بكلوريات وجامعات سوريا

(اختبار 1 – ص 207 جزء ثاني)

أولاً – أجب عن الأسئلة الآتية : (30° لكل سؤال)

السؤال الأول : احسب كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ ② $\int_0^{\ln 2} e^x \left(1 - e^x\right)^3 dx$

السؤال الثاني : حل في R المعادلة : $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G , I منتصف $[AD]$, J منتصف $[BC]$

أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2, -1, 0)$ والمستوي P

الذي معادلته $2x + y - 2z + 9 = 0$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

ثانياً – حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : أثبت أن $\ln x \le x - 1$, أياً يكن $x > 0$. باختيار $x = e^{\frac{1}{3}}$ و $x = e^{-\frac{1}{3}}$, احصر e .

التمرين الثاني : أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \ge 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_0 = 0 , u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ متزايدة تماماً

التمرين الثالث : احسب قيمة r إذا علمت أن : $\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$

التمرين الرابع : حل في C المعادلة : $z^2 - (1 + 2i)z + 3 + 3i = 0$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = 2x - 1 + \ln \frac{x}{1+x}$

1) أثبت أن المستقيم $\Delta : y = 2x - 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .

2) ادرس تغيرات التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C , وارسم كل مقارب وجدته , ثم ارسم C .

3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5 .

المسألة الثانية : يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$, نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي

دون إعادة . ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين :

1) عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X , واكتب جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب التوقع الرياضي $E(X)$, والتباين $V(X)$.

انتهت الأسئلة

(حلول اختبار 1 – ص 207 جزء ثاني)

أولاً – أجب عن الأسئلة الآتية : (30° لكل سؤال)

السؤال الأول : احسب كلاً مما يأتي :

$$\int_0^{\ln 2} e^x\left(1-e^x\right)^3 dx \quad ② \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \quad ①$$

$$\frac{1}{x}=t : \lim_{x\longrightarrow+\infty} t=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\int_0^{\ln 2} -\left(-e^x\right)\left(1-e^x\right)^3 dx=\left[-\frac{1}{4}\left(1-e^x\right)^4\right]_0^{\ln 2}=-\frac{1}{4}(1-2)^4=-\frac{1}{4}$$

السؤال الثاني : حل في R المعادلة : $9^x-3^{x+1}+2=0$

$$3^{2x}-3\times 3^x+2=0 \Rightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x-2\right)=0$$

$$3^x=1 \Rightarrow x_1=0$$

$$3^x=2 \Rightarrow x\ln 3=\ln 2 \Rightarrow x_2=\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G , I منتصف $[AD]$, J منتصف $[BC]$

أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

بما أن I منتصف $[AD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,1)$

بما أن J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوة $ABCD$

فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$

إذن I و J و G تقع على استقامة واحدة . (النقطة G تقع في منتصف $[IJ]$)

(حلول اختبار 1 – ص 207 جزء ثاني)

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$ والمستوي P

الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$

اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

بعد المركز عن المستوي المماس يساوي نصف قطر الكرة :

$$r=dist(A,P)=\frac{|(2)(2)+(1)(-1)+(-2)(0)+9|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$$

معادلة الكرة المطلوبة : $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=16$

ثانياً – حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : أثبت أن $\ln x\le x-1$, أياً يكن $x>0$. باختيار $x=e^{\frac{1}{3}}$ و $x=e^{-\frac{1}{3}}$, احصر e

المتراجحة تكافئ : $\ln x-x+1\le 0$

ليكن التابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln x-x+1$

وهو اشتقاقي على I ومشتقه : $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

بما أن $x>0$ فإن إشارة المشتق تماثل إشارة المقدار $1-x$ الذي ينعدم عند $x=1$ حيث $f(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول الاطراد نستنتج أنه أياً تكن $x>0$ فإن : $f(x)\le 0$

ومنه : $\ln x-x+1\le 0$, إذن $\ln x\le x-1$

$$\ln e^{\frac{1}{3}}\le e^{\frac{1}{3}}-1\Rightarrow\frac{1}{3}\le e^{\frac{1}{3}}-1\Rightarrow\frac{4}{3}\le e^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{64}{27}\le e$$

$$\ln e^{-\frac{1}{3}}\le e^{-\frac{1}{3}}-1\Rightarrow-\frac{1}{3}\le e^{-\frac{1}{3}}-1\Rightarrow e^{-\frac{1}{3}}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow e^{\frac{1}{3}}\le\frac{3}{2}\Rightarrow e\le\frac{27}{8}$$

إذن : $\frac{64}{27}\le e\le\frac{27}{8}$

(حلول اختبار 1 – ص 207 جزء ثاني)

التمرين الثاني : أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}\ ,u_0=0$ متزايدة تماماً

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+u_n^2}-u_n$$

بما أن $1+u_n^2>u_n^2$ (تابع الجذر التربيعي متزايد) فإن $\sqrt{1+u_n^2}>u_n$

وبالتالي : $\sqrt{1+u_n^2}-u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

التمرين الثالث : احسب قيمة r إذا علمت أن : $\dfrac{1}{\binom{4}{r}}=\dfrac{1}{\binom{5}{r}}+\dfrac{1}{\binom{6}{r}}$

شرط الحل : $0\leq r\leq 4$

$$\frac{(4-r)!\ r!}{4!}=\frac{(5-r)!\ r!}{5!}+\frac{(6-r)!\ r!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!}=\frac{(5-r)(4-r)!}{5\times 4!}+\frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times 5\times 4!}$$

$$1=\frac{(5-r)}{5}+\frac{(6-r)(5-r)}{30}$$

$$30=6(5-r)+\left(30-11r+r^2\right)$$

$$r^2-17r+30=0\Rightarrow (r-15)(r-2)=0$$

الحل المقبول : $r=2$

التمرين الرابع : حل في C المعادلة : $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$

طريقة أولى : $\Delta=(1+2i)^2-4(3+3i)=-3+4i-12-12i$

$$\Delta=-15-8i=(1)^2+(4i)^2-2(1)(4i)=(1-4i)^2$$

(أو نحسب الجذور التربيعية لـ Δ بالشكل الجبري)

$$z_1=\frac{1+2i-1+4i}{2}=3i\quad ,\quad z_2=\frac{1+2i+1-4i}{2}=1-i$$

(حلول اختبار 1 – ص 207 جزء ثاني)

<u>طريقة ثانية</u> : (مهارية)

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \cdot z_2 = 3+3i = 3i\,(1-i) \\ z_1 + z_2 = 1+2i = 3i + 1 - i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3i \\ z_2 = 1-i \end{cases}$$

ملاحظة : يمكن الحل بالاعتماد على طريقة الاتمام إلى مربع كامل .

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100° لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\frac{x}{1+x}$$

1) أثبت أن المستقيم $\Delta : y = 2x - 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .

2) ادرس تغيرات التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C , وارسم كل مقارب وجدته , ثم ارسم C .

3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5 .

1) تابع الفرق : $f(x) - y = \ln\frac{x}{1+x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \ln 1 = 0$

إذن : المستقيم $\Delta : y = 2x - 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

أياً تكن $x > 0$ فإن $x < 1 + x$ ومنه $\frac{x}{1+x} < 1$ وبالتالي $f(x) - y = \ln\frac{x}{1+x} < \ln 1 = 0$

إذن : الخط C يقع دوماً تحت المقارب Δ .

2) f مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$:

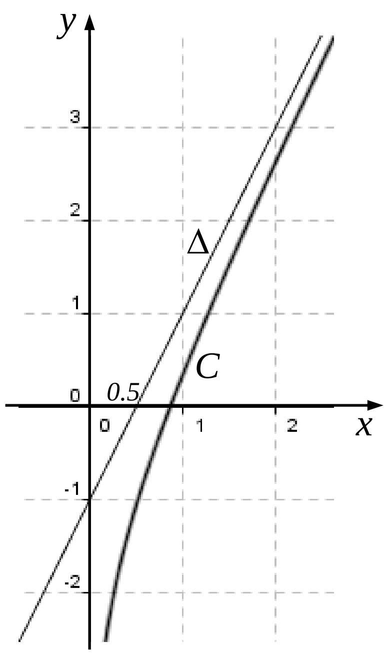
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

إذن محور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C .

$$f'(x) = 2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)' \cdot \frac{1+x}{x} = 2 + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \cdot \frac{1+x}{x} = 2 + \frac{1}{x+x^2}$$

أياً تكن $x > 0$ فإن $x + x^2 > 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$

(حلول اختبار 1 – ص 207 جزء ثاني)



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3) f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

ولأن $0\in f(]0,+\infty[)=R$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α من $]0,+\infty[$.

