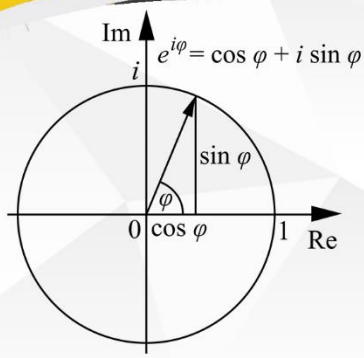
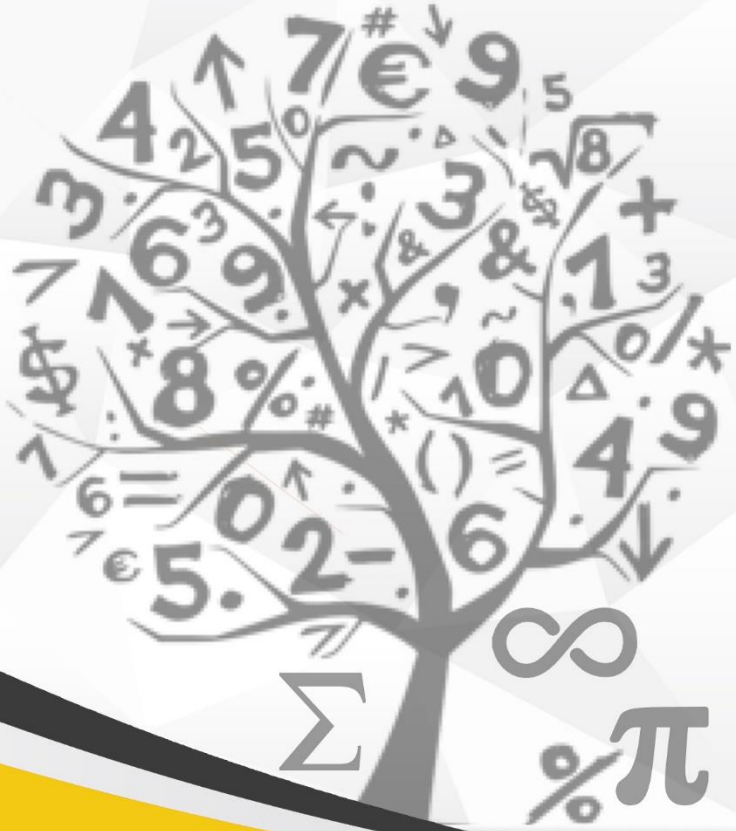


أوراق عمل

الجزء الأول كاملاً

أوراق عمل شاملة لأفكار الفصل الأول كاملاً

المدرّس: محمد رسول الصباغ



0934131159

المحتويات

قسم المتتاليات 1
قسم النهايات 12
قسم الاشتقاق..... 31
قسم نهاية متتالية 41
قسم التابع اللوغاريتمي..... 47
قسم التابع الأسي 62
قسم التكامل 72

قسم المتتاليات

السؤال الأوّل :

في حالة العدد الطبيعي $n \geq 1$ ليكن:

$$v_n = u_{2n} - u_n \quad , \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

السؤال الثاني :

احسب المجموع: $S = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{96}$

السؤال الثالث :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $u_0 = 1 \, , u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+3}$

1- أثبت أن التابع $x \to \frac{x+1}{x+3}$ متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$.

2- أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ أيا كانت $n \in \mathbb{N}$.

3- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

السؤال الرابع :

لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بالشكل: $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 3v_n + 4 \end{cases}$

ولنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ بالشكل: $w_n = v_n + 2$، أثبت أن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، ثم عبر عن v_n بدلالة n.

السؤال الخامس:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بالشكل: $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 10u_n - 18 \end{cases}$

بحساب عبارة $u_n - 2$ عند كل $n \geq 0$، عبر عن u_n بدلالة n.

السؤال السادس:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_1 + u_2 + u_3 = 9 \, , u_{10} + u_{11} = 40$

احسب $r \, , u_o$ ثم احسب المجموع $S_n = u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n} + u_{3n+1}$.

