معيار (8)

التفاضل والتكامل والمتسلسلات والمتتابعات (9 أسئلة)

١- يحسب مجموع المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية
٢- يحكم على تقارب المتتابعات والمتسلسلات غير منتهية
٣- يتعرف النهايات ويستخدمها في تعريف مشتقة الدالة والحكم على اتصالها
٤- يحسب مشتقة لدالة ويرسم منحناها
٥- يحسب تكامل دالة ويستخدمها في حساب الحجوم والمساحات
٦- يحل مسائل تطبيقية على التفاضل والتكامل

المتتابعة

حسابية

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

مثال:- $1, 6, 11, 16, \dots$

هندسية

$$\boxed{a_n = a r^{n-1}}$$

مثال:- $2, 8, 16, 32, \dots$

المتسلسلة

حسابية

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]}$$

مثال:-

$$\sum_{n=0}^{10} (n-4)$$

$$-4-3-2-1+0+1+2+\cdots$$

هندسية

منتهية

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}}$$

مثال:-

$$\sum_{n=0}^{10} 4\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 4(1) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$2+4+8+16+\cdots$$

غير منتهية

متقاربة لها مجموع

$$|r| < 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{a}{1-r}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$r = \frac{1}{2} < 1$$

متباعدة ليس لها مجموع

$$|r| \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n)$$

$$r = 3 > 1$$

س/ الحد السابع للمتتابعة

$$3+6+9+12+\cdots+30$$

$$\boxed{a_1 = 3} \quad a_2 - a_1 = 6-3 = 3 \Rightarrow \boxed{d=3} \Rightarrow \text{المتتابعة حسابية}$$

$$a_3 - a_2 = 9-6 = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)$$

$$a_7 = a_1 + (7-1)d \rightarrow a_7 = 3 + 6 \times 3 = 3 + 18 = \boxed{21}$$

قوانين النهايات

النهاية تؤول إلى النقطة :-

اذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L كلما اقتربت قيم x من c من كلا جهتين فإن نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من c هي L

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

النهاية من اليمين $\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$

النهاية من اليسار $\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$

* اذا كانت نهاية اليمين = نهاية اليسار ⇐ النهاية موجودة
* اذا كانت نهاية اليمين ≠ نهاية اليسار ⇐ النهاية غير موجودة.

مثال :-

1] $\lim_{x\to -3} x = -3$

2] $\lim_{x\to -1} \sqrt{x+3} = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2}$

3] $\lim_{x\to 1} |x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x\geq 1 \\ 1-x & ; x<1 \end{cases}$

تتغير الدالة عند $x = 1$

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0$

• $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$

النهاية موجودة وتساوي الصفر

حالات عدم تعيين :-

عند تعويض المباشر في الدوال النسبية تنتج صيغة $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ أو $(\infty-\infty)$ وهي كمية غير محددة

طرق معالجتها :-

① التحليل ② ضرب مرافق المقام
③ قاعدة لوبيتال (اشتقاق البسط والمقام)

مثال :-

1] $\lim_{x\to 5} \frac{x+1}{x^2+3} = \frac{5+1}{25+3} = \frac{6}{28}$

2] $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$

النهاية تؤول إلى (∞) أو $(-\infty)$:-

أولاً :- نهاية دوال القوى عند (∞) :-

• $\lim_{x\to\infty} x^n = (\infty)^n = \infty$

• $\lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} (-\infty)^n = \infty & ; n \text{ زوجي} \\ (-\infty)^n = -\infty & ; n \text{ فردي} \end{cases}$

مثال :-

1] $\lim_{x\to\infty} x^7 = \infty$

2] $\lim_{x\to -\infty} x^4 = \infty$ n زوجي

3] $\lim_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$ n فردي.