لدينا : $f(1)=1-\ln 2\approx 0.3>0$

أيضاً : $f(0.5)=-\ln 3\approx -1.1<0$

ولأن $f(1)\times f(0.5)<0$ فإن $0.5<\alpha<1$

<u>المسألة الثانية</u> : يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$, نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين :

1) عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X , واكتب جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب التوقع الرياضي $E(X)$, والتباين $V(X)$.

1) مجموعة قيم X هي : $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5\}$

عدد طرائق سحب بطاقتين على التتالي دون إعادة : $P_6^2=6\times 5=30$

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

2) التوقع : $E(X)=\frac{1}{30}(1\times 10+2\times 8+3\times 6+4\times 4+5\times 2)\Rightarrow E(X)=\frac{70}{30}=\frac{7}{3}$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{30}(1\times 10+4\times 8+9\times 6+16\times 4+25\times 2)\Rightarrow E\left(X^2\right)=\frac{210}{30}=7$$

التباين : $V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=7-\frac{49}{9}\Rightarrow V(X)=\frac{14}{9}$

(اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

أولاً – <u>أجب عن الأسئلة الآتية</u> : (30° لكل سؤال)

<u>السؤال الأول</u> : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

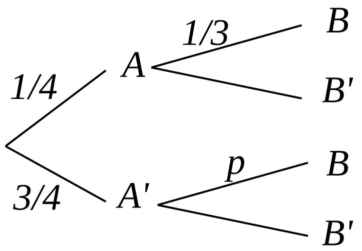
$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

① أوجد $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$ ② أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب للخط (C) .

<u>السؤال الثاني</u> : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي : $u_0=1\ ,u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$

1) أثبت أن $0\leq u_n\leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .



<u>السؤال الثالث</u> : ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور .

كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً .

<u>السؤال الرابع</u> : نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

2) بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد .

3) استنتج أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)

حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

ثانياً – <u>حل التمرينات الآتية</u> : (70° لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة : $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$

ثم أعطِ عدداً حقيقياً α يحقق الشرط : إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in]2.9,3.1[$

<u>التمرين الثاني</u> : أثبت أنه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان $\dfrac{x}{1+x}\leq \ln(x+1)$

<u>التمرين الثالث</u> :

① حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+8=0$

② في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين $z_A=\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i$ و $z_B=\overline{z_A}$. بين أن $\dfrac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$

واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

<u>التمرين الرابع</u> : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص .

بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها .

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100° لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=(x+1)^2 e^{-x}$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها , واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل .

وادرس وضع (C) بالنسبة إليه .

2) ارسم كل مقارب وجدته , ثم ارسم (C) .

3) بين أن للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $]-2,-1[$

واستنتج أن α تحقق المعادلة : $\alpha=-1-\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$

4) احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

5) استنتج مجموعة تعريف التابع $x\mapsto g(x)=\ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x)=-x$

<u>المسألة الثانية</u> : لدينا n صندوقاً $u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة

حمراء وكل من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2

ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ..... , نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1) احسب $P(R_1)$.

2) أثبت أن $P(R_2)=\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$

3) أثبت أن $P(R_k)=\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$ في حالة $2\le k\le n$.

4) نعرف $x_k=P(R_k)-\frac{1}{3}$:

a . أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k\ge 1}$ هندسية . عين أساسها وحدها الأول .

b . اكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k .

انتهت الأسئلة

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

أولاً – أجب عن الأسئلة الآتية : ($30°$ لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

① أوجد $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$

② أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب للخط (C) .

① لدينا : $$f(x)=x+4\frac{1-\cos x}{x^2}=x+4\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=x+2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

بما أن $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{\theta\longrightarrow 0^+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ فإن : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=2$

② تابع الفرق : $$f(x)-x=8\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

أياً يكن $x\in R$ فإن : $0\le\sin^2\frac{x}{2}\le 1$

في حالة $x\neq 0$ يكون : $0\le\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$

بما أن $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ فحسب مبرهنة الاحاطة : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(f(x)-x)=0$

إذن : المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب للخط (C) في جوار $+\infty$.

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

السؤال الثاني : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي : $u_0 = 1 \,, u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

1) نبرهن بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$: « $0 \leq u_n \leq 4$ »

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $0 \leq u_n \leq 4$

لنبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

لننطلق من الخاصة $E(n)$ بإضافة 12 لأطرافها ثم نجذر تربيعياً

$$12 \leq 12 + u_n \leq 16$$

ومنه $2\sqrt{3} \leq \sqrt{12 + u_n} \leq 4$

وبالتالي : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ومنه $E(n+1)$ صحيحة

إذن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

2) نفترض $Q(n)$ الخاصة : « $u_{n+1} > u_n$ »

(1) الخاصة $Q(0)$ صحيحة لأن : $u_1 > u_0$ حيث $\sqrt{13} > 1$

(2) نفترض أن $Q(n)$ صحيحة أي : $u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $Q(n+1)$ أي لنبرهن أن $u_{n+2} > u_{n+1}$

$$12 + u_{n+1} > 12 + u_n$$

ولأن تابع الجذر التربيعي متزايد تماماً فإن : $\sqrt{12 + u_{n+1}} > \sqrt{12 + u_n}$

أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$ ومنه $Q(n+1)$ صحيحة

إذن $Q(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

الأستاذ : عبـد الحميـد السيـد الأستاذ : محمـد خالـد غـزول

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

طريقة ثانية : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{12+u_n}-u_n=\dfrac{12+u_n-u_n^2}{\sqrt{12+u_n}+u_n}=\dfrac{(4-u_n)(3+u_n)}{\sqrt{12+u_n}+u_n}$

بما أن $u_n \geq 0$ فإن حدود المتتالية موجبة فالمقام موجب .

إشارة الكسر تماثل إشارة البسط $12+u_n-u_n^2$ الذي ينعدم عند $u_n=4$ أو $u_n=-3$

وبالتالي أياً كان $0 \leq u_n \leq 4$ فإن $12+u_n-u_n^2 \geq 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n \geq 0$

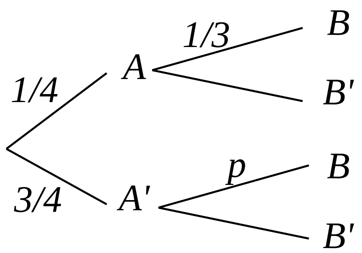
إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

- دراسة إشارة البسط بشكل آخر : بما أن $u_n \geq 0$ فإن $3+u_n \geq 3 > 0$

أيضاً : $u_n \leq 4$ ومنه $-u_n \geq -4$ وبالتالي $4-u_n \geq 0$ إذن : $(4-u_n)(3+u_n) \geq 0$

السؤال الثالث : ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور .

كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً .



- طريقة أولى : بما أن الحدثان A و B مستقلين احتمالياً فإن : $P(B\backslash A)=P(B)$

وبالاعتماد على المخطط الشجري :

$$P(B\backslash A)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times p \Rightarrow \frac{3}{4}p=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

- طريقة ثانية : بما أن A و B مستقلين احتمالياً فإن A' و B مستقلين احتمالياً وبالتالي :

$$P(B\backslash A)=P(B)=P(B\backslash A')\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

- طريقة ثالثة : (إنطلاقاً من شرط الاستقلال الاحتمالي واستخدام القوانين)

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A)\cdot P(B\backslash A)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow P(B\backslash A)=P(B)$$
$$P(B\backslash A)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$$
$$P(B\backslash A)=P(A)\cdot P(B\backslash A)+P(A')\cdot P(B\backslash A')$$
$$P(B\backslash A)[1-P(A)]=P(A')\cdot P(B\backslash A')$$
$$P(B\backslash A)=P(B\backslash A')\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

السؤال الرابع : نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$

النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

2) بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد .

3) استنتج أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)

حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

1) لدينا : الشعاعان $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

2) بما أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوياً وليكن $\mathcal{P}$.

انتماء D للمستوي $\mathcal{P}$ يكافئ وجود عددان حقيقيان a و b يحققان :

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \quad \text{حيث :} \quad \overrightarrow{AD}(-1,-1,1)$$

$$\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}9\\-1\\-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}9a+3b=-1 & \dots(1)\\-a-2b=-1 & \dots(2)\\-a+b=1 & \dots(3)\end{cases}$$

بطرح (2) من (3) نجد : $3b=2$ ومنه $b=\frac{2}{3}$ نعوض في (3) فنجد : $a=-\frac{1}{3}$

إن : $(a,b)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ حل مشترك لجملة المعادلتين (2) و (3)

وهذا الحل يحقق المعادلة (1) لأن $-3+2=-1$

إذن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد $\mathcal{P}$.

3) وجدنا أن $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ وبالتالي D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,α) و (B,β) و (C,γ) أي $(A,1-a-b)$ و $\left(B,-\frac{1}{3}\right)$ و $\left(C,\frac{2}{3}\right)$

ومنه : $\beta=-\frac{1}{3}$ و $\gamma=\frac{2}{3}$ و $\alpha=1+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

ثانياً – حل التمرينات الآتية : (°70 لكل تمرين)

التمرين الأول : أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة : $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$

ثم أعطِ عدداً حقيقياً α يحقق الشرط : إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in]2.9,3.1[$

إن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

ينتمي $f(x)$ إلى المجال $]2.9,3.1[$ الذي مركزه 3 ونصف قطره 0.1

إذا وفقط إذا تحققت المتراجحة : $|f(x)-3|<0.1$ ... (1)

حيث : $f(x)-3=\dfrac{3x+4}{x+1}-3=\dfrac{1}{x+1}$

المتراجحة (1) تكافئ $\dfrac{1}{|x+1|}<\dfrac{1}{10}$ ومنه : $|x+1|>10$

ولما كانت النهاية تحسب عند $+\infty$, نفرض $x>-1$

وبالتالي $x+1>10$ ومنه : $x>9$ لذا يمكن أخذ $\alpha=9$ أو أي عدد أكبر من 9 .

التمرين الثاني : أثبت أنه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان $\dfrac{x}{1+x}\le ln(x+1)$

المتراجحة تكافئ : $\dfrac{x}{1+x}-ln(x+1)\le 0$

ليكن التابع f المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{x}{1+x}-ln(x+1)$

وهو اشتقاقي على I ومشتقه : $f'(x)=\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{-x}{(1+x)^2}$

إشارة المشتق تماثل إشارة البسط $-x$ الذي ينعدم عند $x=0$ حيث $f(0)=0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول الاطراد نستنتج أنه أياً تكن $x>-1$ فإن : $f(x)\le 0$ ومنه $\dfrac{x}{1+x}\le ln(x+1)$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

التمرين الثالث :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+8=0$$

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين

$$z_A=\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i \text{ و } z_B=\overline{z_A}$$

بين أن $\dfrac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$, واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

1) بطريقة المميز :

$$\Delta=4\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4\times 8=4\left(-4-2\sqrt{3}\right)$$

$$\Delta=-4\left(4+2\sqrt{3}\right)=-4\left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

$$z_1=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)+2i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i$$

$$z_2=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)-2i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i$$

* ملاحظة : يمكن الحل بالإتمام إلى مربع كامل .

2) لدينا : $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{z_A^2}{\overline{z_A}\cdot z_A}=\dfrac{z_A^2}{|z_A|^2}$ حيث :

$$z_A^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2+2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)i-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$z_A^2=\left(2\sqrt{3}\right)(2)+2(3-1)i=4\sqrt{3}+4i$$

$$|z_A|^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}=8$$

إذن : $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{4\sqrt{3}+4i}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\dfrac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

وجدنا : $z_A^2 = |z_A|^2 e^{\frac{\pi}{6}i} = 8e^{\frac{\pi}{6}i}$

إما : $z_A = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i}$, أو : $z_A = 2\sqrt{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)i}$

ولأن $A\left(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1\right)$ تقع في الربع الأول فالحل المقبول $z_A = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i}$

إذن : $arg\left(z_A\right) = \frac{\pi}{12}$

من المساواة بين الشكل الأسي والشكل الجبري : $2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i} = \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i$

نكتب : $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i$

نستنتج أن : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

التمرين الرابع : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها .

- طريقة أولى : عدد اللجان التي يمكن تأليفها من الأشخاص الخمسة يساوي : $P_5^3 = 5\times4\times3 = 60$

عدد اللجان التي يجتمع فيها الشخصين المتخاصمين معاً يساوي : $3\times3! = 18$

(توضيح : ثلاثة حالات للمتخاصمين وشخص من الباقي وتبادليها ثلاثة)

عدد اللجان المطلوب : $60 - 18 = 42$

- طريقة ثانية : نرمز لمجموعة الأشخاص بالرمز $S = \{a, b, c, d, e\}$ حيث a و b متخاصمان

بفرض A مجموعة اللجان المؤلفة من المجموعة $S\setminus\{a\}$ فيكون : $n(A) = P_4^3 = 4\times3\times2 = 24$

بفرض B مجموعة اللجان المؤلفة من المجموعة $S\setminus\{b\}$ فيكون : $n(B) = P_4^3 = 24$

$A\cap B$ هي مجموعة اللجان المؤلفة من المجموعة $S\setminus\{a,b\}$ فيكون : $n(A\cap B) = 3! = 6$

عدد اللجان المطلوب : $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 24 + 24 - 6 = 42$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=(x+1)^2 e^{-x}$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها , واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع (C) بالنسبة إليه .

2) ارسم كل مقارب وجدته , ثم ارسم (C) .

3) بين أن للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2,-1]$

واستنتج أن α تحقق المعادلة : $\alpha=-1-\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$

4) احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

5) استنتج مجموعة تعريف التابع $x \mapsto g(x)=ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x)=-x$

1) f مستمر واشتقاقي على R .

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x}+2x\,e^{-x}+e^{-x}\right)$$

ولما كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0\ ;\ n\in N$ كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$f'(x)=2(x+1)e^{-x}-e^{-x}(x+1)^2=(x+1)e^{-x}(2-x-1)$$
$$f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}=\left(1-x^2\right)e^{-x}$$

إشارة المشتق تماثل إشارة $1-x^2$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\left(x=-1:f(-1)=0\quad,\quad x=1:f(1)=\frac{4}{e}\right)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط (C) في جوار $+\infty$

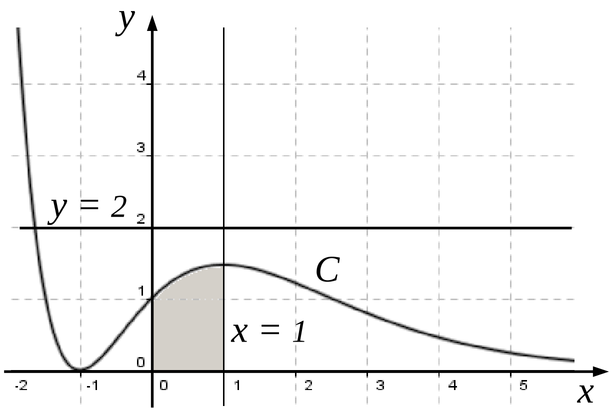
(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

الوضع النسبي : $f(x)-y=f(x)$

من جدول التغيرات نلاحظ أنه أيا كانت x من $R\setminus\{-1\}$ كان $f(x)>0$

وبالتالي الخط C يقع دوماً فوق مقاربه

ويشتركان بالنقطة $(-1,0)$



2) الرسم : لدينا $f(-1)=0$ قيمة صغرى محلياً

و $f(1)=\frac{4}{e}$ قيمة كبرى محلياً .

