الفصل السابع

المحددات و تطبيقاتها

Determinants and their applications

1. توقيع تبديل (Signature of permutation)

عرفنا في فصل الزمر من هذا المقرر مفهوم التبديل الذي يشكل أداة رئيسية في تعريف المحددات وخاصة ما يسمى توقيع التبديل والذي يعرف كما يلي:

تعريف:

ليكن لدينا التبديل $\sigma \in S_n$. نُسمي الثنائية $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ انقلاباً (Inversion) إذا تحقق ما يلي:
$(i<j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))$.

نرمز لعدد الانقلابات بـ $I(\sigma)$. نعرف توقيع التبديل σ بالعلاقة التالية:

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} = \begin{cases} -1; & I(\sigma) \, is \ odd \\ 1; & otherwise \end{cases}$$

ملاحظة

نقول أن التبديل σ زوجي (even) إذا كان $\varepsilon(\sigma)=1$ و فردي (odd) إذا كان $\varepsilon(\sigma)=-1$.

مثال

حدد مجموعة الانقلابات و التوقيع للتبديل التالي:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

الحل:

لاحظ أن مجموعة الانقلابات في σ هي :

$$V=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5)\}$$

إن $I(\sigma)=card(V)=10 \Rightarrow \varepsilon(\sigma)=(-1)^{10}=1$

2. المحددات (Determinants)

1- تعريف المحدد

لتكن A مصفوفة مربعة من الشكل $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. نسمي المقدار السلمي :

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

محدد المصفوفة A.

إن المثالين التاليين يوضحان كيفية حساب محدد المصفوفة.

مثال1:

احسب محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

الحل:

لاحظ أنه لدينا التبديلين التاليين فقط: $\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

ولدينا $I(\sigma_1)=0,\ I(\sigma_2)=1$ و بالتالي $\varepsilon(\sigma_1)=1,\ \varepsilon(\sigma_2)=-1$ عندئذ

$$\det A=\varepsilon(\sigma_1)a_{\sigma_1(1)1}a_{\sigma_1(2)2}+\varepsilon(\sigma_2)a_{\sigma_2(1)1}a_{\sigma_2(2)2}$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

مثال2:

احسب محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

الحل:

لاحظ أنه لدينا التبديلات التالية:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$
$$\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

ولدينا

$$\begin{aligned}&I(\sigma_1)=0,I(\sigma_2)=1,I(\sigma_3)=2,I(\sigma_4)=3,I(\sigma_5)=2,I(\sigma_6)=1,\\&\varepsilon(\sigma_1)=1,\varepsilon(\sigma_2)=-1,\varepsilon(\sigma_3)=1,\varepsilon(\sigma_4)=-1,\varepsilon(\sigma_5)=1,\varepsilon(\sigma_6)=-1,\\&\Rightarrow \det A=\varepsilon(\sigma_1)a_{\sigma_1(1)1}a_{\sigma_1(2)2}a_{\sigma_1(3)3}+\varepsilon(\sigma_2)a_{\sigma_2(1)1}a_{\sigma_2(2)2}a_{\sigma_2(3)3}\\&\qquad+\cdots+\varepsilon(\sigma_6)a_{\sigma_6(1)1}a_{\sigma_6(2)2}a_{\sigma_6(3)3}.\end{aligned}$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}\det A&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33},\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})\\&\quad+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

2- خواص المحددات

مبرهنة(1)

محدد المصفوفة I_n يساوي 1.

الإثبات:

إن جميع الحدود من الشكل $a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ تحوي أصفاراً ما عدا الحد $a_{11}\cdots a_{nn}$ والذي يساوي 1. أي $\det I_n=1$.

مبرهنة(2)

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة والتي تحوي عموداً صفرياً عندئذ $\det A=0$.

الإثبات:

لنفرض أن العمود رقم $1 \le j \le n$ أي أن $a_{1j} = \cdots a_{nj} = 0$. إذن كل الحدود $a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$ تساوي صفر و ذلك من أجل أي تبديل و منه $\det A = 0$.

مبرهنة(3)

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة و لتكن $B \in M_n(K)$ المصفوفة الناتجة عن A وذلك بإجراء تبديل بين اثنين من أعمدتها، $C_i(A)$ و $C_j(A)$ حيث $1 \le i \ne j \le n$. عندئذ

$$\det B = -\det A$$

الإثبات:

لنفرض أن $i < j$ و أن $\tau : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ تبديلاً حيث $\tau(i) = j$ و $\tau(j) = i$ و $\tau(x) = x$ فيما عدا ذلك. عندئذ $\varepsilon(\tau) = -1$ و $\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma) = -1$ و منه :

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau\sigma) a_{(\tau\sigma(1))1} \cdots a_{(\tau\sigma(n))n} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\tau(\sigma(1))1} \cdots a_{\tau(\sigma(n))n} \\
&= -\det A
\end{aligned}$$

نتيجة(2)

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة تحوي عمودين متساويين عندئذ $\det A = 0$.