ثانياً :- نهاية دوال كثيرة الحدود عند (∞) :-

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

• $\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n = \infty$

• $\lim_{x\to -\infty} P(x) = \lim_{x\to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & ; n \text{ زوجي} \\ -\infty & ; n \text{ فردي} \end{cases}$

مثال :-

1] $\lim_{x\to -\infty} 4x^6 + 3x^5 + 8 = \infty$ n زوجي

ثالثاً :- نهاية الدوال النسبية $P(x)$ عند ∞ :-

درجة البسط > درجة المقام

• $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$

• $\lim_{x\to -\infty} P(x) = (-1)^{n-m} \infty$

$n-m$; n درجة البسط ; m درجة المقام

مثال :-

• $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x-1} = \infty$

• $\lim_{x\to -\infty} \frac{7x^3+1}{x^2+1} = (-1)^{3-2} \infty = -\infty$

نطرح الأسس.

درجة البسط < درجة المقام

• $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = 0$

مثال :-

• $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{2x^4+1} = 0$

• $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

درجة البسط = درجة المقام

• $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

مثال :-

1] $\lim \frac{7x^3 - 2x^2}{2x^3+4x}$

درجة البسط = 3
درجة المقام = 3

$\lim P(x) = \frac{7}{2}$

تابع النهاية

ثالثاً: نهاية المتتابعات:-

a] $a_n = \dfrac{3n+1}{n+5} = \dfrac{3}{1}$ درجة البسط = درجة المقام

$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n+5} = 3$

b] $b_n = \dfrac{5}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \dfrac{5n^2(n^2+2n+1)}{4n^4} = \dfrac{5n^4+10n^3+1}{4n^4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b(n) = \dfrac{5n^4}{4n^4} = \dfrac{5}{4}$

c] $C_n = \dfrac{4}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^2+1} = 0$ درجة البسط < درجة المقام

رابعاً: بعض النهايات الخاصة:-

1) $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = \boxed{1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \boxed{\infty}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = \boxed{0}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^0-1}{0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = \dfrac{e^0}{1} = \boxed{1}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \boxed{e}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{1-\cos 0}{0} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = \boxed{0}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin 0}{0} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = \boxed{1}$

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = \dfrac{1-1}{\ln 1} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} x = \boxed{1}$

الاتصال

تكون الدالة متصلة عند النقطة C اذا كانت:-

① $f(c)$ موجودة

② النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

أي أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة

③ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

أنواع عدم الاتصال:-

① اتصال قفزي ← نهاية اليمنى ≠ نهاية اليسار.

② اتصال قابل للازالة ← النهاية موجودة ولكن لا تساوي $f(c)$

③ الاتصال اللانهائي اذا كانت $f(c)$ غير موجودة والنهاية غير موجودة

مثال:-

$F(x) = \begin{cases} 5x+5 ; & x>2 \\ 2-x ; & x\le 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$

① نوجد $f(c)$ عند $x=2$

$f(2) = f(c) = (2-2) = 0$

التعويض في الدالة التي تنتمي $x=2$

②

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 5x+5 = 15$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2-x = 0$

اليمنى ≠ اليسرى

النهاية غير موجودة

الدالة غير متصلة عند $\boxed{x=2}$

قوانين التفاضل

1] تعريف المشتقة :-

$$\text{الميل } m = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال :- أوجدي $f'(x)$ اذا كان $F(x) = \sin x \Leftarrow f'(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

مثال :- أوجد $f'(x)$ اذا كان $F(x) = e^{3x} \Leftarrow f'(x) = 3e^{3x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h}$$

2] قوانين الاشتقاق :-

1] $Y = f(x) = x^n \Rightarrow Y' = \frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

مثال :-

① $Y = x^3 \Rightarrow Y' = 3x^2$

② $Y = x^5 + 3x + 5 \Rightarrow Y' = 5x^4 + 3$

③ $Y = 5\sqrt[3]{x} \Rightarrow Y = 5(x)^{1/3} \Rightarrow Y' = 5\cdot\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} \Rightarrow Y' = \frac{5}{3} x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{Y' = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

3] مشتقة حاصل ضرب دالتين :- $F(x) = F_1 F_2$

$$F'(x) = \underbrace{F_1(x)}_{\text{الأولى}} \underbrace{F_2'(x)}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{F_2(x)}_{\text{الثانية}} \underbrace{F_1'(x)}_{\text{مشتقة الأولى}}$$