ولدينا $f(0)=1$.

3) f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty,-1]$

و $2\in f(]-\infty,-1])=[0,+\infty[$

فالمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد α في المجال $]-\infty,-1]$

ولما كان $2\notin f(]-1,+\infty[)=\left]0,\frac{4}{e}\right[$

فليس للمعادلة $f(x)=2$ حلول في $]-1,+\infty[$

(أو : من الرسم نجد أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ يقطع الخط البياني C بنقطة وحيدة)

إذن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=2$.

لدينا : $f(-2)=e^2$ و $f(-1)=0$

ولأن : $0\le 2\le e^2$ أي $f(-1)\le f(\alpha)\le f(-2)$ فإن $\alpha\in[-2,-1]$

$$(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2\Rightarrow(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}\Rightarrow|\alpha+1|=\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$$

وبما أن $\alpha\le -1$ فإن : $\alpha+1=-\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$ ومنه $\alpha=-1-\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$

4) من الرسم نجد أن الخط C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,1]$

فالمساحة المطلوبة : $A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x+1)^2e^{-x}\,dx$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

$u(x)=(x+1)^2$	$v'(x)=e^{-x}$
$u'(x)=2(x+1)$	$v(x)=-e^{-x}$

$$A=\left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 2(x+1)e^{-x}\,dx$$

$$A=\left[-4e^{-1}+1\right]+\int_0^1 2(x+1)e^{-x}\,dx \quad \ldots(1)$$

$$I=\int_0^1 2(x+1)e^{-x}\,dx$$

$u_1(x)=2(x+1)$	$v_1'(x)=e^{-x}$
$u_1'(x)=2$	$v_1(x)=-e^{-x}$

$$I=\left[-2(x+1)e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$I=\left[-4e^{-1}+2\right]+\left[-2e^{-x}\right]_0^1$$

$$I=\left[-4e^{-1}+2\right]+\left[-2e^{-1}+2\right]$$

$$I=-6e^{-1}+4$$

$$A=-4e^{-1}+1-6e^{-1}+4=5-\frac{10}{e}=\frac{5}{e}(e-2)$$

5) التابع $g(x)=ln(f(x))$ معرف عندما $f(x)>0$

وحسب جدول تغيرات f تتحقق هذه المتراجحة في حال $x\neq -1$

أي مجموعة تعريف g هي $R\setminus\{-1\}$

ويكتب بالشكل : $g(x)=ln\left[(x+1)^2 e^{-x}\right]=ln(x+1)^2+ln e^{-x}=ln(x+1)^2-x$

$$g(x)=-x \Rightarrow ln(x+1)^2-x=-x \Rightarrow ln(x+1)^2=0 \Rightarrow (x+1)^2=1$$

إما : $x_1=0$, أو : $x_2=-2$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

<u>المسألة الثانية</u> : لدينا n صندوقاً $u_1 ,u_2 ,......,u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء وكل من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ..... , نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1) احسب $P\left(R_1\right)$.

2) أثبت أن $P\left(R_2\right)=\frac{1}{4}P\left(R_1\right)+\frac{1}{4}$

3) أثبت أن $P\left(R_k\right)=\frac{1}{4}P\left(R_{k-1}\right)+\frac{1}{4}$ في حالة $2 \le k \le n$.

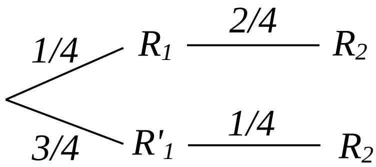
4) نعرف $x_k = P\left(R_k\right)-\frac{1}{3}$:

a . أثبت أن المتتالية $\left(x_k\right)_{k \ge 1}$ هندسية . عين أساسها وحدها الأول .

b . اكتب x_k بدلالة k واستنتج $P\left(R_k\right)$ بدلالة k .

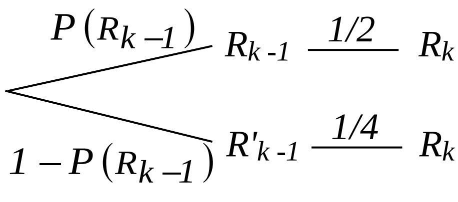
1) $P\left(R_1\right)=\frac{1}{4}$

2) حسب المخطط الشجري الموضح جانباً نكتب :



$$P\left(R_2\right)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$P\left(R_2\right)=\frac{1}{4}P\left(R_1\right)+\frac{1}{4}$$

3) في الحالة العامة عندما $k \ge 2$ لدينا المخطط الشجري :



$$P\left(R_k\right)=P\left(R_{k-1}\right)\times\frac{1}{2}+\left[1-P\left(R_{k-1}\right)\right]\times\frac{1}{4}$$

ومنه :

$$P\left(R_k\right)=\frac{1}{4}P\left(R_{k-1}\right)+\frac{1}{4}$$

(حلول اختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

4) لدينا $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$:

. a

$$x_{k+1} = P(R_{k+1}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}P(R_k) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$
$$x_{k+1} = \frac{1}{4}P(R_k) - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left[P(R_k) - \frac{1}{3}\right]$$

وبالتالي : $x_{k+1} = \frac{1}{4}x_k$ فالمتتالية $(x_k)_{k\geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

حدها الأول : $x_1 = P(R_1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

. b

$$x_k = x_1 (q)^{k-1} = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

إذن : $x_k = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$P(R_k) = \frac{1}{3} + x_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

(انتهت حلول الاختبار 2 – ص 208 جزء ثاني)

(اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

أولاً – <u>أجب عن الأسئلة الآتية</u> : (30° لكل سؤال)

<u>السؤال الأول</u> : أثبت أن للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في R ثم بين أن $\alpha \in]-1,0[$

<u>السؤال الثاني</u> : حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1)=2$

<u>السؤال الثالث</u> : ليكن التابع f المعرف بالصيغة : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$

احسب النهايتين : ① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ② $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

<u>السؤال الرابع</u> : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء . عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة , وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين .

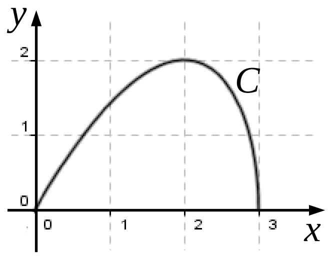
يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة . ما احتمال أن يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط ؟

ثانياً – <u>حل التمرينات الآتية</u> : (70° لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان كما يأتي :

$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots\dots+\frac{1}{2n}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{4n}$. أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان .

<u>التمرين الثاني</u> : في الشكل المجاور (C) هو الخط البياني للتابع f



المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة : $f(x)=x\sqrt{3-x}$

عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً S .

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x \in]0,3[$ ؟

② عين $A(x)$, مساحة هذا المقطع بدلالة x , ثم استنتج V حجم المجسم S .

<u>التمرين الثالث</u> : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, لدينا النقاط A و B و C

التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$

1) اكتب العدد العقدي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عين (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ تخيلياً بحتاً .

3) عين (F) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ حقيقياً .

التمرين الرابع : (نفس المسألة الثانية من النموذج الوزاري الرابع)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D, ABC)

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين . وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها .

2) ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$.

المسألة الثانية : يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء . إذا صد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 , وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 .

نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 .

ليكن A_n الحدث " يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n "

1 . احسب $P(A_2 \setminus A_1)$ و $P(A_2 \setminus A_1')$.

2 . استنتج أن $P(A_2)=0.74$.

3 . نعرف : $p_n=P(A_n)$ ① برهن أن : $p_{n+1}=0.2\,p_n+0.6$

② نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة $u_n=p_n-0.75$ بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2 , استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} p_n$.

