طبعة 2020

سلسلة رياضياتي

المسيطر في التكامل

شرح مبسط وسلس لدروس الرياضيات

للصف الثالث ثانوي

إعداد /

أ.صوفي رمضان حمادي

لـ أ. صوفي رمضان حمادي
770060766

تصميم / بلحاصل للدعاية والإعلان
770987082

رياضياتي @soofymath

يمكنكم متابعة قناتنا
عبــر برنامــج التلجرام
@soofymath

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

التكامل

إن من أهم وظائف التكامل التي سنتطرق لها في دراستنا في هذه الوحدة هما:

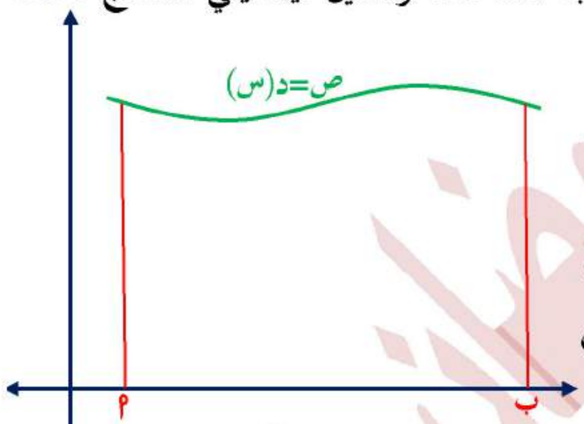
١) حساب المساحات (مساحة منطقة مستوية يحدها منحنى معطى) – التكامل المحدد .

٢) الحصول على الدالة الأصلية إذا عُلم مشتقة الدالة (عملية التكامل عملية معاكسة للاشتقاق) – التكامل غير المحدد .

أولاً: التكامل المحدد :

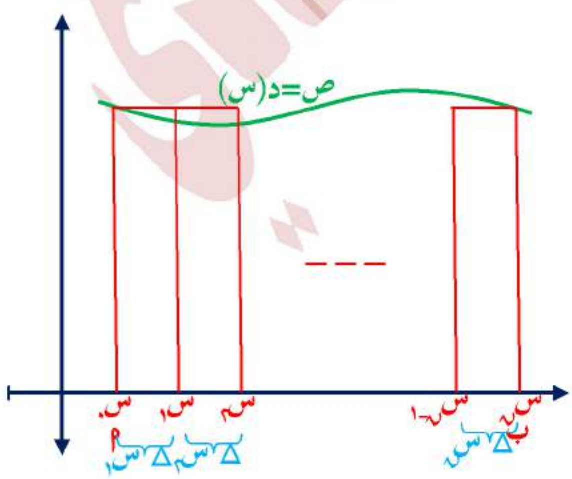
الحساب التقريبي للمساحة:

كما أشرنا آنفاً أن من وظائف التكامل حساب المساحات وسنعيّن فيما يلي استنتاج قاعدة حساب مساحة السطح أو تعريف التكامل المحدد .



لتكن د(س) متصلة على الفترة [ﻡ،ب] وبفرض أن بيان الدالة يقع فوق محور السينات،فإنه لحساب المساحة المحصورة ببيان الدالة(المنحنى) ومحور السينات والمستقيمين س = ﻡ ، س = ب (الفترة [ﻡ،ب]) كما في الشكل المقابل ، نتبع الخطوات الآتية :

(١) نجزئ الفترة [ﻡ،ب] إلى ن من الفترات الجزئية ولنبدأ بـ ﻡ ولتكن س٠ ، ثم نقطة أخرى ولتكن س١ ... وهكذا إلى سن وهي النقطة الأخيرة ب ومن عند كل نقطة سنرسم مستقيم عمودي ثم نوصل بين كل فترة فنحصل على مستطيلات لتكن قاعدتها (عرض المستطيل) على التوالي :



Δ س١ ، Δ س٢ ، Δ س٣ ، ... ، Δ سن ، حيث

Δ س١ = |س١ − س٠| ،

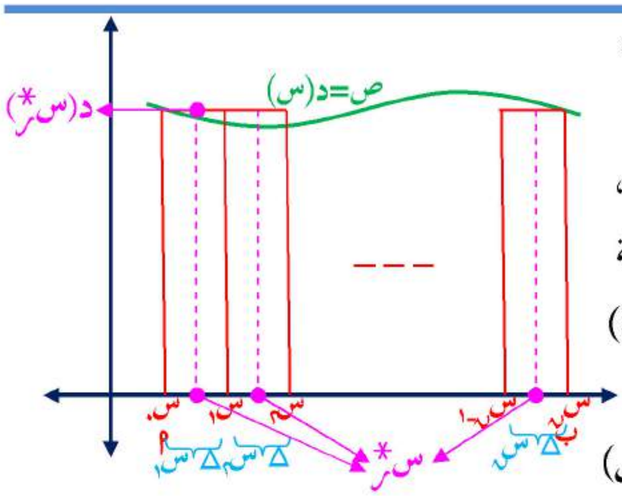
Δ س٢ = |س٢ − س١| ،

⋮

Δ سن = |سن − سن-١|

أي أن قاعدة المستطيلات هي Δ سر حيث

ر = ١ ، ٢ ، ٣، ... ، ن ، لاحظ الشكل المجاور



(٢) نختار نقطة ولتكن س$_ر^*$ بحيث تنتمي إلى الفترات أي س$_ر^*$ ∋ [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$] حيث سيكون :

س$_١^*$ ∋ [س$_٠$ ، س$_١$] ، س$_٢^*$ ∋ [س$_١$ ، س$_٢$] ، ... ،

وهكذا كما أن النقطة على المنحنى ستمثّل بالنقطة (س$_ر^*$ ، د(س$_ر^*$)) حيث د(س$_ر^*$) هو ارتفاع (طول) المستطيل لاحظ الشكل:

(٣) نلاحظ مما سبق أن لكل مستطيل قاعدة (عرض) وهي Δ س$_ر$ وله ارتفاع (طول) هو د(س$_ر^*$) ومن قانون حساب مساحة المستطيل حيث أن مساحة المستطيل = العرض × الطول ، فإن مساحة المستطيل الأول ستكون سط$_١$ = Δ س$_١$ × د(س$_١^*$)

، و سط$_٢$ = Δ س$_٢$ × د(س$_٢^*$) ، وللتعبير عن مساحة المستطيلات بشكل عام سنقول أن :

سط$_ر$ = Δ س$_ر$ × د(س$_ر^*$) حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن وهي عدد المستطيلات .

ومما سبق عزيزي الطالب فإنه لمعرفة المساحة المحصورة ببيان الدالة ومحور السينات س = ٩ ، س = ب علينا حساب مجموع مساحات المستطيلات أي أن :

مساحة السطح المحدد بـ [٩،ب] وبيان الدالة ومحور السينات (سط$_٩^ب$)≈ مجموع مساحات المستطيلات

أي : سط$_٩^ب$ ≈ Δ س$_١$ × د(س$_١^*$) + Δ س$_٢$ × د(س$_٢^*$) + ... + Δ س$_ن$ × د(س$_ن^*$)

وكون العملية عندنا هي الجمع فيمكن عمل ذلك بالمجموع (مجــ) أي أن :

سط$_٩^ب$ ≈ مجـ$_{ر=١}^{ن}$ Δ س$_ر$ × د(س$_ر^*$) ، (يسمى هذا المجموع مجموع ريمان) .

تنبيه : في الخطوة (١) لم نذكر أن الفترات متساوية وبفرض أن هذه الفترات متساوية فإنه يكون :

Δ س$_ر$ = $\frac{\text{ب} - ٩}{\text{ن}}$ ، س$_ر^*$ = ٩ + $\frac{\text{ب} - ٩}{\text{ن}}$ ر

(٤) نلاحظ في الشكل السابق أن هناك فراغات ليست من ضمن مساحة السطح دخلت في مساحة المستطيلات وهناك ايضاً مساحة للسطح لم تدخل في مساحة المستطيلات ومن هنا وللحصول على مساحة حقيقية للسطح فإننا سنعمل على زيادة عدد المستطيلات كي نتخلص من المساحة المضافة واضافة المساحة المفقودة لنحصل على مساحة حقيقية ولذلك سنفرض أن عدد المستطيلات لانهائية (أي ن ⟵ ∞) وفي هذه الحالة القاعدة للمستطيلات (العرض) ستكون قريبة من الصفر (أي Δ س$_ر$ ⟵ ٠) لذلك تم إدخال النهاية على مجموع ريمان للحصول على مساحة حقيقية للسطح فكانت العلاقة لايجاد مساحة السطح هي : سط$_٩^ب$ = نهــا$_{ن ⟵ ∞}$ مجـ$_{ر=١}^{ن}$ Δ س$_ر$ × د(س$_ر^*$)

تذكير : أهم قوانين وخواص المجموع

(١) $\sum_{ر=١}^{ن} ﻫ = ﻫ ن$

مثلاً: $\sum_{ر=١}^{٤} ٣ = ٣ \times ٤ = ١٢$ وبالطريقة التقليدية: $\sum_{ر=١}^{٤} ٣ = ٣+٣+٣+٣ = ١٢$

(٢) $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

مثلاً: $\sum_{ر=١}^{٥} ر = \frac{٥(٥+١)}{٢} = \frac{٥\times٦}{٢} = ١٥$

وبالطريقة التقليدية: $\sum_{ر=١}^{٥} ر = ١+٢+٣+٤+٥=١٥$

(٣) $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

مثلاً: $\sum_{ر=١}^{٣} ر^٢ = \frac{٣(٣+١)(٢\times٣+١)}{٦} = \frac{١٢\times٧}{٦} = ١٤$

وبالطريقة التقليدية: $\sum_{ر=١}^{٣} ر^٢ = ١^٢+٢^٢+٣^٢ = ١٤$

(٤) $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٣ = \frac{ن^٢(ن+١)^٢}{٤}$

مثلاً: $\sum_{ر=١}^{٣} ر^٣ = \frac{٣^٢(٣+١)^٢}{٤} = \frac{٩\times١٦}{٤} = ٣٦$

وبالطريقة التقليدية: $\sum_{ر=١}^{٣} ر^٢ = ١^٣+٢^٣+٣^٣ = ٣٦$

(٥) $\sum_{ر=١}^{ن} ﻫ ر = ﻫ \sum_{ر=١}^{ن} ر$ ، حيث ﻫ عدد ثابت .

(٦) $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \pm ص_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} ص_ر$

نعطيك عزيزي الطالب هنا خطوات لحساب مساحة السطح ، كما أننا سنعمل بنفس الخطوات في حساب التكامل المحدد لاحقاً .

- خطوات حساب مساحة سطح : (خطوات حساب التكامل المحدد بالتعريف)

١) نقسم الفترة [ﻫ،ب] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول ، فيكون : طول أي فترة : $\Delta س_ر = \frac{ب - ﻫ}{ن}$.

٢) نختار نقطة اختيارية في كل فترة جزئية ونرمز لها $س_ر^*$ وتعطى بالصيغة $س_ر^* = ﻫ + \frac{ب - ﻫ}{ن} ر$ ، ثم نجد صورتها في الدالة الأصلية المعطاة $د(س_ر^*)$.

٣) ندخل المجموع على حاصل ضرب $\Delta س_ر \times د(س_ر^*)$ ونستخدم قوانين وخواص المجموع للتخلص من رمز المجموع ووضع المقدار في ابسط صورة .

٤) نحسب النهاية للمقدار في ابسط صورة (الناتج من الخطوة ٣) فيكون الناتج هو مساحة السطح مقياسة بالوحدة المربعة .

مثال : أوجد المساحة المحصورة ببيان الدالة د(س) = س+١ ومحور السينات وفوق الفترة [٠ ، ٤].

الحل: نستخدم الخطوات السابقة وكما يلي :

(١) نقسم الفترة [٠ ، ٤] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول حيث طول كلاً منها :

$$\Delta\,\text{سر} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٤ - ٠}{\text{ن}} = \frac{٤}{\text{ن}}$$

(٢) نختار نقطة $\text{س}^*_{\text{ر}}$ في كل فترة حيث $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر} = ٠ + \frac{٤ - ٠}{\text{ن}}\,\text{ر} = \frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر}$

نعوض بـ $(\frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر})$ في الدالة لنحصل على صورتها أي أن : $\text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر} + ١$

(٣) $\text{مجـ}\ \Delta\,\text{سر} \times \text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \text{مجـ}\ \frac{٤}{\text{ن}}\left(\frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر} + ١\right)$

نقدم $\frac{٤}{\text{ن}}$ أمام المجموع حسب الخاصية ٥ صـ٣ـ لأن $\frac{٤}{\text{ن}}$ عدد ثابت حيث ن يمثل عدد المستطيلات

$= \frac{٤}{\text{ن}}\left[\text{مجـ}\left(\frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر} + ١\right)\right]$ [وباستخدام خاصية ٦ صـ٣ـ بتوزيع المجموع على الجمع]

$= \frac{٤}{\text{ن}}\left[\text{مجـ}\ \frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر} + \text{مجـ}\ ١\right]$ [وباستخدام الخاصية السابقة بتقديم $\frac{٤}{\text{ن}}$]

$= \frac{٤}{\text{ن}}\left[\frac{٤}{\text{ن}}\ \text{مجـ}\ \text{ر} + \text{مجـ}\ ١\right]$ [وبتطبيق القانون (١) و (٢) صـ٣ـ]

$= \frac{٤}{\text{ن}}\left[\cancel{\frac{٤}{\text{ن}}}^{\,٢} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)}{\cancel{٢}} + \text{ن}\right]$ [وبالاختصار والضرب والتجميع]

$= \frac{٤}{\text{ن}}\left[٢\text{ن} + ٢ + \text{ن}\right] = \frac{٤}{\text{ن}}\left[٣\text{ن} + ٢\right] = \frac{١٢\text{ن}}{\text{ن}} + \frac{٨}{\text{ن}} = \frac{١٢\text{ن}+٨}{\text{ن}}$ أو $= ١٢ + \frac{٨}{\text{ن}}$

(٤) نوجد نهاية المقدار الناتج من الخطوة (٣) وكما يلي: $\text{سط}_{٠}^{٤} = \text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty}\ \frac{١٢\text{ن}+٨}{\text{ن}} = ١٢$ وحدة مربعة.

إن هذا المثال تم حله بالتفصيل وسنكتفي به لأننا سنتطرق لنفس الطريقة في حساب التكامل المحدد بالتعريف .

تدريب : أحسب $\text{سط}_{٠}^{٣}$ للدالة د(س) = ٢س $\boxed{٩}$

....

....

....

....

....

تعريف التكامل المحدد:

إذا كانت د دالة معرفة على الفترة [أ،ب] ، وكانت النهاية الآتية موجـودة (لها قيمة):

$\lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} \Delta س_ر \times د(س_ر^*)$. عندئذٍ تسمى هذه النهاية التكامل المحدد للدالة د على الفترة [أ،ب] ويعبر عنها رمزياً : $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$. أي أن :

$$\boxed{\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} \Delta س_ر \times د(س_ر^*)}$$

ملاحظات:

١) الصورة $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ تقرأ تكامل من أ إلى ب للدالة د(س) بالنسبة للمتغيّر س واختصاراً تقرأ (تكامل من أ إلى ب د(س) بالنسبة لـ س)

٢) لكي تكون الدالة د قابلة للتكامل يجب تحقق الشرطين الآتين :

(أ) أن تكون د معرفة على الفترة [أ،ب]، (ب) أن تكون النهاية للمجموع موجودة (لها قيمة)

٣) يسمى هذا التكامل بالمحدد لأن قيمته محددة (أي ناتجه عدد حقيقي).

٤) يسمى العدد (أ) بالحد الأدنى و (ب) بالحد الأعلى لفترة التكامل (أ،ب ∈ س).

٥) الرمز ءس هو الرمز الذي يحدد المتغيّر الذي تتم المكاملة بالنسبة له .

٦) إذا وجدت النهاية السابقة عندئذٍ يقال أن الدالة د قابلة للتكامل على الفترة [أ،ب] .

مبرهنة (١): إذا كانت الدالة د متصلة على [أ،ب] ، فإن : د قابلة للتكامل على [أ،ب]

أي أن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ موجود (له قيمة) .

إن المبرهنة السابقة توضح أنه إذا كانت الدالة متصلة على فترة معينة فهي تحقق شرطي قابلية التكامل المشار اليهما في الملاحظات السابقة رقم٢ وعليه فالدالة تكون قابلة للتكامل وإذا كانت غير متصلة فإنه لايوجد للدالة تكامل .

مثلاً : (١) $\int_{٢}^{٣} (س+٥)\, ءس$ ، نلاحظ أن د(س) = س+٥ ⇐ م.ت = ح وهي متصلة على ح وبالتالي تكون متصلة على الفترة [٢ ،٣] وعليه فهي قابلة للتكامل على الفترة [٢ ، ٣] .

(٢) $\int_{١}^{٤} \frac{ءس}{س - ١}$ ، نلاحظ أن د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ وأن م.ت = ح/{١} وهي غير متصلة عند س = ١ ، لذلك فهي غير قابلة للتكامل على الفترة [١ ، ٤] لأن ١ ∈ [١ ، ٤] .

(٣) $\int_{-٣}^{٠} \frac{\text{دع}}{\text{ع} - ١}$ ، نلاحظ أن $\text{د(س)} = \frac{١}{\text{ع} - ١}$ وأن م.ت = ح/{١} وهي غير متصلة عند س = ١ ، ولكن الدالة قابلة للتكامل على الفترة [−٣ ، ٠] لأن ١ ∌ [−٣ ، ٠] .

(٤) $\int_{-١}^{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}}\ \text{دس}$ هذا التكامل موجود . لماذا ؟

(٥) $\int_{-٥}^{٥} |\text{ص}|\ \text{دص}$ هذا التكامل موجود . لماذا ؟

بعد أن تعرفت عزيزي الطالب على تعريف التكامل المحدد فسنعطيك فيما يلي كيفية حساب هذا التكامل المحدد باستخدام التعريف السابق .

إن الخطوات المستخدمة في حساب التكامل المحدد هي نفس الخطوات لايجاد مساحة السطح وبنفس الطريقة وقد تطرقنا للخطوات سابقاً في الصفحة (٣) ، وإليك الأمثلة .

تنبيه: فضلاً ركّز جيداً على خطوات هذا السؤال لأنه لايخلو اختبار وزاري من مثل هذا السؤال

مثال ١: باستخدام تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢+٣)\ \text{دس}$.

الحل: لاحظ أنه ممكن ايجاد هذا التكامل بطريقة أخرى ستتعرف عليها لاحقاً ولكن هنا ألزمنا في السؤال باستخدام تعريف التكامل المحدد لايجاد قيمته وعليه سيكون الجواب بالخطوات وكما يلي :

(١) نجزئ الفترة [٠ ، ٢] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول حيث طول كلاً منها :

$$\Delta \text{س}_\text{ر} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٢-٠}{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{ن}}$$

(٢) نختار نقطة $\text{س}^*_\text{ر}$ في كل فترة حيث $\text{س}^*_\text{ر} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\ \text{ر} = ٠ + \frac{٢-٠}{\text{ن}}\ \text{ر} = \frac{٢}{\text{ن}}\ \text{ر}$

نعوض بـ $(\frac{٢}{\text{ن}}\ \text{ر})$ في الدالة لنحصل على صورتها أي أن : $\text{د}(\text{س}^*_\text{ر}) = (\frac{٢}{\text{ن}}\ \text{ر})^٢ + ٣ = \frac{٤}{\text{ن}^٢}\ \text{ر}^٢ + ٣$

(٣) $\sum \Delta \text{س}_\text{ر} \times \text{د}(\text{س}^*_\text{ر}) = \sum \frac{٢}{\text{ن}} (\frac{٤}{\text{ن}^٢}\ \text{ر}^٢ + ٣)$

(وبالتقديم وتوزيع المجموع) $= \frac{٢}{\text{ن}} [\sum (\frac{٤}{\text{ن}^٢}\ \text{ر}^٢ + ٣)] = \frac{٢}{\text{ن}} [\frac{٤}{\text{ن}^٢} \sum \text{ر}^٢ + \sum ٣]$

$$= \frac{٢}{\text{ن}} [\cancel{\frac{٤}{\text{ن}^٢}}^{\frac{٢}{\text{ن}^٢}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{\cancel{٦}_{٣}} + ٣\text{ن})] = \frac{٢}{\text{ن}} [\ \frac{(٢\text{ن}+٢)\ (٢\text{ن}+١)}{٣\text{ن}} + ٣\text{ن})]$$

$$= [\frac{٨\text{ن}^٢+١٢\text{ن}+٤}{٣\ \text{ن}^٢} + ٦\ ]$$

(٤) ∴ $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢+٣)\ \text{دس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} [\frac{٨\text{ن}^٢+١٢\text{ن}+٤}{٣\ \text{ن}^٢} + ٦\ ] = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة.

مثال ٢: باستخدام تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{١}^{٣} (٢س+١)\, ءس$.

الحل: نجزئ الفترة [١ ، ٣] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول: $\Delta س_ر = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٣-١}{ن} = \frac{٢}{ن}$

نختار نقطة $س_ر^*$: $س_ر^* = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر = ١ + \frac{٣-١}{ن} ر = ١ + \frac{٢}{ن} ر$

∴ $د(س_ر^*) = ٢(١ + \frac{٢}{ن} ر) + ١ = ٢ + \frac{٤}{ن} ر + ١ = ٣ + \frac{٤}{ن} ر$

∴ $مجـ\ \Delta س_ر \times د(س_ر^*) = \Delta س_ر\ مجـ\ د(س_ر^*) = \frac{٢}{ن}\left[مجـ\ (٣ + \frac{٤}{ن} ر)\right]$

$= \frac{٢}{ن}\left[(٣ن + \frac{\cancel{٤}^{٢}}{\cancel{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)}{\cancel{٢}})\right] = \frac{٢}{ن}(٣ن+٢ن+٢) = ١٠ + \frac{٢}{ن}$

∴ $\int_{١}^{٣} (٢س+١)\, ءس = \lim_{ن \to \infty} \left[١٠ + \frac{٤}{ن}\right] = ١٠$ وحدة مربعة .

تدريبات: (١) باستخدام تعريف التكامل المحدد أحسب :

(أ) $\int_{-١}^{٣} (٣س^٢+١)\, ءس$. $\boxed{٣٢}$ (ب) $\int_{-٢}^{٠} (٤ - س)\, ءس$. $\boxed{١٠}$

(٢) أثبت أن : $\int_{-ك}^{ك} ٣\, ءس = ٦ك$.

مبرهنة (٢): إذا كانت جـ عدداً ثابتاً ، فإن : $\int_{أ}^{ب}$ جـ ءس = جـ (ب − أ)

البرهان : نجزئ الفترة [أ،ب] إلى ن فترة جزئية حيث Δ سر = $\frac{ب - أ}{ن}$

نختار نقطة $س^*_ر$ حيث $س^*_ر$ = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ ر

∵ د(س) = جـ ⇐ ∴ د($س^*_ر$) = جـ ، حيث جـ عدداً ثابتاً .

∴ $\lim_{ن \to \infty}$ مجـ ($\frac{ب - أ}{ن}$ × جـ) [الكمية داخل القوسين كلها تمثل عدداً ثابتاً]

= $\lim_{ن \to \infty}$ ($\frac{ب - أ}{\cancel{ن}}$ × جـ$\cancel{ن}$) = جـ (ب − أ) [نهاية العدد الثابت نفسه] (هـ . ط . ث)

مثال تطبيقاً للمبرهنة (٢): أحسب التكاملات الآتية :

(١) $\int_{٣}^{٥}$ ٧ ءس . (٢) $\int_{-٥}^{٢}$ ٣ ءس . (٣) $\int_{٠}^{٤}$ أ ءس

الحل: (١) $\int_{٣}^{٥}$ ٧ ءس = ٧ (٥ − ٣) = ٧ × ٢ = ١٤

(٢) $\int_{-٥}^{٢}$ ٣ ءس = ٣ (٢ − (−٥)) = ٣ (٢+٥) = ٣ × ٧ = ٢١

(٣) $\int_{٠}^{٤}$ أ ءس = أ (٤ − ٠) = ٤أ

تعريف :

١− إذا كانت د(أ) موجودة فإن: $\int_{أ}^{أ}$ د(س) ءس = ٠ [المساحة تساوي صفر لأن الفترة من عدد إلى نفسه]

٢− إذا كانت د دالة قابلة للتكامل على [أ،ب] فإن: $\int_{ب}^{أ}$ د(س) ءس = − $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس

[إذا عكست الفترة في حدود التكامل فإنها تعطينا سالب التكامل دون العكس]

خواص التكامل المحدد:

مبرهنة (٣): إذا كانت $د_١$،$د_٢$ دالتين قابلتين للتكامل على [أ،ب] ، ك عدداً ثابتاً فإن :

١) $\int_{أ}^{ب}$ ك $د_١$(س) ءس = ك $\int_{أ}^{ب}$ $د_١$(س) ءس

٢) $\int_{أ}^{ب}$ [$د_١$(س)±$د_٢$(س)] ءس = $\int_{أ}^{ب}$ $د_١$(س) ءس± $\int_{أ}^{ب}$ $د_٢$(س) ءس

ممكن تعميم (٢) لأكثر من دالتين

مبرهنة (٤):

إذا كانت د قابلة للتكامل على [أ،ب] ، وكان أ < جـ < ب فإن: د قابلة للتكامل على [أ،جـ] وعلى [جـ،ب] . أي أن : $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = $\int_{أ}^{جـ}$ د(س) ءس + $\int_{جـ}^{ب}$ د(س) ءس

مثال تطبيقاً للخواص: إذا كان $\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس = ٢ ، $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس = ٧ ، $\int_{٣}^{٥}$ هـ(س) ءس = ٨

أوجد ما يلي: (١) $\int_{٣}^{٥}$ [٣د(س) – هـ(س)] ءس . (٢) $\int_{١}^{٣}$ د(س) ءس

الحل: (١) تطبيقاً للخواص السابقة مبرهنة (٣) يكون :

$\int_{٣}^{٥}$ [٣د(س) – هـ(س)] ءس = ٣ $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس – $\int_{٣}^{٥}$ هـ(س) ءس = ٣×٧ – ٨ = ٢١–٨ = ١٣

(٢) تطبيقاً للخواص السابقة مبرهنة (٤) يكون :

∵ $\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس = $\int_{١}^{٣}$ د(س) ءس + $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس

∴ $\int_{١}^{٣}$ د(س) ءس = $\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس – $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس = ٢ – ٧ = – ٥

تدريب : بفرض أن $\int_{١}^{٣}$ د(س) ءس = ٥ ، $\int_{١}^{٦}$ د(س) ءس = ٩ ، $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) ءس = ٧

فأوجد : (١) $\int_{٣}^{٦}$ د(س) ءس . $\boxed{٤}$ (٢) $\int_{١}^{٣}$ ٢[هـ(س) + د(س)] ءس . $\boxed{٢٤}$

....

....

....

....

....

مقارنة التكاملات :

مبرهنة (٥): (مبرهنة المقارنة)

(١) إذا كانت د قابلة للتكامل على [أ،ب] ، وكانت د(س) $\geq$ ٠ ∀ س ∈ [أ،ب] فإن:
$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس $\geq$ ٠

(٢) إذا كانت د١،د٢ دالتين قابلتين للتكامل على [أ،ب]، د١(س) $\geq$ د٢(س) ∀ س ∈ [أ،ب]
فإن : $\int_{أ}^{ب}$ د١(س) ءس $\geq$ $\int_{أ}^{ب}$ د٢(س) ءس

توضيح المبرهنة : (١) التكامل يكون موجب إذا كانت الدالة موجبة ويكون سالب إذا الدالة سالبة.

(٢) الدالة الأكبر يكون تكاملها الأكبر .

سنعطي أولاً أمثلة للفرع (١) من المبرهنة وسنلاحظ أن هناك عدة طرق للإجابة وأشهر هذه الطرق هي طريقة البناء ، أي بناء الدالة من فترة التكامل المعطى . وأنصح باستخدام طريقة البناء إذا كان ممكناً .

معلومات مهمة حول طريقة البناء :

١- بناء الدالة هو إجراء كافة العمليات الجبرية الداخلة في تكوين قاعدة الدالة ، انطلاقاً من فترة متصلة أو مجموعة التعريف .

٢- بناء الدالة يبدأ بالمتغيّر س موضوعاً بين حدود الفترة بإشارات المتراجحة .

٣- يتم البناء خطوة خطوة بتنفيذ العمليات الحسابية مع مراعاة التقديم والتأخير إلى أن نحصل على الدالة د(س) .

٤- بعد عملية البناء وتكوين الدالة نكون حصلنا على فترة وهي حدود الدالة وفق فترة التكامل . ومن خلال هذه الفترة يتبيّن إذا كانت الدالة ضمن فترة موجبة أم سالبة .

٥- الدالة القابلة للبناء هي التي تحتوي على متغير واحد فقط وغير متعدد . لذلك قد تكون طريقة البناء غير ممكنة من الوهلة الأولى ، ولكن يمكن عمل خطوات (اجراءات) معينة لتصبح الدالة ممكنة البناء وذلك في الدوال التي يظهر فيها المتغيّر س في أكثر من حد مثل الدوال الآتية :

أ) د(س)=جتاس−جاس يعالج باستخدام متطابقات ليصبح لديناس مكتوباً مرة واحدة

ب) د(س) = $\frac{س^{٢}+٥}{س^{٢}+١}$ يعالج بقسمة البسط على المقام وكتابة الدالة بصورة جديدة مكتوباً س مرة واحدة فقط .

ج) د(س) = س^{٢} + ٢س يعالج تكرار الـ (س) بإكمال المربع .

ملاحظات عند اجراء البناء والتعامل مع المتراجحة :

١) الضرب والقسمة في (على) عدد سالب يغيّر إشارة المتراجحة .

٢) قلب (شقلبة) أطراف المتراجحة يغيّر إشارة المتراجحة .

٣) عند تربيع المتراجحة يجب الانتباه للحالات الآتية وسنعطيك مثال :

(أ) إذا كان العددين لطرفي المتراجحة موجب مثل : ٣ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٥ عند التربيع حافظ على إشارة المتراجحة وسيكون : ٩ $\leqslant$ س^{٢} $\leqslant$ ٢٥ .

(ب) إذا كان العددين سالبين مثل: −٥ $\leqslant$ س $\leqslant$ −٣ عند التربيع اعكس إشارة المتراجحة أو بدّل بين موقعي العددين فيكون : ٢٥ $\geqslant$ س^{٢} $\geqslant$ ٩ أو ٩ $\leqslant$ س^{٢} $\leqslant$ ٢٥ .

(ج) إذا كان العددين أحدهما موجب والآخر سالب مثل : −٥ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٣ عند التربيع نحافظ على إشارة المتراجحة والعدد السالب يكون بصفر والآخر يكون أكبر المربعين للعددين . أي يكون : ٠ $\leqslant$ س^{٢} $\leqslant$ أكبر المربعين لـ (−٥) ، (٣)

فنلاحظ أن (−٥)^{٢} = ٢٥ ، (٣)^{٢} = ٩ ، فنأخذ ٢٥ ويكون : ٠ $\leqslant$ س^{٢} $\leqslant$ ٢٥

٤) عند إدخال القيمة المطلقة للمتراجحة يجب الانتباه لمثل الحالات الآتية :

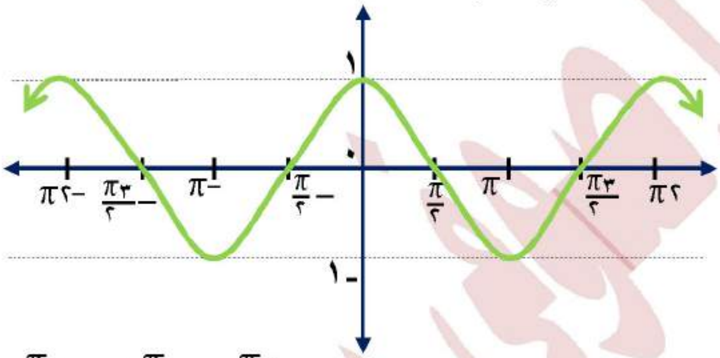
(أ) $٢ < س < ٣ \Rightarrow ٢ < |س| < ٣$

(ب) $-٣ < س < -٢ \Rightarrow ٣ > |س| > ٢ \Rightarrow ٢ < |س| < ٣$

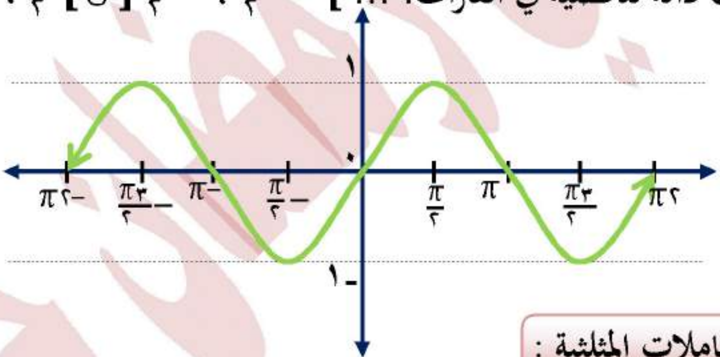
(ج) $-٣ < س < ٢ \Rightarrow ٠ < |س| < ٣$

٥) الضرب في دالة تناقصية مثل :

أ) الجتا دالة تناقصية في الفترات : ... $]-٢\pi ، -\pi[\cup]٠ ، \pi[$ ... لاحظ الرسم:

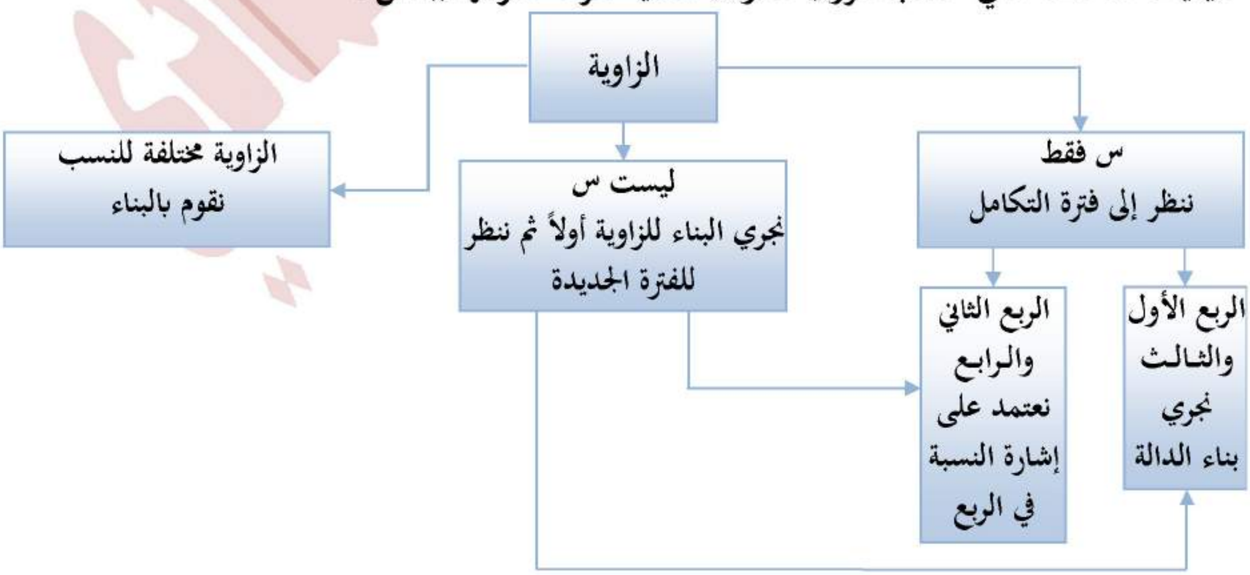


ب) الجيب دالة تناقصية في الفترات: ... $]-\frac{٣\pi}{٢} ، -\frac{\pi}{٢}[\cup]\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}[$ ... لاحظ الرسم:



طريقة مقارنة التكاملات المثلثية :

سيفيدنا المخطط الآتي حسب الزوايا للدوال المثلثية المراد مقارنتها ببعض :



بعد إعطاء بعد المعلومات حول طريقة البناء ومقارنة التكاملات المثلثية نعطي أمثلة على الفرع الأول (١) من مبرهنة (٥) (مبرهنة المقارنة) .