الإثبات:

لنفرض أنه يوجد $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ حيث $i \ne j$ و $C_i(A) = C_j(A)$. بإجراء تبديل بين هذين العمودين و بالاعتماد على المبرهنة (3) أعلاه نجد أن $\det A = -\det A$ و بالتالي $\det A = 0$.

مبرهنة(4)

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة و لتكن $B \in M_n(K)$ المصفوفة الناتجة عن A وذلك بإجراء العملية الأولية $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j ; (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \lambda \in K$ عندئذ $\det A = \det B$.

الإثبات:

لتكن $B=\left(b_{ij}\right)$ حيث نستبدل العمود C_i بالعمود $C_i+\lambda C_j$ أي أن $b_{\sigma(i)i}=a_{\sigma(i)i}+\lambda a_{\sigma(i)j}$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\det B&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1)1}\cdots\left(a_{\sigma(i)i}+\lambda a_{\sigma(i)j}\right)\cdots b_{\sigma(n)n}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)i}\cdots b_{\sigma(n)n}+\lambda\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)j}\cdots b_{\sigma(n)n}\\&=\det A+0=\det A.\end{aligned}$$

وذلك لأن المجموع الثاني هو محدد مصفوفة تحوي عمودين متساويين.

نتيجة(3)

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة و لتكن $B\in M_n(K)$ المصفوفة الناتجة عن A وذلك بإجراء العملية الأولية $C_i\leftarrow\lambda C_i\,;i\in\mathbb{N}_n,\lambda\in K$ عندئذ $\det B=\lambda\det A$.

الإثبات:

إن الإثبات واضح و بالاعتماد على ما سبق.

نتيجة(4)

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة فإن $\forall\lambda\in K\,;\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.

الإثبات:

إن الإثبات واضح و بالاعتماد على ما سبق.

مبرهنة(5)

لتكن $A,B\in M_n(K)$ مصفوفتين مربعتين فإن $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

مثال:

لتكن $A,B\in M_3(K)$ حيث

$$A=\begin{pmatrix}0&5&-3\\-2&2&2\\1&4&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-9&8&4\\10&-2&5\\7&-7&4\end{pmatrix}$$

احسب $\det(AB)$.

الحل:

إن

$$\det A = -5(-2-2)-3(-8-2)=50$$
$$\det B = -9(-8+35)-8(40-35)+4(-70+14)$$
$$=-507$$

و لدينا $AB=\begin{pmatrix}29 & 11 & 13\\ 52 & -34 & 10\\ 38 & -7 & 28\end{pmatrix}$ و $\det AB = -25350$ و $\det A \det B = -25350$.

مبرهنة(6)

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة عندئذ A قابلة للقلب إذا و فقط إذا كان $\det(A)\neq 0$ فإن $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$.

الإثبات:

بما أن A قابلة للقلب $\Leftrightarrow$ يوجد $A^{-1}\in M_n(K)$ بحيث

$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n \Leftrightarrow \det(A)\det(A^{-1})=1 \Leftrightarrow \det A\neq 0$ و $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$.

مبرهنة(7)

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة مثلثية عندئذ $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

الإثبات:

لدينا $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ و ذلك حسب تعريف المحدد. بفرض أن A مثلثية عليا (و الإثبات يتم بنفس الطريقة إذا كانت A مثلثية سفلى) عندئذ إذا كانت $\sigma(i)>i;i\in\mathbb{N}_n$ فإن $a_{\sigma(i)i}=0$ و يكون $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}=0$ ومن جهة أخرى إذا كانت $\sigma(i)<i;i\in\mathbb{N}_n$ فإن $\sigma(n)=n$ لأن n هو أكبر العناصر في $\mathbb{N}_n$ و كذلك $\sigma(n-1)=n-1$ لأن $n-1$ هو أكبر العناصر المتبقية. بالمتابعة بنفس الطريقة نجد أن $\sigma(i)=i$ وذّلك من أجل كل $i\in\mathbb{N}_n$. إذاً الحد الوحيد الذي لا يساوي الصفر في محدد المصفوفة A هو $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

مبرهنة(8)

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة عندئذ $\det A=\det {}^tA$.