انتهت الأسئلة

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

أولاً – أجب عن الأسئلة الآتية : ($30°$ لكل سؤال)

السؤال الأول : أثبت أن للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في R ثم بين أن $\alpha\in]-1,0[$

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x^3+x+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ومشتقه $f'(x)=3x^2+1>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على R ولأن $0\in f(R)=R$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ أي للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في R .

ولما كان $f(-1)=-1<0$ و $f(0)=1>0$ أي $f(-1)\times f(0)<0$ كان $\alpha\in]-1,0[$

السؤال الثاني : حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1)=2$

المعادلة $y'=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ من الشكل $y'=ay+b$ وحلها من الشكل $y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$

إذن حلها : $y=ke^{-\frac{x}{2}}+1$ حيث $k\in R$.

وبما أن حلها f يحقق $f(-1)=2$ فإن : $2=ke^{\frac{1}{2}}+1$ ومنه $k=e^{-\frac{1}{2}}$

إذن : $f(x)=e^{-\frac{x+1}{2}}+1$

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف بالصيغة : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$

احسب النهايتين : ① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3-|x|^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}$$

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

$$x>0 : f(x)=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} \quad : \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\frac{2}{2}=1$$

$$x<0 : f(x)=-\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} \quad : \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=-\frac{2}{2}=-1$$

السؤال الرابع : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء . عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة , وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين .
يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة . ما احتمال أن يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط ؟

ينال اللاعب نقطة واحدة فقط في حال سحب كرة سوداء وكرة بيضاء

الاحتمال المطلوب يساوي : $2\left(\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\right)=\frac{15}{28}$

ثانياً – حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$, $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان كما يأتي :

$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+......+\frac{1}{2n}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{4n}$. أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان .

$$u_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+......+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)(n+1)}=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}>0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً

$$v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+1}+\frac{1}{4(n+1)}\right)-\left(u_n+\frac{1}{4n}\right)$$

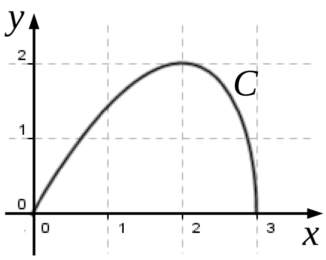
(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n}$$
$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} + \frac{-1}{4n(n+1)}$$
$$= \frac{2n-2n-1}{4n(n+1)(2n+1)}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

إذن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

$$v_n - u_n = \frac{1}{4n} \; : \; \lim_{n \longrightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

مما سبق نستنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .



التمرين الثاني : في الشكل المجاور (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة : $f(x) = x\sqrt{3-x}$

عندما يدور (C) دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً S .

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x \in]0,3[$ ؟

② عين $A(x)$, مساحة هذا المقطع بدلالة x , ثم استنتج V حجم المجسم S .

① المقطع دائرة نصف قطرها $r = x\sqrt{3-x}$

② مساحة المقطع : $A(x) = \pi r^2 = \pi\left(3x^2 - x^3\right)$

الحجم :

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \pi \int_0^3 \left(3x^2 - x^3\right) dx$$
$$V = \pi\left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \pi\left[(3)^3\left(1 - \frac{3}{4}\right) - (0)\right] = \frac{27\pi}{4}$$

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

التمرين الثالث : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, لدينا النقاط A و B و C

التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$

1) اكتب العدد العقدي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عين (ε) مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ تخيلياً بحتاً .

3) عين (F) مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ حقيقياً .

1) بفرض : $z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ عندئذٍ : $z=\frac{2\sqrt{3}}{-2i}=\frac{\sqrt{3}\,i}{-i^2}$

الشكل الجبري : $z=\sqrt{3}\,i$, الشكل الأسي : $z=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

بما أن : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=arg(z)=\frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في A .

(أو : لأن z تخيلي بحث فالمثلث ABC قائم في A)

نضع $u=\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$

2) تنتمي M إلى (ε) إذا وفقط إذا كان $M=B$ أو $arg(u)=\pm\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

وهذا يكافئ $M=B$ أو الزاوية الموجهة للشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{CM}$ تساوي $\pm\frac{\pi}{2}$

فالنقطة M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي ترى منها القطعة $[BC]$ تحت زاوية قائمة باستثناء B

إذن : (ε) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ محذوفة منها النقطة B .

3) تنتمي M إلى (F) إذا وفقط إذا كان $M=B$ أو $arg(u)=0\ (\pi)$

وهذا يكافئ $M=B$ أو $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM})\in\{0,\pi\}$

مما يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطياً

أي النقطة M تقع على المستقيم (BC) ومختلفة عن B . إذن $(F)=(BC)\setminus\{B\}$

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

- طريقة ثانية لحل الطلبين الثاني والثالث : بفرض $z_M = x + y\,i$

نكتب : $u = \dfrac{z_M - z_C}{z_M - z_B} = \dfrac{\left(x - 3\sqrt{3}\right) + (y - 1)i}{\left(x - \sqrt{3}\right) + (y + 1)i}$ (بضرب البسط والمقام بمرافق المقام)

ومنه : $u = \dfrac{\left[\left(x - 3\sqrt{3}\right) + (y - 1)i\right] \cdot \left[\left(x - \sqrt{3}\right) - (y + 1)i\right]}{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y + 1)^2}$

$$u = \frac{\left(x - 3\sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) + (y - 1)(y + 1)}{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y + 1)^2} + \frac{-\left(x - 3\sqrt{3}\right)(y + 1) + (y - 1)\left(x - \sqrt{3}\right)}{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y + 1)^2}i$$

$$u = \frac{x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 + 8}{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y + 1)^2} + \frac{-2x + 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}}{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y + 1)^2}i$$

2) يكون u تخيلياً بحتاً في حال : $x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 + 8 = 0$ بشرط $(x, y) \neq \left(\sqrt{3}, -1\right)$

ومنه : $x^2 - 4\sqrt{3}x + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 + y^2 + 8 = 0$

أي : $\left(x - 2\sqrt{3}\right)^2 + y^2 = 4$

إذن : (ε) هي الدائرة التي مركزها $\left(2\sqrt{3}, 0\right)$ ونصف قطرها 2 باستثناء النقطة $B\left(\sqrt{3}, -1\right)$ منها .

3) يكون u حقيقياً في حال : $-2x + 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$ بشرط $(x, y) \neq \left(\sqrt{3}, -1\right)$

إذن : (F) هي المستقيم الذي معادلته $x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$ باستثناء النقطة $B\left(\sqrt{3}, -1\right)$ منه .

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

<u>التمرين الرابع</u> : (نفس المسألة الثانية من النموذج الوزاري الرابع)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D, ABC)

1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,2,4) : AB^2 = (1)^2 + (2)^2 + (4)^2 = 21$

$$\overrightarrow{AC}(2,1,-1) : AC^2 = (2)^2 + (1)^2 + (-1)^2 = 6$$

$$\overrightarrow{BC}(1,-1,-5) : BC^2 = (1)^2 + (-1)^2 + (-5)^2 = 27$$

نلاحظ أن : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A .

مساحته : $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{21}\times\sqrt{6} \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

2) لدينا : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = (2)(1)+(-3)(2)+(1)(4) = 2-6+4 = 0$ ومنه : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

أيضاً : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = (2)(2)+(-3)(1)+(1)(-1) = 4-3-1 = 0$ ومنه : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

إذن : الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC .

معادلة المستوي (ABC) :

$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$ ومنه : $2x-3y+z-1=0$

3) $$h = dist(D,(ABC)) = \frac{|(2)(-4)+(-3)(2)+(1)(1)-1|}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2}}$$

ومنه : $h = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$ ويمثل ارتفاع رباعي الوجوه (D, ABC)

حجم رباعي الوجوه : $V = \frac{1}{3}S\cdot h$

ومنه : $V = \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14} = 7$

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين . وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها .

2) ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$.

1) f مستمر واشتقاقي على كل من المجالين $]0,e[$ و $]e,+\infty[$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	$\|$	$+$	0	$-$	

● عند الصفر لدينا حالة عدم تعيين من النمط $0\times\infty$ في المقام

لذا نكتب : $x(1-\ln x)=x-x\ln x$

لما كان : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to 0}(x-x\ln x)=0^+$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

إذن المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C .