مثال ١: أثبت أن $\int_{١}^{٣}$ (س^{٢}−١) ءس ⩾ ٠

الحل: **حل أول:** نستخدم طريقة البناء:

١ ⩽ س ⩽ ٣ (بالتربيع) ⇐ ١ ⩽ س^{٢} ⩽ ٩ (بطرح ١) ⇐ ٠ ⩽ س^{٢}−١ ⩽ ٨

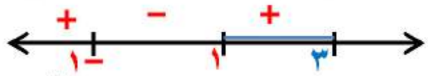
⇐ ٠ ⩽ د(س) ⩽ ٨

∴ نلاحظ أن فترة الدالة د(س) موجبة ، ∀ س ∈ [١ ، ٣] ، وبحسب المبرهنة (٥) :

∴ $\int_{١}^{٣}$ (س^{٢}−١) ءس ⩾ ٠

حل ثاني: نستخدم طريقة الإشارة: ندرس اشارة د(س) في الفترة [١ ، ٣] فنوجد اصفار (جذور) الدالة : نضع د(س) = ٠ ⇐ س^{٢}−١ = ٠ ⇐ س^{٢} = ١ ⇐ س = ±١

ندرس إشارة الدالة حول الجذرين بالتعويض بعدد في الدالة وملاحظة الإشارة أو كما ملاحظ أن س^{٢} موجب فتكون الدالة موجبة خارج الجذين:



وعليه فإن الدالة موجبة ∀ س ∈ [١ ، ٣] وحسب المبرهنة (٥) ⇐ ∴ $\int_{١}^{٣}$ (س^{٢}−١) ءس ⩾ ٠

مثال ٢: أثبت أن $\int_{٠}^{١} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{س}^{٣}-٣}$ ءس ⩽ ٠

الحل: نلاحظ أن الدالة كسرية وأن المتغير (س) متعدد لذلك هنا لن نستخدم البناء للدالة كاملة ولكن سنفصل الدالة وسندرس إشارة كلاً من البسط والمقام .

أولاً البسط : سنبني الدالة جتا $\frac{\pi}{٢}$ س

٠ ⩽ س ⩽ ١ (بالضرب في $\frac{\pi}{٢}$) ⇐ ٠ ⩽ $\frac{\pi}{٢}$ س ⩽ $\frac{\pi}{٢}$ (ادخال جتا) ⇐ جتا ٠ ⩾ جتا $\frac{\pi}{٢}$ س ⩾ جتا $\frac{\pi}{٢}$

⇐ ١ ⩾ جتا $\frac{\pi}{٢}$ س ⩾ ٠ (لاحظ عكسنا الإشارة لأن جتا تناقصية في الفترة [٠ ، π])

ومما سبق نلاحظ أن فترة الدالة موجبة وعليه فإن البسط للدالة الكسرية موجب .

- **توضيح:** ممكن بناء الزاوية فقط دون إدخال الجتا فنلاحظ أن الزاوية واقعة في الربع الأول والجتا موجب في هذا الربع وعليه فإن الدالة موجبة .

ثانياً المقام : سنبني الدالة س^{٣}−٣

٠ ⩽ س ⩽ ١ (بالتكعيب) ⇐ ٠ ⩽ س^{٣} ⩽ ١ (بطرح ٣) ⇐ −٣ ⩽ س^{٣}−٣ ⩽ −٢

نلاحظ أن فترة دالة المقام فترة سالبة .

ندرس الآن إشارة الدالة من خلال إشارة كلاً من البسط والمقام :

$\because \frac{+}{-} = - \Leftarrow \therefore$ الدالة $\frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢} \text{س}}{\text{س}^٣ - ٣} \leqslant ٠ \Leftarrow \therefore \int_{٠}^{١} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢} \text{س}}{\text{س}^٣ - ٣} \text{ءس} \leqslant ٠$

مثال٣: أثبت أن $\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^٢ + ٤} > ٠$

الحل: إن هذا المثال ممكن الإجابة عنه بأكثر من طريقة منها :

١- دراسة كلاً من البسط والمقام مثل مافعلنا في المثال السابقة مع ملاحظة أن البسط موجب والمقام موجب دائماً لوجود التربيع على س مع امكانية استخدام البناء في المقام .

٢- الدالة ممكن بناءها كاملة مع الانتباه عند اجراء الشقلبة (القلب) عكس الإشارة .

أكتب الإجابة بنفسك عزيزي الطالب لهذا السؤال .

....

....

....

مثال ٤: أثبت أن $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا س ءس} \geqslant ٠$

الحل: حل أول: نلاحظ أن فترة التكامل واقعة في الربع الأول ومعروف لدينا مسبقاً أن دالة الجيب موجبة في هذا الربع ، أي : $\forall$ س $\in [\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٢}] \Leftarrow$ جاس $\geqslant ٠ \Leftarrow \therefore \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا س ءس} \geqslant ٠$

حل ثاني: نستخدم طريقة البناء للدالة جاس

$\frac{\pi}{٦} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{\pi}{٢}$ (بإدخال جا) $\Leftarrow$ جا $\frac{\pi}{٦} \leqslant$ جا س $\leqslant$ جا $\frac{\pi}{٢} \Leftarrow \frac{١}{٢} \leqslant$ جا س $\leqslant ١$

(لم يتم عكس إشارة المتراجحة لأن دالة الجيب تزايدية في الفترة $[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٢}]$)

وكما ملاحظ أن الفترة $[\frac{١}{٢} ، ١]$ موجبة $\Leftarrow$ جا س $\geqslant ٠ \Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا س ءس} \geqslant ٠$

مثال٥: أثبت أن $\int_{٢}^{-١} |\text{س}-١| \text{ ءس} \leqslant ٠$

الحل: لاحظ جيداً أن الحد الأعلى لفترة التكامل (٢) موجود في الأسفل والحد الأدنى (−١) موجود في الأعلى ومن هذه الحالة فإننا سنعدّل بين الحدود لكي نجري طريقة البناء ومعرفة التكامل ثم سنضرب في سالب مع ملاحظة أن الضرب في سالب يغير إشارة المتراجحة .أي أن :

$$\int_{٢}^{-١} |\text{س}-١| \text{ ءس} = - \int_{-١}^{٢} |\text{س}-١| \text{ ءس}$$

سنبني الدالة للتكامل $\int_{-١}^{٢} |\text{س}-١| \text{ ءس}$ وكما يلي :

$-١ \leqslant \text{س} \leqslant ٢$ (بطرح ١) $\Leftarrow -٢ \leqslant \text{س}-١ \leqslant ١$ (وبإدخال القيمة المطلقة)

⇐ ٠ ≤ |س−١| ≤ ٢ (راجع التعامل مع إدخال القيمة المطلقة صـ١١ـ)

نلاحظ أن الفترة موجبة ⇐ ∴ $\int_{-1}^{2}$ |س−١| ءس ≥ ٠ (وبالضرب في −) ⇐ $\int_{2}^{-1}$ |س−١| ءس ≤ ٠

مثال٦: أثبت أن $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ (٢جتاس + جا٢س) ءس ≥ ٠

الحل: لاحظ الدالة صعبة البناء بهذه لذلك نجعل :

د(س) = ٢جتاس + جا٢س = ٢جتاس + ٢جاس جتاس

متطابقة: جا٢س = ٢جاس جتاس

= ٢جتاس (١+ جاس)

بسحب ٢جتاس عامل مشترك

الآن ندرس اشارة حاصل الضرب لكل من : أولاً العامل الأول: ٢جتاس نلاحظ أن الفترة $[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$

وهي الربع الأول والرابع وهذه الفترة يكون فيها جتاس ≥ ٠ (وبالضرب × ٢) ⇐ ٢ جتاس ≥ ٠

وعليه العامل الأول موجب . (لو استخدمت طريقة البناء في ٢جتاس ماذا ستلاحظ؟)

ثانياً العامل الثاني: (١+ جاس) لاحظ معي أن : $-\frac{\pi}{2}$ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{2}$ (وبإدخال جا)

⇐ جا($-\frac{\pi}{2}$) ≤ جاس ≤ جا($\frac{\pi}{2}$) ⇐ −١ ≤ جاس ≤ ١ (لم تتغير الإشارة لأن الجيب تزايدي في فترة التكامل)

وبإضافة ١ ⇐ ٠ ≤ ١+ جاس ≤ ٢ لاحظ أن فترة العامل الثاني موجب :

∴ (+) × (+) = + أي الدالة موجبة ⇐ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ (٢جتاس + جا٢س) ءس ≥ ٠

تدريب : أثبت أن : (١) $\int_{1}^{2}$ (٢س−٤) ءس ≤ ٠ ، (٢) $\int_{0}^{1}$ $\frac{\text{جتا س}}{\text{٢س}^{3} - ٥}$ ءس ≤ ٠

(٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جا س ءس ≥ ٠ ، (٤) $\int_{1}^{3}$ (س^{2}−١) ءس ≥ ٠

(٥) $\int_{0}^{2}$ (٦−|س+٣|) ءس ≥ ٠ ،(٦) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ (جا٢س − جاس) ءس ≥ ٠

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ننتقل إلى أمثلة للفرع (٢) في مبرهنة (٥) والخاص بالمقارنة بين دالتين $د_١(س)$ ، $د_٢(س)$.

ملاحظة: عند المقارنة بين تكاملي دالتين $د_١(س)$ ، $د_٢(س)$ في فترة [أ،ب] نجري الآتي :

١- نكوّن دالة جديدة على صورة $د_١(س) - د_٢(س)$.

٢- ندرس الإشارة وهناك عدة طرق لذلك حسب الدالة المتكوّنة منها التحليل لحاصل ضرب عاملين ، أو طريقة البناء ، أو على خط الأعداد أو طرق خاصة . [عندما نقارن بين تكامل الدوال المثلثية قد نحتاج إلى استخدام متطابقة . (راجع طرقة مقارنة التكاملات المثلثية صـ١١)]

٣- ننظر إلى إشارة الدالة الجديدة في الفترة [أ،ب] فإذا كان :

أ) $د_١(س) - د_٢(س) \leqslant ٠ \Leftarrow د_١(س) \leqslant د_٢(س) \Leftarrow \int_{أ}^{ب} د_١(س)\,ءس \leqslant \int_{أ}^{ب} د_٢(س)\,ءس$

ب) $د_١(س) - د_٢(س) \geqslant ٠ \Leftarrow د_١(س) \geqslant د_٢(س) \Leftarrow \int_{أ}^{ب} د_١(س)\,ءس \geqslant \int_{أ}^{ب} د_٢(س)\,ءس$

• توضيح: قد توجد طرق خاصة وأسهل لبعض الدوال وسيمر بعضها في الأمثلة .

مثال ١: أثبت أن $\int_{١}^{٤} س^٢\,ءس \geqslant \int_{١}^{٤} س^٣\,ءس$

الحل: نضع $س^٢ - س^٣ = س^٢(١ - س)$ [استخدمنا التحليل باستخراج العامل المشترك]

* ندرس إشارة العامل الأول $س^٢$ وذلك بالتعويض بعدد ينتمي للفترة]١ ، ٤[وليكن ٢ فنلاحظ أن:

$س^٢ = ٢^٢ = ٤$ وهو عدد موجب $\Leftarrow س^٢ \geqslant ٠ \ \forall \ س \in [١ ، ٤]$ [$س^٢$ دائماً موجب ، لماذا؟]

* ندرس إشارة العامل الثاني بنفس الطريقة فيكون $(١ - س) = ١ - ٢ = -١$ وهو عدد سالب أي :

$(١ - س) \leqslant ٠ \ \forall \ س \in [١ ، ٤]$

$\because (+) \times (-) = - \Leftarrow \therefore س^٢(١ - س)$ سالب أي : $س^٢(١ - س) \leqslant ٠$

$\therefore س^٢(١ - س) \leqslant ٠ \Leftarrow س^٢ - س^٣ \leqslant ٠ \Leftarrow س^٢ \leqslant س^٣ \Leftarrow \int_{١}^{٤} س^٢\,ءس \leqslant \int_{١}^{٤} س^٣\,ءس$ (هـ.ط)

ملاحظة: ممكن دراسة الإشارة من خلال طريقة البناء للعاملين :

بناء العامل الأول $س^٢$: $١ \leqslant س \leqslant ٤$ (بالتربيع) $\Leftarrow ١ \leqslant س^٢ \leqslant ١٦ \Leftarrow س^٢$ موجب

بناء العامل الثاني $(١ - س)$: $١ \leqslant س \leqslant ٤$ $(\times -١) \Leftarrow -١ \geqslant -س \geqslant -٤$ $(+١)$

$\Leftarrow ٠ \geqslant ١ - س \geqslant -٣ \Leftarrow (١ - س)$ سالب .

بقية الخطوات بنفس السابق أي :

$\because (+) \times (-) = - \Leftarrow \therefore س^٢(١ - س)$ سالب أي : $س^٢(١ - س) \leqslant ٠$

$\therefore س^٢(١ - س) \leqslant ٠ \Leftarrow س^٢ - س^٣ \leqslant ٠ \Leftarrow س^٢ \leqslant س^٣ \Leftarrow \int_{١}^{٤} س^٢\,ءس \leqslant \int_{١}^{٤} س^٣\,ءس$ (هـ.ط)

مثال ٢: أيهما أكبر $\int_{\text{١-}}^{\text{١}}$ (٢س^{٢}+١) ءس أم $\int_{\text{١-}}^{\text{١}}$ (س^{٢}+٤) ءس

الحل: بنفس طريقة المثال ١ ويختلف أنه لانستطيع تكوين عاملين فنستخدم البناء كما ستلاحظ:

نضع د$_{١}$(س) − د$_{٢}$(س) = (٢س^{٢}+١) − (س^{٢}+٤) = ٢س^{٢} + ١ − س^{٢} − ٤ = س^{٢}−٣

ندرس إشارة س^{٢}−٣ بطريقة البناء:

−١≤ س ≤ ١ (بالتربيع) ⇐ ٠≤ س^{٢} ≤ ١ (بطرح ٣) ⇐ −٣≤ س^{٢}−٣ ≤ −٢ نلاحظ أن الفترة سالبة وعليه: ∴ س^{٢}−٣ ≤ ٠ ⇐ (٢س^{٢}+١) − (س^{٢}+٤) ≤ ٠ ⇐ (٢س^{٢}+١) ≤ (س^{٢}+٤)

⇐ $\int_{\text{١-}}^{\text{١}}$ (٢س^{٢}+١) ءس ≤ $\int_{\text{١-}}^{\text{١}}$ (س^{٢}+٤) ءس [أي هو الأكبر $\int_{\text{١-}}^{\text{١}}$ (س^{٢}+٤) ءس].

مثال ٣: قارن بين : $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ءس ، $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{٢}}{\text{س}}$ ءس

الحل: نضع د$_{١}$(س) − د$_{٢}$(س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٢}}{\text{س}} = \frac{\text{٣−٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ (توحيد مقامات) . نلاحظ أن الدالة كسرية فندرس إشارة كل من البسط والمقام بتعويض عن س بقيمة من الفترة]٢ ،٤[مثلاً س = ٣ فيكون البسط = ٣−٢×٣ = ٣−٦ = −٣ < ٠ (أي البسط سالب).

أما المقام س^{٢} > ٠ ، ∀ س ∈ [٢ ، ٤] [لماذا؟ لأن المقام مربع فمهما تكن قيمة س فيكون الناتج موجب]

∴ $\frac{-}{+}$ = − ≤ ٠ ⇐ $\frac{\text{٣−٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ≤ ٠ ⇐ $\frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٢}}{\text{س}}$ ≤ ٠ ⇐ $\frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}} \le \frac{\text{٢}}{\text{س}}$

∴ $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ءس ≤ $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{٢}}{\text{س}}$ ءس

مثال ٤: أثبت أن : $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \sqrt{\text{س}}$ ءس ≤ $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ءس

الحل: د$_{١}$(س) − د$_{٢}$(س) = $\sqrt{\text{س}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ − س$^{\frac{١}{٣}}$ (نوحد مقامات الأس لسحب عامل مشترك)

= س$^{\frac{٣}{٦}}$ − س$^{\frac{٢}{٦}}$ = س$^{\frac{٢}{٦}}$(س$^{\frac{١}{٦}}$ −١) . حصلنا على حاصل ضرب عاملين وبالتعويض بـ $\frac{١}{٢}$ ∈ [٠ ، ١]

سنلاحظ أن: $(\frac{١}{٢})^{\frac{٢}{٦}}$ = $\sqrt[\text{٣}]{\frac{١}{٢}}$ وهو موجب . وأن ($(\frac{١}{٢})^{\frac{١}{٦}}$ − ١) = $\sqrt[\text{٦}]{\frac{١}{٢}}$ − ١ وهو سالب (لأن ١ > $\sqrt[\text{٦}]{\frac{١}{٢}}$)

∵ + × − = − ⇐ ∴ س$^{\frac{٢}{٦}}$(س$^{\frac{١}{٦}}$ −١) ≤ ٠ ⇐ س$^{\frac{٣}{٦}}$ − س$^{\frac{٢}{٦}}$ ≤ ٠ ⇐ س$^{\frac{١}{٢}}$ − س$^{\frac{١}{٣}}$ ≤ ٠

⇐ س$^{\frac{١}{٢}}$ ≤ س$^{\frac{١}{٣}}$ ⇐ $\sqrt{\text{س}} \le \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ⇐ $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \sqrt{\text{س}}$ ءس ≤ $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ءس .

حل آخر:

∵ ٠ ≤ س ≤ ١ نأخذ من المتراجحة س ≤ ١ ونجري عليه البناء :

س ≤ ١ (بضرب الطرفين في × س^{٢}) ⇐ س^{٣} ≤ س^{٢} (بأخذ الجذر السادس) ⇐ $\sqrt[\text{٦}]{\text{س}^{\text{٣}}} \le \sqrt[\text{٦}]{\text{س}^{\text{٢}}}$

⇐ س$^{\frac{٣}{٦}}$ ≤ س$^{\frac{٢}{٦}}$ ⇐ س$^{\frac{١}{٢}}$ ≤ س$^{\frac{١}{٣}}$ ⇐ $\sqrt{\text{س}} \le \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ⇐ $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \sqrt{\text{س}}$ ءس ≤ $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ءس .

مثال٥: أيهما أكبر $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0}$ جاس ءس أم $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0}$ جتاس ءس .

الحل: ∵ س تقع في الربع الرابع جتاس ⩾ ٠ و جاس ⩽ ٠ وعليه فإن جتاس ⩾ جاس ∀ س ∈ $[\frac{-\pi}{4}, ٠]$

∴ $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0}$ جتاس ءس ⩾ $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0}$ جاس ءس .

ملاحظة: ممكن حل المثال٥ بطريقة الفرق بين $د_1$(س) ، $د_2$(س) وستجد هذه الطريقة في المثال الآتي.

مثال٦: أثبت أن: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس ءس ⩾ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جاس ءس .

الحل: س تقع في الربع الأول وكلا النسبتين موجبة في هذا الربع .

∴ نبني كل دالة على حدة : **أولاً: جتاس**

٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{4}$ ⇐ ١ ⩾ جتاس ⩾ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (عكست إشارة المتراجحة لأن جتا تناقصية في $[٠, \frac{\pi}{4}]$ راجع صـ١١-)

ثانياً: جاس

٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{4}$ ⇐ ٠ ⩽ جاس ⩽ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (لم تعكس إشارة المتراجحة لأن جا تزايدية في $[٠, \frac{\pi}{4}]$ راجع صـ١١-)

نلاحظ من عملية البناء أن فترة جتاس أكبر من فترة جاس أي أن : جتاس ⩾ جاس ∀ س ∈ $[٠, \frac{\pi}{4}]$

∴ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس ءس ⩾ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جاس ءس .

حل آخر: (باستخدام الفرق):

نضع $د_1$(س) − $د_2$(س) = جتاس − جاس = جتاس − جتا($\frac{\pi}{2}$ − س)

= −٢ جا $\frac{\pi}{4}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) = −٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) = − $\sqrt{2}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$)

بعد الحصول على الدالة −$\sqrt{2}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) وتحتوي على متغير واحد (س) وغير متعدد نجري عملية البناء لهذه الدالة :

٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{4}$ (بطرح $\frac{\pi}{4}$) ⇐ − $\frac{\pi}{4}$ ⩽ س− $\frac{\pi}{4}$ ⩽ ٠ (بادخال جا)

⇐ جا(− $\frac{\pi}{4}$) ⩽ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) ⩽ جا(٠) (لم تعكس إشارة المتراجحة لأن جا تزايدية في $[\frac{-\pi}{4}, ٠]$)

⇐ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⩽ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) ⩽ ٠ (وبالضرب × − $\sqrt{2}$) ⇐ ١ ⩾ − $\sqrt{2}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) ⩾ ٠

نلاحظ أن فترة الدالة − $\sqrt{2}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) فترة موجبة أي :

− $\sqrt{2}$ جا(س− $\frac{\pi}{4}$) ⩾ ٠ ⇐ جتاس − جاس ⩾ ٠ ⇐ جتاس ⩾ جاس

∴ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتاس ءس ⩾ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جاس ءس .

مثال٧: أيهما أكبر $\int_{1}^{2}$ (١+ جا $\frac{\pi}{2}$س) ءس أم $\int_{1}^{2}$ (١+ جتا $\frac{\pi}{2}$س) ءس .

الحل: نلاحظ أن الزاوية ليست س وهنا سنقوم ببناء الزاوية أولاً :

١ ⩽ س ⩽ ٢ ⇐ $\frac{\pi}{2}$ ⩽ $\frac{\pi}{2}$س ⩽ π .وكما ملاحظ أن الزاوية في الربع الثاني (جا موجب،جتا سالب)

ومعلوم أن : جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ ٠ ، جتا $\frac{\pi}{2}$س ⩽ ٠ ، ∀ س ∈ [١,٢]

∴ جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ جتا $\frac{\pi}{2}$س (بجمع ١) ⇐ ١+ جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ ١+ جتا $\frac{\pi}{2}$س

⇐ $\int_{1}^{2}$ (١+ جا $\frac{\pi}{2}$س) ءس ⩾ $\int_{1}^{2}$ (١+ جتا $\frac{\pi}{2}$س) ءس .

حل آخر: (نبني الزاوية ثم الدالة كلاً على حدة):

أولاً: ١+ جا $\frac{\pi}{2}$س ١ ⩽ س ⩽ ٢ (بالضرب في $\frac{\pi}{2}$) ⇐ $\frac{\pi}{2}$ ⩽ $\frac{\pi}{2}$س ⩽ π (إدخال جا)

⇐ ١ ⩾ جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ ٠ (تعكس الإشارة، لماذا؟) (بإضافة ١) ⇐ ٢ ⩾ ١+ جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ ١ ....(١)

ثانياً: ١+ جتا $\frac{\pi}{2}$س ١ ⩽ س ⩽ ٢ (بالضرب في $\frac{\pi}{2}$) ⇐ $\frac{\pi}{2}$ ⩽ $\frac{\pi}{2}$س ⩽ π (إدخال جتا)

⇐ ٠ ⩾ جتا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ −١(تعكس الإشارة، لماذا؟) (بإضافة ١) ⇐ ١ ⩾ ١+ جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ ٠ ....(٢)

من (١) و (٢) نجد أن: ١+ جا $\frac{\pi}{2}$س ⩾ ١+ جتا $\frac{\pi}{2}$س ، ∀ س ∈ [١,٢] وبتطبيق مبرهنة المقارنة:

∴ $\int_{1}^{2}$ (١+ جا $\frac{\pi}{2}$س) ءس ⩾ $\int_{1}^{2}$ (١+ جتا $\frac{\pi}{2}$س) ءس .

تدريبات:

(١) أيهما أكبر $\int_{-1}^{0}$ س^2 ءس أم $\int_{-1}^{0}$ ٤س ءس

(٢) أثبت أن: $\int_{1}^{4}$ س^2 ءس ⩾ $\int_{1}^{4}$ (٢س−١) ءس

(٣) أثبت أن: $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ $\frac{ءس}{س}$ ⩽ $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ $\frac{ءس}{س^2}$

(٤) أيهما أكبر $\int_{0}^{1}$ $\sqrt[4]{س}$ ءس أم $\int_{0}^{1}$ $\sqrt[3]{س}$ ءس

(٥) أثبت أن: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس ءس ⩽ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس ءس .

الحدين الأدنى والأعلى للتكامل :

مبرهنة (٦): (مبرهنة الحدين الأدنى والأعلى للتكامل)

إذا كان ك ، ل عددين حقيقيين وكانت ك ≤ د(س) ≤ ل ، ∀ س ∈ [أ،ب] (دالة محدودة)
وكانت د قابلة للتكامل على [أ،ب] فإن: ك(ب − أ) ≤ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≤ ل(ب − أ)
يسمى ك(ب − أ) بالحد الأدنى للتكامل . ويسمى ل(ب − أ) بالحد الأعلى للتكامل .

البرهان : ∵ ك ≤ د(س) ≤ ل (معطى) ندخل التكامل على المتراجحة حسب المبرهنة(٥)

$\int_{أ}^{ب}$ ك ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ ل ءس

∵ ك ، ل عددين حقيقيين (ثابتين) وبتطبيق مبرهنة(٢)

∴ ك(ب − أ) ≤ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≤ ل(ب − أ) (هـ.ط.ث)

ملاحظة : لإيجاد الحدين الأدنى والأعلى للتكامل نستخدم غالباً طريقة البناء للدالة من فترة التكامل ثم نطبق المبرهنة فنحصل على الحدين المطلوبين .

مثال : أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكاملات الآتية:

(١) $\int_{1}^{3}$ (٢س+٥) ءس . (٢) $\int_{1}^{3}$ $\sqrt{٢س+٧}$ ءس . (٣) $\int_{1}^{2}$ $\frac{٢}{س+١}$ ءس .

(٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ $\frac{ءس}{\sqrt{٤+٥ظا^{2}س}}$. (٥) $\int_{-2}^{1}$ $\frac{ءس}{س^{2}+١}$. (٦) $\int_{-2}^{3}$ |٢س+١| ءس .

(٧) $\int_{0}^{لو٢}$ هـ^{س} ءس . (٨) $\int_{1}^{2}$ لو(س^{2}+١) ءس . (٩) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ جا٢س ءس .

الحل:

(١) $\int_{1}^{3}$(٢س+٥) ءس : نستخدم طريقة البناء وكما يلي:

١ ≤ س ≤ ٣ (×٢) ⇐ ٢ ≤ ٢س ≤ ٦ (+٥) ⇐ ٧ ≤ ٢س+٥ ≤ ١١

ندخل التكامل تطبيقاً للمبرهنة ٦ ولمعرفة الحدين المطلوبين:

∴ $\int_{1}^{3}$ ٧ ءس ≤ $\int_{1}^{3}$(٢س+٥) ءس ≤ $\int_{1}^{3}$ ١١ ءس ⇐ ٧(٣−١) ≤ $\int_{1}^{3}$(٢س+٥) ءس ≤ ١١(٣−١)

⇐ ٧×٢ ≤ $\int_{1}^{3}$(٢س+٥) ءس ≤ ١١×٢ ⇐ ١٤ ≤ $\int_{1}^{3}$(٢س+٥) ءس ≤ ٢٢

∴ الحد الأدنى = ١٤ ، والحد الأعلى = ٢٢

(٢) $\int_{١}^{٣} \sqrt{\text{٢س}^{٢}+\text{٧}}\ \text{ءس}$:

١ ≤ س ≤ ٣ (بالتربيع) ⇐ ١ ≤ س^{٢} ≤ ٩ (×٢) ⇐ ٢ ≤ ٢س^{٢} ≤ ١٨ (+٧)

⇐ ٩ ≤ ٢س^{٢}+٧ ≤ ٢٥ (بأخذ الجذر التربيعي) ⇐ ٣ ≤ $\sqrt{\text{٢س}^{٢}+\text{١}}$ ≤ ٥ (ندخل التكامل)

⇐ $\int_{١}^{٣}$ ٣ ءس ≤ $\int_{١}^{٣}\sqrt{\text{٢س}^{٢}+\text{١}}$ ≤ $\int_{١}^{٣}$ ٥ ءس ⇐ ٣(٣−١) ≤ $\int_{١}^{٣}\sqrt{\text{٢س}^{٢}+\text{١}}$ ≤ ٥(٣−١)

⇐ ٦ ≤ $\int_{١}^{٣}\sqrt{\text{٢س}^{٢}+\text{١}}$ ≤ ١٠

∴ الحد الأدنى = ٦ ، والحد الأعلى = ١٠

(٣) $\int_{١}^{٢} \frac{\text{٢}}{\text{س}+\text{١}}\ \text{ءس}$:

١ ≤ س ≤ ٢ (+١) ⇐ ٢ ≤ س+١ ≤ ٣ (بالقلب ونعكس الإشارة) ⇐ $\frac{١}{٢}$ ≥ $\frac{١}{\text{س}+١}$ ≥ $\frac{١}{٣}$ (×٢)

⇐ $\frac{٢}{٢}$ ≥ $\frac{٢}{\text{س}+١}$ ≥ $\frac{٢}{٣}$ (ندخل التكامل) ⇐ ١(٢−١) ≥ $\int_{١}^{٢} \frac{٢}{\text{س}+١}$ ءس ≥ $\frac{٢}{٣}$(٢−١)

١ ≥ $\int_{١}^{٢} \frac{٢}{\text{س}+١}$ ءس ≥ $\frac{٢}{٣}$ ⇐ ∴ الحد الأدنى = ٦ ، والحد الأعلى = ١٠

(٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{٤}+\text{٥ظا}^{٢}\text{س}}}$:

٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{٤}$ ⇐ (ندخل ظا ولاتعكس الإشارة، لماذا؟) ⇐ ظا٠ ≤ ظاس ≤ ظا $\frac{\pi}{٤}$ ⇐ ٠ ≤ظاس ≤ ١

(بالتربيع) ⇐ ٠ ≤ ظا^{٢}س ≤١ (×٥) ⇐ ٠ ≤٥ظاس ≤٥ (+٤) ⇐ ٤ ≤ ٤+٥ظاس ≤ ٩ ($\sqrt{\ }$)

⇐ ٢ ≤ $\sqrt{\text{٤}+\text{٥ظا}^{٢}\text{س}}$ ≤ ٣ (بالقلب وعكس الإشارة) ⇐ $\frac{١}{٢}$ ≥ $\frac{١}{\sqrt{\text{٤}+\text{٥ظا}^{٢}\text{س}}}$ ≥ $\frac{١}{٣}$

(ندخل التكامل) ⇐ $\frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٤}$ ≥ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{٤}+\text{٥ظا}^{٢}\text{س}}}$ ≥ $\frac{١}{٣} \times \frac{\pi}{٤}$

⇐ $\frac{\pi}{٨}$ ≥ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{٤}+\text{٥ظا}^{٢}\text{س}}}$ ≥ $\frac{\pi}{١٢}$ ⇐ ∴ الحد الأدنى = $\frac{\pi}{١٢}$ ، والحد الأعلى = $\frac{\pi}{٨}$

تنبيه: دالة الظتا تناقصية ، فتعكس المتراجحة .

