معهد رسول التعليمي — أ.محمد رسول الصباغ — البحث: متتاليات
علم - عمل - تفوق — رياضيات — الفقرة

أولاً: أجب عن السؤالين التاليين:

السؤال الأول: احسب المجموع

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \dots + 6$$

السؤال الثاني: اثبت أن $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ من مضاعفات العدد 7، مستعملاً البرهان بالتدريج أيا كان $n \in \mathbb{N}$.

ثانياً: أجب عن التمرينين التاليين

التمرين الأول: ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية؟

1) $u_n = \frac{n^2}{n!}$

2) $u_1 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

3) $u_n = \left(\frac{-1}{n}\right)^n$

التمرين الثاني: إذا علمت أن a, b, c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 0}$ وأن

$a \cdot b \cdot c = 729$

$a + b + c = 39$

1) أوجد a, b, c

2) أوجد أساس المتتالية إذا كان u_n ، u_{n+1}

ثالثاً: حل المسألة التالية

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق:

$u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$ ، $n \geq 0$

1) اثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً، واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ ، $n \in \mathbb{N}$

2) اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

... انتهت الأسئلة ...

$u_n > 0 \xrightarrow{f \text{ متزايد}} f(u_1) > f(u_0)$

$f \text{ متناقص}$ $\quad f(u_1) < f(u_0)$

يحافظ على جهة المتراجحة

يغير جهة المتراجحة

021 222 66 21 / 0956 659 541 / 0934 131 159

معهد رسول التعليمي | أ.محمد رسول الصباغ | البحث: حل مذاكرة المتتاليات
علم - عمل - تفوق | رياضيات | الفقرة: ....

السؤال الأول: $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \dots + 6$

هو مجموع لمتتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ حدها الأول $\frac{1}{3}$

$u_m = u_p + (m-p)r$ ، $n = 18$ عدد الحدود

$u_n = u_1 + (n-1)r \Rightarrow 6 = \frac{1}{3} + (n-1)\frac{1}{3}$

$6 = \cancel{\frac{1}{3}} + n(\frac{1}{3}) - \cancel{\frac{1}{3}} \Rightarrow n = 18$

$S = n\frac{a+l}{2}$ ، $a = \frac{1}{3}$ ، $l = 6$

$= 18\frac{1/3+6}{2} = 9(\frac{1}{3}+6)$

$= 3 + 54 = 57$

السؤال الثاني: $E(n): 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ من مضاعفات 7

من أجل $n=0$: $3 + 2^2 = 7$ من مضاعفات 7 محقق

الفرض: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ من مضاعفات 7

الطلب: $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ " " 7

الإثبات: $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$

$= 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = (7+2)3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$

$= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$

$= \underbrace{7 \cdot 3^{2n+1}}_{\text{من مضاعفات 7}} + 2\underbrace{(3^{2n+1} + 2^{n+2})}_{\text{من مضاعفات 7 فرضاً}}$

والقضية محققة.

التمرين الثاني:

$a \cdot b \cdot c = 729$ (1)

$a + b + c = 39$ (2)

بما أنها هندسية $b^2 = a \cdot c$ (3)

نعوض (3) في (1)

$b \cdot b^2 = 729 \Rightarrow b^3 = 729 \Rightarrow \boxed{b = 9}$

نعوض $b=9$ في (1): $a \cdot c = 81$

نعوض $b=9$ في (2): $a + c = 30$

إما $a = 3$ ، $c = 27$

أو $a = 27$ ، $c = 3$

$u_{n+1} > u_n$ متزايدة

3 9 27

9 : 3

التمرين الأول:

$u_n = \frac{n^2}{n!}$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$

$2 \le n$ فالمتتالية متناقصة تأكيد

$u_n = \sqrt{12 + u_n}$ ، $f(x) = \sqrt{12+x}$

$f' = \frac{1}{2\sqrt{12+x}} > 0$ فهي متزايدة تماماً

$u_n = (\frac{-1}{n})^n = \frac{(-1)^n}{n^n}$ متناوبة فهي غير مطردة.

المسألة

$f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

$f'(x) = \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$ متزايدة تماماً

أ) $E(n): \frac{1}{2} < u_n \le 1$

من أجل $n=0$: $\frac{1}{2} < u_0 = 1 \le 1$ محققة.

الفرض: $\frac{1}{2} < u_n \le 1$ ، الطلب: $\frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$

الإثبات: المتباينة فرضاً $\frac{1}{2} < u_n \le 1$

$f(\frac{1}{2}) < f(u_n) \le f(1)$

$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$

فهي محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

ب) $E(n)$: u_n متناقصة تماماً

$u_1 = \frac{5}{8}$ ، $u_1 - u_0 < 0$ فهي متناقصة

الفرض: $u_{n+1} < u_n$

الطلب: $u_{n+2} < u_{n+1}$

الإثبات: المتباينة فرضاً $u_{n+1} < u_n$ نطبق f

$f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$u_{n+2} < u_{n+1}$

ومنه فالمتتالية متناقصة

والقضية محققة من أجل $n+1$ ولكل n صحيحة

... انتهى السلم ...