● بما أن $\lim\limits_{x\to e^-} x(1-\ln x)=0^+$ فإن : $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=+\infty$

وبما أن $\lim\limits_{x\to e^+} x(1-\ln x)=0^-$ فإن : $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=-\infty$

إذن المستقيم الذي معادلته $x=e$ مقارب شاقولي للخط C .

● بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty} x(1-\ln x)=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

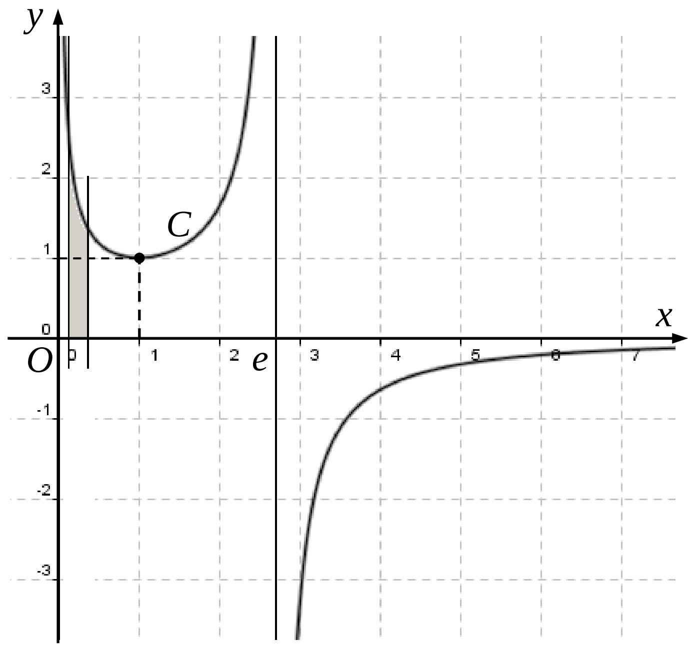
$$f'(x)=\frac{-(1-\ln x)-\left(-\frac{1}{x}\right)x}{[x(1-\ln x)]^2}=\frac{\ln x}{[x(1-\ln x)]^2}$$

إشارة المشتق تماثل إشارة البسط $\ln x$ الذي ينعدم عند $x=1$ حيث $f(1)=1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0

للتابع قيمة حدية محلية تساوي 1 يبلغها التابع عند $x=1$ وهي قيمة صغرى محلياً

2) الرسم :



3) المساحة : $A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=[F(x)]_{x_1}^{x_2}=F(x_2)-F(x_1)$

حيث F التابع الأصلي للتابع : $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ على المجال $I=\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right]$

ولأن $1-\ln x>0$ على المجال I فإن : $F(x)=-\ln(1-\ln x)$

ومنه : $F\left(\frac{1}{e}\right)=-\ln(1+1)=-\ln 2$ و $F\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\ln(1+2)=-\ln 3$

إذن : $A=-\ln 2+\ln 3 \Rightarrow A=\ln\frac{3}{2}$

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

المسألة الثانية : يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء . إذا صد ضربة الجزاء n
فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 , وإذا لم يصد ضربة الجزاء n
فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 .

نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 .

ليكن A_n الحدث " يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n "

1 . احسب $P(A_2 \backslash A_1)$ و $P(A_2 \backslash A_1')$.

2 . استنتج أن $P(A_2)=0.74$.

3 . نعرف $p_n = P(A_n)$:

① برهن أن : $p_{n+1} = 0.2\, p_n + 0.6$

② نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$

بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2

استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} p_n$.

مخطط (1):

$0.7 \to A_1 \xrightarrow{0.8} A_2$

$0.3 \to A_1' \xrightarrow{0.6} A_2$

مخطط (2):

$p_n \to A_n \xrightarrow{0.8} A_{n+1}$

$1-p_n \to A_n' \xrightarrow{0.6} A_{n+1}$

1 . حسب معطيات المسألة : $P(A_2 \backslash A_1)=0.8$ و $P(A_2 \backslash A_1')=0.6$

2 . حسب المخطط (1) : $P(A_2)=0.7\times 0.8+0.3\times 0.6 \Rightarrow P(A_2)=0.74$

أو باستخدام القوانين :

$$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1'\cap A_2)$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2\backslash A_1)+P(A_1')\cdot P(A_2\backslash A_1')$$
$$P(A_2)=0.7\times 0.8+0.3\times 0.6=0.74$$

(حلول اختبار 3 – ص 210 جزء ثاني)

3 . 1 حسب المخطط (2) :

$$p_{n+1} = 0.8\,p_n + 0.6\,(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = 0.2\,p_n + 0.6$$

2 لدينا $u_n = p_n - 0.75$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.75 = 0.2\,p_n + 0.6 - 0.75$$
$$u_{n+1} = 0.2\,p_n - 0.15 = 0.2\,(p_n - 0.75)$$
$$u_{n+1} = 0.2\,u_n = q\,u_n$$

إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q = 0.2$

حدها الأول : $u_1 = p_1 - 0.75 = 0.70 - 0.75 = -0.05$

وبالتالي : $u_n = u_1\,(q)^{n-1}$

ومنه : $u_n = -0.05\,(0.2)^{n-1} = -0.25\,(0.2)^n$

$$p_n = 0.75 + u_n = 0.75 - 0.25\,(0.2)^n$$

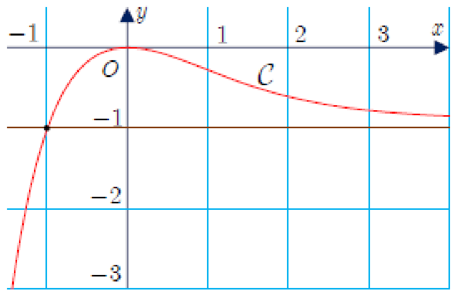
بما أن $-1 < q = 0.2 < 1$ فإن $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (0.2)^n = 0$

ومنه : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p_n = 0.75$

(انتهت حلول الاختبار 3 – ص 208 جزء ثاني)

(اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

أولاً – أجب عن الأسئلة الآتية : (°40 لكل سؤال)



السؤال الأول : في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f

من خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

1) ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟

وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب ؟

2) يقبل f قيماً حدية محلياً . عينها وعين نوعها .

3) في حالة عدد حقيقي k , عين بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x)=k$.

السؤال الثاني : لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$

1) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S ؟

2) ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

السؤال الثالث : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$

بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية : 1) المثلث ABC قائم .

2) المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) . 3) حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$.

ثانياً – حل التمرينات الآتية : (°70 لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x\cdot e^{-x}$

1) احسب $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$ 2) أثبت أن التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$

التمرين الثاني : المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق :

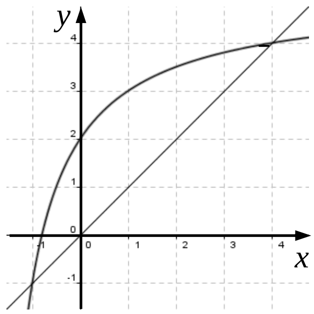
$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases},t\in R \quad \text{و} \quad L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1+2s \end{cases},s\in R$$

1) أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

2) أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L'.

التمرين الثالث : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$

1) باستعمال الرسم , مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0,u_1,u_2,u_3



② ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها .

③ نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 1}$

1 . بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول

2 . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية u_n .

<u>التمرين الرابع</u> : نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية : $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$

و $d = 3$ بالترتيب . والمطلوب :

① ارسم النقاط A و B و C و D ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② عين $\arg \dfrac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .

③ أثبت أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100° لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = x(\ln x)^2$

① أثبت $f(x)$ يكتب بالشكل : $f(x) = 4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $g(x) = -2x\ln x$

أثبت أنه عندما $x > 1$ يكون $f(x) - g(x) = x f'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g .