(٥) $\int_{-٢}^{١} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٢}+\text{١}}$:

−٢ ≤ س ≤ ١ (بالتربيع راجع صـ١٠ـ) ⇐ ٠ ≤ س^{٢} ≤٤ (+١) ⇐ ١ ≤ س^{٢}+١ ≤ ٥

(بالقلب والعكس) ⇐ ١ ≥ $\frac{١}{\text{س}^{٢}+١}$ ≥ $\frac{١}{٥}$ (ندخل التكامل)

⇐ ١(١−(−٢)) ≥ $\int_{-٢}^{١} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٢}+١}$ ≥ $\frac{١}{٥}$(١−(−٢)) ⇐ ١×٣ ≥ $\int_{-٢}^{١} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٢}+١}$ ≥ $\frac{١}{٥}$ × ٣

⇐ ٣ ≥ $\int_{-٢}^{١} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٢}+١}$ ≥ $\frac{٣}{٥}$ ∴ الحد الأدنى = $\frac{٣}{٥}$ ، والحد الأعلى = ٣

(٦) $\int_{-2}^{3}$ |٢س+١| ءس :

-٢ ≤ س ≤ ٣ (×٢) ⇐ -٤ ≤ ٢س ≤ ٦ (+١) ⇐ -٣ ≤ ٢س+١ ≤ ٧

وبأخذ القيمة المطلقة (راجع صـ١١ـ) يكون: |-٣| ≤ |٢س+١| ≤ |٧| ⇐ ٠ ≤ |٢س+١| ≤ ٧

ندخل التكامل: ⇐ ٠×(٣+٢) ≤ $\int_{-2}^{3}$ |٢س+١| ءس ≤ ٧×(٣+٢)

⇐ ٠ ≤ $\int_{-2}^{3}$ |٢س+١| ءس ≤ **٣٥** ⇐ ∴ الحد الأدنى = **٠** ، والحد الأعلى = **٣٥**

(٧) $\int_{0}^{\text{لو}2}$ هـ^س ءس :

٠ ≤ س ≤ لو٢ (وبإدخال هـ في الأساس) ⇐ هـ^٠ ≤ هـ^س ≤ هـ^لو٢ (وبحسب خواص ، وأن هـ^٠ = ١)

⇐ ١ ≤ هـ^س ≤ ٢ (ندخل التكامل) ⇐ ١×(لو٢−٠) ≤ $\int_{0}^{\text{لو}2}$ هـ^س ءس ≤ ٢×(لو٢−٠)

⇐ لو٢ ≤ $\int_{0}^{\text{لو}2}$ هـ^س ءس ≤ ٢لو٢ ⇐ ∴ الحد الأدنى = لو٢ ، والحد الأعلى = ٢لو٢

(٨) $\int_{1}^{2}$ لو(س^2+١) ءس :

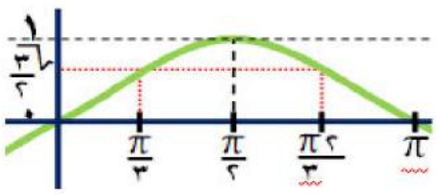
١ ≤ س ≤ ٢ (بالتربيع) ⇐ ١ ≤ س^2 ≤ ٤ (+١) ⇐ ٢ ≤ س^2+١ ≤ ٥ (إدخال لو)

⇐ لو٢ ≤ لو(س^2+١) ≤ لو٥ (إدخال التكامل) ⇐ لو٢(٢−١) ≤ $\int_{1}^{2}$ لو(س^2+١) ءس ≤ لو٥(٢−١)

⇐ لو٢ ≤ $\int_{1}^{2}$ لو(س^2+١) ءس ≤ لو٥ ⇐ ∴ الحد الأدنى = لو٢ ، والحد الأعلى = لو٥

(٩) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}$ جا٢س ءس : نبني الزاوية أولاً وملاحظة النتيجة (ركّز جيداً لأن هذا المثال مختلف عمّا سبق):

$\frac{\pi}{6}$ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{3}$ (×٢) ⇐ $\frac{\pi}{3}$ ≤ ٢س ≤ $\frac{2\pi}{3}$ ، نلاحظ أن دالة الجيب في هذه الفترة $[\frac{\pi}{3} ، \frac{\pi}{2}]$ تزايدية وتناقصية وأن $\frac{\pi}{2}$ قيمة قصوى (راجع صـ١١ـ) والشكل بالأدنى وملاحظ أن أعلى قيمة للجيب هي ١ وأدنى قيمة ستكون الأصغر في كلٍ من جا $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا $\frac{2\pi}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وملاحظ أنهما متساويتان وكون أنهما متساويتان سنأخذ أحدهما مع جا $\frac{\pi}{2}$ = ١ ، وعندما تكون مختلفتان سنأخذ جيب القيمة الأقل مع أعلى قيمة خلال الفترة وفي مثالنا سنأخذ جيب $\frac{\pi}{3}$.



∴ جا $\frac{\pi}{3}$ ≤ جا٢س ≤ جا $\frac{\pi}{2}$ ⇐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≤ جا٢س ≤ ١

(ندخل التكامل)

⇐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ($\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\pi}{6}$) ≤ $\int_{\pi/6}^{\pi/3}$ جا٢س ءس ≤ ١ × ($\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\pi}{6}$)

⇐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × $\frac{\pi}{6}$ ≤ $\int_{\pi/6}^{\pi/3}$ جا٢س ءس ≤ ١ × $\frac{\pi}{6}$ ⇐ $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$ ≤ $\int_{\pi/6}^{\pi/3}$ جا٢س ءس ≤ $\frac{\pi}{6}$

∴ الحد الأدنى = $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$ ، والحد الأعلى = $\frac{\pi}{6}$.

تدريبات:أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكاملات الآتية:

(١) $\int_{-٢}^{ن} (س^{٢}-٢)\, ءس$. $\boxed{-٤}\ \boxed{٤}$ (٢) $\int_{-٢}^{١} \frac{٣}{١+س^{٢}}\, ءس$. $\boxed{\frac{٩}{٥}}\ \boxed{٩}$ (٣) $\int_{١}^{ه} لوس\, ءس$. $\boxed{٠}\ \boxed{٤لوه}$

(٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ءس}{\sqrt{٣+جاس}}\, ءس$. $\boxed{\frac{\pi}{٤}}\ \boxed{\frac{\pi}{٢\sqrt{٣}}}$ (٥) $\int_{١}^{٣} ه^{-٢لوس}\, ءس$ $\boxed{\frac{٢}{٩}}\ \boxed{٢}$

تنويه هام: قد يكون البناء غير ممكن من الوهلة الأولى لتعدد المتغير (س) في الدالة وهنا يتطلب منّا خطوات رياضياتية لكتابة الدالة بصورة أخرى مكتوب فيها المتغير (س) مرة واحدة.

وإليك عزيزي الطالب أمثلة من هذا النوع وكيفية التعامل معها .

مثال : أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكاملات الآتية:

(١) $\int_{-3}^{2} \frac{\text{س}^2+5}{\text{س}^2+1}\, \text{ءس}$. (٢) $\int_{-2}^{3} (\text{س}^2+2\text{س})\, \text{ءس}$.

(٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\, \text{ءس}$.

الحل: (١) $\int_{-3}^{2} \frac{\text{س}^2+5}{\text{س}^2+1}\, \text{ءس}$: يعالج بعدة طرق وأشهرها قسمة البسط على المقام وكتابة الدالة بصورتها الجديدة وقد مر معنا الطريقة في دراسة تغيرة الدالة الكسرية في المسيطر في التفاضل .

باستخدام طريقة القسمة ستكون نفس المقابل وعليه فإن الدالة بصورتها الجديدة:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \text{س}^2+5 & \text{س}^2+1 \\ -(\text{س}^2+1) & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$\text{د(س)} = 1 + \frac{4}{\text{س}^2+1}$

أو بجعل المقدار في البسط يشابه المقدار في المقام وتوزيع البسط على المقام ثم الإختصار وكما يلي:

$$\frac{\text{س}^2+5}{\text{س}^2+1} = \frac{\text{س}^2+1+4}{\text{س}^2+1} = \cancel{\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^2+1}} + \frac{4}{\text{س}^2+1} = 1 + \frac{4}{\text{س}^2+1}$$

بعد إجراء الطريقة السابقة يمكننا بناء الدالة بصورتها الجديدة وكما يلي :

$-3 \le \text{س} \le 2$ (بالتربيع) $\Leftarrow 0 \le \text{س}^2 \le 9$ (+1) $\Leftarrow 1 \le \text{س}^2+1 \le 10$ (بالقلب والعكس)

$\Leftarrow \frac{1}{10} \le \frac{1}{\text{س}^2+1} \le 1$ (×4) $\Leftarrow \frac{4}{10} \le \frac{4}{\text{س}^2+1} \le 4$ (+1) $\Leftarrow \frac{7}{5} \le 1 + \frac{4}{\text{س}^2+1} \le 5$

(ندخل التكامل) $\Leftarrow \frac{7}{5}\times 5 \le \int_{-3}^{2} \left(1 + \frac{4}{\text{س}^2+1}\right) \text{ءس} \le 5\times 5$

$\Leftarrow 7 \le \int_{-3}^{2} \left(1 + \frac{4}{\text{س}^2+1}\right) \text{ءس} \le 25 \Leftarrow$ ∴ الحد الأدنى = ٧ ، والحد الأعلى = ٢٥

(٢) $\int_{-2}^{3} (\text{س}^2+2\text{س})\, \text{ءس}$: يعالج بإكمال المربع وذلك بإضافة وطرح: مربع : ١

نصف : ١

معامل س : ٢

∴ $\text{د(س)} = \text{س}^2+2\text{س}+1-1$ (الثلاثة الحدود الأولى مربع كامل) $\Leftarrow \text{د(س)} = (\text{س}+1)^2-1$

نجري البناء للدالة بصورتها الجديدة وسيكون البناء كما يلي:

$-2 \le \text{س} \le 3$ (+1) $\Leftarrow -1 \le \text{س}+1 \le 4$ (بالتربيع) $\Leftarrow 0 \le (\text{س}+1)^2 \le 16$ (−1)

$\Leftarrow -1 \le (\text{س}+1)^2-1 \le 15$ (ندخل التكامل) $\Leftarrow -1\times 5 \le \int_{-2}^{3} (\text{س}+1)^2-1 \le 15\times 5$

$\Leftarrow -5 \le \int_{-2}^{3} (\text{س}+1)^2-1 \le 75 \Leftarrow$ ∴ الحد الأدنى = −٥ ، والحد الأعلى = ٧٥

(٣) $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}}$ (جتاس − جاس) ءس : يعالج تعدد المتغير (س) في هذه الدالة باستخدام متطابقات مثلثية :

د(س) = جتاس − جاس = جتاس − جتا($\frac{\pi}{2}$ − س)　　جاس=جتا($\frac{\pi}{2}$ − س)

= −٢ جا $\frac{س + (\frac{\pi}{2} - س)}{2}$ × جا $\frac{س - (\frac{\pi}{2} - س)}{2}$　　جتاس− جتاص =−٢ جا $\frac{س+ص}{2}$ × جا $\frac{س-ص}{2}$

= −٢ جا $\frac{\pi}{4}$ × جا (س − $\frac{\pi}{4}$)　　جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

= −٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × جا (س − $\frac{\pi}{4}$) = − $\sqrt{2}$×$\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × جا (س − $\frac{\pi}{4}$) = − $\sqrt{2}$ جا (س − $\frac{\pi}{4}$)

نلاحظ أن الدالة بصورتها الجديدة تحتوي على متغير واحد (س) وغير متعدد، كما يمكنك عزيز الطالب جعل النسبتين (جا($\frac{\pi}{2}$ − س) − جاس) واستخدام المتطابقة لهما وسيكون لديك الدالة الجديدة بالشكل ($\sqrt{2}$ جا($\frac{\pi}{4}$ − س)) وتجري عليها عملية البناء وسيكون لديك نفس النتيجة للحدين المطلوبين .

نجري البناء: ٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{2}$ (−$\frac{\pi}{4}$) ⇐ − $\frac{\pi}{4}$ ⩽ س − $\frac{\pi}{4}$ ⩽ $\frac{\pi}{4}$ (ندخل جا ولانغير الإشارة، لماذا؟)

جا(−$\frac{\pi}{4}$) ⩽ جا(س − $\frac{\pi}{4}$) ⩽ جا($\frac{\pi}{4}$) ⇐ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⩽ جا(س − $\frac{\pi}{4}$) ⩽ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (× − $\sqrt{2}$)

⇐ ١ ⩾ − $\sqrt{2}$ جا(س − $\frac{\pi}{4}$) ⩾ −١ (ندخل التكامل)

⇐ $\frac{\pi}{2}$ ⩾ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}}$ − $\sqrt{2}$ جا(س − $\frac{\pi}{4}$) ءس ⩾ − $\frac{\pi}{2}$ ⇐ ∴ الحد الأدنى = − $\frac{\pi}{2}$ ، والحد الأعلى = $\frac{\pi}{2}$

تدريبات:أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكاملات الآتية:

(١) $\int_{-2}^{1}$ (س٢−٢س+٣) ءس . | ٦ | ١١ |　　(٢) $\int_{1}^{2}$ $\frac{س^2}{س^2 + 2}$ ءس . | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في التكامل المحدد

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١– الدالة د(س) = $\sqrt{\text{س}-٤}$ قابلة للتكامل على الفترة [٥ ، ٦] ( )

٢– إذا كان $\int_{١}^{٢}$ د(س) ءس = ٤ ، فإن $\int_{١}^{٢}$ (٢د(س)–٣) ءس = ٥ ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١– $\int_{-٢}^{٢}$ ظتا $\frac{\pi}{٤}$ ءس = ...

٢– $\int_{٠}^{٤}$ جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ...

٣– الحد الأدنى للتكامل $\int_{-٢}^{٠} \frac{\text{ءس}}{٣\text{س}-١}$ = ...

٤– إذا كان جـ عدداً ثابتاً ، فإن $\int_{أ}^{ب}$ جـ ءس = ...

٥– $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس + $\int_{ب}^{أ}$ د(س) ءس = ...

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) من التكامل المحدد $\int_{٢}^{٣}$ أ ءس = ... [أ ، ٢أ ، ٣أ]

٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتاس ءس .... [≤ ٠ ، ≥ ٠ ، صفر]

٣) الحد الأعلى للتكامل $\int_{٠}^{\text{لو}٢}$ هـ$^{\text{س}}$ ءس = ... [١ ، ٠ ، لو٢ ، ٢لو٢]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١– إذا كان $\int_{٠}^{١}$ ٥ د(س) ءس = –١٥ فإن $\int_{١}^{٠}$ د(س) ءس = ...	٠
٢– للدالة د(س) = س^{٢}– ٦س قيمة صغرى عند س = ...	٣
	١

س٥: مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب : $\int_{١}^{٣}$ (س^{٢}+س) ءس

....

....

....

....

س٦: أوجد الحدين الأعلى والأدنى للتكامل : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 3\,\text{جتا}\,\text{س}}\;\text{ءس}$.

س٧: مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب : $\int_{0}^{3} (2\text{س} - 3)\;\text{ءس}$.

س٨: مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب : $\int_{0}^{2} (2\text{س} + 1)\;\text{ءس}$.

س٩: أوجد الحدين الأعلى والأدنى للتكامل : $\int_{1}^{2} \frac{2}{\text{س} + 1}\;\text{ءس}$.

س١٠: مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب : $\int_{-2}^{3} \text{س}\;\text{ءس}$.

س١١: مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب : $\int_{0}^{2} (3 + 2\text{س})\;\text{ءس}$.

س١٢: بإستخدام تعريف التكامل المحدد أحسب : $\int_{0}^{2} (2\text{س}+1)\;\text{ءس}$.

ثانياً: التكامل غير المحدد :

عزيزي الطالب إن التكامل المحدد يحسب مساحة فيكون ناتجه قيمة ، وقد تطرقنا سابقاً لذلك . وكما تعلم من خلال دراستك أن هناك الكثير من العمليات العكسية مثل الطرح والجمع والقسمة والضرب وأيضاً الجذور والقوى ، وبالمثل فإن هناك عملية عكسية للمشتقة هي الدالة الأصلية (التكامل غير المحدد) أي إذا كان المشتقة هي لَ(س) فإن العملية العكسية لها هي الدالة الأصلية ل(س) . لذلك عزيزي الطالب فإنه عند إجراء التكامل غير المحدد فهو يتم للمشتقة للحصول على الدالة الأصلية . فمثلاً : إذا كانت ل(س) = س^{٣} + $\frac{٢}{٥}$ وهناك دالة د(س) = ٣س^{٢} فعندما نشتق الدالة ل(س) فإنه يكون لَ(س) = ٣س^{٢} وفي هذه الحالة نلاحظ أن لَ(س) = د(س) وعليه فإننا نقول أن ل(س) دالة أصلية للدالة د(س) ، وأن د(س) هي دالة ناتجة من اشتقاق ل(س) .

تعريف التكامل غير المحدد:

لتكن د دالة معرفة على الفترة [أ،ب] ، فإذا وجدت دالة ل متصلة وقابلة للاشتقاق على]أ،ب[بحيث أن: لَ(س) = د(س) ، ∀ س ∈]أ،ب[، فإن ل دالة أصلية (تكامل غير محدد) للدالة د على [أ،ب] ويرمز لها ل(س) =∫ د(س) ءس أي أن:

$$\boxed{\text{ل(س)} = \int \text{د(س) ءس} \Longleftrightarrow \text{لَ(س)} = \text{د(س)}}$$

ملاحظة: ناتج التكامل المحدد عدد بينما ناتج التكامل غير المحدد دالة .

مبرهنة (٧): إذا كان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على]أ،ب[، وإذا كان لهما المشتقة نفسها فهما لايختلفان إلى في قيمة ثابتة (ث) . أي أن :

$$\boxed{\text{لَ}_{١}\text{(س)} = \text{لَ}_{٢}\text{(س)} \Leftarrow \text{ل}_{١}\text{(س)} - \text{ل}_{٢}\text{(س)} = \text{ث}}$$

البرهان : ∵ لَ$_{١}$(س) = لَ$_{٢}$(س) (معطى) وبطرح لَ$_{٢}$(س) من الطرفين

لَ$_{١}$(س) − لَ$_{٢}$(س) = ٠ [كون المشتقة موزعة على الدالتين سيتم رفعها على الكل]

[ل$_{١}$(س) − ل$_{٢}$(س)]َ = ٠ [وبإزالة المشتقة من الطرفين و ∵ مشتقة الثابت = ٠]

∴ ل$_{١}$(س) − ل$_{٢}$(س) = ث (هـ.ط)

توضيح المبرهنة : لاحظ الدوال الآتية: ل$_{١}$(س) = س^{٢} ، ل$_{٢}$(س) = س^{٢}−٥ ، ل$_{٣}$(س) = س^{٢}+٧ فعند اشتقاق الدوال السابقة سنلاحظ أن : لَ$_{١}$(س) = ٢س ، لَ$_{٢}$(س) = ٢س ، لَ$_{٣}$(س) = ٢س وكما ملاحظ أن اشتقاق الدوال متساوي ولكن الدوال الأصلية مختلفة في العدد الثابت . لذلك عند إجراء التكامل المحدد (ايجاد الدالة الأصلية) سنكتب (+ث) نهاية كل دالة ناتجة من تكامل غير محدد .

قواعد مهمة في التكامل :

سنعطيك عزيزي الطالب أولاً ثلاث قواعد أساسية ومهمة في التكامل وهي :

١) $\int س^{ن}\, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$.

٢) $\int \frac{ءس}{س} = لو|س| + ث$. تذكر $\frac{١}{س} = س^{-١}$

٣) $\int ا\, ءس = اس + ث$.

وإليك أمثلة مبسطة توضيحية لكل نوع:

(١) إذا كانت $د(س) = س^{٢}$ ، فإن: $\int س^{٢}\, ءس = \frac{س^{٢+١}}{٢+١} = \frac{س^{٣}}{٣} + ث = \frac{١}{٣}س^{٣} + ث$.

وإذا أجرينا الاشتقاق لـ ($\frac{١}{٣}س^{٣} + ث$) سنلاحظ أن :

$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{٣}س^{٣} + ث\right) = \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} + ٠ = س^{٢}$.

(٢) إذا كانت $د(س) = س^{-١}$ ، أي $د(س) = \frac{١}{س}$ ، فإن: $\int س^{-١}\, ءس = لو|س| + ث$.

(٣) $د(س) = -٣$ ، فإن: $\int -٣\, ءس = -٣س + ث$.

خواص التكامل غير المحدد :

مبرهنة (٨):

١) $\int ك\, د(س)\, ءس = ك \int د(س)\, ءس$ ، $ك \in ح^{*}$. (إخراج الثابت ك).

٢) $\int [د_{١}(س) \pm د_{٢}(س)]\, ءس = \int د_{١}(س)\, ءس \pm \int د_{٢}(س)\, ءس$. (توزيع التكامل على الحدود).

٣) $\frac{ء}{ءس}\left[\int د(س)\, ءس\right] = د(س)$. (مشتقة التكامل ينتهي ويبقى د(س)) .

ممكن تعميم (٢) لأكثر من دالتين

٤) $\int دَ(س)\, ءس = د(س) + ث$. (تكامل المشتقة يعطي الدالة الأصلية + ث)

- أمثلة توضيحية على الخواص: (١) مثلاً: $\int ٥س^{٢}\, ءس = ٥\int س^{٢}\, ءس = ٥ \times \frac{س^{٣}}{٣} + ث$

(٢) مثلاً: $\int (س^{٢}+س+٣)\, ءس = \int س^{٢}\, ءس + \int س\, ءس + \int ٣\, ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س + ث$.

(عند حل الأمثلة اللاحقة سنجري التوزيع ذهنياً دون كتابته وكتابة الدالة المكاملة لكل حد)

(٣) $\frac{ء}{ءس}\left[\int س^{٢}\, ءس\right]$ نجري أولاً التكامل داخل القوسين ومن ثم الاشتقاق :

$\therefore \frac{ء}{ءس}\left[\int س^{٢}\, ءس\right] = \frac{ء}{ءس}\left[\frac{س^{٣}}{٣} + ث\right] = \frac{٣س^{٢}}{٣} + ٠ = س^{٢}$.

(٤) لتكن $د(س) = س^{٢}$ ، $دَ(س) = ٢س$

$\therefore \int دَ(س)\, ءس = \int ٢س\, ءس = \frac{٢س^{٢}}{٢} + ث = س^{٢} + ث = د(س) + ث$.

هنا عزيزي الطالب نستعرض أمثلة تستخدم فيها القواعد الثلاث التي مرت معنا سابقاً .

مثال : أحسب كلاً من التكاملين الآتيين :

(١) $\int (٦س^{٢} - ٣س + ٥)\ ءس$.　　　(٢) $\int (س^{٣} - \frac{٥}{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س})\ ءس$.

الحل: (١) $\int (٦س^{٢} - ٣س + ٥)\ ءس = ٦\frac{س^{٣}}{٣} - ٣\frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + ث = ٢س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٥س + ث$

(٢) في هذا الفرع نلاحظ وجود في الحدود حدود كسرية (المتغيّر س في المقام) ووجود كذلك حدود جذرية (المتغيّر س تحت الجذر) وفي هذه الحالة فإننا سنستخدم قوانين رياضياتية بحيث نجعل الكل على شكل قوة أساسها س لكي يتم مكاملتها .

$\therefore \int (س^{٣} - \frac{٥}{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س})\ ءس = \int (س^{٣} - ٥س^{-٢} + س^{-\frac{١}{٣}})\ ءس$

$= \frac{س^{٤}}{٤} - ٥\frac{س^{-١}}{-١} + \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ث = \frac{١}{٤}س^{٤} + \frac{٥}{س} + \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٤}} + ث$.

تدريب : أحسب التكامل الآتي : $\int (٣س^{٢} - \frac{٢}{س} + \sqrt{س^{٣}} - \frac{١}{\sqrt{س}})$

....

....

....

....

....

....

صيغ تكاملات بعض الدوال الشهيرة :

نوع الدالة	تكاملها	ملاحظات
الثابتة	$\int \text{أ}\ \text{ءس} = \text{أس} + \text{ث}$ ، حيث أ عدد ثابت	أ عدد ثابت .
دالة القوة	$\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، ن $\neq -1$	تكامل دالة قوة أساسها س تضيف للأس ١ ونقسم على الأس الجديد .
	$\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}} \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، ن $\neq -1$	تكامل دالة القوة أساسها دالة خطية (أس+ب) حيث أ ، ب أعداد ثابتة .
	$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}} = \int \text{س}^{-1}\ \text{ءس} = \text{لو}\lvert\text{س}\rvert + \text{ث}$ ، ن $= -1$	تكامل دالة قوة أساسها س والأس -1
	$\int \frac{\text{ءس}}{\text{أس}+\text{ب}} = \int (\text{أس}+\text{ب})^{-1}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{لو}\lvert\text{أس}+\text{ب}\rvert + \text{ث}$	الأساس (أس+ب) والأس -1
الدالة الأسية	$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$	أسية طبيعية أسها س وهي الدالة e^x اشتقاقها أو تكاملها لايغيرها "الدلوعة"
	$\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{ث}$	أسية طبيعية أسها (أس+ب)
	$\int \text{أ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{لو أ}}\ \text{أ}^{\text{س}} + \text{ث}$	أسية أساسها أ وأسها س ، أ ثابت
	$\int \text{أ}^{\text{ب س}+\text{جـ}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{ب لو أ}}\ \text{أ}^{\text{ب س}+\text{جـ}} + \text{ث}$	أسية أساسها أ وأسها (ب س + جـ)
الدوال المثلثية	$\int \text{جاس}\ \text{ءس} = -\ \text{جتاس} + \text{ث}$	$\int \text{جا}^2\text{س}\ \text{ءس} = \int [\frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})]\ \text{ءس}$
	$\int \text{جتاس}\ \text{ءس} = \text{جاس} + \text{ث}$	$\int \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = \int [\frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})]\ \text{ءس}$
	$\int \text{ظاس}\ \text{ءس} = -\ \text{لو}\lvert\text{جتاس}\rvert + \text{ث}$ (تكامل بالتعويض)	$\int \text{ظا}^2\text{س} = \int (\text{قا}^2\text{س} - 1)\ \text{ءس}$
	$\int \text{ظتاس}\ \text{ءس} = \text{لو}\lvert\text{جاس}\rvert + \text{ث}$ (تكامل بالتعويض)	$\int \text{ظتا}^2\text{س} = \int (\text{قتا}^2\text{س} - 1)\ \text{ءس}$
	$\int \text{قاس}\ \text{ءس} = \text{لو}\lvert\text{قاس}+\text{ظاس}\rvert + \text{ث}$	ستعرف استنتاج هذه القواعد بعد التعرف على التكامل بالتعويض .
	$\int \text{قتاس}\ \text{ءس} = -\ \text{لو}\lvert\text{قتاس}+\text{ظتاس}\rvert + \text{ث}$	
	$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس} = \text{ظاس} + \text{ث}$	تذكر: $\text{قا}^2\text{س} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} = 1 + \text{ظا}^2\text{س}$
	$\int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = -\ \text{ظتاس} + \text{ث}$	تذكر: $\text{قتا}^2\text{س} = \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} = 1 + \text{ظتا}^2\text{س}$
	$\int \text{قاس ظاس} = \text{قاس} + \text{ث}$	جاس جتاص $= \frac{1}{2}$ [جا(س+ص)+جا(س−ص)]
		جتاس جاص $= \frac{1}{2}$ [جا(س+ص)−جا(س−ص)]
	$\int \text{قتاس ظتاس} = -\ \text{قتاس} + \text{ث}$	جتاس جتاص $= \frac{1}{2}$ [جتا(س+ص)+جتا(س−ص)]
		جتاس جتاص $= \frac{-1}{2}$ [جتا(س+ص)+جتا(س−ص)]

$\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\ \text{ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\ \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$. وهي صحيحة لكل الدوال المثلثية السابقة إذا كانت الزاوية للدوال المثلثية دالة خطية (أس+ب) ، حيث أ ، ب أعداد ثابتة .

- **ملاحظة هامة:** أي تكامل شهير نوجده مباشرة ، وأي تكامل غير شهير نحوله إلى تكامل شهير باستخدام : (١) متطابقات مثلثية. (٢) التحليل. (٣) قوانين رياضياتية.
(٤) طرقة التكامل (طريقة التعويض ، طريقة التجزئة ، طريقة الكسور الجزئية) وسنتعرف عليها لاحقاً إن شاء الله .

نعطي لك عزيزي الطالب هنا العديد من الأمثلة المختلفة لتكاملات دوال شهيرة ودوال غير شهيرة.

مثال ١: أحسب التكاملات الآتية :

(١) $\int (2\text{س}+3)^7 \, \text{ءس}$. (٢) $\int (3\text{س}^4 + \text{جاس} + \text{جتا}5\text{س}) \, \text{ءس}$.

(٣) $\int (\text{هـ}^{-5\text{س}} + \text{جا}(\text{م}-7\text{س}) + \text{قتا}^2 3\text{س}) \, \text{ءس}$. (٤) $\int (\text{س} - \text{قاس ظاس}) \, \text{ءس}$.

الحل: نطبق مباشرة قواعد التكامل السابقة في كل حد من حدود الدالة :

(١) $\int (2\text{س}+3)^7 \, \text{ءس} = \frac{1}{2} \times \frac{(2\text{س}+3)^{7+1}}{7+1} + \text{ث} = \frac{(2\text{س}+3)^8}{16} + \text{ث}$.

(٢) $\int (3\text{س}^4 + \text{جاس} + \text{جتا}5\text{س}) \, \text{ءس} = \frac{3}{5}\text{س}^5 - \text{جتاس} + \frac{1}{5}\text{جا}5\text{س} + \text{ث}$.

(٣) $\int (\text{هـ}^{-5\text{س}} + \text{جا}(\text{م}-7\text{س}) + \text{قتا}^2 3\text{س}) \, \text{ءس} = \frac{-1}{5}\text{هـ}^{-5\text{س}} + \frac{1}{7}\text{جتا}(\text{م}-7\text{س}) - \frac{1}{3}\text{ظتا}3\text{س} + \text{ث}$.

(٤) $\int (\text{س} - \text{قاس ظاس}) \, \text{ءس} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \text{قاس} + \text{ث}$.

مثال ٢: أحسب التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{ظا}^2 3\text{س} \, \text{ءس}$. (٢) $\int \text{جا}^2\text{س} \, \text{ءس}$. (٣) $\int (\text{جام س جتام س}) \, \text{ءس}$.

(٤) $\int \left(\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2} - \frac{6}{\text{جا}^2 3\text{س}}\right) \text{ءس}$.

الحل: نلاحظ أنه لايمكن تطبيق قواعد التكاملات مباشرة وهنا نستخدم متطابقات لتحويلهن إلى تكاملات شهيرة وتطبيق قواعد التكامل لهن .

(١) $\int \text{ظا}^2 3\text{س} \, \text{ءس} = \int (\text{قا}^2 3\text{س} - 1) \, \text{ءس} = \frac{1}{3}\text{ظا}3\text{س} - \text{س} + \text{ث}$. $\boxed{\text{ظا}^2\text{س} = (\text{قا}^2\text{س} - 1)}$

(٢) $\int \text{جا}^2\text{س} \, \text{ءس} = \frac{1}{2}\int (1 - \text{جتا}2\text{س}) \, \text{ءس} = \frac{1}{2}(\text{س} - \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}) + \text{ث}$ $\boxed{\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})}$

$= \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \text{ث}$.

(٣) $\int (\text{جام س جتام س}) \, \text{ءس} = \frac{1}{2}\int \text{جا}2\text{م س} \, \text{ءس} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\text{م}} \times (-\text{جتا}2\text{م س}) + \text{ث}$

$= -\frac{1}{4\text{م}}\text{جتا}2\text{م س} + \text{ث}$

تم استخدام المتطابقة $\text{جا}2\text{س} = 2\,\text{جاس جتاس} \Leftarrow \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س} = \text{جاس جتاس} \Leftarrow \frac{1}{2}\text{جا}2\text{م س} = \text{جام س جتام س}$

كما يمكن استخدام المتطابقة $\text{جاس جتاص} = \frac{1}{2}[\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) + \text{جا}(\text{س}-\text{ص})]$ وستجد طريقتها في حل آخر .

حل آخر: $\int (\text{جا}\,مس\ \text{جتا}\,مس)\ ءس = \frac{1}{2}\int (\text{جا}(مس+مس) + \text{جا}(مس-مس))\ ءس$

$= \frac{1}{2}\int \text{جا}\,2مس\ ءس = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2م}\times(-\text{جتا}\,2مس) + ث = -\frac{1}{4م}\text{جتا}\,2مس + ث$.

(٤) $\int \left(\text{جتا}^2\frac{س}{2} - \frac{6}{\text{جا}^2 3س}\right) ءس = \int \left[\frac{1}{2}(1+\text{جتا}\,2\frac{س}{2}) - 6\,\text{قتا}^2 3س\right] ءس$

$= \frac{1}{2}(س+\text{جا}س) - 6\times\frac{1}{3}\times -\text{ظتا}3س + ث = \frac{1}{2}س + \frac{1}{2}\text{جا}س + 2\,\text{ظتا}3س + ث$.