مثال :-

$$f(x) = (3x-2)(4x+1)$$

$$f'(x) = (3x-1)(4) + (4x+1)(3) = 24x - 1$$

4] مشتقة قسمة دالتين :- $F(x) = \frac{F_1}{F_2}$

$$F'(x) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$Y = \frac{x^7}{2x-1} \Rightarrow Y' = \frac{\overset{\text{المقام}}{(2x-1)}\overset{\text{مشتقة البسط}}{(7x^6)} - \overset{\text{البسط}}{x^7}\overset{\text{مشتقة المقام}}{(2)}}{(2x-1)^2} = \frac{14x^7 - 7x^6 - 2x^7}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{12x^7 - 7x^6}{(2x-1)^2}$$

4] مشتقة دالة مرفوع لأس :- $F(x) = [f(x)]^n \Rightarrow F'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$

مثال :-

$$F(x) = (x^5 + 2x^3 + 1)^7$$

$$F'(x) = \underbrace{7(x^5 + 2x^3 + 1)^6}_{\text{مشتقة الدالة}} \cdot \underbrace{(5x^4 + 6x^2 + 0)}_{\text{مشتقة ما بداخل القوس}}$$

⑤ مشتقة الدوال المثلثية :-

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\csc) = -\csc x \cot x$

1) $f(x) = \sin(3x+1)$

$f'(x) = \underbrace{\cos(3x+1)}_{\text{مشتقة الدالة}} \cdot \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الزاوية}}$

2) $f(x) = \tan x^{-2}$

$f'(x) = \underbrace{(\sec x^{-2})}_{\text{مشتقة الدالة}} \cdot \underbrace{(-2x^{-3})}_{\text{مشتقة الزاوية.}} = \boxed{\frac{-2\sec x^{-2}}{x^2}}$

3) $f(x) = \sec(3x^2+1)$

$f'(x) = \underbrace{\sec(3x^2+1)\tan(3x^2+1)}_{\text{مشتقة الدالة}} \cdot \underbrace{(6x)}_{\text{مشتقة الزاوية.}}$

⑥ الدوال الأسية واللوغاريتمية :-

$y = a^x \rightarrow y' = a^x \log a$

$y = e^x \rightarrow y = e^x$

$y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \log a}$

$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

أمثلة

1] $y = 2(3)^{3x+1} \Rightarrow y' = \underbrace{2(3)^{3x+1}}_{\text{الدالة الأسية}} \cdot \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الأس}} \cdot \underbrace{\log 3}_{\text{لو الأساس}}$

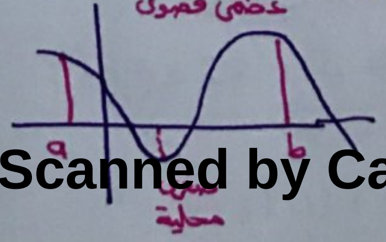
2] $y = e^{5x^2+x} \Longrightarrow y' = \underbrace{e^{5x^2+x}}_{\text{الدالة الأسية}} \cdot \underbrace{(10x+1)}_{\text{مشتقة الأس}}$

3] $y = \ln(5x+1) = y' = \frac{1}{5x+1} \cdot (5)$

4] $y = \ln \frac{3}{3x^2} \Rightarrow y' = \ln 3 - \ln 3x^2 = 0 - \frac{1}{3x^2}(6x) = \frac{-6x}{3x^2} = \frac{-3}{x}$

⑦ نظرية القيمة القصوى :-

اذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a,b]$ وذلك إما عند إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة



مثال :-

$f(x) = 2x^2 + 8x \quad ; [-5, 0]$

لايجاد النقاط الحرجة

$f'(x) = 4x + 8 \qquad f'(x) = 0$

$4x + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

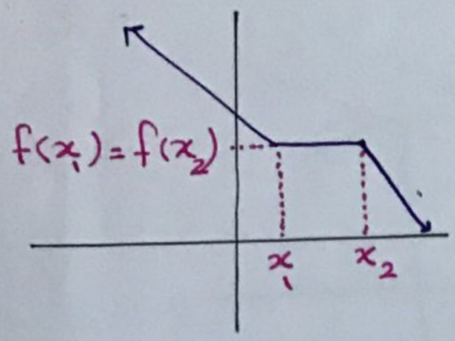
$f(-5) = 2(-5)^2 + 8(-5) = \boxed{10}$ عظمى