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0,+\infty[$

① بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y = x f'(x_0) - g(x_0)$

② ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب , ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس T للمنحني C_f عند نقطة فاصلتها x_0

<u>المسألة الثانية</u> : نتأمل صندوقين . يحتوي الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد 3 , 2 , 1

ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد 5 , 4 , 3 , 2

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب :

① اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

② ليكن A الحدث إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل الرقم (3)

وليكن B الحدث مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟ علل إجابتك .

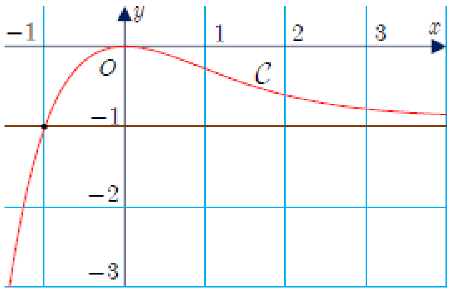
③ نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه .

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

أولاً – أجب عن الأسئلة الآتية : ($40°$ لكل سؤال)

السؤال الأول : في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f



من خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

1) ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟

وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب ؟

2) يقبل f قيماً حدية محلياً . عينها وعين نوعها .

3) في حالة عدد حقيقي k , عين بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x)=k$.

1) المستقيم d الذي معادلته : $y=-1$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

في حال $x\in]-\infty,-1[$ يكون C تحت المقارب d .

في حال $x\in]-1,+\infty[$ يكون C فوق المقارب d .

ويشترك C و d بالنقطة $(-1,-1)$.

2) إن : الصفر قيمة كبرى محلياً يبلغها التابع عند $x=0$.

3) عندما $k\in]-\infty,-1]\cup\{0\}$ يكون للمعادلة حل واحد .

عندما $k\in]-1,0[$ يكون للمعادلة حلين مختلفين .

عندما $k\in]0,+\infty[$ ليس للمعادلة حلول .

السؤال الثاني : لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$

1) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S ؟

2) ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

1) عدد الأعداد المختلفة يساوي : $P_6^3=6\times5\times4=120$

2) الآحاد (5) يتم اختياره بطريقة واحدة والمئات (2 أو 3) يتم اختياره بطريقتين والعشرات يتم اختياره بأربعة طرائق , وبالتالي عدد الأعداد يساوي : $1\times4\times2=8$

طريقة ثانية : مجموعة الأعداد التي تحقق المطلوب هي :

$A=\{235,265,275,295,325,365,375,395\}$, وعددها : $n(A)=8$

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

السؤال الثالث : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$

بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية :

① المثلث ABC قائم .

② المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

③ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$.

① لدينا : $\overrightarrow{AB}(3,3,3): AB^2=(3)^2+(3)^2+(3)^2=27$

$$\overrightarrow{AC}(3,0,-3): AC^2=(3)^2+(0)^2+(-3)^2=18$$

$$\overrightarrow{BC}(0,-3,-6): BC^2=(0)^2+(-3)^2+(-6)^2=45$$

نلاحظ أن : $AB^2+AC^2=BC^2$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A .

فالمقولة صحيحة .

② لدينا : $\overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$

وبالتالي $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=(-3)(3)+(6)(3)+(-3)(3)=-9+18-9=0$ ومنه : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

أيضاً $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(-3)(3)+(6)(0)+(-3)(-3)=-9+0+9=0$ ومنه : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

إذن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم على المستوي (ABC)

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

فالمقولة صحيحة .

③ حجم رباعي الوجوه : $V=\frac{1}{3}S(ABC)\cdot AD$

حيث : $S(ABC)=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}\Rightarrow S=\frac{9\sqrt{6}}{2}$

أيضاً : $AD^2=(-3)^2+(6)^2+(-3)^2=54\Rightarrow AD=3\sqrt{6}$

وبالتالي : $V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27$

فالمقولة خاطئة .

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

ثانياً – حل التمرينات الآتية : (70° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x\cdot e^{-x}$

1. احسب $\int_0^{ln3} f(x)\,dx$

2. أثبت أن التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$

1. نكامل بالتجزئة : $I=\int_0^{ln3} x\cdot e^{-x}\,dx$

$u(x)=x$	$v'(x)=e^{-x}$
$u'(x)=1$	$v(x)=-e^{-x}$

$$I=\left[-x\cdot e^{-x}\right]_0^{ln3}+\int_0^{ln3} e^{-x}\,dx$$

$$I=\left[-ln3\times e^{-ln3}+0\right]+\left[-e^{-x}\right]_0^{ln3}$$

$$I=\left[-\frac{1}{3}ln3\right]+\left[-\frac{1}{3}+1\right]=\frac{1}{3}(2-ln3)$$

2. $y'+y=\left(x\cdot e^{-x}\right)'+x\cdot e^{-x}=e^{-x}-x\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}=e^{-x}$

التمرين الثاني : المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق :

$$L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1+2s \end{cases},s\in R \quad و \quad L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases},t\in R$$

1. أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

2. أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L' .

1. نحل جملة معادلاتهما حلاً مشتركاً :

$$\begin{cases} -1=4-5s\Rightarrow s=1 & \dots(1) \\ 1-t=3-2s & \dots(2) \\ 1-2t=-1+2s & \dots(3) \end{cases}$$

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

نعوض (1) في (2) فنجد : $t=0$

وبالتالي $(t,s)=(0,1)$ حل لجملة المعادلتين (1) و (2)

نعوض هذا الحل في (3) فنجد : $1-0=-1+2 \Rightarrow 1=1$

وبالتالي هذا الحل هو أيضاً حل لـ (3)

فالمستقيمين L و L' متقاطعين في النقطة $A(-1,1,1)$.

② لدينا $\vec{u}(0,-1,-2)$ شعاع موجه للمستقيم L , و $\vec{u}'(-5,-2,2)$ شعاع موجه للمستقيم L' .

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي المحدد بالمستقيمين L و L' , عندئذٍ :

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow -b-2c=0 \Rightarrow b=-2c \quad \ldots(1)$$
$$\vec{n}\cdot\vec{u}'=0 \Rightarrow -5a-2b+2c=0 \quad \ldots(2)$$

نفترض $c=1$ وبالتعويض في (1) نجد : $b=-2$

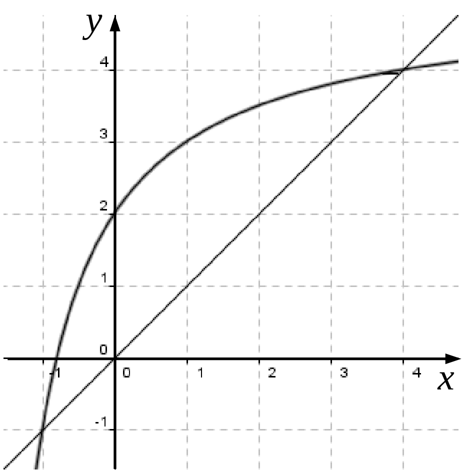
نعوضهما في (2) : $-5a+4+2=0 \Rightarrow a=\frac{6}{5}$

إذن : $\vec{n}\left(\frac{6}{5},-2,1\right)$ والنقطة $A(-1,1,1)$ من المستوي المطلوب فمعادلته :

$\frac{6}{5}(x+1)-2(y-1)+1(z-1)=0$ ومنه $6x-10y+5z+11=0$

* ملاحظة : يوجد طرائق أخرى لإيجاد معادلة المستوي .