مثال٣: أحسب التكاملات الآتية :

(١) $\int (\sqrt{ص} - \frac{3}{ص})^2\ ءص$.   (٢) $\int \frac{هـ^{2س} - 1}{هـ^{س} - 1}\ ءس$.   (٣) $\int \frac{2س^3 - 8س}{س + 2}\ ءس$.

(٤) $\int \sqrt{س}\,(س + \frac{7}{س})^2\ ءس$.

الحل: (١) $\int (\sqrt{ص} - \frac{3}{ص})^2\ ءص = \int (ص - 2\cancel{\sqrt{ص}}\times\frac{3}{\cancel{\sqrt{ص}}\sqrt{ص}} + \frac{9}{ص^2})\ ءس$ [الفك كمربع كامل]

$= \int (ص - 6ص^{-\frac{1}{2}} + 9ص^{-2})\ ءس = \frac{1}{2}ص^2 - 6\times\frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 9\times\frac{ص^{-1}}{-1} + ث$

$= \frac{1}{2}ص^2 - 12\sqrt{ص} - \frac{9}{ص} + ث$.

(٢) بتحليل البسط كفرق بين مربعين ثم الاختصار والمكاملة وستم كالآتي:

$\int \frac{هـ^{2س} - 1}{هـ^{س} - 1}\ ءس = \int \frac{(هـ^{س} - 1)(هـ^{س} + 1)}{هـ^{س} - 1}\ ءس = \int (هـ^{س} - 1)\ ءس = هـ^{س} - س + ث$.

(٣) بتحليل البسط باستخراج عامل مشترك(٢س) ثم كفرق بين مربعين والاختصار والمكاملة:

$\int \frac{2س^3 - 8س}{س + 2}\ ءس = \int \frac{2س(س^2 - 4)}{س + 2}\ ءس = \int \frac{2س(س-2)\cancel{(س+2)}}{\cancel{س+2}}\ ءس = \int 2س(س+2)\ ءس$

$= \int (2س^2 - 4س)\ ءس = \frac{2}{3}س^3 - 2س^2 + ث$.

(٤) بفك المربع ثم ضرب $س^{\frac{1}{2}}$ في داخل القوس ثم المكاملة :

$\int \sqrt{س}\,(س + \frac{7}{س})^2\ ءس = \int س^{\frac{1}{2}}(س^2 + 2\cancel{س}\times\frac{7}{\cancel{س}} + \frac{49}{س^2})\ ءس$

$= \int (س^{\frac{5}{2}} + 14س^{\frac{1}{2}} + 49س^{-\frac{3}{2}})\ ءس = \frac{2}{7}س^{\frac{7}{2}} + \frac{28}{3}س^{\frac{3}{2}} - \frac{98}{\sqrt{س}} + ث$.

مثال ٤: أحسب التكاملات الآتية :

(١) $\int$ (٢$^{-٣س}$ + هـ$^{-لوس}$) ءس .   (٢) $\int$ (جتا^{٤}س − جا^{٤}س) ءس

الحل: (١) $\int$ (٢$^{-٣س}$ + هـ$^{-لوس}$) ءس = $\int$ (٢$^{-٣س}$ + هـ$^{لوس^{-١}}$) ءس = $\int$ (٢$^{-٣س}$ + س$^{-١}$) ءس

= $\frac{١}{-٣\ \text{لو}٢}$ × ٢$^{-٣س}$ + لو|س| + ث .

(٢) $\int$ (جتا^{٤}س − جا^{٤}س) ءس = $\int$ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س) ءس **[الفرق بين مربعين]**

= $\int$ جتا٢س ءس   استخدام المتطابقة: جتا^{٢}س − جا^{٢}س = جتا٢س والمتطابقة جتا^{٢}س − جا^{٢}س =١

= $\frac{١}{٢}$ جا٢س + ث .

تدريب : أحسب التكاملات الآتية:

(١) $\int$ (س^{٣} − $\frac{٢}{س}$ + $\sqrt[٣]{س}$) ءس .   (٢) $\int$ (ظا٤س − ٢جا(ب س−٩)) ءس .

(٣) $\int$ (١− س)^{٢} ءس .   (٤) $\int$ $\frac{\text{هـ}^{٣س} + ٨}{\text{هـ}^{س} + ٢}$ ءس .

(٥) $\int$ $\frac{س^{٢} - ٢س + ٣}{\sqrt{س}}$ ءس .   (٦) $\int$ $\frac{\text{جا}^{٢}س - \text{جا}س - ٢}{٢ - \text{جا}س}$ ءس .

(٧) $\int$ (ظتا^{٢}٢س + $\frac{ب}{\text{قتا}^{٢}٢س}$) ءس .   (٨) $\int$ (جتا٢س جا٥س − جا٧س جاس) ءس .

(٩) $\int$ [س + جتا(٩س+١) − قتا^{٢}٢س + $\frac{١}{\text{هـ}^{٢س}}$] ءس

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

تطبيقات التكامل غير المحدد :

تعلم سابقاً أن دَ(س) [المشتقة] هو ميل المماس لمنحنى دالة عند النقطة (ﺃ،د(ﺃ)) ، وكون التكامل غير المحدد يجد الدالة الأصلية فإنه يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ث إذا عُلم ميل المماس (دالة ميل المماس (المشتقة)) للمنحنى عند نقطة واقعة عليه [معطى لدينا المماس والنقطة] وذلك بالصيغة الآتية: $\boxed{\int دَ(س)\ ءس = د(س) + ث}$.

- **خطوات كتابة معادلة المنحنى :**

١) نضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ميل المماس المعطى .

٢) نبسط بالضرب التبادلي ونجعل لكل طرف متغير واحد (نفصل المتغيرات) .

٣) نجري التكامل للطرفين بالقواعد الشهيرة فنحصل على دالة المنحنى ولكن ث مجهول .

٤) نعوض بالنقطة المعطاة في دالة المنحنى للحصول على قيمة الثابت .

٥) نستبدل ث بقيمته في دالة المنحنى فنحصل على معادلة المنحنى المطلوبة .

- **ملاحظة:** سنقسم دالة ميل المماس إلى نوعين دالة صريحة ممكن إيجاد معادلة المنحنى بدون استخدام الخطوات السابقة أو باستخدامها . ودالة ضمنية فنستخدم فيها الخطوات السابقة .

مثال ١: إذا كان ميل المماس معطى بالعلاقة د(س) = س+١ ، فأوجد الدالة الأصلية إذا علمت أنها تمر بالنقطة (١،٢) .

الحل: حل أول: نستخدم الصيغة $\int$ دَ(س) ءس = د(س) + ث وبدون الخطوات فسيكون:

$\int (س+١)\ ءس = \frac{س^٢}{٢} + س + ث$

$\therefore ص = \frac{س^٢}{٢} + س + ث$.

وهي دالة المنحنى ولكن ث مجهول فنوجده بالتعويض بالنقطة (١،٢) لأنها تحقق معادلته :

$\therefore ٢ = \frac{١}{٢} + ١ + ث \Leftarrow ٢ = \frac{٣}{٢} + ث \Leftarrow ث = ٢ - \frac{٣}{٢} \Leftarrow ث = \frac{١}{٢}$

وبالتعويض بقيمة ث تكون دالة المنحنى المطلوبة هي : $ص = \frac{س^٢}{٢} + س + \frac{١}{٢}$.

حل ثاني: سنستخدم الخطوات السابقة: $\frac{ءص}{ءس}$ = س+١ (وبالضرب التبادلي) ⇐ ءص = (س+١) ءس

(ندخل التكامل) ⇐ $\int ١\ ءص = \int (س+١)\ ءس \Leftarrow ص = \frac{س^٢}{٢} + س + ث$.

تنبيه : أكتب الثابت (ث) في جهة المتغير س

نعوض بالنقطة فنحصل على قيمة ث :

$\therefore ٢ = \frac{١}{٢} + ١ + ث \Leftarrow ث = \frac{١}{٢}$. وعليه فمعادلة المنحنى المطلوبة: $ص = \frac{س^٢}{٢} + س + \frac{١}{٢}$.

مثال٢: إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة معطى بالعلاقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س + جا٣س ، فإذا علمت أن ل(٠) = $\frac{1}{3}$ ، فأوجد معادلة المنحنى .

الحل: ∫ (س + جا٣س) ءس = $\frac{\text{س}^2}{2}$ − $\frac{1}{3}$ جتا٣س + ث .

∴ ص = $\frac{\text{س}^2}{2}$ − $\frac{1}{3}$ جتا٣س + ث . نعوض بالنقطة (٠ ، $\frac{1}{3}$) :

∴ $\frac{1}{3}$ = ٠ − $\frac{1}{3}$ جتا٠ + ث ⇐ ث = $\frac{2}{3}$

∴ دالة المنحنى : ص = $\frac{\text{س}^2}{2}$ − $\frac{1}{3}$ جتا٣س + ث .

مثال٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة معرف بالقاعدة د(س) = س^2 + $\frac{2}{\text{س}^2}$ + ١ ، فأوجد معادلة المنحنى إذا كان ل(٢) = ٣ .

الحل: ∫ (س^2 + $\frac{2}{\text{س}^2}$ + ١) ءس = ∫ (س^2 + ٢س^{-2} + ١) ءس = $\frac{\text{س}^3}{3}$ + ٢$\frac{\text{س}^{-1}}{-1}$ + س + ث .

∴ ص = $\frac{\text{س}^3}{3}$ − $\frac{2}{\text{س}}$ + س + ث .نعوض بالنقطة (٢، ٣) فيكون :

∴ ٣ = $\frac{8}{3}$ − ١ +٢ + ث ⇐ ث = $\frac{-2}{3}$

∴ دالة المنحنى : ص = $\frac{\text{س}^3}{3}$ − $\frac{2}{\text{س}}$ + س − $\frac{2}{3}$.

مثال٤: أوجد معادلة المنحنى الذي ميل مماسه معطى بالعلاقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢س} + 3}{\text{٢ص} - 1}$ ، إذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٣) .

الحل: كون دالة الميل دالة ضمنية فنستخدم الخطوات في ذلك :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢س} + 3}{\text{٢ص} - 1}$ ⇐ (٢ص−١) ءص = (٢س+٣) ءس ⇐ ∫ (٢ص−١) ءص = ∫ (٢س+٣) ءس

⇐ ص^2−ص = س^2−٣س + ث . فنعوض بالنقطة (٢، ٣) :

∴ ٩ − ٣ = ٤ + ٦ + ث ⇐ ث = −٤ . ∴ معادلة المنحنى هي: ص^2−ص = س^2−٣س − ٤

مثال٥: إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة هو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 + \text{ظا}^2\text{س}}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ ، فأوجد معادلة المنحنى إذا علمت أنه يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{4}$ ،لو٣) .

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1 + \text{ظا}^2\text{س}}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ ⇐ $\text{هـ}^{\text{ص}}$ ءص = (١+ظا^2س) ءس ⇐ ∫ $\text{هـ}^{\text{ص}}$ ءص = ∫ (١+ظا^2س) ءس

⇐ $\text{هـ}^{\text{ص}}$ = ظاس + ث . وبالتعويض بالنقطة ($\frac{\pi}{4}$ ،لو٣) : $\text{هـ}^{\text{لو٣}}$ = ظا $\frac{\pi}{4}$ + ث ⇐ ث = ٢

∴ معادلة المنحنى هي : $\text{هـ}^{\text{ص}}$ = ظاس + ٢ .

$\boxed{\text{قا}^2\text{س} = 1 + \text{ظا}^2\text{س}}$

مثال٦: إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{س + لو ص}$ ، فأوجد معادلة المنحنى علماً أنه يمر بالنقطة (لو٣ ، هـ) .

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{س + لو ص} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س} \times هـ^{لو ص} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س} \times ص \Leftarrow \frac{ءص}{ص} = هـ^{س}\, ءس$

$\Leftarrow \int \frac{ءص}{ص} = \int هـ^{س}\, ءس \Leftarrow لو|ص| = هـ^{س} + ث$. نعوض بالنقطة (لو٣ ، هـ):

$لو|هـ| = هـ^{لو٣} + ث \Leftarrow ١ = ٣ + ث \Leftarrow ث = -٢$. $\therefore$ معادلة المنحنى هي: $لو|ص| = هـ^{س} - ٢$

تدريبات: (١) إذا كانت ل دالة أصلية للدالة د(س) = ٢ −٦جا٢س ، أوجد قاعدة منحنى الدالة عند ل(٠) = ٥ . $\boxed{ث=٢}$

(٢) أوجد معادلة المنحنى الذي ميل مماسه معطى بالعلاقة $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س - ٢}{ص - ٢}$ ، إذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٢،٢) . $\boxed{ث=-٢}$

(٣) إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = جا٢س\ جتا^{٢}(\frac{ص}{٢})$ ، فأوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$). $\boxed{ث=\frac{٧}{٤}}$

(٤) إذا كان ميل المماس $\frac{ءص}{ءس} = (٣س^{٢}+٢س)ص$ ، فأوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (١، هـ) $\boxed{ث=-١}$

العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد :

مبرهنة (٩): (المبرهنة الأساسية للتكامل)

إذا كان د دالة متصلة على [أ،ب] وكانت ل دالة أصلية للدالة د على [أ،ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} = \text{ل(س)}\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ل(ب)} - \text{ل(أ)}$$

توضيح المبرهنة : لإيجاد التكامل المحدد باستخدام قواعد التكامل غير المحدد نتبع الخطوات الآتية:

(١) نكامل الدالة بقواعد التكامل غير المحدد (بغض النظر عن حدي التكامل) دون كتابة (ث) ونكتب بدلاً عنه خط عمودي لحدي التكامل ($\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$) .

(٢) نعوض عن قيمة س بالحد الأعلى ب – نعوض عن قيمة س بالحد الأدنى أ .

(٣) نجري العمليات الحسابية فتنتج قيمة التكامل المطلوب حسابه .

مثال ١ : أحسب التكاملات الآتية:

(١) $\int_{1}^{3} (3\text{س}^2 - 4\text{س})\ \text{ءس}$. (٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (3 + 3\text{ظا}^2\text{س})\ \text{ءس}$. (٣) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{س} + \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}})\ \text{ءس}$.

(٤) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{جتا}^2\text{س ءس}$. (٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا}3\text{س جاس})\ \text{ءس}$. (٦) $\int_{-2}^{4} |\text{س} - 2|\ \text{ءس}$.

(٧) $\int_{-2}^{2} |\text{س}^2 - 1|\ \text{ءس}$.

الحل: (١) $\int_{1}^{3} (3\text{س}^2 - 4\text{س})\ \text{ءس} = (\text{س}^3 - 2\text{س}^2)\Big|_{1}^{3} = [\,3^3 - 2\times 3^2\,] - [\,1^3 - 2\times 1^2\,]$

$= 27 - 18 + 1 = 10$.

(٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (3 + 3\text{ظا}^2\text{س})\ \text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (3 + 3\,(\text{قا}^2\text{س} - 1))\ \text{ءس}$

$\boxed{\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cancel{3} + 3\text{قا}^2\text{س} - \cancel{3})\ \text{ءس} = 3\ \text{ظاس}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = (3\text{ظا}\frac{\pi}{4}) - (3\text{ظا}0) = (3\times 1) - (0) = 3$

(٣) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{س} + \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}})\ \text{ءس} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{س} + \text{قتا}^2\text{س})\ \text{ءس}$

$\boxed{\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} = \text{قتا}^2\text{س}}$

$= (\frac{\text{س}^2}{2} - \text{ظتاس})\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi^2}{8} - 0) - (\frac{\pi^2}{72} - \sqrt{3}) = \frac{\pi^2}{9} + \sqrt{3}$.

(٤) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{جتا}^2\text{س ءس} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\,(1 + \text{جتا}2\text{س})\ \text{ءس}$

$\boxed{\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}\,(1 + \text{جتا}2\text{س})}$

$= \frac{1}{2}\,(\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = (\frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

$= (0 + 0) - (\frac{1}{2} \times \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{4} \times \text{جا}2 \times \frac{-\pi}{2}) = (0) - (\frac{-\pi}{4} + 0) = \frac{\pi}{4}$.

(٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا٣س جاس})\,\text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(\text{جا(٣س+س)} - \text{جا(٣س−س)}\right)\text{ءس}$

$\boxed{\text{جتاس جاص} = \frac{1}{2}\left[\text{جا(س+ص)} - \text{جا(س−ص)}\right]}$

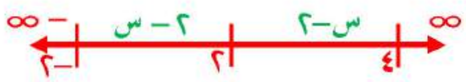
$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(\text{جا٤س} - \text{جا٢س}\right)\text{ءس}$

$= \left(\frac{-1}{8}\,\text{جتا٤س} + \frac{1}{4}\,\text{جتا٢س}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{-1}{8}\,\text{جتا}\,\pi + \frac{1}{4}\,\text{جتا}\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{-1}{8}\,\text{جتا}\,0 + \frac{1}{4}\,\text{جتا}\,0\right)$

$= \left(\frac{-1}{8} \times -1 + \frac{1}{4} \times 0\right) - \left(\frac{-1}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1\right) = \frac{1}{8} - 0 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = 0$.

(٦) $\int_{-2}^{4} |\text{س}-2|\,\text{ءس}$: نعيد تعريف الدالة (دالة مقياس) ولكي نتعرف على العدد الذي تتغير عنده قاعدة هذه الدالة نضع $\text{س}-2 \geqslant 0 \Leftarrow \text{س} \geqslant 2$ ، فتكون للدالة قاعدة يمين وقاعدة يسار العدد ٢ .

$\therefore |\text{س}-2| = \begin{cases} \text{س}-2 & \text{، س} \geqslant 0 \\ 2-\text{س} & \text{، س} \leqslant 0 \end{cases}$



و ∵ الفترة المطلوب حساب تكاملها هي [−٢، ٤] ونلاحظ أن ٢ ينتمي لها فهنا نقسم التكامل إلى تكاملين (حسب المبرهنة٤ صـ٨ـ)

$\boxed{\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس}}$

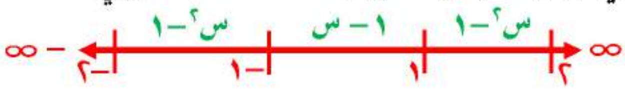
$\therefore \int_{-2}^{4} |\text{س}-2|\,\text{ءس} = \int_{-2}^{2} (2-\text{س})\,\text{ءس} + \int_{2}^{4} (\text{س}-2)\,\text{ءس}$

$= \left(2\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2\right)\Big|_{-2}^{2} + \left(\frac{1}{2}\text{س}^2 - 2\text{س}\right)\Big|_{2}^{4}$

$= \left[(4-2) - (-4-2)\right] - \left[(8-8) - (2-4)\right]$

$= \left[2 + 6\right] - \left[0 - 2\right] = 8+2 = 10$.

(٧) $\int_{-2}^{2} |\text{س}^2-1|\,\text{ءس}$: نعيد تعريف الدالة ولكي نتعرف على العدد الذي تتغير عنده قاعدة هذه الدالة نضع $\text{س}^2-1 \geqslant 0 \Leftarrow \text{س}^2 \geqslant 1 \Leftarrow |\text{س}| \geqslant 1 \Leftarrow \text{س} \geqslant 1$ أو $\text{س} \leqslant -1$ ، وعليه فإن هناك ثلاث مناطق لهذه الدالة يوضحها المخطط الآتي وعليه سيكون تعريف هذه الدالة كما يلي:



$|\text{س}^2-1| = \begin{cases} \text{س}^2-1 & \text{، س} \leqslant -1 \\ 1-\text{س}^2 & \text{، } -1 \leqslant \text{س} \leqslant 1 \\ \text{س}^2-1 & \text{، س} \geqslant 1 \end{cases}$

و ∵ الفترة المطلوب حساب تكاملها هي [−٢، ٢] ونلاحظ أن −١ ، ١ ينتميان للفترة فهنا يقسم التكامل حسب المناطق الثلاث وعليه فإن :

$\int_{-2}^{2} |\text{س}^2-1|\,\text{ءس} = \int_{-2}^{-1} (\text{س}^2-1)\,\text{ءس} + \int_{-1}^{1} (1-\text{س}^2)\,\text{ءس} + \int_{1}^{2} (\text{س}^2-1)\,\text{ءس}$

$= \left(\frac{1}{3}\text{س}^3 - \text{س}\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{3}\text{س}^3 - \text{س}\right)\Big|_{1}^{2} = \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{12}{3} = 4$.

مثال٢: أوجد قيمة ك الموجبة إذا كان $\int_{١}^{ك} (٢س-٣)\ ءس = ٦$.

الحل: بما أنه المطلوب أيجاد قيمة مجهول (ك) فإنه هنا معادلة مكونة من طرفين وسنحل كالآتي:

$\int_{١}^{ك} (٢س-٣)\ ءس = ٦$ [نوجد تكامل الطرف الأيمن]

$(س^٢-٣س)\Big|_{١}^{ك} = ٦$ [بعوض بحدود التكامل في الطرف الأيمن فيتكون مقدار به مجهول ك]

$(ك^٢-٣ك) - (١-٣) = ٦ \Leftarrow ك^٢-٣ك+٢ = ٦ \Leftarrow ك^٢-٣ك-٤ = ٠$ [وبالتحليل]

$\Leftarrow (ك-٤)(ك+١) = ٠ \Leftarrow$ إما ك = ٤ ، أو ك = −١ (ك=−١ مرفوض لأنه المطلوب ك الموجبة)

∴ ك = ٤ .

مثال٣: إذا كان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٣) ونقطة الأصل ، وكان ميل المماس لهذا المنحنى عند أي نقطة عليه هو $\sqrt{أ}$ س . فأوجد قيمة أ ومعادلة المنحنى .

الحل: نوجد معادلة المنحنى لكن بالمجهول أ وذلك لوجوده في معادلة الميل ويتم ايجاده بالتكامل :

∴ $\int \sqrt{أ}\ س\ ءس = \sqrt{أ} \times \frac{س^٢}{٢} + ث$. أي أن $ص = \sqrt{أ} \times \frac{١}{٢} س^٢ + ث$

∵ المنحنى يمر بنقطة الأصل (٠،٠) فهي تحقق معادلته فنعوض بها في الدالة الناتجة ونحصل على قيمة ث

$٠ = \sqrt{أ} \times \frac{١}{٢} \times ٠ + ث \Leftarrow ث = ٠$

و ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣) فهي تحقق معادلته فنعوض بالنقطة مع قيمة ث فنحصل على قيمة أ

$٣ = \sqrt{أ} \times \frac{١}{٢} + ٠ \Leftarrow \sqrt{أ} = ٦ \Leftarrow أ = ٣٦$.

∴ معادلة المنحنى : $ص = \sqrt{٣٦} \times \frac{١}{٢} س^٢ + ٠ \Leftarrow ص = ٣س^٢$.

تدريبات: (أ) أحسب التكاملات الآتية : (١) $\int_{٠}^{١} (٤س^٣+٦س)\ ءس$. $\boxed{٤}$

(٢) $\int_{١}^{٢} (\frac{١}{س^٢} + ٢س + ١)\ ءس$. $\boxed{\frac{٩}{٢}}$ (٣) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{٠} (س + جتاس)\ ءس$. $\boxed{١ - \frac{\pi^٢}{٨}}$

(٤) $\int_{٢}^{٣} \frac{س^٤ - ١}{س - ١}\ ءس$. $\boxed{\frac{٢٢}{٣}}$ (٥) $\int_{-١}^{٣} |س-٢|\ ءس$. $\boxed{٥}$ (٦) $\int_{-٣}^{٣} |س^٢-٤|\ ءس$. $\boxed{\frac{٤٦}{٣}}$

(٧) $\int_{-١}^{٣} |س-٣|\ ءس$. $\boxed{٨}$ (٨) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{٢س} - ٣هـ^{س} - ٤}{هـ^{س} + ١}\ ءس$. $\boxed{هـ - ٥}$

(ب) إذا كان $\int_{أ}^{٢} (٣س^٢ - س)\ ءس = ٦$ ، فأوجد قيمة أ الصحيحة . $\boxed{أ=٠}$

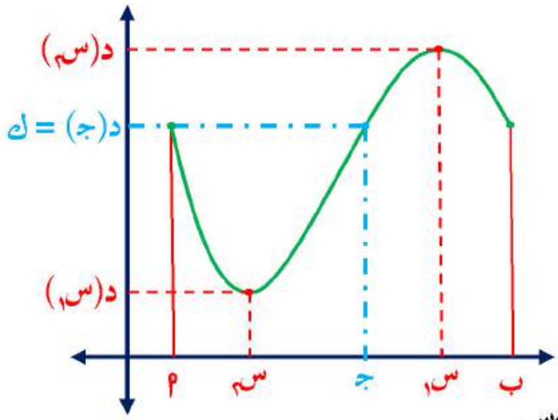
....

....

....

مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل :

مبرهنة (١٠): إذا كان د دالة متصلة على [أ،ب] فإنه يوجد على الأقل عدد جـ ∈ [أ،ب] يحقق العلاقة $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = د(جـ) (ب − أ)



البرهان : ∵ د متصلة على [أ،ب]

∴ د دالة محدودة

∴ د يوجد عددان س$_1$ ، س$_2$ ∈ [أ،ب]

بحيث د(س$_1$) ⩽ د(س) ⩽ د(س$_2$) ،

[د(س$_1$)الحد الأدنى، د(س$_2$)الحد الأعلى]

واستناداً إلى مبرهنة الحدين الأدنى والأعلى يكون :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س$_1$) ءس ⩽ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ⩽ $\int_{أ}^{ب}$ د(س$_2$) ءس

⇐ د(س$_1$) (ب − أ) ⩽ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ⩽ د(س$_2$) (ب − أ) .... (١)

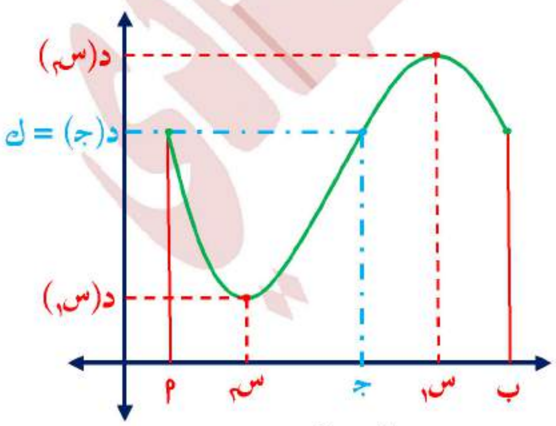
وحيث أن التكامل المحدد $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس هو عدد حقيقي دائماً فلا بد أن يوجد في المتراجحة عدد ك يحقق العلاقة : $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = ك (ب − أ) .... (٢)

وبالتعويض بـ (٢) في (١) يكون : د(س$_1$) (ب − أ) ⩽ ك (ب − أ) ⩽ د(س$_2$) (ب − أ)

وبالقسمة على (ب − أ) يكون: د(س$_1$) ⩽ ك ⩽ د(س$_2$) وحيث أن ك عدد حقيقي بين د(س$_1$) ، د(س$_2$) فإنه يوجد على الأقل عدد جـ بين س$_1$ ، س$_2$ بحيث يكون : ك = د(جـ)

ومن (٢) : ∴ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = د(جـ) (ب − أ) . (هـ.ط)

التفسير الهندسي لمبرهنة رول:



إذا كانت الدالة د متصلة على [أ،ب] ويقع بيانها (منحناها) فوق محور السينات كما في الشكل المقابل فإن : مساحة المنطقة المحصورة بين بيان الدالة ومحور السينات(سط$_{أ}^{ب}$) حيث سط$_{أ}^{ب}$ = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس تكافئ مساحة المستطيل الذي قاعدته [أ،ب] وارتفاعه د(جـ) [أي بعدي المستطيل ب − أ ، د(جـ)] ، حيث جـ ∈ [أ،ب] .

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

مثال ١: أوجد قيم جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكاملات الآتية :

(١) $\int_{-1}^{3}$ (٢س − ٣س^{٢}) ءس . (٢) $\int_{0}^{4}$ هـ$^{٤لو_{هـ}\sqrt{س}}$ ءس . (٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}$ جتا٣س ءس .

الحل: نطبق المبرهنة (١٠) لإيجاد قيم جـ : $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = د(جـ) (ب − أ)

(١) $\int_{-1}^{3}$ (٢س − ٣س^{٢}) ءس = د(جـ) (٣+١) [د(جـ) = ٢جـ − ٣جـ^{٢}]

⇐ (س^{٢} − س^{٣}) $|_{-1}^{3}$ = (٢جـ − ٣جـ^{٢}) (٤) ⇐ (٩−٢٧) − (١+١) = ٨جـ − ١٢ جـ^{٢}

⇐ −١٨ − ٢ = ٨جـ − ١٢ جـ^{٢} ⇐ ١٢جـ^{٢}−٨جـ−٢٠ = ٠ (÷٤) ⇐ ٣جـ^{٢}−٢جـ−٥ = ٠

(وبالتحليل) ⇐ (٣جـ−٥) (جـ+١) = ٠ ⇐ جـ = $\frac{5}{3}$ ∈ [−١ ، ٣] ، جـ = −١ ∈ [−١ ، ٣] .

(٢) $\int_{0}^{4}$ هـ$^{٤لو_{هـ}\sqrt{س}}$ ءس

∵ د(س) = هـ$^{٤لو_{هـ}\sqrt{س}}$ ⇐ د(س) = هـ$^{لو_{هـ}(س^{٢})}$ ⇐ د(س) = س^{٢}

∴ $\int_{0}^{4}$ س^{٢} ءس = د(جـ) (٤−٠) ⇐ ($\frac{1}{3}$ س^{٣}) $|_{0}^{4}$ = جـ^{٢} × (٤)

⇐ ($\frac{1}{3}$ × ٤^{٣}) − ($\frac{1}{3}$ × ٠^{٣}) = ٤جـ^{٢} ⇐ ٤جـ^{٢} = $\frac{64}{3}$ ⇐ جـ^{٢} = $\frac{16}{3}$ ⇐ جـ = ± $\frac{4}{\sqrt{3}}$

∴ جـ = $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ∈ [٠ ، ٤] وهي تحقق القيمة المتوسطة بينما جـ = − $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ∉ [٠ ، ٤] فلا تحققها.

(٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}$ جتا٣س ءس = جتا٣جـ ($\frac{\pi}{3}$ − ٠) ⇐ ($\frac{1}{3}$ جا٣س) $|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$ = $\frac{\pi}{3}$ جتا٣جـ

⇐ ($\frac{1}{3}$ جاπ) − ($\frac{1}{3}$ جا٠) = $\frac{\pi}{3}$ جتا٣جـ ⇐ $\frac{\pi}{3}$ جتا٣جـ = ٠ ⇐ جتا٣جـ = ٠

وبحل المعادلة المثلثية (راجع المسيطر في التفاضل صـ٧٥ـ ، طـ٢٠٢٠ـ)

∵ جتا٣جـ = ٠ ⇐ ∴ ٣جـ = $\frac{\pi}{2}$ + ك π

عندما ك = ٠ ⇐ ٣جـ = $\frac{\pi}{2}$ ⇐ جـ = $\frac{\pi}{6}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{3}$] وهي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة.

وعندما ك = ١ ⇐ ٣جـ = $\frac{\pi}{2}$ + π ⇐ ٣جـ = $\frac{3\pi}{2}$ ⇐ جـ = $\frac{\pi}{2}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{3}$] فلا تحقق .

الرياضيات ليست مادة بل هي أسلوب حياة ...
الرياضيات هي غذاء العقل ومنبع المعرفة ...
الرياضيات هي أصدق لغة في العالم للتجامل والتنافق ...
الرياضيات هي تنمية الفكر والعقل ...

مثال٢: إذا كانت الدالة د(س) = ٣أس^{٢} − ٢س + ١ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل عند العدد جـ حيث جـ ∈ [١ ، ٣] وكانت د(جـ) = ١٠ ، فأوجد قيمة جـ .

الحل: ∵ الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة $\boxed{\int_{أ}^{ب} \text{د(س) ءس = د(جـ) (ب − أ)}}$

∴ $\int_{١}^{٣}$ (٣أس^{٢} − ٢س + ١) ءس = ١٠(٣−١)

⇐ (س^{٣} − س^{٢} + س)$\Big|_{١}^{٣}$ = ٢٠

⇐ (أ×٢٧ − ٩+٣) − (أ−١+١) = ٢٠ ⇐ ٢٧أ−أ−٦ = ٢٠ ⇐ ٢٦أ = ٢٦ ⇐ أ = ١

تدريبات: (أ) أوجد قيم جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكاملات الآتية :

(١) $\int_{١}^{٤}$ (س^{٢} + ١) ءس . $\boxed{\text{جـ} = \sqrt{٧}}$ (٢) $\int_{١}^{٤}$ هـ$^{-٢لوس}$ ءس . $\boxed{\text{جـ = ٢}}$

$\boxed{\text{ك = ١}}$

(ب) إذا كانت جـ = $\frac{٥}{٢}$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب $\int_{ك}^{٤}$ (٢س − ٦) ءس .فأوج قيمة ك .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤-٢٠١٩ في التكامل غير المحدد وتطبيقاته والعلاقة بين التكاملين ومبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١- $\int$ هـ^{لوس} ءس = س^{٢} + ث ( )

٢- إذا كان $\int_{١}^{٢}$ د(س) ءس = ٤ ، فإن $\int_{١}^{٢}$ (٢د(س)-٣) ءس = ٥ ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة: ١- $\int_{٠}^{٤}$ جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ...

٢- $\int$ دَ(س) ءس = ... ٣- $\int$ جا (٥س+١) ءس = ...