السؤال السابع:

a, b, c ثلاث حدود متوالية في متتالية حسابية، بفرض أن مجموع هذه الحدود (21)، وأن مجموع مربعاتها يساوي (197) عيّن هذه الحدود.

السؤال الثامن:

ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n، ليكن في حالة عدد طبيعي غير معدوم n

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

1- احسب S_1 و S_2، ثم احسب S_{n+1} بدلالة S_n .

2- أثبت بالتدريج أن $S_n = \frac{n}{n+1}$.

السؤال التاسع:

ادرس جهة اطراد المتتاليات الآتية:

1- $u_n = \frac{1}{2^n}$

2- $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

3- $u_n = (-1)^n . 2$

4- $u_n = \frac{1}{n!}$

السؤال العاشر:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها: $u_5 = 3\,, u_8 = 81$

1- احسب q

2- احسب u_0

3- اكتب u_n بدلالة n

4- احسب المجموع $S = u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

السؤال الحادي عشر:

a, b, c ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية، احسب a, b, c إذا علمت أن:

$$\begin{cases} a+b+c=12 \\ a^2+b^2+c^2=56 \end{cases}$$

السؤال الثاني عشر:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_{10}=32\ , u_6=16$، المطلوب:

1- احسب r

2- احسب u_1

3- اكتب u_n بدلالة n

4- احسب المجموع $S=u_1+u_2+\cdots+u_8$

السؤال الثالث عشر:

أثبت أن المتتالية u_n المعرفة وفق: $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ متزايدة تماماً

السؤال الرابع عشر:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1- $u_n=\frac{n^2}{n!}$

2- $u_n=1+\frac{1}{n^2}$

3- $u_n=\left(-\frac{1}{n}\right)^n$

4- $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

السؤال الخامس عشر:

a, b, c ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية تحقق: $\begin{cases} a+b+c=21 \\ a^2+b^2+c^2=197 \end{cases}$، احسب هذه الحدود.

السؤال السادس عشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

1- احسب u_1, u_2

2- لتكن $v_n = u_n + 5$، احسب v_0, v_1

3- أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، ثم عبر عن v_n بدلالة n.

السؤال السابع عشر:

أثبت أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*$ كان: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

السؤال الثامن عشر:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

2- أثبت بالتدريج أنك $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أياً تكن $n \geq 1$.

السؤال التاسع عشر:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1- $u_n = \frac{2n}{n+1}$

2- $u_n = \frac{n+1}{3n}$

3- $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

السؤال العشرون:

بفرض أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية تحقق: $u_0 = 3\ , q = 2$، المطلوب:

1- احسب u_3.

2- اكتب u_n بدلالة n.

3- احسب: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

السؤال الواحد والعشرون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_3 = 12\ , u_{17} = 82$، المطلوب:

1- احسب $r\ , u_0$.

2- اكتب u_n بدلالة n.

3- احسب $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n.

السؤال الثاني والعشرون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية فيها: $\begin{cases} u_0 = 1\ , u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \end{cases}$، ولتكن: $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية معرفة بالشكل: $v_n = u_{n+1} - u_n$، المطلوب:

1- احسب قيمة v_1, v_0.

2- برهن أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية يطلب تعيين أساسها.

3- احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

السؤال الثالث والعشرون:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالتدريج وفق: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

1- احسب u_1, u_2, u_3 ثم استنتج أن المتتالية ليست حسابية أو هندسية.

2- أثبت أن $0 < u_n \leq 3$ أياً تكن n.

3- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$، المطلوب:

a) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية، عين حدها الأول وأساسها.

b) اكتب الحد العام ل v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

c) احسب المجموع $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ بدلالة n.

السؤال الرابع والعشرون:

a, b, c ثلاث أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$. نعلم أن c, b, a ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q، ونعلم أن $c, 2b, 3a$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية. المطلوب: احسب q.

