m = u_p + (m-p)r$	$u_m = u_p . q^{m-p}$
a, b, c حدود متعاقبة عندئذٍ b هو الوسط الحسابي لـ a و c $b = \dfrac{a+c}{2}$	a, b, c حدود متعاقبة عندئذٍ b هو الوسط الهندسي لـ a و c $b^2 = ac$

س: كيف نثبت أنّ متتالية ما v_n حسابية ؟

يجب تحقق الشرط : $v_{n+1} - v_n = r$ حيث r عدد حقيقي ثابت لا يتعلق بالمتغير n .

س: كيف نثبت أن متتالية ما w_n هندسية ؟

يجب تحقق الشرط : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = q$ حيث q عدد حقيقي ثابت لا يتعلق بالمتغير n .

خامساً: المجاميع و السلاسل العدديّة :

مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية	مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية
$S = u_i + u_{i+1} + \cdots + u_j = \sum_{k=i}^{j} u_k$ $S = \frac{n}{2}(a+l)$ $a = u_i$ الحد الأول $l = u_j$ الحد الأخير n عدد الحدود $(n = j - i + 1 = \frac{l-a}{r} + 1)$	$S = u_i + u_{i+1} + \cdots + u_j = \sum_{k=i}^{j} u_k$ $S = a.\dfrac{1-q^n}{1-q}$ $a = u_i$ الحدّ الأوّل q أساس المتتالية الهندسية n عدد الحدود $(n = j - i + 1)$
مثال : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$	مثال : $1 + n + n^2 + n^3 = \dfrac{1-n^4}{1-n}$

مجاميع شهيرة (فهم + برهن بالتدريج) :

◀مجموع المكعّبات من 1 حتى n يساوي مربع مجموع تلك الأعداد

أي $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

◀ مجموع المربّعات من 1 حتى n :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نميّز بعض الحالات عن السلاسل العددية :

١- **أن يكون آخر حد من حدودها فقط بدلالة n.**

مثال: $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$

بالتالي عند تغيير دليلها نجري التعديل على آخر حد من المتتالية بحسب تغير الدليل

(هنا n يلعب دوراً في تحديد عدد الحدود لذلك يجب الانتباه)

بالتطبيق على المثال السابق نجد :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$$

$$S_{2n} = S_n + (n+1) + \cdots + (2n-1) + 2n$$

٢- **أن يكون جميع حدودها بدلالة n.**

مثال: $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

وبالتالي عند تغيير دليلها نجري تعديل عليها بمراعاة تغير أولها مع آخرها

بحسب تغير الدليل، وغالباً تحذف الحدود الأولى (هنا n يلعب دوراً في تحديد عدد الحدود لذلك يجب الانتباه)

بالتطبيق على المثال السابق نجد:

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

سادساً: ملاحظات تخصّ المسائل :

١- لدراسة اطّراد المتتالية التدريجية نوجد الحدود الأولى منها ثم نحدّد جهة اطّرادها

إذا كانت مطّردة **ثم نثبت ما توصّلنا إليه بالاستقراء الرياضي و لا بدّ من ذلك.**

٢- مضاعفات الأعداد :

العدد	مضاعفاته
٠	مضاعف لكل الأعداد
٢	أن يكون آحاد العدد زوجي
٣	إذا كان مجموع أرقام العدد مضاعف ٣
٥	أن يكون آحاد العدد ٠ أو ٥
٩	أن يكون مجموع أرقام العدد مضاعف ٩

٣- من فكرة التمرين رقم ٩ من تمرينات ومسائل :

إيجاد الحد العام بدلالة n للمتتالية المعرّفة تدريجياً وفق $u_{n+1} = au_n + b$:

* إذا كان $b = 0$ و $a \neq 1$ فالمتتالية هندسية أساسها a .

* إذا كان $a = 1$ و $b \neq 0$ فالمتتالية حسابية أساسها b .

* و في حالة $a = 1$ و $b = 0$ عندئذٍ $u_{n+1} = u_n$ فالمتتالية ثابتة .

* أما في باقي الحالات :

١) نوجد عبارة التابع الذي يحقق $u_{n+1} = f(u_n)$ (يستلزم ذلك ذكر مجموعة تعريف التابع)

٢) نوجد حل المعادلة $f(x) = x$ وليكن l

٣) نبرهن أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرّفة وفق : $v_n = u_n - l$ هندسية ونوجد حدّها العام بدلالة n .

٤) نستنتج من ذلك عبارة u_n بدلالة n .

٤- حذف عنصر أو إضافته في متراجحة:

تكبير الكبير:

يمكننا إضافة مقدار A إلى الطرف الكبير من أي متراجحة دون تغيير جهتها بشرط $A > 0$

يمكننا ضرب الطرف الراجح (الكبير) بمقدار A في أي متراجحة دون تغيير جهتها بشرط $A > 1$

تصغير الصغير :

يمكننا طرح مقدار A من الطرف الصغير من أي متراجحة دون تغيير جهتها بشرط $A > 0$

يمكننا قسمة الطرف الصغير على مقدار A من أي متراجحة دون تغيير جهتها بشرط $A > 1$.

تطبيقات

(دورة ٢٠١٨ الثانية) : $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها $q = 2$ و فيها $u_0 = 1$ ، و المطلوب :
احسب u_3 ثمّ احسب المجموع $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_7$.

الحل :

$$u_3 = u_0 q^{3-0} = 1 \times 2^3 = 8$$

حساب المجموع :

$$S = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

حيث $a = u_3 = 8$ ، $n = 7 - 3 + 1 = 5$:

$$S = 8\frac{1-2^5}{1-2} = 8\frac{1-32}{-1} = 8(31) = 248$$

ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

الحل :

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

تمّ بحمد الله