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) $\int_{١}^{٤}$ هـ^{٢} ءس = ... [٣هـ^{٢} ، $\frac{هـ^{٢}}{٢}$ + ث ، هـ^{٢}س + ث ، ٢هـ]

٢) $\int_{٠}^{لو٢}$ هـ^{س} ءس = ... [٠ ، ١ ، ٢ ، ٣]

٣) إذا كان $\int$ د(س) ءس = جاس+ث ،فإن د(س) = ... [جاس ، جتاس ، - جاس ، - جتاس]

٤) إذا كانت د(س) = $\int$ $\frac{١}{س}$ ءس ، فإن دَ(٢) = ... [٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{س}$ + ∿]

٥) $\int_{-١}^{٣}$ $\frac{ءس}{س}$ = ... [لو٣ ، ٢لو٣ ، غير موجودة]

٦) $\int_{٢}^{٣}$ م ءس = ... [م ، ٢م ، ٣م]

٧) $\int$ قاس ظاس ءس = ... [قاس + ث ، ظاس + ث ، ظتاس + ث]

٨) $\int_{١}^{٣}$ (٣ف^{٢} - ٤ف) ءف = ... [٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢]

٩) إذا كان $\int_{ك}^{٠}$ ٣س^{٢} ءس = -٢٧ ، فإن ك = ... [٣ ، -٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١- $\int_{١}^{٢}$ ٢د(س) ءس = -١٠ ، فإن $\int_{٢}^{١}$ د(س) ءس = ...	١
٢- $\int_{١}^{٩}$ $\frac{ءس}{\sqrt{س}}$ = ...	٢
٣- إذا كان $\int_{٠}^{ك}$ ٣س^{٢} ءس = ٨ ، فإن قيمة ك = ...	٣
٤- قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{١}^{٥}$(س-١) ءس = ...	٤
٥- قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{٠}^{٢}$(س+١) ءس = ...	٥
٦- $\int_{هـ}^{هـ^{٣}}$ $\frac{ءس}{س}$ = ...	٦
	٢

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٥: أوجد معادلة المنحنى لميل المماس ص $هـ^{س}$ ، علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، هـ) .

س٦: أوجد معادلة المنحنى الذي ميل مماسه دَ(س) = ١ + جاس ، إذا كانت ل(٠) = $\frac{١}{٣}$.

س٧: أوجد الدالة الأصلية للدالة د(س) = جا٣س + س ، إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة(٠ ، $\frac{١}{٣}$) .

س٨: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند أي نقطة عليه (س،ص) هو ٢ + جاس وكان بيان الدالة يمر بالنقطة (٠،٢) فأوجد معادلة المنحنى .

س٩: أوجد أوجد العدد جـ الذي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل $\int_{٠}^{٣}$ ٤س ءس .

س١٠: أحسب : (أ) $\int (٦س^{٢} + جتاس - ١)$ ءس . (ب) $\int_{٠}^{١} (٢س + هـ^{س})$ ءس .

س١١: أحسب : $\int (٣ - قتاس\ ظتاس)$ ءس .

س١٢: أوجد : $\int (س^{٤} + ٢س)$ ءس .

س١٣: عين التكامل : $\int هـ^{س} \left(١ + \frac{هـ^{-س}}{جا^{٢}س}\right)$ ءس .

همسة في أذن الطالب: إن الحرص المفرط والتحمل الشديد وخصوصاً أيام الاختبارات قد يصيبك بالقلق ثم الإكتئاب دون أن تدري ..

•●♥S∞fy♥●•
+967-770060766

نصيحتي لك: اعمل ماعليك بحدود المعقول "وتوكل على الحي القيوم" .

ثالثاً: طرق التكامل :

تستخدم طرق التكامل لحساب تكاملات يصعب حلها بالقواعد المباشرة[التكاملات الشهيرة] ومن هذه الطرق التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئة ... وغيرهما .

أولاً: التكامل بالتعويض :

- نستخدم طريقة التعويض لحساب تكاملات على صورة حاصل ضرب دالتين إحداهما مشتقة لجزء من الأخرى وحسب نوع الدالة المعطاة ، أي عندما يكون التكامل على صورة :

$\int \text{د}[\text{ق}(\text{س})] \times \text{قَ}(\text{س})\ \text{ءس}$.

- نستخدم طرق التعويض في الصيغ الآتية :

١) دالة أسية × مشتقة الأس أو جزء من مشتقة الأس والقاعدتين في ذلك :

أ) $\int \text{دَ}(\text{س}) \times \text{م}^{\text{د}(\text{س})}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{لو}\,\text{م}} \times \text{م}^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$.

ب) $\int \text{دَ}(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$.

حيث نضع ع = الأس .

٢) دالة قوة × مشتقة الأساس أو جزء من مشتقة الأساس والقاعدة في ذلك :

$$\int \text{دَ}(\text{س}) \times [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \text{ ، } \text{ن} \neq -1$$

حيث نضع ع = الأساس .

٣) دالة مثلثية × مشتقة الزاوية أو جزء من مشتقة الزاوية والقاعدة في ذلك :

$\int \text{دَ}(\text{س}) \times \text{جتا}[\text{د}(\text{س})]\ \text{ءس} = \text{جا}[\text{د}(\text{س})] + \text{ث}$. [صحيحة لجميع النسب المثلثية]

حيث نضع ع = الزاوية .

٤) دالة كسرية × مشتقة المقام أو جزء منها والقاعدة في ذلك :

$$\int \frac{\text{دَ}(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\ \text{ءس} = \text{لو}\,|\text{د}(\text{س})| + \text{ث} \text{ ، } \text{ن} = -1 .$$

حيث نضع ع = المقام .

تنبيهات : (١) نقصد بجزء من المشتقة هو وجود المتغيّر بدرجته في الدالة الأخرى، إذ لايمكن الحصول عليه بالضرب والقسمة كما نتعامل مع الأعداد الحقيقية ، لماذا ؟

(٢) عزيزي الطالب عليك معرفة نوع الدالة الأساسية كي تطبق التعويض ، فهناك دوال قوة أساسها مثلثية ومثلها تعتبر دالة قوة فنطبق قاعدة دالة القوة . وهناك دوال مثلثية زاويتها دالة أسية فنطبق قاعدة الدالة المثلثية ... وهكذا . لذلك إحرص على معرفة الدالة والقاعدة المناسبة لها .

- **خطوات حساب التكامل بطريقة التعويض :**

١) نجري الفرض المناسب (بفرض ع = جزء من الدالة ويفضل مشتقته موجودة) .

٢) نشتق طرفي الفرض ونجعل ءس في طرف .

٣) نعوض في التكامل المطلوب حسابه ، فيتحول بدلالة ص ، ءص . (في حالة وجود المتغيّر الأصلي فإنه سيختصر أو نرجعه إلى الفرضية) .

٤) نحسب التكامل بالقواعد الشهيرة .

٥) نعوض عن ع بما فرضناه سابقاً .

إليك عزيزي عدد من المسائل والتي من خلالها ستتعرف على طريقة التعويض والتعامل معها.

مثال ١: أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int ٣س^{٢}\sqrt{٥س^{٣}+٤}\ ءس$. (٢) $\int س^{٤}\ جاس^{٥}\ ءس$. (٣) $\int هـ^{س^{٣}+٦س}(س^{٢}+٢)\ ءس$.

(٤) $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣}+٢}\ ءس$. (٥) $\int \frac{جا٢س}{١+جتا٢س}\ ءس$. (٦) $\int هـ^{س^{٢}+لوس}\ ءس$. (٧) $\int \frac{جاس}{١+جتا٢س}\ ءس$.

(٨) $\int \frac{هـ^{ظتا\sqrt{س}}}{\sqrt{س}-\sqrt{س}\ جتا^{٢}\sqrt{س}}\ ءس$. (٩) $\int \frac{ءس}{٤س^{٢}-١٢س+٩}$. (١٠) $\int \frac{جتا^{٣}س}{جا^{٢}س}\ ءس$.

(١١) $\int \frac{ءس}{س\ (س^{٧}+١)}$. (١٢) $\int \frac{(\sqrt{س}+٣)^{٧}}{س^{٥}}\ ءس$.

الحل: (١) $\int ٣س^{٢}\sqrt{٥س^{٣}+٤}\ ءس$:

نضع $ع = ٥س^{٣}+٤$ (نشتق الطرفين) $\Leftarrow ءع = ١٥س^{٢}\ ءس$

لاحظ أن بعد الاشتقاق ظهر $١٥س^{٢}$ فنلاحظ أن $س^{٢}$ وهو المتغيّر بدرجته موجود لذلك كان بامكاننا استخدام التعويض أما العدد ١٥ فليس بالضرورة موجود ولا نأخذ له أهمية .

(نجعل ءس في طرف بالقسمة على $١٥س^{٢}$) $\Leftarrow \frac{ءع}{١٥س^{٢}} = ءس$

وبالتعويض في المسائلة تكون: $\int ٣س^{٢}\sqrt{٥س^{٣}+٤}\ ءس = \int \cancel{٣س^{٢}}\sqrt{ع} \times \frac{ءع}{\cancel{١٥س^{٢}}}$

لايمكن يكون لدينا متغيرين س ، ع بنفس الوقت لذلك يوجد اختصار ليصبح التكامل بدلالة ع .

$= \frac{١}{٥}\int ع^{\frac{١}{٢}}\ ءع = \frac{١}{٥}\times\frac{٢}{٣}\ ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$ (وبالتعويض بـ ع بما تساويها) $= \frac{٢}{١٥}(٥س^{٣}+٤)^{\frac{٣}{٢}} + ث$.

في المسائل الآتية سنحل بدون تفصيل كما أنه توجد طريقة مختصرة سنذكرها في بعض المسائل الآتية .

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

(٢) $\int \text{س}^{٤} \text{ جاس}^{٥} \text{ ءس}$:

نضع $\text{ع} = \text{س}^{٥}$ (نشتق الطرفين) $\Leftarrow \text{ءع} = ٥\text{س}^{٤} \text{ ءس}$

(نجعل ءس في طرف بالقسمة على $٥\text{س}^{٤}$) $\Leftarrow \frac{\text{ءع}}{٥\text{س}^{٤}} = \text{ءس}$

$\therefore \int \text{س}^{٤} \text{ جاس}^{٥} \text{ ءس} = \int \cancel{\text{س}^{٤}} \text{ جاع} \times \frac{\text{ءع}}{٥\cancel{\text{س}^{٤}}} = \frac{١}{٥}\int \text{جاع ءع} = -\frac{١}{٥} \text{ جتاع} + \text{ث} = -\frac{١}{٥} \text{ جتاس}^{٥} + \text{ث}$

حل بطريقة مختصرة دون تغيير المتغير(استخدام القاعدة مباشرة):

في $\int \text{س}^{٤} \text{ جاس}^{٥} \text{ ءس}$ ، نلاحظ حاصل ضرب دالتين والدالة الأساسية دالة مثلثية والزاوية لها هي $(\text{س}^{٥})$ ومشتقة هذه الزاوية هي $(٥\text{س}^{٤})$ نلاحظ أن المتغيّر بدرجته موجود وهو المهم في الدالة الأخرى وأن العدد ٥ غير موجود لذلك سنضرب في $\frac{٥}{٥}$ سنحتاج للعدد ٥ تكملة للمشتقة بينما العدد $\frac{١}{٥}$ سيُخرج خارج التكامل ويكون في الناتج لاحظ الحل الآتي:

$\boxed{\int \text{دَ(س)} \times \text{جا[د(س)] ءس} = -\text{جا[د(س)]} + \text{ث}}$

$\int \text{س}^{٤} \text{ جاس}^{٥} \text{ ءس} = \frac{١}{٥}\int ٥\text{س}^{٤} \text{ جاس}^{٥} \text{ ءس} = -\frac{١}{٥} \text{ جتاس}^{٥} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٦\text{س}} (\text{س}^{٢}+٢) \text{ ءس}$:

نضع $\text{ع} = \text{س}^{٣}+٦\text{س} \Leftarrow \text{ءع} = ٣\text{س}^{٢}+٦ \text{ ءس} \Leftarrow \frac{١}{٣\text{س}^{٢}+٦} \text{ ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٦\text{س}} (\text{س}^{٢}+٢) \text{ ءس} = \int \text{هـ}^{\text{ع}} (\text{س}^{٢}+٢) \times \frac{١}{٣\text{س}^{٢}+٦} \text{ ءع} = \int \text{هـ}^{\text{ع}} \cancel{(\text{س}^{٢}+٢)} \times \frac{١}{٣\cancel{(\text{س}^{٢}+٢)}} \text{ ءع}$

[لاحظ لايوجد اختصار فسُحب عامل مشترك ٣ من المقام]

$= \frac{١}{٣}\int \text{هـ}^{\text{ع}} \text{ ءع} = \frac{١}{٣} \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث} = \frac{١}{٣} \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٦\text{س}} + \text{ث}$.

حل بطريقة مختصرة دون تغيير المتغير(استخدام القاعدة مباشرة):

نلاحظ أن الدالة أسية وأن مشتقة الأس موجودة وينقصها فقط العدد ٣ لذلك سنضرب في $\frac{٣}{٣}$ ثم نطبق قاعدة التكامل الخاصة بالدالة الأسية :

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٦\text{س}} (\text{س}^{٢}+٢) \text{ ءس} = \frac{١}{٣}\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٦\text{س}} (٣\text{س}^{٢}+٦) \text{ ءس} = \frac{١}{٣}\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٦\text{س}} + \text{ث}$.

$\boxed{\int \text{دَ(س)} \times \text{هـ}^{\text{د(س)}} \text{ ءس} = \text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}}$

(٤) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٢}\,\text{ءس}$:

نضع $\text{ع} = \text{س}^{٣}+٢ \Leftarrow \text{ءع} = ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس} \Leftarrow \frac{١}{٣\text{س}^{٢}}\,\text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٢}\,\text{ءس} = \int \frac{\cancel{\text{س}^{٢}}}{\text{ع}} \times \frac{١}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}}\,\text{ءع} = \frac{١}{٣}\int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{ءع} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}|\text{ع}| + \text{ث} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}|\text{س}^{٣}+٢| + \text{ث}$

حل بطريقة مختصرة دون تغيير المتغير(استخدام القاعدة مباشرة):

نلاحظ أن الدالة كسرية وأن مشتقة المقام موجودة وينقصها فقط العدد ٣ لذلك سنضرب في $\frac{٣}{٣}$ ثم نطبق قاعدة التكامل الخاصة بالدالة الكسرية :

$\therefore \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٢}\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\int \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٢}\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}|\text{س}^{٣}+٢| + \text{ث}$.

(٥) $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{١+\text{جتا}٢\text{س}}\,\text{ءس}$:

الدالة هي دالة كسرية وسنتعامل معها على ذلك وليس دالة مثلثية وانما كل من بسطها ومقامها يحتوي على دالة مثلثية كما نلاحظ أن مشتقة المقام موجودة بالبسط وعليه :

نضع $\text{ع} = ١ + \text{جتا}٢\text{س} \Leftarrow \text{ءع} = -٢\,\text{جا}٢\text{س}\,\text{ءس} \Leftarrow \frac{١}{-٢\,\text{جا}٢\text{س}}\,\text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{١+\text{جتا}٢\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\cancel{\text{جا}٢\text{س}}}{\text{ع}} \times \frac{١}{-٢\cancel{\text{جا}٢\text{س}}}\,\text{ءع} = -\frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{ءع} = -\frac{١}{٢}\,\text{لو}|\text{ع}| + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{لو}|١+\text{جتا}٢\text{س}| + \text{ث}$.

حل بطريقة مختصرة دون تغيير المتغير(استخدام القاعدة مباشرة):

نلاحظ أن الدالة كسرية وأن مشتقة المقام موجودة وينقصها فقط العدد −٢ لذلك سنضرب في $\frac{-٢}{-٢}$ ثم نطبق قاعدة التكامل الخاصة بالدالة الكسرية ولأن الطريقة مكررة في المثال السابق نترك لك تطبيقها:

....

....

(٦) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+\text{لوس}}\,\text{ءس}$:

نوزع المقام على عملية الجمع في الأس فيكون: $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{هـ}^{\text{لوس}}\,\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{س}\,\text{ءس}$

نضع $\text{ع} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{ءع} = ٢\text{س}\,\text{ءس} \Leftarrow \frac{١}{٢\text{س}}\,\text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+\text{لوس}}\,\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{س}\,\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{ع}} \times \cancel{\text{س}} \times \frac{١}{٢\cancel{\text{س}}}\,\text{ءع} = \frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{ث}$.   [حاول بنفسك عزيز الطالب بالطريقة المختصرة] .

(٧) ∫ جاس / (١ + جتا٢س) ءس : عزيزي الطالب إن شبيه هذا المثال مر معنا في رقم (٥) ولكن الاختلاف بينه وبين هذا هو أن الزاوية مختلفة في كل من النسبتين وليس متشابهة مثل ما مر معنا سابقاً لذلك هنا سنعمل على توحيد الزوايا باستخدام متطابقة وكلآتي: ∫ جاس / (١ + جتا٢س) ءس = ∫ جاس / (٢ جتا٢ س) ءس

وكما تلاحظ أنه لايمكن التعامل مع التكامل كدالة كسرية لعدم وجود مشتقة المقام في البسط لذلك سيتم رفع المقام والتعامل مع التكامل كتكامل دالة قوة مشتقة الأساس موجودة :

∴ ∫ جاس / (١ + جتا٢س) ءس = ∫ جاس / (٢ جتا٢ س) ءس = ١/٢ ∫ جاس جتا⁻٢س ءس

حل بالفرض: نضع ع = جتاس ⇐ ءع = − جاس ءس ⇐ ءس = ءع / −جاس

∴ ١/٢ ∫ جاس جتا⁻٢س ءس = ١/٢ ∫ ~~جاس~~ ع⁻٢ × ءع / ~~−جاس~~ = −١/٢ ∫ ع⁻٢ ءع = −١/٢ × ع⁻١ / −١ + ث

= ١/(٢ع) + ث = ١/(٢جتاس) + ث = ١/٢ قاس + ث .

حل بالقاعدة: الحل بطريقة القاعدة المختصرة نحتاج لتكتمل مشتقة الأساس إلى إشارة سالب (−) لذلك سنضرب في سالب مرتين ثم نطبق قاعدة القوة بإعتبار أن المشتقة كاملة موجودة :

∴ ١/٢ ∫ جاس جتا⁻٢س ءس = −١/٢ ∫ − جاس جتا⁻٢س ءس = −١/٢ × جتا⁻١س / −١ + ث = ١/(٢جتاس) + ث .

(٨) ∫ هـ^(ظتا√س) / (√س − √س جتا٢√س) ءس : هنا نحتاج لبعض الطرق البسيطة كسحب √س عامل مشترك من المقام تطبيق المتطابقة (جا٢√س = ١ − جتا٢√س) ثم متطابقة أخرى (مقلوب جا٢√س = قتا٢√س)

(٨) ∫ هـ^(ظتا√س) / (√س − √س جتا٢√س) ءس = ∫ هـ^(ظتا√س) / (√س (١ − جتا٢√س)) ءس = ∫ هـ^(ظتا√س) / (√س جا٢√س) ءس

= ∫ هـ^(ظتا√س) × ١/√س × قتا٢√س ءس ممكن الحل بالطريقة المختصرة من هنا بالضرب في −٢/−٢ ولكن سنستخدم طريقة الفرض :

نضع ع = ظتا√س ⇐ ءع = ١/(٢√س) × − قتا٢√س ءس ⇐ ٢√س × −١/(قتا٢ س) ءع = ءس

∴ ∫ هـ^(ظتا√س) × ١/√س × قتا٢√س ءس = ∫ هـ^ع × ~~١/√س~~ × ~~قتا٢√س~~ × ٢~~√س~~ × −١/~~قتا٢ س~~ ءع

= −٢ ∫ هـ^ع ءع = −٢ هـ^ع + ث = −٢ هـ^(ظتا√س) + ث .

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

(٩) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{٤س}^{٢} - \text{١٢س} + ٩}$: لاحظ أن الدالة كسرية ولكن مشتقة المقام غير موجودة بالبسط لذلك سنتعامل مع المقام بالتحليل وهو مربع كامل ثم برفع المقام والتعامل كدالة قوة وكما يلي:

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{٤س}^{٢} - \text{١٢س} + ٩} = \int \frac{\text{ءس}}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}}$$

نضع ع = ٢س − ٣ ⇐ ءع = ٢ ءس ⇐ $\frac{١}{٢}$ ءع = ءس

$$\therefore \int \frac{\text{ءس}}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}} = \int \frac{١}{\text{ع}^{٢}}\ \text{ءع} = \frac{١}{٢}\int \text{ع}^{-٢}\ \text{ءع} = -\frac{١}{٢}\text{ع}^{-١} + \text{ث} = -\frac{١}{٢}(\text{٢س} - ٣)^{-١} + \text{ث}$$

(١٠) $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ ءس : سنحل هذا التكامل بطريقتين في البداية ولكن يلزمنا استخدام التعويض لاحقاً ولكن سنستخدم التعويض المختصر دون عمل الفرضية .

حل أول: $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتاس} - \text{جتاس جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} - \int \text{جتاس ءس}$

$= \int \text{جتاس جا}^{-٢}\text{س ءس} - \int \text{جتاس ءس} = -\text{جا}^{-١}\text{س} - \text{جاس} + \text{ث}$.

لاحظ لم نتعامل مع تكامل الحد الأول كدالة كسرية لعدم وجود المشتقة في البسط وتم التعامل كدالة قوة .

حل ثاني: $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{ظتا}^{٢}\text{س جتاس ءس}$

$= \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{جتاس ءس} = \int \text{جتاس قتا}^{٢}\text{س ءس} - \int \text{جتاس ءس}$

$= \int \text{جتاس} \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} - \int \text{جتاس ءس} = \int \text{جتاس جا}^{-٢}\text{س ءس} - \int \text{جتاس ءس}$

$= -\text{جا}^{-١}\text{س} - \text{جاس} + \text{ث}$.

(١١) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{س}^{٧} + ١)}$: هنا سنستخدم التعويض وربما مختلف قليلاً عن ما مرّ معنا سابقا:

نضع ع = $\frac{١}{\text{س}}$ ⇐ (بالقلب) $\frac{١}{\text{ع}}$ = س ⇐ (بالاشتقاق) $\frac{-١}{\text{ع}^{٢}}$ ءع = ءس

$$\therefore \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{س}^{٧} + ١)} = \int \frac{\frac{-١}{\text{ع}^{٢}}\ \text{ءع}}{\frac{١}{\text{ع}}\left(\frac{١}{\text{ع}^{٧}} + ١\right)} = \int \frac{-\ \text{ءع}}{\text{ع}^{\cancel{٢}} \times \cancel{\frac{١}{\text{ع}}}\left(\frac{١}{\text{ع}^{٧}} + ١\right)} = \int \frac{-\ \text{ءع}}{\text{ع}\left(\frac{١}{\text{ع}^{٧}} + ١\right)} = \int \frac{-\ \text{ءع}}{\frac{١}{\text{ع}^{٦}} + \text{ع}}$$

$$= \int \frac{-\ \text{ءع}}{\frac{١ + \text{ع}^{٧}}{\text{ع}^{٦}}} = \int \frac{-\text{ع}^{٦}\ \text{ءع}}{١ + \text{ع}^{٧}}$$

لاحظ أن مشتقة المقام موجودة بالبسط وينقصها العدد ٧ لذلك سنضرب في $\frac{٧}{٧}$ كما يمكن عمل فرضية أخرى ولتكن ص = ١+ع^{٧} .

$$= \frac{-١}{٧}\int \frac{\text{٧ع}^{٦}\ \text{ءع}}{١ + \text{ع}^{٧}} = \frac{-١}{٧}\ \text{لو}\left|١ + \text{ع}^{٧}\right| + \text{ث} = \frac{-١}{٧}\ \text{لو}\left|١ + \frac{١}{\text{س}^{٧}}\right| + \text{ث} .$$

(١٢) $\int \frac{(\sqrt{س}+٣)^{٧}}{س^{٥}}\,ءس$:

حل أول: نضع $\sqrt{س} = ع \Leftarrow س = ع^{٢} \Leftarrow ءس = ٢ع\,ءع$

$\therefore \int \frac{(\sqrt{س}+٣)^{٧}}{س^{٥}}\,ءس = \int \frac{(ع+٣)^{٧}}{ع^{\cancel{١٠}\,٩}} \times ٢\cancel{ع}\,ءع = ٢\int \left[\frac{ع+٣}{ع}\right]^{٧} \times \frac{١}{ع^{٢}}\,ءع$

$= ٢\int \left[١ + \frac{٣}{ع}\right]^{٧} \times \frac{١}{ع^{٢}}\,ءع$ [وبالتعويض مرة أخرى]

نضع $ص = ١ + \frac{٣}{ع} \Leftarrow ءص = \frac{-٣}{ع^{٢}}\,ءع \Leftarrow \frac{-١}{٣}\,ءص = \frac{١}{ع^{٢}}\,ءع$

$\therefore ٢\int \left[١ + \frac{٣}{ع}\right]^{٧} \times \frac{١}{ع^{٢}}\,ءع = ٢\int ص^{٧} \times \frac{-١}{٣}\,ءص = \frac{-٢}{٣}\int ص^{٧}\,ءص = \frac{-٢}{٣} \times \frac{ص^{٨}}{٨} + ث$

$= \frac{-٢}{٢٤}\left[١ + \frac{٣}{ع}\right]^{٨} + ث = \frac{-١}{١٢}\left[١ + \frac{٣}{\sqrt{س}}\right]^{٨} + ث$.

حل ثاني: $\int \frac{(\sqrt{س}+٣)^{٧}}{س^{٥}}\,ءس = \int \frac{(\sqrt{س})^{٧}\left(١ + \frac{٣}{\sqrt{س}}\right)^{٧}}{س^{٥}}\,ءس$

$= \int \frac{\left(١ + \frac{٣}{\sqrt{س}}\right)^{٧}}{س^{\frac{٣}{٢}}}\,ءس$

$\boxed{\frac{(\sqrt{س})^{٧}}{س^{٥}} = \frac{س^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٥}} = س^{\frac{٧}{٢} - ٥} = س^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}}}$

نضع $ع = ١ + \frac{٣}{\sqrt{س}} \Leftarrow ءع = \frac{-٣}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}\,ءس \Leftarrow \frac{-٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\,ءع = ءس$

$= \int \frac{ع^{٧}}{\cancel{س^{\frac{٣}{٢}}}} \times \frac{-٢}{٣}\cancel{س^{\frac{٣}{٢}}}\,ءع = \frac{-٢}{٣}\int ع^{٧}\,ءع = \frac{-٢}{٣} \times \frac{ع^{٨}}{٨} + ث = \frac{-١}{١٢}\left[١ + \frac{٣}{\sqrt{س}}\right]^{٨} + ث$.

ملاحظة: إذا كان التكامل محدداً . فإنه لدينا طريقتان:

١) بعد تغيير متغيّر التكامل يمكنك تغيير حدود التكامل وفق الفرضية المستخدمة ثم التعويض بحدود فترة التكامل الجديدة دون الإرجاع إلى الفرضية الأصلية .

٢) نستخدم الأسلوب السابق مع إرجاع الفرضية لأصلها وثم التعويض بحدود فترة التكامل .

مثال ٢: أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int_{١}^{ه} \frac{(لوس)^{٢}}{س}\,ءس$. (٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا^{٣}ع\,جتاع\,ءع$.

الحل: (١) $\int_{١}^{ه} \frac{(لوس)^{٢}}{س}\,ءس$:

نضع $ع = لوس \Leftarrow ءع = \frac{١}{س}\,ءس \Leftarrow س\,ءع = ءس$

بالنسبة للحدود : عندما $س = ١ \Leftarrow ع = لو١ \Leftarrow ع = ٠$ ، وعندما $س = ه \Leftarrow ع = لوه \Leftarrow ع = ١$

$\therefore \int_{١}^{ه} \frac{(لوس)^{٢}}{س}\,ءس = \int_{٠}^{١} \frac{ع^{٢}}{\cancel{س}} \times \cancel{س}\,ءع = \int_{٠}^{١} ع^{٢}\,ءع = \frac{١}{٣}ع^{٣}\Big|_{٠}^{١} = \frac{١}{٣}(١)^{٣} - \frac{١}{٣}(٠)^{٣} = \frac{١}{٣}$

أو $\int_{١}^{ه} \frac{(لوس)^{٢}}{س}\,ءس = \int \frac{ع^{٢}}{\cancel{س}} \times \cancel{س}\,ءع = \int ع^{٢}\,ءع = \frac{١}{٣}ع^{٣}\Big| = \frac{١}{٣}(لوس)^{٣}\Big|_{١}^{ه}$

$= \frac{١}{٣}(لوه)^{٣} - \frac{١}{٣}(لو١)^{٣} = \frac{١}{٣}(١)^{٣} - \frac{١}{٣}(٠)^{٣} = \frac{١}{٣}$.

(٢) $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٣}\text{ع جتاع ءع}$:

نضع ص = جاع ⇐ ءص = جتاع ءع ⇐ $\frac{١}{\text{جتا ع}}$ ءص = ءع

بالنسبة للحدود: عندما ع = ٠ ⇐ ص = جا٠ ⇐ ص = ٠ ،وعندما ع = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ ص = جا$\frac{\pi}{٢}$ ⇐ ص = ١

∴ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٣}\text{ع جتاع ءع} = \int_{\cdot}^{١} \text{ص}^{٣}\,\cancel{\text{جتاع}} \times \frac{١}{\cancel{\text{جتا ع}}}\,\text{ءص} = \int_{\cdot}^{١} \text{ص}^{٣}\,\text{ءص} = \frac{١}{٤}\,\text{ص}^{٤} \Big|_{\cdot}^{١}$

$= \frac{١}{٤}(١)^{٤} - \frac{١}{٤}(٠)^{٤} = \frac{١}{٤}$.

أو $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٣}\text{ع جتاع ءع} = \int \text{ص}^{٣}\,\cancel{\text{جتاع}} \times \frac{١}{\cancel{\text{جتا ع}}}\,\text{ءص} = \int \text{ص}^{٣}\,\text{ءص} = \frac{١}{٤}\,\text{ص}^{٤} \Big|$

$= \frac{١}{٤}(\text{جاع})^{٤} \Big|_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{٤}(\text{جا}\frac{\pi}{٢})^{٤} - \frac{١}{٤}(\text{جا}٠)^{٤} = \frac{١}{٤}(١)^{٤} - \frac{١}{٤}(٠)^{٤} = \frac{١}{٤}$

تدريبات: (أ) أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int (٣\text{س}^{٢}+٢)(\text{س}^{٣}+٢\text{س})^{٦}\,\text{ءس}$. (٢) $\int \frac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\text{س}^{٢} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$. (٣) $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س} + ١}}}{\sqrt{٢\text{س} + ١}}\,\text{ءس}$.

(٤) $\int \frac{\text{جاس جتاس}}{١ - \text{جتاس}}\,\text{ءس}$. (٥) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتا}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$. (٦) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{ظاس}}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$.

(٧) $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{ظا}^{٤}\text{س})\,\text{ءس}$. (٨) $\int_{\frac{\pi}{٨}}^{\frac{\pi}{٦}} \frac{\text{ءس}}{\text{جتا}^{٢}٢\text{س}}$.

$\boxed{\text{ث} = ١}$

(ب) أوجد الدالة الأصلية للدالة د(س) = قتا⁴س ظتاس ءس إذا كان منحناها يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢).

مثال٣: أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) ∫ ظاس ءس .   (٢) ∫ ظتاس ءس .   (٣) ∫ قاس ءس .   (٤) ∫ قتاس ءس .

الحل: وكما ملاحظ في هذا المثال أن هذه التكاملات هي لنسب مثلثية معروفة وبسيطة ولم نردها في قواعد التكاملات الشهيرة فهي تحتاج للتكامل بالتعويض كي نستنتج قاعدتها .

(١) ∫ ظاس ءس : نرجع النسبة إلى أصلها حيث : $\int \text{ظاس ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{ ءس}$

نضع ع = جتاس ⇐ ءع = − جاس ءس ⇐ $\frac{-\text{ءع}}{\text{جاس}} = \text{ءس}$

∴ $\int \text{ظاس ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{ ءس} = \int \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\text{ع}} \times \frac{-\text{ءع}}{\cancel{\text{جاس}}} = -\int \frac{1}{\text{ع}} \text{ ءع} = -\text{لو}|\text{ع}| + \text{ث}$

= − لو|جتاس| + ث.

(٢) ∫ ظتاس ءس : (نترك حله لك عزيزي الطالب وهو بمثابة ماسبق)

....

....

....

....

(٣) ∫ قاس ءس : لكي نستخدم التكامل بالتعويض نحتاج للضرب في $\frac{\text{قاس + ظاس}}{\text{قاس + ظاس}}$

∴ $\int \text{قاس ءس} = \int \text{قاس} \times \frac{\text{قاس + ظاس}}{\text{قاس + ظاس}} \text{ ءس} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س + قاس ظاس}}{\text{قاس + ظاس}} \text{ ءس}$

ضع ع = قاس + ظاس ⇐ ءع = قاس ظاس + قا^{2}س ءس ⇐ $\frac{\text{ءع}}{\text{قاس ظاس + قا}^2\text{س}}$

∴ $\int \text{قاس ءس} = \int \text{قاس} \times \frac{\text{قاس + ظاس}}{\text{قاس + ظاس}} \text{ ءس} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س + قاس ظاس}}{\text{قاس + ظاس}} \text{ ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س + قاس ظاس}}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ءع}}{\cancel{\text{قاس ظاس + قا}^2\text{س}}} = \int \frac{1}{\text{ع}} \text{ ءع} = \text{لو}|\text{ع}| + \text{ث}$

= لو| قاس + ظاس| + ث .