<u>التمرين الثالث</u> : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$



① باستعمال الرسم , مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0,u_1,u_2,u_3

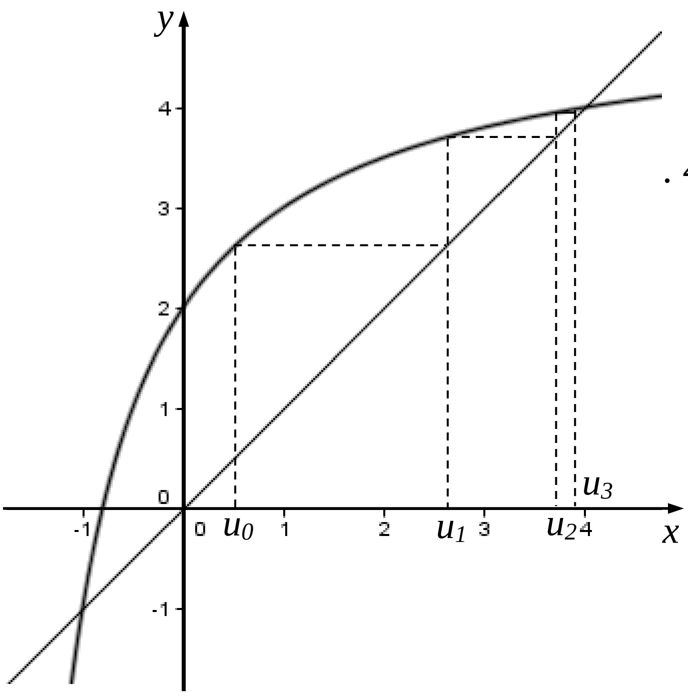
② ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها .

③ نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$

1 . بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول

2 . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n , وعين نهاية المتتالية u_n .

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)



① التمثيل .

② نلاحظ أن حدود المتتالية تزداد

لذا نخمن أنها متتالية متزايدة وتتقارب من العدد 4 .

③ 1 .

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+4}{u_n+2}-4}{\frac{5u_n+4}{u_n+2}+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{5u_n+4-4u_n-8}{5u_n+4+u_n+2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{u_n-4}{u_n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{6}v_n$$

إذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$

وحدها الأول : $v_0=\frac{u_0-4}{u_0+1}=\frac{0.5-4}{0.5+1}=-\frac{7}{3}$

2 . $v_n=v_0\,q^n=-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

لدينا $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$ ومنه $v_n\cdot u_n+v_n=u_n-4$ وبالتالي $4+v_n=(1-v_n)u_n$

إذن : $u_n=\frac{4+v_n}{1-v_n}=\frac{4-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}=\frac{12-7\left(\frac{1}{6}\right)^n}{3+7\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

وبما أن $-1<\frac{1}{6}<1$ فإن $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=0$

إذن $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=\frac{12}{3}=4$

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

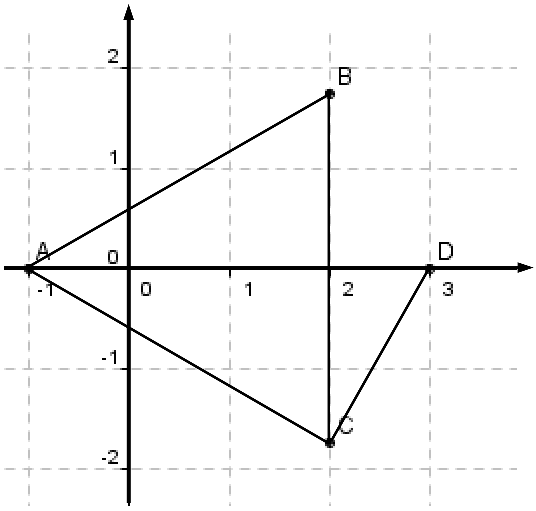
<u>التمرين الرابع</u> : نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية : $a=-1$ و $b=2+i\sqrt{3}$

و $c=2-i\sqrt{3}$ و $d=3$ بالترتيب . والمطلوب :

① ارسم النقاط A و B و C و D ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② عين $arg\,\dfrac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .

③ أثبت أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.



① $AB=|b-a|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

$BC=|c-b|=\left|0-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$

$AC=|c-a|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

نلاحظ أن $AB=BC=AC$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع .

② $$\frac{a-c}{d-c}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{i\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}$$

ومنه : $arg\,\dfrac{a-c}{d-c}=arg\left(i\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ فالمثلث DAC قائم في C .

③ $$\frac{-a+2b+2c}{-1+2+2}=\frac{1+4+2i\sqrt{3}+4-2i\sqrt{3}}{3}=3=d$$

إذن : D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى :

أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x(\ln x)^2$

① أثبت $f(x)$ يكتب بالشكل : $f(x)=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=-2x\ln x$

أثبت أنه عندما $x>1$ يكون $f(x)-g(x)=xf'(x)$

واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g .

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0,+\infty[$

① بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y=xf'(x_0)-g(x_0)$

② ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب , ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس T للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

أولاً :

① $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\left[2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2$

إذن : $f(x)=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$

② التابع f مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\sqrt{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

بما أن $\lim\limits_{u\to0}(u\ln u)=0$ $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)=$ فإن : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=4(0)^2=0$

$$f'(x)=(\ln x)^2+2(\ln x)\times\frac{1}{x}x=(\ln x+2)\ln x$$

إشارة المشتق تماثل إشارة كثير الحدود t^2+2t حيث $t=\ln x$

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

ينعدم المشتق عندما : $\ln x=-2 \Rightarrow x=e^{-2} : f\left(e^{-2}\right)=4e^{-2}$

أو : $\ln x=0 \Rightarrow x=1 : f(1)=0$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ثانياً : لدينا : $g(x)=-2x\ln x$

$$x f'(x)=x\left[(\ln x)^2+2\ln x\right]=x(\ln x)^2+2x\ln x$$

ومنه : $f(x)-g(x)=x f'(x)$

عندما $x>1$ فإن $f'(x)>0$ على المجال $]1,+\infty[$ وبالتالي : $x f'(x)>0$

ومنه : $f(x)-g(x)>0$

إذن C_f يقع دوماً فوق C_g على المجال $]1,+\infty[$

ثالثاً : لدينا x_0 من $]0,+\infty[$

1 معادلة المماس T للمنحني C_f في x_0 :

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$y=x f'(x_0)+f(x_0)-x_0 f'(x_0) \quad \ldots(1)$$

حسب ما سبق : $f(x_0)-g(x_0)=x_0 f'(x_0)$

ومنه : $f(x_0)-x_0 f'(x_0)=g(x_0)$

نعوض في (1) فنجد : $y=x f'(x_0)+g(x_0)$

2 التقاطع : $x=0 \Rightarrow y_0=g(x_0)=-2x_0\ln x_0$ حيث $x_0>0$

وبالتالي المماس T يقطع محور التراتيب بالنقطة $(0,-2x_0\ln x_0)$

يتم إنشاء المماس T برسم مستقيم يمر من النقطتين $(0,-2x_0\ln x_0)$ و $\left(x_0,x_0(\ln x_0)^2\right)$

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

المسألة الثانية : نتأمل صندوقين . يحتوي الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد $3 , 2 , 1$

ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد $5 , 4 , 3 , 2$

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب :

1) اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

2) ليكن A الحدث إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل الرقم (3)

وليكن B الحدث مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟ علل إجابتك .

3) نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه .

1) ننظم جدولاً لفضاء العينة :

	2	3	4	5
1	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
2	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
3	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$

2) لدينا : $A=\{(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}$ ومنه $n(A)=6$

ولدينا : $B=\{(1,5),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$ ومنه $n(B)=6$

وبالتالي : $A\cap B=\{(3,3),(3,4),(3,5)\}$ ومنه $n(A\cap B)=3$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \text{ و } P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

لما كان $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ كان $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

إذن الحدثان A و B مستقلان احتمالياً

(حلول اختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)

③ مجموعة قيم المتحول العشوائي : $X(\Omega)=\{3,4,5,6,7,8\}$

بالاستعانة بجدول فضاء العينة نكتب جدول القانون الاحتمالي الآتي :

x	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع :

$$E(X)=\frac{1}{12}(3\times1+4\times2+5\times3+6\times3+7\times2+8\times1)\Rightarrow E(X)=\frac{66}{12}=\frac{11}{2}=5.5$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{12}(9\times1+16\times2+25\times3+36\times3+49\times2+64\times1)\Rightarrow E\left(X^2\right)=\frac{386}{12}$$

التباين : $V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{386}{12}-\frac{121}{4}\Rightarrow V(X)=\frac{23}{12}$

(انتهت حلول الاختبار 4 – ص 212 جزء ثاني)