الإثبات:

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}\\ &= \det {}^tA\end{aligned}$$

مثال

في المثال السابق لدينا $A=\begin{pmatrix}0&5&-3\\-2&2&2\\1&4&1\end{pmatrix}$ و $\det A=50$. احسب $\det {}^tA$.

الحل:

إن $^tA=\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&2&4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ و $\det {}^tA=0(2-8)+2(5+12)+1(10+6)=50$.

أي أن $\det {}^tA=\det A$.

3- طريقة أخرى لحساب المحددات

تعريف

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة و ليكن $\Delta=\det A$. عندئذ:

1- نسمي محدد المصفوفة m_{ij} الناتجة عن A بحذف السطر i و العمود j . و نسمي m_{ij} صغير العنصر a_{ij} .

2- نسمي تمام العامل لـ a_{ij} المقدار السلمي $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}$

مبرهنة(9)

ليكن $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ عندئذ

1- $\Delta=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}$ أي نقوم بإيجاد قيمة المحدد بالنشر بالنسبة للسطر i .

2- $\Delta=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}$ أي نقوم بإيجاد قيمة المحدد بالنشر بالنسبة للعمود j .

لحساب محدد مصفوفة مربعة من القياس $n\times n$، أتبع الخطوات التالية:

- خذ العمود C_i(أو السطر R_i) ومن ثم اطرح منه مضاعف عمود (أو سطر أخر) أي نقوم بالعملية الأولية $C_i \leftarrow C_i - \lambda C_j$ (أو $R_i \leftarrow R_i - \lambda R_j$). حسب المبرهنة (4) فإن قيمة المحدد لا تتغير.
- كرر الخطوة الأولى عدد من المرات حتى الحصول على أكبر عدد من الأصفار في عمود (أو سطر).
- قُم بنشر المحدد بالنسبة لهذا العمود أو السطر.
- كرر الخطوات السابقة من أجل المحدد من القياس $(n-1)\times(n-1)$ حتى نصل 2×2

مثال

احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

الحل:

إن قيمة Δ لا تتغير بإجراء العمليات الأولية التالية:

أولاً $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ ومن ثم $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ و أخيراً $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_3$ فنحصل على

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\Delta_{1j} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} + a_{14}\Delta_{14} = -\Delta_{13}$$

و لدينا بالتعريف $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ و منه

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} m_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}\Delta_{i3}$$

$$= 3\Delta_{11} + 0\Delta_{12} + 3\Delta_{13}$$

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 27$$

ونستنتج أن $\Delta = -\Delta_{13} = -27$.

4- تطبيقات المحددات

1- حساب مقلوب مصفوفة (Matrix inverse)

تعريف

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة. نسمي المصفوفة التالية و التي عناصرها هي متممات عوامل المصفوفة A: $\tilde{A} = (\Delta_{ij}) \in M_n(K)$ المصفوفة المرافقة (أو المساعدة) لـ A.

مبرهنة(10)

1- إذا كانت $\forall A \in M_n(K)$ عندئذ $A\,{}^t\tilde{A} = \det(A) I_n$.

2- إذا كانت A قابلة للقلب فإن $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\tilde{A}$.

مثال

أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

الحل:

إن $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$ حيث:

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \Delta_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12, \Delta_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \Delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16, \Delta_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3, \Delta_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10, \Delta_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

ومنه ${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -12 & -16 & 10 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$. تحقق من أن $\Delta = \det A = 2$ و نستنتج إذاً أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -12 & -16 & 10 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ -6 & -8 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

تحقق من أن $AA^{-1}=I_3$.

2- جملة المعادلات الخطية

تعريف

لتكن لدينا المصفوفتان $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in M_{n1}(K)$، $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}\in M_{np}(K)$.

وليكن لدينا جملة المعادلات التالية بـ n معادلة و p مجهولاً:

$$(S)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{np}x_p=b_n \end{cases}$$

نسمي الجملة (S) جملة معادلات خطية والتي تكتب بالشكل المصفوفي التالي $AX=B$.

- المصفوفة A تسمى مصفوفة الجملة الخطية.
- المصفوفة B تسمى الطرف الثاني للجملة الخطية.
- نقول أن الجملة متجانسة إذا كانت $B=0_{n1}$ أي العمود الصفري،
- إن رتبة الجملة (S) هي $rg(A)$

المقصود بحل الجملة الخطية (S) هو إيجاد مجموعة الأشعة $(x_1,\ldots,x_p)\in K^p$ التي تحقق جملة المعادلة (S).