(٤) ∫ قتاس ءس : (نترك حله لك عزيزي الطالب وهو بمثابة ماسبق)

....

....

....

....

تكامل جا^{ن}س ، جتا^{ن}س:

سنتطرق لهذين التكاملين عندما ن $\geqslant$ ٣ ، حيث أنه عندما ن = ١ فهو تكامل شهير ، وعندما ن = ٢ فقد تم التطرق له سابقاً ، وعليه فإنه لحساب : ∫ جا^{ن}س ءس أو ∫ جتا^{ن}س ءس عندما ن $\geqslant$ ٣ يكون :

١- عندما ن فردي سنجزئ النسبة إلى نسبتين بفصل واحد من الأس والباقي أسه زوجي ويحول للمتطابقة جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ ومنها :

- جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س .
- جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س .

٢- عندما ن زوجي سنخفض القوة بتجزئتها وسنستخدم مع ذلك المتطابقتين :

- جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س) .
- جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س) .

مثال : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) ∫ جا^{٣}س ءس . (٢) ∫ جا^{٤}س ءس . (٣) ∫ جتا^{٥}س ءس .

الحل: (١) ∫ جا^{٣}س ءس : نلاحظ أن الأس فردي فنكامل حسب رقم (١) فيما سبق وكما يلي :

∫ جا^{٣}س ءس = ∫ جا^{٢}س جاس ءس = ∫(١ − جتا^{٢}س) جاس ءس = ∫ (جاس − جتا^{٢}س جاس) ءس

= − جتاس − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س + ث . [مكاملة الحد الأول كشهير والحد الثاني بالتعويض بالقاعدة مباشرة]

(٢) ∫ جا^{٤}س ءس : لاحظ أن الأس زوجي فنكامل حسب رقم (٢) فيما سبق وكما يلي :

∫ جا^{٤}س ءس = ∫ (جا^{٢}س)^{٢} ءس = ∫ [$\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)]^{٢} ءس

[وبفك التربيع وثم فك تربيع المربع الكامل]

= ∫ $\frac{١}{٤}$ (١ − جتا٢س)^{٢} ءس = ∫ $\frac{١}{٤}$ (١ −٢ جتا٢س+جتا^{٢}٢س) ءس

= ∫ $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ جتا^{٢}٢س ءس [تطبيق متطابقة مرة أخرى في جتا^{٢}٢س =$\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٤س)]

=∫[$\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س+$\frac{١}{٤}$($\frac{١}{٢}$(١+ جتا٤س))] ءس=∫[$\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$ جتا٤س] ءس

[مكاملة جميع الحدود كتكاملات شهيرة]

= $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٨}$ س + $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + ث = $\frac{٣}{٨}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + ث .

(٣) ∫ جتا^{٥}س ءس : نلاحظ أن الأس فردي فنكامل حسب رقم (١) فيما سبق وبمثل خطوات المثال فرع (١) وكما يلي :

∫ جتا^{٥}س ءس = ∫ جتا^{٤}س جتاس ءس = ∫ (جتا^{٢}س)^{٢} جتاس ءس = ∫ (١ − جا^{٢}س)^{٢} جتاس ءس

= ∫ (١ − ٢جا^{٢}س + جا^{٤}س) جتاس ءس = ∫ (جتاس − ٢جا^{٢}س جتاس + جا^{٤}س جتاس) ءس

[مكاملة الحد الأول كشهير والحد الثاني والثالث بالتعويض بالقاعدة مباشرة]

= جاس − $\frac{٢}{٣}$ جا^{٣}س + $\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س + ث .

تدريب : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) ∫ جتا^{٣}س ءس. (٢) ∫ جا^{٣} $\frac{١}{٢}$ س ءس. (٣) ∫ جتا^{٤}س ءس. (٤) ∫ جا^{٥}س ءس. (٥) ∫ قا^{٣}س ءس.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثانياً: التكامل بالتجزئة :

وهي إحدى طرق التكامل وجاءت فكرة التكامل بالتجزئة من مشتقة حاصل ضرب دالتين وسنستنتج هذه الصيغة كما يلي:

استنتاج القانون : نعلم مسبقاً أن مشتقة حاصل ضرب دالتين ف(س) ، هـ(س) كما يلي :

ء(ف هـ) = مشتقة الأولى × الثانية + الأولى × مشتقة الثانية

ء(ف هـ) = ءف × هـ + ف × ءهـ [وبإدخال التكامل]

∴ ~~∫ ء~~(ف هـ) = ∫ ءف × هـ + ∫ ف × ءهـ [يختصر التكامل مع المشتقة، لماذا؟]

⇐ ف هـ = ∫ هـ ءف + ∫ ف ءهـ

⇐ $\boxed{\text{∫ ف ءهـ = ف هـ − ∫ هـ ءف}}$ وتسمى هذه الصيغة بصيغة التجزئة ، ولاحظ أن الصيغة تحتاج لفرض مناسب لكل من ف ، ءهـ .

ملاحظات :

(أ) نستخدم طريقة التجزئة لحساب تكاملات على صورة حاصل ضرب دالتين إحداهما على الأقل غير قياسية (مثلثية ، أسية ، لوغاريتمية ، ...) .

(ب) تستخدم التجزئة للتكامل الذي لايحل بالتعويض .

(ج) عند استخدام صيغة التجزئة نقوم بتجزئة الدالة المراد تكاملها إلى جزئين أحدهما نفرضه ف ونشتقه والآخر نفرضه ءهـ ونكامله . أي نحتاج لفرض مناسب لكل من ف ، ءهـ حيث الدالة ف تكون سهلة الاشتقاق و الدالة ءهـ سهلة التكامل وعليه نعمل الآتي:

ف = ... ⇐ ءف = ... (اشتقاق) . ءهـ = ... ⇐ هـ = ... (تكامل) .

ثم نستخدم صيغة (قانون) التجزئة .

(د) تستخدم التجزئة في صيغ منها :

(١) حدودية × مثلثية :

نضع ف = الحدودية ⇐ نشتق الطرفين .

ءهـ = المثلثية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

(٢) حدودية × أسية (أو أسية بمفردها) :

نضع ف = الحدودية ⇐ نشتق الطرفين .

ءهـ = الأسية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

(٣) حدودية × لوغاريتمية (أو لوغاريتمية بمفردها) :

نضع ف = اللوغاريتمية ⇐ نشتق الطرفين .

ءه = الحدودية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

(٤) أسية × مثلثية :

نضع ف = الأسية ⇐ نشتق الطرفين .

ءه = المثلثية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

تنبيه: عندما نقول أسية بمفردها أو لوغاريتمية بمفردها فإن الحدودية = ١

بعد معرفتك متى نستخدم طريقة التجزئة والصيغ المستخدمة في ذلك نعطي لك عزيزي الطالب شرح مفصل للصيغ التي نستخدم معها التجزئة مع الأمثلة في ذلك .

أولاً : حدودية × مثلثية :

نضع ف = الحدودية ⇐ نشتق الطرفين . ونضع ءه = المثلثية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

وسنميّز هنا حالتان :

١ – ناتج مشتقة الزاوية للدالة المثلثية قيمة عددية فنستخدم التجزئة فقط .

٢ – ناتج مشتقة الزاوية للدالة المثلثية تحوي متغيّر فنستخدم التعويض أولاً ثم التجزئة إذا تطلب الأمر. (أي مابداخل الدالة غير القياسية ليس خطي فهنا نحتاج للتعويض أولاً ثم التجزئة).

ملاحظة: قد نحتاج لإجراء التجزئة أكثر من مرة ويحدد عدد مرات التجزئة هو درجة الحدودية .

مثال : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) ∫ (س+١) جاس ءس . (٢) ∫ (س^{٢}+٢س) جتاس ءس .

(٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جتاس ءس . (٤) ∫ س^{٣} جاس^{٢} ءس .

الحل: عزيزي الطالب عند حل هذه الأمثلة سنركز على مشتقة الزاوية للمثلثية وأيضاً درجة الحدودية.

(١) ∫ (س+١) جاس ءس : لاحظ أولاً أن مشتقة الزاوية (س) هو (١) لذلك سيكون لدينا تجزئة مباشرة دون إجراء التعويض، كما تلاحظ أن درجة الحدودية (١) لذلك سنستخدم التجزئة مرة واحدة.

ف = س+١ ⇐ ءف = ءس (المشتقة) . ءه = جاس ءس ⇐ ه = – جتاس (التكامل) .

وبتطبيق الصيغة : ∫ ف ءه = ف ه – ∫ ه ءف

∴ ∫ (س+١) جاس ءس = (س+١) × – جتاس – ∫ – جتاس ءس [لاحظ ∫ جتاس ءس مشهور]

= – (س+١) جتاس + جاس + ث .

(٢) ∫ (س^{٢}+٢س) جتاس ءس : لاحظ أولاً أن مشتقة الزاوية (س) هو (١) لذلك سيكون لدينا تجزئة مباشرة دون إجراء التعويض، كما تلاحظ أن درجة الحدودية (٢) لذلك سنستخدم التجزئة مرتين.

ف = س^{٢}+٢س ⇐ ءف = ٢س+٢ ءس (اشتقاق). ءه = جتاس ءس ⇐ ه = جاس (تكامل).

وبتطبيق الصيغة : ∫ ف ءه = ف ه − ∫ ه ءف

∴ ∫ (س^{٢}+٢س) جتاس ءس = (س^{٢}+٢س) × جاس − ∫ جاس × (٢س+٢) ءس

= (س^{٢}+٢س) جاس − ∫ (٢س+٢) جاس ءس ...(١) [لاحظ ∫ (٢س+٢) جاس ءس يحتاج تجزئة]

ف = ٢س+٢ ⇐ ءف = ٢ ءس (اشتقاق). ءه = جاس ءس ⇐ ه = − جتاس (تكامل).

∴ ∫ (٢س+٢) جاس ءس = (٢س+٢) × − جتاس − ∫ − جتاس × ٢ ءس

= (٢س+٢) جتاس +٢ ∫ جتاس ءس= (٢س+٢) جتاس +٢جاس + ث ...(٢)

وبالتعويض بـ (٢) في (١) :

∴ ∫ (س^{٢}+٢س) جتاس ءس = (س^{٢}+٢س) جاس − [(٢س+٢) جتاس +٢جاس] + ث

= (س^{٢}+٢س) جاس − (٢س+٢) جتاس −٢جاس + ث .

ملاحظة: عندما يكون التكامل بالتجزئة محدد لدينا طريقتين :

١) نستخدم الصيغة : $\int_{م}^{ب}$ ف ءه = ف ه $\Big|_{م}^{ب}$ − $\int_{م}^{ب}$ ه ءف .

٢) إيجاد ناتج التكامل أولاً ثم التعويض بحدود فترة التكامل .

(٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جتاس ءس : سنستخدم التجزئة فقط وعدد مرات التكامل بالتجزئة مرة واحدة ، لماذا ؟

ف = س ⇐ ءف = ءس (اشتقاق) . ءه = جتاس ءس ⇐ ه = جاس (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int_{م}^{ب}$ ف ءه = ف ه $\Big|_{م}^{ب}$ − $\int_{م}^{ب}$ ه ءف .

∴ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جتاس ءس = س جاس $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ − $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جاس ءس = س جاس $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ + جتاس $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= [$\frac{\pi}{٢}$ × جا$\frac{\pi}{٢}$ − ٠ × جا ٠] + [جتا$\frac{\pi}{٢}$ − جتا ٠] = [$\frac{\pi}{٢}$ − ٠] + [٠ − ١] = $\frac{\pi}{٢}$ −١ .

أو بتطبيق الفرع (٢) من الملاحظة وكما يلي :

∴ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جتاس ءس = س جاس $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ − $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جاس ءس = (س جاس + جتاس) $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= ($\frac{\pi}{٢}$ جا$\frac{\pi}{٢}$ + جتا$\frac{\pi}{٢}$) − (٠ × جا٠ + جتا٠) = ($\frac{\pi}{٢}$ + ٠) − (٠ + ١) = $\frac{\pi}{٢}$ −١ .

(٤) ∫ س^{٣} جاس^{٢} ءس : لاحظ أولاً أن مشتقة الزاوية (س^{٢}) هو (٢س) وكما ملاحظ أن المشتقة تحوي متغير فنستخدم التعويض أولاً مع ملاحظة وجود التجزئة أكثر من مرة بعض إجراء التعويض .

نضع ع = س^{٢} ⇐ ءع = ٢س ءس ⇐ $\frac{ءع}{٢س}$ = ءس

∴ ∫ س^{٣} جاس^{٢} ءس = ∫ س$^{\cancel{٣}}$ جاع $\frac{ءع}{٢\cancel{س}}$ = $\frac{١}{٢}$∫ س^{٢} جاع ءع = $\frac{١}{٢}$∫ ع جاع ءع $\boxed{∵ ع = س^{٢}}$

نستخدم الآن التجزئة وكما ملاحظ أن مشتقة الزاوية (ع) هو (١) فنستخدم التجزئة ولاتوجد أي حاجة للتعويض وقد تم أجراءه ، وملاحظ أيضاً أن أس الحدودية (ع) هو (١) فنستخدم التجزئة مرة واحدة فقط .

ف = ع ⇐ ءف = ءع (اشتقاق) . ءه = جاع ءع ⇐ ه = − جتاع (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : ∫ ف ءه = ف ه − ∫ ه ءف

∴ $\frac{١}{٢}$∫ ع جاع ءع = $\frac{١}{٢}$ (ع × − جتاع − ∫ − جتاع ءع) = $\frac{-١}{٢}$ ع جتاع + $\frac{١}{٢}$ جاع + ث

= $\frac{-١}{٢}$ س^{٢} جتاس^{٢} + $\frac{١}{٢}$ جاس^{٢} + ث [تم إرجاع ع لأصلها]

∴ ∫ س^{٣} جاس^{٢} ءس = $\frac{-١}{٢}$ س^{٢} جتاس^{٢} + $\frac{١}{٢}$ جاس^{٢} + ث .

تدريب : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int_{٠}^{\pi}$ س جاس ءس. (٢) ∫ س جتا٢س ءس. (٣) ∫ س قا^{٢}س ءس . (٤) ∫ س^{٥} جتاس^{٣} ءس.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثانياً : حدودية × أسية (أو أسية بمفردها):

نضع ف = الحدودية ⇐ نشتق الطرفين . ونضع ءو = الأسية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

وسنميّز هنا حالتان :

١- ناتج مشتقة الأس للدالة الأسية قيمة عددية فنستخدم التجزئة فقط .

٢- ناتج مشتقة الأس للدالة الأسية تحوي متغيّر فنستخدم التعويض أولاً ثم التجزئة إذا تطلب الأمر. (أي مابداخل الدالة غير القياسية ليس خطي فهنا نحتاج للتعويض أولاً ثم التجزئة).

ملاحظة: قد نحتاج لإجراء التجزئة أكثر من مرة ويحدد عدد مرات التجزئة هو درجة الحدودية .

مثال : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int س\, هـ^{س}\, ءس$. (٢) $\int هـ^{\sqrt{س}}\, ءس$. (٣) $\int س^{٥}\, هـ^{س^{٣}}\, ءس$. (٤) $\int (س^{٢}+س)\, هـ^{س}\, ءس$.

الحل: عزيزي الطالب عند حل هذه الأمثلة سنركز على مشتقة الأس للأسية وأيضاً درجة الحدودية.

(١) $\int س\, هـ^{س}\, ءس$: لاحظ أولاً أن مشتقة الأس (س) هو (١) لذلك سيكون لدينا تجزئة مباشرة دون إجراء التعويض، كما تلاحظ أن درجة الحدودية لـ (س) هو (١) لذلك سنستخدم التجزئة مرة واحدة.

ف = س ⇐ ءف = ءس (المشتقة) . ءو = $هـ^{س}$ ءس ⇐ و = $هـ^{س}$ (التكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int ف\, ءو = ف\, و - \int و\, ءف$

$\therefore \int س\, هـ^{س}\, ءس = س\, هـ^{س} - \int هـ^{س}\, ءس = س\, هـ^{س} - هـ^{س} + ث$. [لاحظ $\int هـ^{س}\, ءس$ مشهور]

(٢) $\int هـ^{\sqrt{س}}\, ءس$: هي أسية بمفردها ولاحظ أولاً أن مشتقة الأس ($\sqrt{س}$) هو ($\frac{١}{٢\sqrt{س}}$) لذلك سيكون لدينا تعويض أولاً مع ملاحظة وجود التجزئة أكثر من مرة بعض إجراء التعويض :

نضع ع = $\sqrt{س}$ ⇐ ءع = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ءس ⇐ $٢\sqrt{س}$ ءع = ءس

$\therefore \int هـ^{\sqrt{س}}\, ءس = \int هـ^{ع} \times ٢\sqrt{س}\, ءع = ٢\int ع\, هـ^{ع}\, ءع$ تم التعويض بدل $\sqrt{س}$ بـ ع حسب الفرض

وكما تلاحظ أنها ليست أسية بمفردها حالياً فنستخدم الآن التجزئة وكما ملاحظ أن مشتقة الزاوية (ع) هو (١) فنستخدم التجزئة ولاتوجد أي حاجة للتعويض وقد تم أجراءه ، وملاحظ أيضاً أن أس الحدودية (ع) هو (١) فنستخدم التجزئة مرة واحدة فقط .

ف = ع ⇐ ءف = ءع (اشتقاق) . ءو = $هـ^{ع}$ ءع ⇐ و = $هـ^{ع}$ (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int ف\, ءو = ف\, و - \int و\, ءف$

$\therefore ٢\int ع\, هـ^{ع}\, ءع = ٢(ع\, هـ^{ع} - \int هـ^{ع}\, ءع) = ٢(ع\, هـ^{ع} - هـ^{ع}) + ث = ٢\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}} - ٢\, هـ^{\sqrt{س}} + ث$.

(٣) $\int س^{٥} هـ^{س^{٣}}\ ءس$: لاحظ أولاً أن مشتقة الأس $(س^{٣})$ هو $(٣س^{٢})$ لذلك سيكون لدينا تعويض أولاً مع ملاحظة وجود التجزئة أكثر من مرة بعض إجراء التعويض :

نضع $ع = س^{٣} \Leftarrow ءع = ٣س^{٢}\ ءس \Leftarrow ءس = \frac{١}{٣س^{٢}}\ ءع$ ∵ $ع = س^{٣}$ حسب الفرض

∴ $\int س^{٥} هـ^{س^{٣}}\ ءس = \int س^{٥} هـ^{ع} \frac{١}{٣س^{٢}}\ ءع = \frac{١}{٣}\int س^{٣} هـ^{ع}\ ءس = \frac{١}{٣}\int ع\ هـ^{ع}\ ءس$

نستخدم الآن التجزئة وكما ملاحظ أن مشتقة الزاوية (ع) هو (١) فنستخدم التجزئة ولاتوجد أي حاجة للتعويض وقد تم أجراءه ، وملاحظ أيضاً أن أس الحدودية (ع) هو (١) فنستخدم التجزئة مرة واحدة فقط . وكما ملاحظ أيضاً أن $\int ع\ هـ^{ع}\ ءس$ مرّ في المثال السابق :

$ف = ع \Leftarrow ءف = ءع$ (اشتقاق) . $ءه = هـ^{ع}\ ءع \Leftarrow ه = هـ^{ع}$ (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int ف\ ءه = ف\ ه - \int ه\ ءف$

∴ $\frac{١}{٣}\int ع\ هـ^{ع}\ ءع = \frac{١}{٣}(ع\ هـ^{ع} - \int هـ^{ع}\ ءع) = \frac{١}{٣}(ع\ هـ^{ع} - هـ^{ع}) + ث$.

∴ $\int س^{٥} هـ^{س^{٣}}\ ءس = \frac{١}{٣} س^{٣} هـ^{س^{٣}} - \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}} + ث$.

(٤) $\int (س^{٢}+س)\ هـ^{س}\ ءس$:

لاحظ أولاً أن مشتقة الأس (س) هو (١) لذلك سيكون لدينا تجزئة مباشرة دون إجراء التعويض،كما تلاحظ أن درجة الحدودية $(س^{٢}+س)$ هو (٢) لذلك سنستخدم التجزئة مرتين.

$ف = س^{٢}+س \Leftarrow ءف = ٢س+١\ ءس$ (اشتقاق). $ءه = هـ^{س}\ ءس \Leftarrow ه = هـ^{س}$ (تكامل).

وبتطبيق الصيغة : $\int ف\ ءه = ف\ ه - \int ه\ ءف$

∴ $\int (س^{٢}+س)\ هـ^{س}\ ءس = (س^{٢}+س)\ هـ^{س} - \int هـ^{س} \times (٢س+١)\ ءس$

$= (س^{٢}+س)\ هـ^{س} - \int (٢س+١)\ هـ^{س}\ ءس$ ...(١) [لاحظ $\int (٢س+١)\ هـ^{س}\ ءس$ يحتاج تجزئة]

$ف = ٢س+١ \Leftarrow ءف = ٢\ ءس$ (اشتقاق). $ءه = هـ^{س}\ ءس \Leftarrow ه = هـ^{س}$ (تكامل).

∴ $\int (٢س+١)\ هـ^{س}\ ءس = (٢س+١) \times هـ^{س} - \int هـ^{س} \times ٢\ ءس$

$= (٢س+١)\ هـ^{س} - ٢\int هـ^{س}\ ءس = (٢س+١)\ هـ^{س} - ٢هـ^{س} + ث$ ...(٢)

وبالتعويض بـ (٢) في (١) :

∴ $\int (س^{٢}+س)\ هـ^{س}\ ءس = (س^{٢}+س)\ هـ^{س} - [\ (٢س+١)\ هـ^{س} - ٢هـ^{س}\ ] + ث$

$= (س^{٢}+س)\ هـ^{س} - (٢س+١)\ هـ^{س} + ٢هـ^{س} + ث$.

تدريب : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int (١ - س)\,هـ^{٣س}\ ءس$.   (٢) $\int س\,هـ^{س + لوس}\ ءس$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثاً : حدودية × لوغاريتمية (أو لوغاريتمية بمفردها):

نضع ف = اللوغاريتمية ⇐ نشتق الطرفين . ونضع ءو = الحدودية ءس ⇐ نكامل الطرفين .

تنبيه: في هذا النوع لايوجد طريقة التعويض أولاً ثم التجزئة .

ملاحظة: يحدد عدد مرات التجزئة هو أس (درجة) اللوغاريتم .

مثال : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int_{1}^{هـ}$ س لوس ءس . (٢) $\int$ س^{3} لو٢س ءس . (٣) $\int$ لوس ءس . (٤) $\int$ (لوس)^{2} ءس .

الحل: عزيزي الطالب عند حل هذه الأمثلة سنركز على درجة (أس) اللوغاريتم .

(١) $\int_{1}^{هـ}$ س لوس ءس : لاحظ أولاً أن درجة اللوغاريتم (لوس) هو (١) لذلك التجزئة مرة واحدة :

ف = لوس ⇐ ءف = $\frac{1}{س}$ ءس (اشتقاق). ءو = س ءس ⇐ و = $\frac{س^{2}}{2}$ (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int$ ف ءو = ف و − $\int$ و ءف

∴ $\int_{1}^{هـ}$ س لوس ءس = لوس × $\frac{س^{2}}{2}$ − $\int$ $\frac{س^{2}}{2}$ × $\frac{1}{\cancel{س}}$ ءس = $\frac{س^{2}}{2}$ لوس − $\frac{1}{2}$ $\int$ س ءس

= ($\frac{س^{2}}{2}$ لوس − $\frac{1}{2}$ × $\frac{س^{2}}{2}$)$|_{1}^{هـ}$ = ($\frac{س^{2}}{2}$ لوس − $\frac{1}{4}$ س^{2})$|_{1}^{هـ}$ = ($\frac{هـ^{2}}{2}$ لوهـ − $\frac{1}{4}$ هـ^{2}) − ($\frac{1}{2}$ لو١ − $\frac{1}{4}$ × ١^{2})

= ($\frac{هـ^{2}}{2}$ − $\frac{هـ^{2}}{4}$) − (٠ − $\frac{1}{4}$) = $\frac{هـ^{2}}{4}$ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{هـ^{2}+1}{4}$.

(٢) $\int$ س^{3} لو٢س ءس : لاحظ أولاً أن درجة اللوغاريتم (لو٢س) هو (١) لذلك التجزئة مرة واحدة

ولاتوجد علاقة لدرجة الحدودية بالنسبة لعملية التكامل بالتجزئة وكما ملاحظ فيما يأتي :

ف = لو٢س ⇐ ءف = $\frac{2}{2س}$ = $\frac{1}{س}$ ءس (اشتقاق). ءو = س^{3} ءس ⇐ و = $\frac{س^{4}}{4}$ (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int$ ف ءو = ف و − $\int$ و ءف

∴ $\int$ س^{3} لو٢س ءس = لو٢س × $\frac{س^{4}}{4}$ − $\int$ $\frac{س^{4}}{4}$ × $\frac{1}{س}$ ءس = $\frac{س^{4}}{4}$ لو٢س − $\frac{1}{4}$ $\int$ س^{3} ءس

= $\frac{س^{4}}{4}$ لو٢س − $\frac{1}{4}$ × $\frac{س^{4}}{4}$ + ث = $\frac{س^{4}}{4}$ لو٢س − $\frac{1}{16}$ × س^{4} + ث .

(٣) $\int$ لوس ءس : لاحظ أن الدالة لوغاريتمية بمفردها فنجري التجزئة وبإعتبار الحدودية هي (١)

ونحتاج للتجزئة مرة واحدة فقط لأن درجة اللوغاريتمية (لوس) هو (١) :

ف = لوس ⇐ ءف = $\frac{1}{س}$ ءس (اشتقاق). ءو = ءس ⇐ و = س (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int$ ف ءو = ف و − $\int$ و ءف

∴ $\int$ لوس ءس = لوس × س − $\int$ $\cancel{س}$ × $\frac{1}{\cancel{س}}$ ءس = س لوس − $\int$ ١ ءس = س لوس − س + ث .

(٤) ∫ (لوس)^٢ ءس : لاحظ أن الدالة لوغاريتمية بمفردها فنجري التجزئة وبإعتبار الحدودية هي (١)

ونحتاج للتجزئة مرتين لأن درجة اللوغاريتمية (لوس)^٢ هو (٢) : $\boxed{\text{تنبيه هام: (لوس)}^٢ \neq \text{لوس}^٢}$

ف = (لوس)^٢ ⇐ ءف = ٢لوس × $\frac{١}{س}$ ءس (اشتقاق).   ءه = ءس ⇐ ه = س (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : ∫ ف ءه = ف ه − ∫ ه ءف

∴ ∫ (لوس)^٢ ءس = (لوس)^٢×س − ∫ $\cancel{\text{س}}$×٢لوس×$\frac{١}{\cancel{\text{س}}}$ ءس = س (لوس)^٢−٢ ∫ لوس ءس ....(١)

لاحظ ∫ لوس ءس يحتاج تكامل بالتجزئة وقمنا بتكامله في هذا المثال فرع (٣) حيث كان ناتج :

∫ لوس ءس = س لوس − س + ث ....(٢)

وبالتعويض بـ (٢) في (١) :

∴ ∫ (لوس)^٢ ءس = س (لوس)^٢−٢(س لوس − س)+ ث = س (لوس)^٢−٢س لوس −٢س + ث .

تدريب : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) ∫ لو(س^٢ هـ^{س^٢}) ءس .   (٢) $\int_{١}^{هـ}$ س^٢ لوس ءس. $\boxed{\frac{٢هـ^٣ - ١}{٩}}$ (٣) $\int_{هـ}^{هـ^٢}$ لوس ءس. $\boxed{\text{هـ}^٢}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

رابعاً : أسية × مثلثية :

نضع ف = الأسية ⇐ نشتق الطرفين . ونضع ءو = المثلثية ءس ⇐ نكامل الطرفين .
وهنا سيكون لدينا التكامل بالتجزئة أكثر من مرة إلى أن يظهر لدينا التكامل الأصلي المعطى في السؤال (أي أن هذا التكامل دوري) :

- **خطوات حساب تكامل دالة أسية × مثلثية :**

١- نجري التكامل بالتجزئة وكما هو معروف سابقاً .
٢- عندما يظهر تكامل بالتجزئة نكامل مرة أخرى إلى أن يظهر لدينا التكامل الأصلي .
٣- نعوض بالناتج من الخطوة (٢) في ناتج الخطوة (١) .
٤- سيكون لدينا تكاملين متشابهين نجعلهم في طرف مستقل ونجمعهم ثم نقسم على ٢ فنحصل على التكامل المطلوب .

ملاحظة: قد نحتاج لإجراء التجزئة أكثر من مرة ويحدد عدد مرات التجزئة هو درجة الحدودية .

مثال : أحسب : $\int$ هـ^س جتاس ءس .

الحل: ف = هـ^س ⇐ ءف = هـ^س ءس (اشتقاق). ءو = جتاس ءس ⇐ و = جاس (تكامل) .

وبتطبيق الصيغة : $\int$ ف ءو = ف و − $\int$ و ءف

∴ $\int$ هـ^س جتاس ءس = هـ^س جاس − $\int$ هـ^س جاس ءس ....(١) [لاحظ $\int$ هـ^س جاس ءس يحتاج تجزئة]

ف = هـ^س ⇐ ءف = هـ^س ءس (اشتقاق). ءو = جاس ءس ⇐ و = − جتاس (تكامل).

∴ $\int$ هـ^س جاس ءس = هـ^س × − جتاس − $\int$ − جتاس × هـ^س ءس = − هـ^س جتاس + $\int$ هـ^س جتاس ءس ....(٢)

لاحظ أننا عدنا إلى التكامل الأصلي للسؤال وهو $\int$ هـ^س جتاس ءس فنتوقف ونعوّض بـ (٢) في (١) :

∴ $\int$ هـ^س جتاس ءس = هـ^س جاس − [− هـ^س جتاس + $\int$ هـ^س جتاس ءس]

⇐ $\int$ هـ^س جتاس ءس = هـ^س جاس + هـ^س جتاس − $\int$ هـ^س جتاس ءس [بجمع $\int$ هـ^س جتاس ءس للطرفين]

⇐ $\int$ هـ^س جتاس ءس + $\int$ هـ^س جتاس ءس = هـ^س جاس + هـ^س جتاس

⇐ ٢ $\int$ هـ^س جتاس ءس = هـ^س جاس + هـ^س جتاس + ث [وبقسمة الطرفين على ٢]

⇐ $\int$ هـ^س جتاس ءس = $\frac{1}{2}$ (هـ^س جاس + هـ^س جتاس) + ث = $\frac{1}{2}$ هـ^س (جاس + جتاس) + ث .

تدريب : أحسب : $\int$ هـ^س جاس ءس .

تسهيل: عند حلك للتدريبات والمسائل لاتطول بالخطوات . نحن نطول ليسهل الفهم.

....

....

....

....

مخطط يوضح الطرق المتبعة عند حل المسائل بطريقتي التعويض والتجزئة:

خلاصة مسائل التعويض والتجزئة

- **حدودية × مثلثية**
  - مشتقة الزاوية
    - عدد حقيقي تكون تجزئة
    - ليست عدد حقيقي تكون تعويض ثم تجزئة عند الضرورة
- **حدودية × أسية**
  - مشتقة الأس
    - عدد حقيقي تكون تجزئة
    - ليست عدد حقيقي تكون تعويض ثم تجزئة عند الضرورة
- **حدودية × لوغارتمية**
  - مشتقة اللوغايتم
    - موجودة تكون تعويض
    - غير موجودة تكون تجزئة. التعويض اختياري حسب المسألة

مسائل أضافية في طرق التكامل

تدريبات محلولة : أحسب التكاملات الآتية :

(١) ∫ جا^{3}س ءس (بالتجزئة) .

الحل: تطرقنا لحله سابقاً بالتعويض وهنا المطلوب بالتجزئة : ∴ ∫ جا^{3}س ءس = ∫ جا^{2}س جاس ءس

ف = جا^{2}س ⇐ ءف = ٢ جاس جتاس ءس ، ءه = جاس ءس ⇐ ه = − جتاس

∴ ∫ جا^{3}س ءس = ∫ جا^{2}س جاس ءس = جا^{2}س × − جتاس − ∫ − جتاس × ٢ جاس جتاس ءس

= − جا^{2}س جتاس + ٢ ∫ جتا^{2}س جاس ءس

= − جا^{2}س جتاس − $\frac{٢}{٣}$ جتا^{3}س + ث

متطابقة : جا^{2}س = (١ − جتا^{2}س)

= −(١ − جتا^{2}س) جتاس − $\frac{٢}{٣}$ جتا^{3}س + ث

= جتا^{3}س − جتاس − $\frac{٢}{٣}$ جتا^{3}س + ث = $\frac{١}{٣}$ جتا^{3}س − جتاس + ث .

(٢) ∫ س^{٣} جا(س^{٢}−١) ءس .