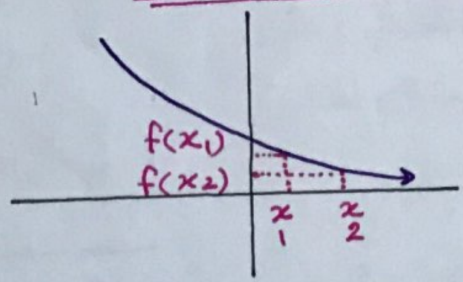
$f(0) = 0$

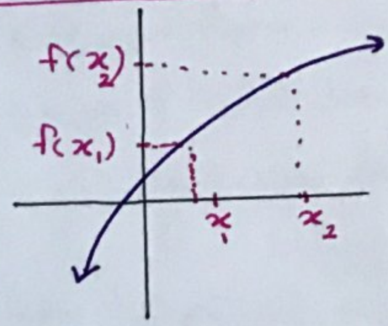
$f(-2) = 8 - 16 = \boxed{-8}$ صغرى

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

① الدوال المتزايدة - المتناقصة - الثابتة :-







$x_1 < x_2$
$f(x_1) = f(x_2)$

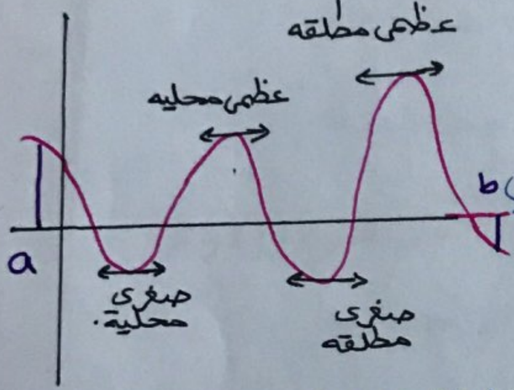
$x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

1) لتحديد هل الدالة متزايدة أو متناقصة :-

2) نظرية القيمة القصوى :-

اذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى أو صغرى على الفترة $[a,b]$ وذلك عندها إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.

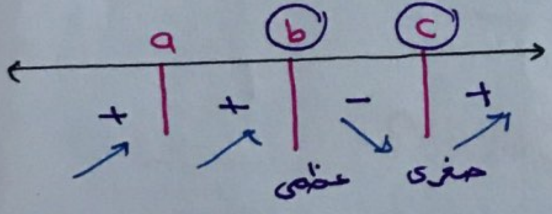


3) لتحديد النقاط الحرجة :-

① نوجد المشتقه الأولى ② $f'(x)=0$ ونوجد أصفار المشتقة

③ دراسة اشارة المشتقة على خط الأعداد

* من صغرى إلى عظمى ⟸ الدالة متزايدة
* من عظمى إلى صغرى ⟸ الدالة متناقصة



4) لتحديد نقط الانقلاب :-

① نوجد المشتقه الثانية ② $f''(x)=0$ ③ دراسة اشارة المشتقة على خط الأعداد

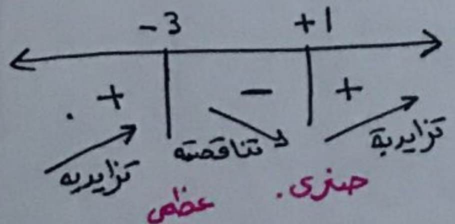
* (+) الدالة منقعرة لأعلى
* (−) الدالة منقعرة لأسفل.