طريقة Cramer في حل جملة المعادلات الخطية (Cramer's Rule)

نقول أن الجملة (S) هي جملة Cramer إذا كانت مكونة من n معادلة و n مجهولاً و $rg(A)=n$.

مبرهنة (11)

إن جملة Cramer تملك حلاً وحيداً هو $X=A^{-1}B$.

الإثبات:

$rg(A)=n \Leftrightarrow A$ قابلة للقلب $\Leftrightarrow X=A^{-1}B$.

مبرهنة (12)

لنفرض أن (S) هي جملة Cramer. لنفرض أن $(C_1,\ldots,C_n)$ هي مجموعة أعمدة المصفوفة A و ليكن ${}^tB=(b_1,\ldots,b_n)\in K^n$ و $X=(x_1,\ldots,x_n)$ هو الحل الوحيد للجملة (S) عندئذ:

$$\forall j\in\mathbb{N}_n ; x_j=\frac{\det\left(C_1,\ldots,C_{j-1},B,C_{j-1},\ldots,C_n\right)}{\det A}.$$

مثال

استخدم قاعدة Cramer في حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 4\\ 2x-y+z &= 18\\ x-y+z &= 5 \end{aligned}$$

الحل:

إن الجملة السابقة تكتب بالشكل المصفوفي كما يلي: $AX=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 18\\ 5\end{pmatrix}=B$

أولاً نقوم بحساب محدد المصفوفة A و يمكنك ان تتثبت بسهولة أن $\det A=2$. لإيجاد المجهول الأول $x_1=x$ بتطبيق المبرهنة (12) أعلاه حيث نقوم بحساب محدد المصفوفة الناتجة عن مصفوفة الجملة الخطية بتبديل العمود الأول من هذه المصفوفة بالعمود الذي يمثل الطرف الثاني للجملة أعلاه وبالتالي نجد أن:

$$x_1=x=\frac{\det(B,C_2,C_3)}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1 & -1\\ 18 & -1 & 2\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{9}{2}$$

وبنفس الشكل نعوض العمود الثاني من A بالعمود B ونجد أن:

$$x_2=y=\frac{\det(C_1,B,C_3)}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 18 & 2\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}}{\det A}=8$$

وأخيراً نجد أن $x_3 = z = \dfrac{\det(C_1, C_2, B)}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 18 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{17}{2}$.

حل جملة معادلات خطية بـ n معادلة و p مجهولاً

سنقبل المبرهنة التالية دون إثبات:

مبرهنة(12)

لتكن المصفوفة $A \in M_{np}(K)$، عندئذ $rg(A) = r \leq n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطين التاليين:

1- توجد مصفوفة مربعة مستخرجة من A وقياسها $r \times r$.

2- كل مصفوفة مربعة مستخرجة من A وقياسها $(r+1)\times(r+1)$ هي مصفوفة غير قابلة للقلب.

لتكن (S) جملة المعادلات الخطية التالية:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

لحل هذه الجملة اتبع الخطوات التالية:

- أنشئ المصفوفة الموسعة لـ A و ذلك بإضافة العمود B إلى المصفوفة A .
- نبحث عن مصفوفة مستخرجة من المصفوفة الموسعة لـ A حيث رتبتها r.
- بادل بين الأسطر والأعمدة لكي تظهر المصفوفة المستخرجة في الأعلى يساراً.
- سمي الـ r مجهولاً الأوائل بالمجاهيل الأساسية و سمي البقية المجاهيل غير الأساسية .
- قُم بنقل المجاهيل غير الأساسية إلى الطرف الثاني من الجملة.
- لاحظ انك تحصل على جملة Cramer بـ r معادلة .
- بحل هذه الجملة تحصل على المجاهيل الأساسية كتوابع بالمجاهيل غير الأساسية والعمود B.

مثال

ناقش حلول الجملة التالية:

$$(S)\quad \begin{cases} x+y+z=a \\ x+y-2z=b \\ x+y-3z=c \end{cases}$$

الحل:

المصفوفة الموسعة لهذه الجملة هي المصفوفة التالية: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & -3 & c \end{array}\right)$

بإجراء العمليات الأولية التالية $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ and $C_2 \leftarrow C_2 - C$ فنحصل على المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3 & b-a \\ 0 & 0 & -4 & c-a \end{array}\right)$ و من ثم نقوم بإجراء العملية الأولية التالية. $C_3 \leftarrow C_3 - \frac{4}{3}C_2$ فنحصل على المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c+\frac{a}{3}-\frac{4}{3}b \end{array}\right)$ إذاً $rg(A)=1$ والمصفوفة المستخرجة من A هي المصفوفة $A_1=(a_{11})=(1)$.