الحل: نلاحظ مشتقة الزاوية للنسبة المثلثية تحوي متغير وهنا سنحتاج للتعويض أولاً:

نفرض أن : ص = س^{٢}−١ ⇐ ءص = ٢س ءس ⇐ ءس = $\frac{ءص}{٢س}$

∴ ∫ س^{٣} جا(س^{٢}−١) ءس = ∫ س$^{\cancel{٣}}$ جاص × $\frac{ءص}{\cancel{٢س}}$ = $\frac{١}{٢}$∫ س^{٢} جاص ءص

∵ في الفرض ص = س^{٢}−١ ⇐ س^{٢} = ص−١

∴ $\frac{١}{٢}$∫ س^{٢} جاص ءص = $\frac{١}{٢}$∫ (ص−١) جاص ءص = $\frac{١}{٢}$∫ (ص جاص− جاص) ءص

نستخدم التجزئة للحد الأول (ص جاص) بينما تكامل الحد الثاني (جاص) هو − جتاص

: ف = ص ⇐ ءف = ءص ، ءه = جاص ءص ⇐ ه = − جتاص

∴ ∫ ص جاص ءص = − ص جتاص − ∫ − جتاص ءص = − ص جتاص + جاص+ ث .

∴ التكامل النهائي لهذه المسألة :

∫ س^{٣} جا(س^{٢}−١) ءس = $\frac{١}{٢}$∫ (ص جاص− جاص) ءص = $\frac{١}{٢}$ (−ص جتاص + جاص + جتاص)+ث

= −$\frac{١}{٢}$ (س^{٢}−١) جتا(س^{٢}−١) + $\frac{١}{٢}$ جا(س^{٢}−١) + جتا(س^{٢}−١) + ث .

(٣) ∫ جتا^{٣}س جا^{٢}س ءس .

الحل: سنستخدم متطابقات في هذا ثم الحل بالتعويض المباشر :

∫ جتا^{٣}س جا^{٢}س ءس = ∫ جتا^{٣}س (١− جتا^{٢}س) ءس = ∫ (جتا^{٣}س − جتا^{٥}س) ءس

= ∫ [جتا^{٢}س جتاس − (جتا^{٢}س)^{٢} جتاس] ءس

= ∫ [(١− جا^{٢}س) جتاس − (١− جا^{٢}س)^{٢} جتاس] ءس

= ∫ [جتاس − جا^{٢}س جتاس − (١−٢جا^{٢}س + جا^{٤}س) جتاس] ءس

= ∫ [جتاس − جا^{٢}س جتاس − جتاس +٢ جا^{٢}س جتاس − جا^{٤}س جتاس] ءس

=~~جاس~~−$\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س− ~~جاس~~+ $\frac{٢}{٣}$ جا^{٣}س −$\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س + ث = −$\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س+ $\frac{٢}{٣}$ جا^{٣}س −$\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س+ث

(٤) ∫ قا^{٤}س ظاس ءس .

الحل: سنستخدم طريقة التعويض: نفرض أن: ص = ظاس ⇐ ءص = قا^{٢}س ءس ⇐ ءس= $\frac{ءص}{قا^{٢}س}$

∴ ∫ قا^{٤}س ظاس ءس = ∫ قا$^{\cancel{٤}}$س × ص × $\frac{ءص}{\cancel{قا^{٢}س}}$ =∫ قا^{٢}س ص ءص =∫ (١+ظا^{٢}س)ص ءص

تذكر: قا^{٢}س = ١+ظا^{٢}س وبما إن في الفرض ص = ظاس ⇐ ص^{٢} = ظا^{٢}س

$= \int (١+\text{ظا}^{٢}\text{س})\text{ص ءص} = \int (١+\text{ص}^{٢})\text{ص ءص} = \int (\text{ص}+\text{ص}^{٣})\text{ ءص} = \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} + \frac{١}{٤}\text{ص}^{٤} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{ظا}^{٢}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{ظا}^{٤}\text{س} + \text{ث}$.

(٥) $\int \text{جا٢س } \text{هـ}^{\text{جتاس}} \text{ ءس}$.

الحل: نعلم مسبقاً أن جا٢س = ٢جاس جتاس، لذلك سنستخدم التعويض لأن مشتقة الأس موجودة:

نفرض أن: ص = جتاس ⇐ ءص = − جاس ءس ⇐ ءس = $-\frac{\text{ءص}}{\text{جا س}}$

∴ $\int \text{جا٢س } \text{هـ}^{\text{جتاس}}\text{ ءس} = \int ٢\cancel{\text{جاس}}\text{ جتاس} \times \text{هـ}^{\text{ص}} \times -\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جاس}}} = -٢\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\text{ ءص}$

نستخدم التجزئة الأن : ف = ص ⇐ ءف = ءص ، ءو = $\text{هـ}^{\text{ص}}$ ءص ⇐ و = $\text{هـ}^{\text{ص}}$

∴ $\int \text{جا٢س } \text{هـ}^{\text{جتاس}}\text{ ءس} = -٢\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\text{ ءص} = -٢(\text{ص هـ}^{\text{ص}} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ ءص})$

$= -٢(\text{ص هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}}) + \text{ث} = -٢(\text{جتاس هـ}^{\text{جتاس}} - \text{هـ}^{\text{جتاس}}) + \text{ث}$.

(٦) $\int \text{س } ٥^{\text{س}}\text{ ءس}$.

الحل: نستخدم التجزئة : ف = س ⇐ ءف = ءس ، ءو = $٥^{\text{س}}$ ءس ⇐ و = $\frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}}$

∴ $\int \text{س } ٥^{\text{س}}\text{ ءس} = \text{س} \times \frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}} - \int \frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}}\text{ ءس} = \text{س} \times \frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}} - \frac{١}{\text{لو}٥}\int ٥^{\text{س}}\text{ ءس}$

$= \text{س} \times \frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}} - \frac{١}{\text{لو}٥} \times \frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}} + \text{ث} = \text{س} \times \frac{١}{\text{لو}٥}٥^{\text{س}} - \left[\frac{١}{\text{لو}٥}\right]^{٢}٥^{\text{س}} + \text{ث}$.

(٧) $\int \text{جتا(لوس) ءس}$.

الحل: نستخدم أولاً التعويض : نضع ص = لوس ⇐ ءص = $\frac{١}{\text{س}}$ ءس ⇐ س ءص = ءس

∴ $\int \text{جتا(لوس) ءس} = \int \text{س جتاص ءص}$ $\boxed{\text{ص = لوس} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{لوس}} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س (بإدخال هـ في الأساس)}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص ءص}$. نستخدم ثانياً التجزئة :

ف = جتاص ⇐ ءف = − جاص ءص ، ءو = $\text{هـ}^{\text{ص}}$ ءص ⇐ و = $\text{هـ}^{\text{ص}}$

∴ $\int \text{جتا(لوس) ءس} = \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص ءص} = \text{جتاص} \times \text{هـ}^{\text{ص}} - \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times -\text{جاص ءص}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص} + \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جاص ءص}$ ....(١)

نستخدم التجزئة مرة أخرى: ف = جاص ⇐ ءف = جتاص ءص ، ءو = $\text{هـ}^{\text{ص}}$ ءص ⇐ و = $\text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جاص ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جاص} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص ءص}$ ....(٢) وبالتعويض بـ (٢) في (١) :

∴ $\int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص} + \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جاص} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص ءص}$

$\Leftarrow ٢\int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ جتاص ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}}\text{جتاص} + \text{هـ}^{\text{ص}}\text{جاص} \Leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{جتاص ءص} = \frac{١}{٢}(\text{هـ}^{\text{ص}}\text{جتاص} + \text{هـ}^{\text{ص}}\text{جاص})$

∴ $\int \text{جتا(لوس) ءس} = \frac{١}{٢}[\text{ هـ}^{\text{لوس}}\text{ جتا(لوس)} + \text{هـ}^{\text{لوس}}\text{ جا(لوس) }] + \text{ث}$.

ثالثاً: طريقة الكسور الجزئية:

تكامل الدوال الكسرية

إن تكامل الدوال الكسرية التي كل من بسطها ومقامها كثيرة حدود قد مرّ معنا سابقاً في طريقة التعويض بالتجزئة مثل: $\int \frac{س}{س^٢-٥}$ ءس ، حيث أن البسط هو عبارة عن مشتقة المقام نفسه (أو قد يكون مضروباً في عدد حقيقي) . ولكن هنا سنتعرف على حساب تكاملات لدوال كسرية بسطها ومقامها حدوديتان ودرجة البسط أصغر من درجة المقام بشرط أن المقام قابل للتحليل إلى عوامله الأولية من الدرجة الأولى ، وفي هذه الحالة نستخدم طريقة تجزئة الدالة الكسرية إلى عدة كسور بسيطة يسهل حلها بالقوانين الشهيرة وتسمى بطريقة الكسور الجزئية .

- خطوات طريقة الكسور الجزئية :

١- نحلل المقام إلى عوامله الأولية من الدرجة الأولى .

٢- نقسم الكسر إلى عدة كسور وفي كل كسر نضع أحد العوامل في المقام كمقام له وفي البسط نضع أحد الرموز ٩ ، ب ، ج ، ... .

٣- نجري توحيد مقامات الكسور الجزئية .

٤- نستخدم خواص النسب والتناسب:

∵ المقام الأصلي = المقام بعد التوحيد ⇐ البسط الأصلي = البسط بعد التوحيد .

٥- نحصل على قيم الثوابت ٩ ، ب ، ج ، ... بوضع س = أصفار المقامات الجزئية على الترتيب ونعوض بها في خطوة البسط = البسط .

٦- نحسب التكامل للكسور الجزئية وتذكر أن :

أ) $\int \frac{٩}{س+ج}$ ءس = ٩ لو|س + ج| + ث .

ب) $\int \frac{٩}{ب س+ج}$ ءس = $\frac{٩}{ب}$ لو|ب س + ج| + ث .

- ملاحظات هامة:

١) إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نجري أولاً قسمة البسط على المقام ثم التكامل مع الكسر المتبقي بالتكامل بالتعويض أو بالكسور الجزئية .

٢) لاتستخدم هذه الطريقة إلاّ عندما يكون البسط والمقام حدوديتان فقط .

٣) بعض التكاملات قد تحتاج أولاً لطريقة التعويض ثم إكمالها بطريقة الكسور الجزئية .

مثال : أحسب التكاملات فيما يلي : (١) $\int \frac{٥س-١}{س^٢-١}\,ءس$. (٢) $\int \frac{س^٣}{س^٢-٤}\,ءس$.

(٣) $\int \frac{س^٢+١}{س^٢-١}\,ءس$. (٤) $\int \frac{س}{(س^٢-١)\,(س-٢)}\,ءس$.

الحل: (١) $\int \frac{٥س-١}{س^٢-١}\,ءس$: لاحظ أنه تكامل دالة كسرية كل من البسط والمقام كثيرة حدود والمقام قابل للتحليل ولا نحتاج للقسمة لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام فنستخدم طريقة الكسور الجزئية وكما يلي: $\frac{٥س-١}{س^٢-١} = \frac{أ}{(س-١)} + \frac{ب}{(س+١)}$ ... (*) (نوحد المقامات للطرف الأيسر)

$$\frac{٥س-١}{س^٢-١} = \frac{أ(س+١)+ب(س-١)}{(س-١)\,(س+١)}$$

∵ المقام = المقام ⇐ البسط = البسط ، ∴ $٥س-١ = أ(س+١)+ب(س-١)$

[نعوض عن س بأصفار المقام فنحصل على قيم الثوابت ، والأصفار للمقام = {١ ، −١}]

* عندما س = ١ :

∴ $٥س-١ = أ(س+١)+ب(س-١) \Leftarrow ٥\times١-١ = أ(١+١)+ب(١-١) \Leftarrow ٤=٢أ \Leftarrow \boxed{أ=٢}$

* عندما س = −١ :

∴ $٥س-١ = أ(س+١)+ب(س-١) \Leftarrow (٥\times-١)-١ = أ(-١+١)+ب(-١-١)$

$\Leftarrow -٦ = -٢ب \Leftarrow \boxed{ب=٣}$ ، وبالعودة إلى (*) والتعويض بالقيم مع ادخال التكامل :

$$\therefore \int \frac{٥س-١}{س^٢-١}\,ءس = \int \frac{٢}{(س-١)}\,ءس + \int \frac{٣}{(س+١)}\,ءس$$

$$= ٢لو|س-١| + ٣لو|س+١| + ث \,.$$

(٢) $\int \frac{س^٣}{س^٢-٤}\,ءس$: لاحظ أنه تكامل دالة كسرية كل من البسط والمقام كثيرة حدود والمقام قابل للتحليل ولكن درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك سنقوم بالقسمة أولاً وملاحظة ماينتج :

$$\therefore \int \frac{س^٣}{س^٢-٤}\,ءس = \int \left(س + \frac{٤س}{س^٢-٤}\right)ءس$$

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline س^٣ & س^٢-٤ \\ -(س^٣-٤س) & \\ \hline ٤س & \end{array}$$

لاحظ أن التكامل للحد الأول تكامل شهير والتكامل للحد الثاني لايحتاج لاستخدام طريقة الكسور الجزئية وإنما سنستخدم فيه طريقة التعويض وكل ما نحتاجه هو العدد (٢) في البسط لكي تكون مشتقة المقام موجودة بالبسط فنجعل ٤ = ٢×٢

$$\therefore \int \frac{س^٣}{س^٢-٤}\,ءس = \int س\,ءس + \int \frac{٤س}{س^٢-٤}\,ءس$$

$$= \frac{س^٢}{٢} + ٢\int \frac{٢س}{س^٢-٤}\,ءس$$

$$= \frac{س^٢}{٢} + ٢لو|س^٢-٤| + ث \,.$$

(٣) ∫ $\frac{س^٢+١}{س^٢-١}$ ءس : لاحظ أنه تكامل دالة كسرية كل من البسط والمقام كثيرة حدود والمقام قابل للتحليل ولكن درجة البسط تساوي درجة المقام لذلك سنجري القسمة أولاً وملاحظة ماينتج :

$$\frac{س^٢+١}{س^٢-١} \quad \text{القسمة: } (س^٢+١) \div (س^٢-١) = ١ ، \quad -(س^٢-١) ، \quad \text{الباقي } ٢$$

∴ ∫ $\frac{س^٢+١}{س^٢-١}$ ءس = ∫ (١ + $\frac{٢}{س^٢-١}$) ءس

لاحظ أن التكامل للحد الأول تكامل شهير والتكامل للحد الثاني لايمكن استخدام طريقة التعويض لأن مشتقة المقام س^٢ هي ٢س وهي لاتوجد في البسط (الأهم المتغيّر س لايوجد) لذلك سنستخدم طريقة الكسور الجزئية للحد الثاني بمثل ماسبق في المثال (١) :

$\frac{٢}{س^٢-١} = \frac{أ}{(س-١)} + \frac{ب}{(س+١)}$ (نوحد المقامات للطرف الأيسر)

$\frac{٢}{س^٢-١} = \frac{أ(س+١) + ب(س-١)}{(س-١)(س+١)}$

∵ المقام = المقام ⇐ البسط = البسط ، ∴ ٢ = أ(س+١) + ب(س-١)

[نعوض عن س بأصفار المقام فنحصل على قيم الثوابت ، والأصفار للمقام = {١ ، -١}]

* عندما س = ١ :

٢ = أ(س+١) + ب(س-١) ⇐ ٢ = أ(١+١) + ب(١-١) ⇐ ٢ =٢أ ⇐ $\boxed{أ = ١}$

* عندما س = -١ :

∴ ٢ = أ(س+١) + ب(س-١) ⇐ ٢ = أ(-١+١) + ب(-١-١) ⇐ ٢=-٢ب⇐ $\boxed{ب=-١}$

وبالعودة للتكامل :

∴ ∫ $\frac{س^٢+١}{س^٢-١}$ ءس = ∫ (١ + $\frac{٢}{س^٢-١}$) ءس = ∫ ١ ءس + ∫ $\frac{١}{(س-١)}$ ءس + ∫ $\frac{-١}{(س+١)}$ ءس

= س + لو|س-١| - لو|س+١| + ث .

(٤) ∫ $\frac{س}{(س^٢-١)(س-٢)}$ ءس : لاحظ أن المقام سيتحلل إلى ثلاثة عوامل وكما يلي :

$\frac{س}{(س^٢-١)(س-٢)} = \frac{أ}{(س-١)} + \frac{ب}{(س+١)} + \frac{جـ}{(س-٢)}$ ...(*) (نوحد المقامات للطرف الأيسر)

$\frac{س}{(س^٢-١)(س-٢)} = \frac{أ(س+١)(س-٢) + ب(س-١)(س-٢) + جـ(س-١)(س+١)}{(س-١)(س+١)(س-٢)}$

∵ المقام = المقام ⇐ البسط = البسط

∴ س = أ(س+١)(س-٢) + ب(س-١)(س-٢) + جـ(س-١)(س+١)

[نعوض عن س بأصفار المقام فنحصل على قيم الثوابت ، والأصفار للمقام = {١ ، -١ ، ٢}]

* **عندما س = ١ :**

$$\text{س} = \text{أ}(\text{س}+١)(\text{س}-٢) + \text{ب}(\text{س}-١)(\text{س}-٢) + \text{جـ}(\text{س}-١)(\text{س}+١)$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أ}(١+١)(١-٢) + \text{ب}(١-١)(١-٢) + \text{جـ}(١-١)(١+١) \Leftarrow ١ = -٢\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -\frac{١}{٢}}$$

* **عندما س = −١ :**

$$\Leftarrow -١ = \text{أ}(-١+١)(-١-٢) + \text{ب}(-١-١)(-١-٢) + \text{جـ}(-١-١)(-١+١)$$

$$\Leftarrow -١ = ٦\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = -\frac{١}{٦}}$$

* **عندما س = ٢ :**

$$\Leftarrow ٢ = \text{أ}(٢+١)(٢-٢) + \text{ب}(٢-١)(٢-٢) + \text{جـ}(٢-١)(٢+١) \Leftarrow ٢ = ٣\text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \frac{٢}{٣}}$$

وبالعودة إلى (*) والتعويض بالقيم مع ادخال التكامل :

$$\therefore \int \frac{\text{س}}{(\text{س}^٢-١)(\text{س}-٢)}\,\text{ءس} = \int \frac{-\frac{١}{٢}}{(\text{س}-١)}\,\text{ءس} + \int \frac{-\frac{١}{٦}}{(\text{س}+١)}\,\text{ءس} + \int \frac{\frac{٢}{٣}}{(\text{س}-٢)}\,\text{ءس}$$

$$= -\frac{١}{٢}\int \frac{١}{(\text{س}-١)}\,\text{ءس} - \frac{١}{٦}\int \frac{١}{(\text{س}+١)}\,\text{ءس} + \frac{٢}{٣}\int \frac{١}{(\text{س}-٢)}\,\text{ءس}$$

$$= -\frac{١}{٢}\,\text{لو}|\text{س}-١| - \frac{١}{٦}\,\text{لو}|\text{س}+١| + \frac{٢}{٣}\,\text{لو}|\text{س}-٢| + \text{ث} .$$

مخطط يوضح الطرق المتبعة عند تكامل دالة كسرية من الشكل : $\int \frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}\,\text{ءس}$

$\int \frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}\,\text{ءس}$

- درجة البسط < درجة المقام
  - تحليل + اختصارات
  - مشتقة المقام
    - غير موجودة كسور جزئية
    - موجودة تكون تعويض
- درجة البسط ≥ درجة المقام
  - يقسم البسط على المقام
  - الكسر = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$
  - نطبق الحالة الأولى على الكسر

تدريب : أحسب كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{س + ٣}{س + ١}$ ءس . (٢) $\int \frac{ءس}{س^٢ + ٤س - ٥}$. (٣) $\int \frac{س^٣ + س}{س - ١}$ ءس .

(٤) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - هـ^{س} - ١٢}$ ءس . (٥) $\int \frac{قتا^٢س}{١ + ظتا^٢س}$ ءس . (٦) $\int \frac{هـ^{س}}{١ - هـ^{٢س}}$ ءس .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في طرق التكامل (التعويض، التجزئة، الدوال الكسرية)

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١ – $\int$ جتاس هـ$^{\text{جاس}}$ ءس ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١ – $\int$ جتا^{٥}س جاس ءس = ...

٢ – $\int$ جتا^{٢}س جاس ءس = ...

س٣: أحسب : $\int \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$ ءس .

س٤: أوجد : $\int$ هـ$^{٢\text{س}}$ جتا(هـ$^{\text{س}}$) ءس .

س٥: أحسب : $\int$ س $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ ءس .

س٦: أحسب : $\int \frac{\text{جتا(لوس)}}{\text{س}}$ ءس

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٧: عين التكامل : $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\text{ءس}}{\text{جتا}^{2}\,\text{س}}$ ءس .

س٨: أحسب : (أ) $\int (٥ - \text{س})^{٣}$ ءس .   (ب) $\int_{٠}^{\pi} \text{س جاس}$ ءس .

س٩: أحسب : (أ) $\int \frac{\text{جا٥س}}{٢ + \text{جتا ٥س}}$ ءس .   (ب) $\int \frac{\text{ءس}}{١ - \text{س}^{٢}}$.

س١٠: أحسب : (أ) $\int \text{س هـ}^{\text{س}}$ ءس .   (ب) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ءس .

س١١: أحسب : (أ) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$. (ب) $\int \text{س} \sqrt{٢\text{س}^{٢} + ١} \; \text{ءس}$.

....

....

....

....

....

....

....

س١٢: أحسب : (أ) $\int \frac{٣\text{س}}{١ - \text{جا}^{٢}\,\text{س}} \; \text{ءس}$. (ب) $\int \text{جتا}٢\text{س} \sqrt{١ - \text{جا}٢\text{س}} \; \text{ءس}$.

....

....

....

....

....

....

....

اللهم لك الحمد أولاً وآخراً وظاهراً وباطناً

كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

****

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي
شبام – حضرموت – ٢٠٢٠م
soramnet@gmail.com - +٩٦٧-٧٧٠٠٦٠٧٦٦

ورقة عمل ١٠٠ سؤال اختيار من متعدد في التفاضل والتكامل

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) إذا كانت ص = $هـ^{٤لوس}$ فإن ص َ = ... [٤س ، $\frac{٤}{س}$ ، $٤س^{٣}$]

٢) إذا كان $\int_{أ}^{٢أ} ٢س \, ءس = ١٢$ فإن أ = ... [٢ ، ٣ ، ٤]

٣) إذا كانت د(س) = $هـ^{جاس}$ ، فإن د َ(π) = ... [١ ، ٠ ، −١]

٤) $\int جا^{٥}س \; جتا س \; ءس$ = ... [$\frac{جا^{٦}س}{٦}$ + ث ، $\frac{جتا^{٦}س}{٦}$ + ث ، ظاس + ث]

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢}-١}{جا \pi س}$ = ... [$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-٢}{\pi}$ ، $\frac{٢}{\pi}$]

٦) إذا كانت $ص^{٤} + س^{٤} = ٥$ ، فإن ص َ = ... [$\frac{ص^{٣}}{س^{٣}}$ ، $\frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$ ، $-\frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$ ، $-\frac{ص^{٣}}{س^{٣}}$]

٧) $\int_{٣أ}^{٦أ} \frac{ءس}{س}$ = ... [لو٦أ ، لو٣أ ، لو٢ ، لو٣]

٨) $\int س^{ن} \, ءس$ = ... عندما ن = −١ [$\frac{س^{-١+١}}{-١+١}$ ، لوس ، $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$]

٩) إذا كانت ص = لو جتاس ، فإن ص َ = ... [ظتاس ، ظاس ، − ظاس]

١٠) $\int ظا^{٥}س \; قا^{٢}س \; ءس$ = ... [$\frac{ظا^{٦}س}{٦}$ + ث ، $\frac{قا^{٣}س}{٣}$ + ث ، $\frac{ظتا^{٦}س}{٦}$ + ث]

١١) $\lim_{س \to ٠}$ س ظتا٥س = ... [٥ ، $\frac{١}{٥}$ ، صفر]

١٢) إذا كانت د(س) = جاس + جتاس ، فإن د َ$(\frac{\pi}{٤})$ = ... [٢ ، صفر ، $٢\sqrt{٢}$ ، −١]

١٣) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}}$ = ... [$\sqrt{س}$ + ث ، لو$\sqrt{س}$ + ث ، $٢\sqrt{س}$ + ث]

١٤) إذا كانت د(س) = ٢$جا^{٢}$س ، فإن د َ$(\frac{\pi}{٤})$ = ... [٣ ، ٢ ، ١ ، ٠]

١٥) $\int_{-٣}^{٣} ٤لو هـ^{س} \, ءس$ = ... [٩ ، صفر ، ١]

١٦) إذا كانت ص = لو $(س^{٤}+١)$ ، فإن ص َ = ... [$\frac{٤س^{٣}}{س^{٤}+١}$ ، $\frac{٤س^{٣}}{س^{٣}-١}$ ، $\frac{٤س^{٣}}{س^{٤}-١}$]

١٧) $\int_{٠}^{٦} جا \frac{\pi}{٦} \, ءس$ = ... [٣ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$]

١٨) إذا كانت د َ(س) = $٣س^{٢} - \frac{٢}{س}$ ، فإن د(س) = ... [$٣س^{٤}$ − ٢لوس ، $س^{٣}$ − ٢لوس ، $س^{٣} - ٢س$]

١٩) $\int قا^{٢}س \; ظا س \; ءس$ = ... [$\frac{قا^{٣}س}{٣}$ + ث ، $\frac{ظا^{٢}س}{٢}$ + ث ، $\frac{ظتا^{٢}س}{٢}$ + ث]

٢٠) إذا كانت ص = $٢^{ظاس}$ فإن ص َ = ..[لوجتاس × $٢^{ظاس}$ ×لو٢ ، $قا^{٢}$س × $٢^{ظاس}$ ×لو٢ ، $قتا^{٢}$س × $٢^{ظاس}$ ×لو٢]

٢١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - \pi)$ قاس = ... [٢ ، −١ ، صفر ، −٢]

٢٢) $\int_{-٢}^{٣} جـ \, ءس$ = ... [− جـ ، ٥جـ ، جـ]

٢٣) إذا كانت ص = $هـ^{٢س}$ ، فإن ص َ − ٢ص = ... [−١ ، ١ ، صفر ، −٢]

٢٤) $\int_{٠}^{\pi} جاس \, ءس$ = ... [١ ، −٢ ، ٢ ، صفر]

٢٥) الحدين الأدنى والأعلى للتكامل $\int_{١}^{٣} \sqrt{٥س^{٢} + ٤} \, ءس$ هما .... [(٤ ، ٢٠) ، (٦ ، ٢١) ، (٥ ، ٢٥)]

٢٦) إذا كانت د(س) = $جتا^{٢}$س ، فإن د َ$(\frac{\pi}{٤})$ = ... [٢ ، −١ ، صفر ، −٢]

٢٧) $\int_{ل}^{٠}$ ٣س^{٢} ءس = ٢٧ ، فإن ل = ... [٣ ، ‎−٣ ، ‎−$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$]

٢٨) $\lim\limits_{س \to ١}$ $\frac{جا \pi س}{س - ١}$ = ... [‎−π ، π ، ١ ، ‎−١]

٢٩) $\int_{٠}^{\pi}$ جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ... [٤ ، ٦ ، ٢ ، ١]

٣٠) إذا كانت دَ(س) = $\frac{١}{س}$ + ٣س^{٢} فإن د(س) = ... [لوس + ٢س^{٣} ، لوس + س^{٣} ، لوس − س^{٣}]

٣١) $\int_{٠}^{لو٦}$ هـ^{س} ءس = ... [٦ ، ‎−٦ ، ٥ ، صفر]

٣٢) إذا كانت ص = ٣هـ^{س} − ٣س^{٢} فإن قيمة س التي تجعل صً = صفر هي ...... [٢ ، ٢لو٢ ، لو٢]

٣٣) $\int_{٣}^{٤}$ $\frac{٥ ءس}{س}$ = ... [٥لو١٢ ، ٥لو$\frac{٤}{٣}$ ، ٥لو$\frac{٣}{٤}$]

٣٤) للدالة د(س) = $\frac{٣س - ٢}{س + ١}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [‎−١ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$]

٣٥) $\int$ ظا^{٢}س ءس = ... [ظاس − س + ث ، ظتاس − س + ث ، ظتاس + ث]

٣٦) لتكن الدالة د(س) = س^{٢} − لس + ٩ تحقق رول على [٠ ، ٤] فإن ل = ... [٤ ، ‎−٤ ، ٢ ، ‎−٢]

٣٧) للدالة د(س) = س^{٢} − ٦س − ٥ نقطة حرجة عند س = ... [٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣]

٣٨) $\int$ هـ$^{لو\sqrt{س}}$ ءس = ... [$\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث ، $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ث ، $\frac{٢}{٣}$ لوس + ث]

٣٩) $\int_{٢}^{٢}$ د(س) ءس = ... [صفر ، ٤ ، ١ ، ‎−١]

٤٠) إذا كانت ص = ع^{٣} ، ع = هـ^{٣لوس} فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ... [٨س^{٩} ، ٩س^{١٢} ، ٩س^{٨}]

٤١) $\int$ $\frac{٩س}{س^{٢} - ٩}$ ءس = ... [$\frac{١}{٢}$ لو|س^{٢}−٩| + ث ، $\frac{٩}{٢}$ لو|س^{٢}−٩| + ث ، ١٨لو|س^{٢}−٩| + ث]

٤٢) إذا كانت الدالة د(س) = $\frac{أ س - ٢}{س - ٢}$ مقارب أفقي عند ص = ٢ ، فإن أ = ... [٤ ، ١ ، ٢ ، ‎−٢]

٤٣) للدالة د(س) = هـ^{٢لوس} − ٨س نقطة حرجة عند س = ... [٣ ، ٤ ، ٢ ، ٦]

٤٤) $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ءس = ... [٢٦ ، ٨ ، ٤ ، صفر]

٤٥) $\int$ ظاس ءس = ... [لو|جاس| + ث ، − لو|جتاس| + ث ، لو|جتاس| + ث]

٤٦) $\lim\limits_{س \to ٠}$ ٢س قتا٤س = ... [٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، ‎−٢ ، ١]

٤٧) إذا كانت د(س) = س^{٢} − س^{٣} تحقق القيمة المتوسطة على [‎−٣ ، ٢] فإن جـ = ...[‎−٢ ، ٤ ، ٢ ، ١]

٤٨) إذا كانت ص = لوع ، ع = هـ^{جاس} ، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ...[ظاس ، جتاس ، − جتاس ، − ظاس]

٤٩) $\int_{٠}^{\pi}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$ ءس = ... [‎−π ، صفر ، π ، ١]

٥٠) $\int$ هـ$^{٢لو\sqrt{س}}$ ءس = ... [$\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث ، س^{٢} + ث ، $\frac{٦}{٢}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ث]

٥١) إذا كانت ص = هـ$^{لوس^{٣}}$ فإن صَ = ... [س^{٣} ، ٣س^{٢} ، ٣س ، س^{٤}]

٥٢) $\int$ هـ$^{٢س + ١}$ ءس = ... [هـ$^{٢س + ١}$ + ث ، $\frac{هـ^{٢س + ١}}{لو٢}$ + ث ، $\frac{هـ^{٢س + ١}}{٢}$ + ث]

٥٣) $\lim\limits_{س \to ١}$ (س−١) ظتاπ س = ... [‎−π ، $\frac{١}{\pi}$ ، $\frac{١}{-\pi}$ ، π]

٥٤) إذا كانت ص = $\text{ه}^{\text{ظاس}}$ فإن صَ = ... [$\text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{ه}^{\text{ظاس}}$لوه ، لوظتاس ، $\text{قتا}^{٢}\text{س} \times \text{ه}^{\text{ظاس}}$لوه]

٥٥) $\int$ $\text{جتا}^{٣}$س جاس ءس = ... [$\frac{\text{جتا}^{٤}\text{س}}{٤}$ + ث ، $\frac{-\text{جتا}^{٤}\text{س}}{٤}$ + ث ، $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + ث]

٥٦) إذا كانت $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$ = ٥ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... [$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$ ، $-\frac{\text{ص}}{\text{س}}$]

٥٧) $\int_{-١}^{٢}$ ٢ه ءس = ... [٣ه ، ٤ه ، ٥ه ، ٦ه]

٥٨) إذا كانت ص = لوجتاس ، فإن صَ = ... [ظتاس ، – ظتاس ، ظاس ، – ظاس]

٥٩) $\int$ $\text{قا}^{٢}$أس ءس = ... [$\frac{\text{ظاأس}}{\text{أ}}$ + ث ، $\frac{-\text{ظتاأس}}{\text{أ}}$ + ث ، $\frac{-\text{ظاأس}}{\text{أ}}$ + ث]

٦٠) للدالة د(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٤}$ مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ... [١ ، ٤ ، ٣ ، –٤]

٦١) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$ = ... [$\frac{\pi}{٢}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$ ، π ، ٢π]

٦٢) إذا كانت ص = لو($\text{س}^{٢}$+١) ، فإن صَ = ... [$\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ ، $\frac{٢}{\text{س}^{٢}+١}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$]

٦٣) $\int_{٠}^{٣}$ ٢جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ... [٦ ، ٣ ، ١ ، –٣]

٦٤) $\int$ ظتاس ءس = ... [لو|جاس| + ث ، – لو|جاس| + ث ، لو|جتاس| + ث]

٦٥) إذا كانت د(س) = $\text{ه}^{\text{جتاس}}$ ، فإن دَ($\frac{\pi}{٢}$) = ... [–١ ، صفر ، ١ ، $\frac{١}{٢}$]

٦٦) $\int_{٠}^{\text{ك}}$ ٣$\text{س}^{٢}$ ءس = ٨ ، فإن قيمة ك = ... [٢ ، –٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$]

٦٧) إذا كانت ص = لوجاس ، فإن صَ = ... [ظاس ، – ظتاس ، ظتاس ، – ظاس]

٦٨) $\int_{\text{أ}}^{٣\text{أ}} \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ = ... [لوأ ، لو٢أ ، لو٢ ، لو٣]