مثال :- الدالة :- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 6$

① ايجاد نقاط الحرجة وهل هي نقاط عظمى أو صغرى.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

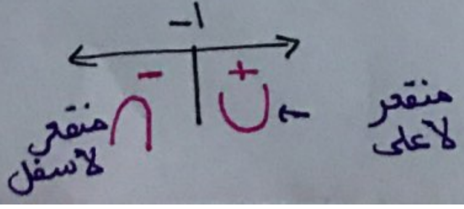
$\div 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0$



2) ايجاد نقط الانقلاب :-

$f''(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 = 0$

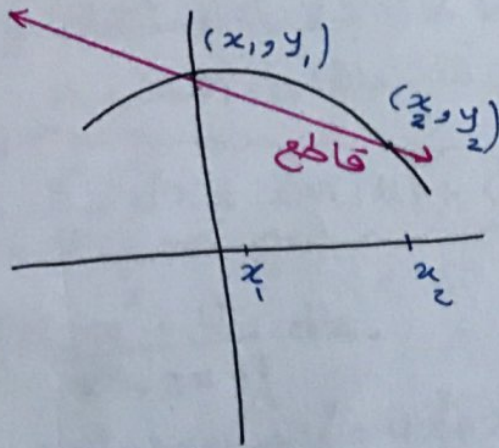
$\boxed{x = -1}$



نقطة الانقلاب $(-1, f(-1))$
$(-1, a)$

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بين هذه النقطتين



هندسياً:-

يسمى المستقيم المار بنقطتين قاطعاً ويرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}

القانون:-

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

+ متزايدة

− متناقصة.

مثال:- أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = +x^3 + 3x$ على الفترة $[-2, 1]$

$$m = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{[+1+3] - [+(-2)^3 + 3(-2)]}{3}$$

$$= \frac{[+4] - [-8-6]}{3} = \frac{4+14}{3} = \frac{18}{3}$$

متزايدة

مثال:- أوجد ميل المنحنى عند أي نقطة عليه:-

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

$\frac{\text{سالب مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

قوانين التكامل

① الدوال الأصلية والتكامل

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

① $\int 5x^4\,dx = 5\frac{x^5}{5} + C$

② $\int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C$

$= \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}\,x^{\frac{7}{5}}$

③ $\int \frac{1}{x^6}\,dx = \int x^{-6}\,dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C$

$= \frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$

② قاعدة (٢) :- لتكن u قابلة للاشتقاق في x و n عدد مخالف -1 فيكون لدينا القاعدة التالية

$$\boxed{\int \underbrace{u'}_{\text{مشتقتها}}\;\underbrace{u^n}_{\text{الدالة}}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C}$$

① $\int \underbrace{6x^2}_{\text{مشتقتها}}\underbrace{(2x^3-6)}_{\text{الدالة}}{}^4\,dx$

$= \frac{(2x^3-6)^5}{5} + C$

② $\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$

$u = x^3+3x+1 \Rightarrow u' = 3x^2+3$
$3(x^2+1)$

$\therefore \frac{1}{3}\int 3(x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$

$= \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+3x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \qquad = \frac{3}{2}$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{(x^3+3x+1)^3} + C$

③ قاعدة (٣) :-

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا بالقانون التالي :-

$$\boxed{\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C}$$

① $\frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x+1}\,dx$

$u = x^4+2x+1 \Rightarrow u' = 4x^3+2 = 2(2x^3+1)$

$\therefore \frac{1}{2}\int \frac{4x^3+1}{x^4+2x+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x^4+2x+1| + C$

② $\frac{1}{4}\int \frac{4xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}\,dx$

$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4x(e^{2x^2})$

مشتقة الأس . الدالة الأسية

$\therefore \frac{1}{4}\int \frac{4xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}\,dx = \boxed{\frac{1}{4}\ln(e^{2x^2}+5) + C}$

④ قواعد تكامل الدوال المثلثية :-

$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

$\int \sec x\tan x = \sec x + C$

$\int \csc x\cot x = -\csc x + C$

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x$

٥ خواص التكامل :-

① $\int_a^a f(x)dx=0$

② $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f dx+\int_c^b f dx$

③ $\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx$

مثال:- احسبي التكامل التالي

$$\int_{-1}^2 |x| dx$$

$$|x| = \begin{cases} +x & x\geq 0 \\ -x & x<0\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^2|x|dx = \int_{-1}^0 -x\, dx + \int_0^2 x\, dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{+x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= +\frac12 + \frac{2^2}{2} = \frac12+2 = \boxed{\frac52}$$