إذاً المجهول الأساسي هو x و نحصل على الجملة التالية:

$$(S')\quad \begin{cases} x=a-y-z \\ -3z=b-a \end{cases}$$

بمراعاة أن $c+\frac{a}{3}-\frac{4}{3}b=0$ نجد أن مجموعة الحلول لهذه الجملة هي

$$\begin{cases} z=-\dfrac{b-a}{3} \\ x=a-y+\dfrac{b-a}{3} \\ \quad =\dfrac{2a-b}{3}-y \end{cases}$$

تمرينات

التمرين الأول

أحسب قيمة المحدد التالي $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$.

الحل:

إن قيمة المحدد لا تتغير عندما نقوم بـ $n-1$ عملية أولية من الشكل $C_j \leftarrow C_j - C_{j+1}$ حيث $j = 1, \ldots, n-1$ و نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

إن قيمة المحدد لا تتغير عندما نقوم بإجراء العملية الأولية $C_n \leftarrow C_n - \frac{C_1}{\lambda-1}$. ونجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بإجراء العملية الأولية . و نتابع بنفس الشكل n مرة حتى نحصل على

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda+n-1 \end{vmatrix}$$

وهو ما يمثل محدد مصفوفة مثلثية دنيا. حسب المبرهنة (7) فإن $\Delta = (\lambda+n-1)(\lambda-1)^{n-1}$.

تطبيق

إذا كانت $n=3$ فإن $\Delta=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ ويمكن التحقق من ذلك كما يلي:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2-1\right)-(\lambda-1)+(1-\lambda)$$
$$=\lambda\left(\lambda^2-1\right)-2(\lambda-1)$$
$$=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)-2(\lambda-1)$$
$$=(\lambda-1)\left(\lambda^2+\lambda-2\right)$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

التمرين الثاني

نسمي المحدد التالي محدد Vandermonde :

$$V(a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

أثبت أن $V(a_1,\ldots,a_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$ و بشكل خاص تكـون مـصفوفة Vandermonde قابلة للقلب إذا كانت كل المقادير السلمية $(a_1,\ldots,a_n)$ مختلفة فيما بينها.

الحل:

نستخدم مبدأ التدريج لإيجاد العلاقة المطلوبة كما يلي:

- من أجل $n=2$ نجد أن

$$V(a_1,a_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1,$$

- من أجل $n-1$ نجد أن

$$V(a_1,a_2,a_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\end{vmatrix}$$
$$=\left(a_2a_3^2-a_3a_2^2\right)-\left(a_1a_3^2-a_3a_1^2\right)+\left(a_1a_2^2-a_2a_1^2\right)$$

بفك الأقواس والإصلاح نجد أن $V\left(a_1,a_2,a_3\right)=\left(a_2-a_1\right)\left(a_3-a_1\right)\left(a_3-a_2\right)$

- نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ و لنثبت صحتها من أجل n. نقوم بالعمليات الأولية التالية على التوالي: $R_{i+1}\leftarrow R_{i+1}-R_i\,;i=1,\ldots,n-1$ أي نطرح من كـل سـطر السطر الذي قبل بعد ضربه بـ a_1، فنحصل على:

$$V\left(a_1,\ldots,a_n\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \left(a_2-a_1\right) & \cdots & \left(a_n-a_1\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_2^{n-2}\left(a_2-a_1\right) & \cdots & a_n^{n-2}\left(a_2-a_1\right)\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_2-a_1\right)\cdots\left(a_n-a_1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_2-a_1\right)\cdots\left(a_n-a_1\right)\prod_{\substack{j=2\\ i<j}}^{n-1}\left(a_j-a_i\right)$$

وذلك لكون العلاقة صحيحة من أجل $n-1$.

التمرين الثالث

أحسب قيمة المحدد
$$\Delta=\begin{vmatrix}-a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & -a_{n-1} & a_{n-1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

التمرين الرابع

حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$(S)\qquad\begin{cases}-2x+y+z & =0\\ x-2y+z & =0\\ x+y-2z & =0\end{cases}$$

الحل:

إن المصفوفة الموسعة لهذه الجملة هي $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ و لنقم بإجراء العمليات الأولية التالية:

$C_{j+1} \leftarrow C_{j+1} + \frac{1}{2}C_1$ حيث $j = 1,2$ فنحصل على المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 0 \end{array}\right)$

وبالتالي $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ومنه $x = y = z$ هي مجموعة حلول هذه الجملة.