٦٩) $\int_{٠}^{\text{لو}٣}$ $\text{ه}^{٢\text{س}}$ ءس = ... [$\frac{٥}{٢}$ ، ٤ ، ٢ ، –٢]

٧٠) إذا كانت الدالة د(س) = $\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}$ تحقق رول على [–٢ ، ٢] فإن ج = ... [١ ، ٢ ، –٢ ، ٣]

٧١) للدالة د(س) = $\frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [–٢ ، ٢ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$]

٧٢) إذا كانت ص = لو$\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$ فإن صَ = ... [$\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$ ، $\frac{٢}{\text{س}^{٢}+٣}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$]

٧٣) $\int$ ٢ظاس ءس = ... [٢لو|جتاس| + ث ، –٢لو|جتاس| + ث ، ٢لو|جاس| + ث]

٧٤) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$ = ... [$\frac{\pi}{٢}$ ، $-\pi$ ، $-\frac{\pi}{٢}$ ، π]

٧٥) إذا كانت دَ(س) = ٢س – ٦ فإن دَ(٣) قيمة ..... [صغرى ، عظمى ، نقطة انعطاف ، نقطة حرجة]

٧٦) $\int$ $\text{جا}^{٣}$س جتاس ءس = ... [$\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + ث ، $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + ث ، $\frac{\text{جا}^{٤}\text{س}}{٤}$ + ث]

٧٧) إذا كانت د(س) = ٣$\text{جا}^{٢}$س فإن دَ($\frac{\pi}{٤}$) = ... [٣ ، ٦ ، –٣ ، ٢]

٧٨) إذا كانت دَ(س) = $\frac{\text{س} - ٤}{\text{س} + ١}$ فإن للدالة قيمة حرجة عند س = ... [–٤ ، ٤ ، ١ ، –١]

٧٩) $\int_{٠}^{\text{لو}٤}$ $\text{ه}^{\text{س}}$ ءس = ... [٤ ، ٢ ، ٣ ، –٣]

٨٠) إذا كانت دً(س) = ٣س – ٩ فإن للدالة نقطة انعطاف عند س = ... [٤ ، ٢ ، ٣ ، –٣]

٨١) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ (س−٢) جتا $\frac{١}{\text{س}-٢}$ = ... [صفر ، ١ ، −١ ، ٢]

٨٢) للدالة د(س) = $\frac{٢\text{س}-٣}{٣\text{س}-٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٢}$]

٨٣) $\int_{-٣}^{٢}$ ظا($\frac{\pi}{٤}$) ءس = ... [−١ ، ٥ ، −٥ ، ١]

٨٤) $\int$ ص ءس = س^{٤} + ث ، فإن ص = ... [٤س^{٢} ، ٣س^{٣} ، ٤س^{٣} ، ٣س^{٤}]

٨٥) إذا كانت دَ(س) = ٤س + ٨ فإن د(−٢) = ... [٨ ، صفر ، −٨ ، ١٠]

٨٦) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٢ ظاس قا^{٢}س ءس = ... [٢ ، ٣ ، −٣ ، ٤]

٨٧) للدالة د(س) = $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [−٢ ، ١ ، ٢ ، −١]

٨٨) قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{١}^{٥}$ (س−١) ءس = ... [٣ ، ٢ ، −٣ ، −٢]

٨٩) إذا كانت د(س) = هـ$^{\text{قاس}}$ ،فإن دَ(س) = ...[قاس ظاس هـ$^{\text{قاس}}$ ، قتاس ظاس هـ$^{\text{قاس}}$ ، قاس ظتاس هـ$^{\text{قاس}}$]

٩٠) $\int$ قا^{٢}٣س ءس = ... [$\frac{١}{٣}$ ظتا٣س + ث ، $\frac{١}{٣}$ ظا٣س + ث ، ظا٣س + ث]

٩١) $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جتاس}}{٢\text{س}-\pi}$ = ... [$\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$]

٩٢) للدالة د(س) = $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٢}$ مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ... [٢ ، ١ ، −٢ ، −١]

٩٣) $\int_{\text{أ}}^{٥\text{أ}}$ $\frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ = ... [لو٤ ، لو٥ ، لو٦ ، لو٤أ]

٩٤) للدالة د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ نقطة انعطاف عند س = ... [−١ ، ٢ ، ١ ، −٢]

٩٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٢}س ءس = ... [$\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، ٣ ، −٣]

٩٦) $\int_{٠}^{\text{لو}٣}$ ٣هـ$^{\text{س}}$ ءس = ... [٩ ، ٦ ، ٣ ، ٢]

٩٧) للدالة د(س) = $\frac{\text{س}-٣}{٢\text{س}-٤}$ مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ... [٢ ، ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ، −٢]

٩٨) $\int_{١}^{٣}$ (٣ف^{٢} − ٤ف) ءف = ... [٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢]

٩٩) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جتا}\,٢\text{س}}$ = ...[$\frac{١}{٢}$ لو|قا٢س+ظا٢س| + ث ، ٢لو|قا٢س+ظا٢س| + ث ، لو|قا٢س+ظا٢س| + ث]

١٠٠) إذا كان للدالة د(س) = ٦س^{٢} − ٢أس نقطة حرجة عند س = ١ فإن أ = ...[٤ ، ٦ ، −٦ ، ٢]

من الجماليات في مادة الرياضيات

... الشعور بالسعادة عقب حل المسائل الرياضياتية ... لأنه شعور بالنصر والنجاح ...

فكن من ... أهل السعادة الرياضياتية

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي: ٣

(١) إذا كانت $دَ(س) = هـ^{-٣س}$ ، فإن $دَ(٠) = -٣$ (✗)

(٢) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{ظا ٣س}{٢س} = \frac{١}{٢}$ (✗)

(٣) الدالة $د(س) = س^٣ - ٣س^٢$ ، تناقصية ، $\forall$ س $\in$ [٠، ٢] (✓)

ب) أحسب التكاملات الآتية : ٢

(١) $\int (٥ - س)^٣ ءس$ (٢) $\int_{٠}^{\pi} س جاس ءس$

① $\int (٥ - س)^٣ ءس$ ، $ع = ٥ - س \Rightarrow ءع = -ءس$

$-\int ع^٣ ءع = -\frac{ع^٤}{٤} + ث = -\frac{(٥ - س)^٤}{٤} + ث$

② $\int_{٠}^{\pi} س جاس ءس$ ، $ق = س \Rightarrow ءق = ءس$

$ءهـ = جاس ءس \Rightarrow هـ = -جتاس$

$\therefore \int س جاس ءس = -س جتاس + \int جتاس ءس = -س جتاس + جاس + ث$

$\int_{٠}^{\pi} س جاس ءس = (-س جتاس + جاس) \Big|_{٠}^{\pi}$

$= (-\pi جتا\pi + جا\pi) - (-(٠) جتا ٠ + جا ٠)$

$= -\pi \times -١ + ٠ - (٠) = \pi$

٥

٢

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها :

(١) $\int$ دَ(س) ءس = د(س) + ث

(٢) للدالة د(س) = س^٣ ــ ٣س^٢+ ٥ ، نقطة انعطاف عند س = ١

(٣) الحد الأدنى للتكامل $\int_{-٢} \frac{ءس}{٢س - ١}$ = ــ٢

٢

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{إذا كانت د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{٢س ــ جاس}}{\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \\ \text{أ}^٢ - ٣ & \text{س} = ٠ \end{cases}$$

د(٠) = أ^٢ ــ ٣ ...... ①

نهـا$_{\text{س}\to٠}$ $\frac{\text{٢س ــ جاس}}{\text{س}}$ = نهـا$_{\text{س}\to٠}$ $\frac{\text{٢}\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}}$ ــ نهـا$_{\text{س}\to٠}$ $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

= ٢ ــ ١ = ١ ...... ②

من ① ، ②

∴ أ^٢ ــ ٣ = ١

أ^٢ = ٤

أ = ±٢

٣

أ) إذا كانت د(س) = س + $\frac{١}{س}$ ، فأوجد الآتي :

(١) م.ت للدالة .... ح / {٠}

(٢) معادلة المستقيم المقارب المائل .... ص = س

(٣) للدالة نهاية عظمى عند النقطة .... (−١ ، −٢)

(٤) للدالة نهاية صغرى عند النقطة .... (١ ، ٢)

السؤال الثالث

٢

ب) إذا علمت أن الدالة : د(س) = ٢س^{٢} − س^{٤} ، تحقق مبرهنة رول على الفترة [−١، ١] ،

أوجد قيمة جـ التي تعيّنها المبرهنة.

∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول في الفترة [−١، ١]

∴ نوجد د'(س) = ٤س − ٤س^{٣}

∴ د'(جـ) = ٤جـ − ٤جـ^{٣}

∵ د'(جـ) = ٠

∴ ٤جـ − ٤جـ^{٣} = ٠ ⟸ ٤جـ(١ − جـ^{٢}) = ٠

إما ٤جـ = ٠ ⟸ $\boxed{جـ = ٠}$ ∈]−١، ١[

أو ١ − جـ^{٢} = ٠ ⟸ جـ^{٢} = ١ ⟸ جـ = ±١ ∉]−١، ١[

∴ قيمة جـ التي تحقق المبرهنة {٠}

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين فيما يأتي :

(١) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس ءس ..≤.. [≤ ٠ ، ≥ ٠ ، صفر].

(٢) $\int$ قاس ظاس ءس = قاس+ث....... [قاس+ث ، ظاس+ث ، ظتاس+ث].

(٣) إذا كانت ص = ع^{٢} ، ع = س + ١ ، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ..٢(س+١)..

[س+١ ، ٢(س+١) ، ٢س+١].

ب) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة س^{٢} + ٣ص^{٢} = ٤ عند النقطة (١ ، ١).

س^{٢} + ٣ص^{٢} = ٤ ⟸ ٢س + ٦ص ص' = ٠ ⟸ ص' = $\frac{-٢س}{٦ص}$

= $\frac{-س}{٣ص}$

∴ ص' $|_{(١،١)}$ = $\frac{-١}{٣}$ = م

∴ معادلة المماس هي : ص − د(أ) = دَ(أ) (س − أ)

ص − ١ = $\frac{-١}{٣}$ (س − ١)

٣ص − ٣ = −س + ١

س + ٣ص − ٤ = ٠

السؤال الخامس

٣

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب):

(أ)	(ب)
(١) للدالة د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ١	$-\frac{١}{٢}$
(٢) قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل: $\int_{١}^{٥} (\text{س} - ١)\, ء\text{س}$ = ٣	$\frac{١}{٢}$
(٣) $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا س}}{٢\text{س} - \pi} = \frac{-١}{٢}$	-١
	١
	٣

٢

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{-٢}^{٣} \text{س}\, ء\text{س}$

نقسم الفترة [−٢ ، ٣] إلى ن فترات جزئية طول كل منها $\Delta \text{س}_\text{ر} = \frac{٥}{\text{ن}}$

نختار $\text{س}^*_\text{ر} = \text{أ} + \text{ر}\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = -٢ + \frac{٥}{\text{ن}}\text{ر}$

نوجد $\text{د}(\text{س}^*_\text{ر}) = -٢ + \frac{٥}{\text{ن}}\text{ر}$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, ء\text{س} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \sum \text{د}(\text{س}^*_\text{ر}) \times \Delta \text{س}_\text{ر}$

$\therefore \int_{-٢}^{٣} \text{س}\, ء\text{س} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{٥}{\text{ن}} \sum (-٢ + \frac{٥}{\text{ن}}\text{ر})$

$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{٥}{\text{ن}} \left(-٢\text{ن} + \frac{٥}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}\right)$

$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(-١٠ + \frac{٢٥\text{ن} + ٢٥}{٢\text{ن}}\right) = -١٠ + \frac{٢٥}{٢} = \frac{-٢٠ + ٢٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$

٣ أ) أوجد الدالة الأصلية للدالة د(س) = جا ٣س + س ، إذا علمت أن منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، $\frac{١}{٣}$)

∵ ل(س) = ∫ د(س) دس

∴ ل(س) = ∫ (جا ٣س + س) دس = $\frac{-١}{٣}$ جتا ٣س + $\frac{س^٢}{٢}$ + ث

∴ ل(س) = $-\frac{١}{٣}$ جتا ٣س + $\frac{س^٢}{٢}$ + ث

نعوض بالنقطة (٠ ، $\frac{١}{٣}$)

∴ $\frac{١}{٣}$ = $\frac{-١}{٣}$ جتا (٠) + ٠ + ث ⇐ ث = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ الدالة الأصلية ل(س) = $\frac{-١}{٣}$ جتا ٣س + $\frac{س^٢}{٢}$ + $\frac{٢}{٣}$

---

٢ ب) أحسب التكاملات الآتية :

(١) ∫ $\frac{\text{جا٥س}}{\text{٢ + جتا٥س}}$ دس   (٢) ∫ $\frac{\text{دس}}{\text{١ − س}^٢}$

(١)

نفرض ع = ٢ + جا٥س

∴ دع = −٥ جا٥س دس

∴ دس = $\frac{\text{دع}}{\text{−٥ جا٥س}}$

∴ ∫ $\frac{\text{جا٥س}}{\text{٢+جتا٥س}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جا٥س}}{\text{ع}}$ $\frac{\text{دع}}{\text{−٥ جا٥س}}$

= $-\frac{١}{٥}$ ∫ $\frac{\text{دع}}{\text{ع}}$

= $-\frac{١}{٥}$ لو | ع | + ث

= $-\frac{١}{٥}$ لو | ٢ + جتا٥س | + ث

(٢)

$\frac{١}{١-س^٢}$ = $\frac{١}{(١-س)(١+س)}$ = $\frac{أ}{(١-س)}$ + $\frac{ب}{(١+س)}$

= $\frac{أ(١+س) + ب(١-س)}{(١+س)(١-س)}$

∴ ١ = أ(١+س) + ب(١-س)

عندما س = ١ ⇐ أ = $\frac{١}{٢}$

عندما س = −١ ⇐ ب = $\frac{١}{٢}$

∴ ∫ $\frac{\text{دس}}{١-س^٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ∫ $\frac{\text{دس}}{١-س}$ + $\frac{١}{٢}$ ∫ $\frac{\text{دس}}{١+س}$

= $\frac{١}{٢}$ لو | ١ − س | + $\frac{١}{٢}$ لو | ١ + س | + ث

السؤال السادس

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة : التفاضل والتكامل
للشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي : ٢٠١٧ / ٢٠١٨م

اليوم: السبت
التاريخ: ١٤ / ٧ / ٢٠١٨م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي:

(١) $\lim_{ص \to ٠} \frac{جا^٢ \frac{ص}{٢}}{(\frac{ص}{٢})^٢} = ١$ (✓)

(٢) إذا كانت ص = س^٣ ، فإن ص‴ = $\boxed{٣}$ (✓)

(٣) للدالة د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤}$ ، مستقيم مقارب أفقي (✗)

ب) أحسب التكاملات الآتية : (١) $\int س هـ^س ءس$ (٢) $\int \frac{س}{س^٢ + ١} ءس$

① تكامل بالتجزئة ع = س ⟸ ءع = ءس ، ءص = هـ^س ءس ⟸ ص = هـ^س
$\int$ ع ءص = ع ص - $\int$ ص ءع = س هـ^س - $\int$ هـ^س ءس = س هـ^س - هـ^س + ث = هـ^س (س - ١) + ث

② $\int \frac{س}{س^٢+١}$ ءس ، نفرض ع = س^٢ + ١ ⟸ ءع = ٢س ءس ⟸ $\frac{١}{٢س}$ ءع = ءس

∴ $\int \frac{س}{ع} \times \frac{١}{٢س}$ ءع = $\int \frac{ءع}{٢ع}$ = $\frac{١}{٢}$ لو|ع| + ث = $\frac{١}{٢}$ لو|س^٢+١| + ث

٥

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها :

(١) إذا كان جـ عدداً ثابتاً فإن $\int_{أ}^{ب}$ جـ ءس = جـ (ب - أ)

(٢) $\frac{ء}{ءس}$ (٣^س) = ٣^س × لو ٣

(٣) $\int$ جا (٥س + ١) ءس = $-\frac{١}{٥}$ جتا (٥س + ١) + ث

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{جتا س}{س - \frac{\pi}{٢}} & عند س \neq \frac{\pi}{٢} \\ أ & عند س = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

د($\frac{\pi}{٢}$) = أ

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س}{س - \frac{\pi}{٢}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا(\frac{\pi}{٢} - س)}{-(\frac{\pi}{٢} - س)} = -١$

تكون الدالة متصلة عندما د($\frac{\pi}{٢}$) = $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د(س)

∴ أ = -١

٥

أ) إذا كانت د(س) = س^٣ − ٣س ، أوجد:

(١) مجموعة تعريف الدالة ح كاملة لأنها كثيرة حدود

(٢) نقاط انعطاف الدالة دَ(س) = ٣س^٢ − ٣ ⇐ ٣س^٢ − ٣ = ٠ ⇐ س^٢ − ١ = ٠ ⇐ س^٢ = ١ ⇐ س = ±١

(٣) فترات تزايد وتناقص الدالة دً(س) = ٦س ⇐ ٦س = ٠ ⇐ س = ٠ ⇐ د(٠) = ٠ للدالة نقطة انعطاف (٠، ٠)

متزايدة في]−∞، −١] ، [١، ∞[متناقصة في [−١، ١]

ب) بيّن فيما إذا كانت الدالة : د(س) = س^٢ + ٢س − ٣ ، تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−٣ ، ١] ، وإذا تحققت، أوجد قيم جـ الناتجة عن المبرهنة.

① الدالة متصلة ∈ [−٣، ١] لأنها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق ∈]−٣، ١[لأنها كثيرة حدود

③ د(−٣) = ٩ − ٦ − ٣ = ٠ ، د(١) = ١ + ٢ − ٣ = ٠

∴ د(−٣) = د(١)

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

∴ يوجد على الأقل عدد جـ ∈]−٣، ١[بحيث دَ(جـ) = ٠

∵ دَ(جـ) = ٢جـ + ٢ ⇐ ٢جـ + ٢ = ٠ ⇐ جـ = −١ ∈]−٣، ١[

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين فيما يأتي :

(١) إذا كانت ص = هـ^{٢س} ، فإن صَ − ٢ص = ...	[−١ ، ١ ، صفر ، −٢].

(٢) $\int_{1}^{3}$ (٣ف^٢ − ٤ف) ءف = ...	[٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢].

(٣) نهـا_{س ← ٠} جا٤س / ظا٢س = ...	[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤].

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{0}^{2}$ ٣ + ٢س ءس

نقسم الفترة [٠، ٢] إلى ن فترة جزئية بحيث Δس = (ب − أ)/ن = ٢/ن

نختار سَرِ = أ + ((ب − أ)/ن) ر = (٢/ن) ر

∴ د(سَرِ) = ٣ + ٢((٢/ن) ر) = ٣ + (٤/ن) ر

وباستخدام تعريف التكامل المحدد

∴ $\int_{0}^{2}$ (٣ + ٢س) ءس = نهـا_{ن ← ∞} (٢/ن) مجـ (٣ + (٤/ن) ر)

∵ (٢/ن) [٣ن + (٤/ن) مجـ ر] = (٦ن)/ن + (٨/ن^٢) × (ن(ن+١))/٢

= ٦ + (٤ن)/ن + ٤/ن = ٦ + ٤ + ٤/ن

∴ نهـا_{ن ← ∞} (٦ + ٤ + ٤/ن) = ٦ + ٤ + ٠ = ١٠

السؤال الخامس

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب):

(أ)	(ب)
(١) للدالة د(س) = ٢س + س^2 ، نقطة حرجة عند س = ...-١......	صفر
(٢) قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل : $\int_{0}^{2}$ (س+١) دس = ...١.......	١
(٣) للدالة د(س) = س − $\frac{١}{٢س^2}$ ، مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ...صفر......	٢
	-١
	-٢

٥

ب) أوجد معادلة الناظم للدالة: ٣ص^2 = ٤ − س^2 ، عند النقطة (١ ، ١)

٦ص ص' = − ٢س ⟸ ص' = $\frac{-٢س}{٦ص}$ = $\frac{-س}{٣ص}$

ص' $\Big|_{(١،١)}$ = $\frac{-١}{٣}$ = م

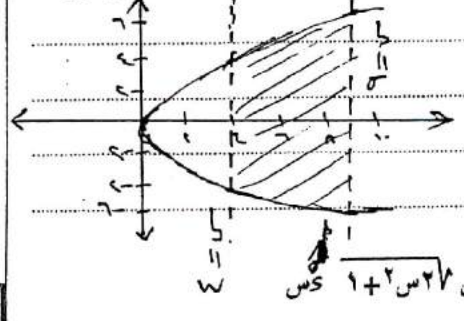
∴ معادلة الناظم : ص − د(أ) = $\frac{-١}{م}$ (س − أ)

ص − ١ = ٣(س − ١) ⟸ ٣س − ص − ٢ = ٠

السؤال السادس

أ) احسب مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ: ص^2 = ٤س ، والمستقيمان : س=٤ ، س=٩

∵ ص^2 = ٤س ⟹ ص = ±٢√س ، ص = ٢√س فوق محور س ، ص = −٢√س تحت محور س



م = $\int_{٤}^{٩}$ |(٢√س − (−٢√س))| دس

= $\int_{٤}^{٩}$ |٤√س| دس = $\frac{٨}{٣}$ √س^3 $\Big|_{٤}^{٩}$

= $\frac{٨}{٣}$ √٩^3 − $\frac{٨}{٣}$ √٤^3 = $\frac{٨}{٣}$ (٣^3 − ٢^3)

= $\frac{٨}{٣}$ (٢٧ − ٨) = $\frac{٨}{٣}$ × ١٩ = $\frac{١٥٢}{٣}$ وحدة مربعة

ب) احسب التكاملات الآتية : (١) $\int \frac{دس}{س^2 − ٢س − ٣}$ (٢) $\int$ س √(٢س^2+١) دس

٥

(١) $\frac{١}{س^2 − ٢س − ٣}$ = $\frac{١}{(س − ٣)(س + ١)}$ = $\frac{أ}{س − ٣}$ + $\frac{ب}{س + ١}$ = $\frac{أ(س + ١) + ب(س − ٣)}{(س − ٣)(س + ١)}$

عندما س = ٣ ⟸ ٤أ = ١ ⟸ $\boxed{أ = \frac{١}{٤}}$ ، عندما س = −١ ⟸ −٤ب = ١ ⟸ ب = $\frac{-١}{٤}$

∴ $\int \frac{دس}{س^2 − ٢س − ٣}$ = $\frac{١}{٤}\int \frac{دس}{س − ٣}$ − $\frac{١}{٤}\int \frac{دس}{س + ١}$ = $\frac{١}{٤}$ لو|س − ٣| − $\frac{١}{٤}$ لو|س + ١| + ث

(٢) $\int$ س √(٢س^2+١) دس تكامل بالتعويض نفرض ع = ٢س^2 + ١ ⟸ دع = ٤س دس ⟸ دس = $\frac{دع}{٤س}$

∴ $\int$ س √ع $\frac{دع}{٤س}$ = $\frac{١}{٤}\int$ ع$^{\frac{1}{2}}$ دع = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢}{٣}$ ع$^{\frac{3}{2}}$ + ث

= $\frac{١}{٦}$ (٢س^2+١)$^{\frac{3}{2}}$ + ث = $\frac{١}{٦}$ √(٢س^2+١)^3 + ث

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة : التفاضل والتكامل
لإتمام شهادة الثانوية العامة (القسم العلمي)
العام الدراسي : ٢٠١٨ / ٢٠١٩م

اليوم: السبت
التاريخ: ٢٩ / ٦ / ٢٠١٩م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : يسمح باستخدام الآلة الحاسبة العادية

السؤال الأول (٥)

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي:

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{جاس}{١ + ٣س} =$ صفر ‏ تحرر رقم × صفر؟ (✓)

(٢) معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة ص = $س^٣ + ٣$ عند س = ٠ هي س ـ ص + ٣ = ٠ (✗)

(٣) إذا كان $\int_{١}^{٢} د(س)\,ءس = ٤$ فإن $\int_{١}^{٢} (٢د(س) - ٣)\,ءس = ٥$ (✓)

ب) بيّن إذا كانت الدالة : د(س) = $س^٤ - ٨س^٢$ تحقق شروط رول على [-٢ ، ٢] ، وإذا حققت فأوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

① م.ت = ح ⇐ الدالة متصلة على [-٢ ، ٢]
② د'(س) = $٤س^٣ - ١٦س$ ، م.ت المشتقة = ح
∴ الدالة قابلة للاشتقاق على]-٢ ، ٢[
③ د(-٢) = ١٦ - ٣٢ = -١٦ ، د(٢) = ١٦ - ٣٢ = -١٦
∴ د(-٢) = د(٢)
∴ الدالة تحقق شروط رول على الفترة [-٢ ، ٢]
∴ عليه يوجد على الأقل عدد جـ بحيث د'(جـ) = ٠
$٤جـ^٣ - ١٦جـ = ٠$
٤جـ (جـ^٢ - ٤) = ٠
إما جـ = ٠ ∈ [-٢ ، ٢]
أو جـ^٢ - ٤ = ٠
⇐ جـ^٢ = ٤ ⇐ جـ = ±٢ ∉]-٢ ، ٢[
∴ جـ = {٠}

السؤال الثاني (٥)

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها :

لا أدري صفر

(١) $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس + \int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس =$ صفر

(٢) $\int جتا^٢س\ جاس\ ءس = -\frac{جتا^٣س}{٣} + ث$

(٣) إذا كان ص = $٢^{جاس}$ فإن ص' = $٢^{جاس} × جتاس × لو٢$

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = صفر ، إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{٤س^٢ + ظا^٢ أس}{س^٢} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٣ + أ\ جتا س & \text{عندما } س \geq ٠ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^-} \frac{٤س^٢ + ظا^٢أس}{س^٢} = \frac{٤س^٢}{س^٢} + \frac{ظا^٢أس}{س^٢} = \lim_{س \to ٠^-} (٤ + \frac{٤}{٤} \frac{ظا^٢أس}{س^٢})$
= ٤ + ٤ = ٨ ..... ①
$\lim_{س \to ٠^+} (٣ + أ\ جتاس) = ٣ + أ × ١ = ٣ + أ$ ..... ②
من ① و ② وحسب تعريف النهاية فإن ٣ + أ = ٨ ⇐ أ = ٨ - ٣ ⇐ أ = ٥

السؤال الثالث

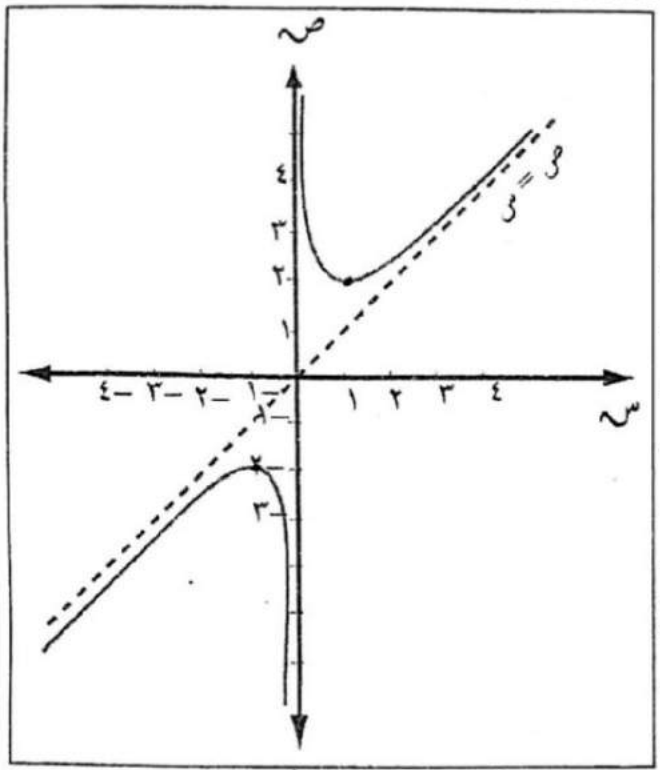
٥

من الشكل المرسوم جانباً أوجد:

(١) مجموعة التعريف. (٢) المستقيمات المقاربة.

(٣) فترات التزايد والتناقص. (٤) فترات التقعر.

(٥) عدد الفروع اللانهائية.



(١) م . ت = ح / {٠}

(٢) المقارب الرأسي هو س = ٠

المقارب المائل معادلته ص = س

(٣) الدالة تزايدية في الفترة

]−∞ ، −١] ∪ [١ ، ∞[

الدالة تناقصية في الفترة [−١ ، ١]

(٤) الدالة مقعرة نحو الأعلى في الفترة]٠ ، ∞[

ومقعرة نحو الأسفل في الفترة]−∞ ، ٠[

(٥) مجموعة تعريف الدالة غير محدودة من الطرفين ...

وعليه فإن عدد الفروع اللانهائية = ٤ فروع

السؤال الرابع

٥

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين فيما يأتي :

(١) إذا كان للدالة د(س) = $س^٢ - ٣ أ س + ١$ قيمة قصوى عند س = ١ فإن قيمة أ = ... [١ ، −١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$].

(٢) الحد الأعلى للتكامل $\int_{}^{لـو٢} هـ^س \, ءس = ...$ [١ ، ٠ ، لـو٢ ، ٢لـو٢].

(٣) إذا كان $\int_{ك}^{٠} ٣س^٢ \, ءس = -٢٧$ فإن ك= ... [٣ ، −٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$].

Saafy

ب) إذا كان ص = ٣+ جا٢س فأثبت أن ٤ص + ص″ = ١٢

ص′ = ٠ + ٢ جتا٢س ⟸ ص′ = ٢ جتا٢س

ص″ = −٤ جا٢س

الطرف الأيمن = ٤ص + ص″

= ٤(٣ + جا٢س) + (−٤ جا٢س)

= ١٢ + $\cancel{٤ جا٢س}$ − $\cancel{٤ جا٢س}$

= ١٢

= الطرف الأيسر

(هـ . ط)

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب):

(ب)	(أ)
٢	(١) إذا كان ص^٣ ـ س^٢ = ١ فإن ص$'|_{(١ ، ١)}$ = ...١........
١	(٢) $\int_{هـ}^{هـ^٣} \frac{ءس}{س}$ = ...٢.....
٥	(٣) إذا كان د(س) = س^٢ ـ س ، هـ(س) = $\frac{١}{س}$ فإن (د ∘ هـ)$'$ (−١) = ...٣......
٣	

ب) باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب $\int_{٠}^{٢}$ (٢س + ١) ءس

بجزئ الفترة [٠ ، ٢] إلى ن من الفترات الجزئية متساوية طول كل منها Δس = $\frac{ب - أ}{ن}$

= $\frac{٢ - ٠}{ن}$ = $\frac{٢}{ن}$

نختار س$_ر^*$ طرف كل فترة حيث س$_ر^*$ = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ ر = ٠ + $\frac{٢}{ن}$ ر = $\frac{٢}{ن}$ ر ⟸ د(س$_ر^*$) = $\frac{٤}{ن}$ر + ١

مج Δ س × د(س$_ر^*$) = $\frac{٢}{ن}$ [مج $\frac{٤}{ن}$ ر + مج ١] = $\frac{٢}{ن}$ [$\frac{٤}{ن}$ × $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ + ن]

= $\frac{٤ن + ٤}{ن}$ + ٢

∴ نها$_{ن \to \infty}$ [$\frac{٤ن + ٤}{ن}$ + ٢] = ٤ + ٢ = ٦ ⟸ $\int_{٠}^{٢}$ (٢س + ١) ءس = ٦ وحدة مربعة

أ) احسب التكاملات الآتية : (١) $\int \frac{٢س ءس}{١ - جا^٢ س}$ (٢) $\int$ جتا٢س $\sqrt{١ - جا٢س}$ ءس

① $\int \frac{٢س ءس}{١ - جا^٢ س}$ = $\int \frac{٢س}{جتا^٢ س}$ ءس = $\int$ ٢س قا^{٢}س ءس

ع = ٢س ⟸ ءع = ٢ ءس

ءهـ = قا^{٢}س ءس ⟸ هـ = ظاس

$\int$ ع ءهـ = ع هـ − $\int$ هـ ءع

= ٢س ظاس − $\int$ ظاس × ٢ ءس

= ٢س ظاس − ٢(− لو|جتاس|) + ث

= ٢س ظاس + ٢ لو|جتاس| + ث

② $\int$ جتا٢س (١ − جا٢س)$^{\frac{١}{٢}}$ ءس

نضع ع = ١ − جا٢س

ءع = ٠ − ٢جتا٢س ءس

$\frac{ءع}{-٢جتا٢س}$ = ءس

∴ $\int$ جتا٢س ع$^{\frac{١}{٢}}$ × $\frac{ءع}{-٢جتا٢س}$

= $\frac{-١}{٢}$ × $\frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + ث

= $\frac{-١}{٣}$ $\sqrt{(١ - جا٢س)^٣}$ + ث

ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) هو ٢+ جاس وكان بيان الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ٢) فأوجد معادلة المنحنى.

د$'$(س) = ٢ + جاس

∴ $\int$ (٢ + جاس) ءس = ٢س − جتاس + ث

∴ د(س) = ٢س − جتاس + ث

∴ بيان الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

∴ ٢ = ٢ × ٠ − جتا ٠ + ث

٢ = −١ + ث

∴ ث = ٣

∴ الدالة الأصلية د(س) = ٢س − جتاس + ٣

السؤال الخامس ٥ — السؤال السادس ٥