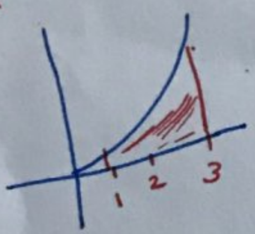
ملاحظة :

$$\int_{-a}^a f(x)dx \xrightarrow{f\ \text{زوجية}} = 2\int_0^a f(x)dx$$

$$\xrightarrow{f\ \text{فردية}} = 0$$

٦ المساحة تحت المنحنى :-

مثال: ① اوجدي مساحة تحت المنحنى $y=4x^3$ والمحور x بين $x=1$ و $x=3$



$$\int_1^3 4x^3 dx = 4\frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = (3)^4-(1)^4 = 81-1=\boxed{80}$$

②

$$\int_{-1}^2(-x^2+10)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}+10x\Big|_{-1}^2 = \frac{(-2)^3}{3}+10(2) + \frac{(-1)^3}{3} - 10(-1)$$

$$= -\frac83 + 20 - \frac13 + 10 = -3+30 = \boxed{27}$$

٧ تكامل الدالة الأسية :-

① $\int e^x dx = e^x + c$

② $\int \underset{u'}{x}\, \underset{u}{e^{x^2}}\, dx = \frac12 e^{x^2}+c \longrightarrow u=e^{x^2} \quad u'=2xe^{x^2}$

٨ التكامل بالتجزيء :- $\int x^2 e^x dx$

تستخدم ~~[illegible]~~ في حالة ليس الدالة في مشتقتها

$U=x^2 \quad dv=e^x dx$

$du=2x \quad V=e^x$

$I_1 = uv - \int v\,du = x^2e^x - 2\int x e^x dx$

$u = x \quad dv = e^x dx$

$du=dx \quad V=e^x$

$I_2 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

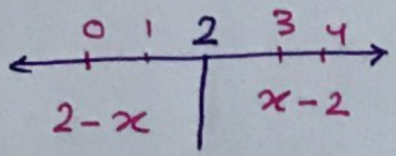
$$\boxed{I_1 = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x}$$

خصائص دالة المقياس :-

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; \; x \geq 0 \\ -x & ; \; x < 0 \end{cases}$$

التكامل — الاشتقاق — الاتصال — النهاية

أولاً - النهاية



$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & ; \; x \geq 2 \\ -(x-2) & ; \; x < 2 \end{cases}$$

* $\lim_{x \to 0} |x-2| = \lim_{x \to 0} (2-x) = 2-0 = 2$

* $\lim_{x \to 4} |x-2| = \lim_{x \to 4} (x-2) = 4-2 = 2$

* $\lim_{x \to 2} |x-2| = \lim$ $\xrightarrow{\text{اليمنى}}$ $\lim_{x \to 2^+} (x-2) = 0$ ، $\xrightarrow{\text{اليسرى}}$ $\lim_{x \to 2^-} (2-x) = 0$ النهاية موجودة

ثانياً - الاتصال

الدالة متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية لتحقق الشروط الثلاثة $\boxed{X=2}$

1. $f(2) = (2-2) = 0$ $\quad f(x) = x-2$

2. $\lim_{x \to 2} f(x)$ اليمنى / اليسرى $= 0$ النهاية موجودة

3. $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$

ثالثاً - الاشتقاق :-

$$\cdot f'(x) = \begin{cases} 1 & ; \; x \geq 2 \\ -1 & ; \; x < 2 \end{cases} \qquad f'(2^+) = 1 \qquad f'(2^-) = -1$$

$\Longrightarrow$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $\boxed{X=2}$

رابعاً - التكامل :-

* $\int_{-2}^{4} |x-2| \, dx = \int_{-2}^{2} (2-x) \, dx + \int_{2}^{4} (x-2) \, dx$

* $\int_{3}^{4} |x-2| \, dx = \int_{3}^{4} (x-2) \, dx$

* $\int_{0}^{1} |x-2| \, dx = \int (2-x) \, dx$