السؤال الخامس والعشرون:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات:

1) $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$ 2) $u_n = \frac{n}{2^n}$ 3) $u_n = \frac{3}{n^2}$

4) $u_n = \frac{n^2}{n!}$ 5) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

السؤال السادس والعشرون:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_{10} = 31$, $u_0 = 1$

1) احسب r

2) اكتب u_n بدلالة n

3) احسب المجموع $u_2 + u_3 + \cdots + u_9$

السؤال السابع والعشرون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$متتالية هندسية فيها: $u_7 = 48$, $u_5 = 12$

1) احسب q

2) من أجل $q = 2$

a) اكتب u_n بدلالة n

b) احسب المجموع $u_2 + u_3 + \cdots + u_9$

السؤال الثامن والعشرون:

a, b, c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية، احسب a, b, c إذا علمت أن:

$$a + b + c = 18 \quad , \quad a^2 + b^2 + c^2 = 116$$

السؤال التاسع والعشرون:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

أثبت أن المتتالية المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ هي متتالية حسابية، أوجد أساسها، ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n .

السؤال الثلاثون:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

السؤال الواحد والثلاثون:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

السؤال الثاني والثلاثون:

a, b, c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية، احسب a, b, c إذا علمت أن:

$$a + b + c = 28 \quad , \quad a \cdot b \cdot c = 512$$

السؤال الثالث والثلاثون:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية: $3^n \geq (n+2)^2$ أياً تكن $n \geq 3$

السؤال الرابع والثلاثون:

احسب قيمة المقدار A: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \cdots + 6$

السؤال الخامس والثلاثون:

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية:

1- $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

2- $u_n = \frac{n}{2^n}$

السؤال السادس والثلاثون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_0 = 1\,, u_{10} = 31$

1- احسب r .

2- اكتب u_n بدلالة n .

3- احسب المجموع: $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_9$

السؤال السابع والثلاثون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها: $u_5 = 12\,, u_7 = 48$

1- احسب q .

2- من أجل $q = 2$:

a) اكتب u_n بدلالة n .

b) احسب المجموع: $S = u_5 + u_6 + u_7$

السؤال الثامن والثلاثون:

بيّن نوع المتتالية الآتية وأوجد أساسها:

1- $u_n = 5^{n+1}$

2- $u_n = \frac{2n+5}{3}$

السؤال التاسع والثلاثون:

a, b, c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية، احسبها إذا علمت أن:

$$\begin{cases} a + b + c = 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 116 \end{cases}$$

السؤال الأربعون:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

أثبت أن المتتالية المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ هي متتالية حسابية، ثم أوجد أساسها .

السؤال الواحد والأربعون:

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية:

1- $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ 2- $u_n = \frac{3}{n^2}$

السؤال الثاني والأربعون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_{10} = -12\,, u_{20} = -32$

1- احسب $r\,, u_0$.

2- اكتب u_n بدلالة n .

3- احسب المجموع: $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{10}$

السؤال الثالث والأربعون:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها: $u_4 = 12\,, q = 2$

1- احسب u_0 .

2- اكتب u_n بدلالة n .

3- احسب المجموع: $u_4 + u_5 + u_6$

السؤال الرابع والأربعون:

بيّن نوع المتتالية الآتية وأوجد أساسها:

1- $u_n = 2n + 5$ 2- $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$

السؤال الخامس والأربعون:

a, b, c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية، احسبها إذا علمت أن: $\begin{cases} a+b+c = 28 \\ abc = 512 \end{cases}$

السؤال السادس والأربعون:

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ ولتكن $v_n = u_{2n} - u_n$.

أثبت أن المتتالية v_n متزايدة تماماً .

السؤال الأول:

بيّن أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة (ربما بدءاً من حد معين u_0)

1- $u_n = \frac{n^2}{n!}$

2- $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

3- $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

4- $u_n = \frac{1}{n}$

السؤال الثاني:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r وفيها: $u_5 = -21 , u_3 = -11$، المطلوب:

4- اكتب u_n بدلالة n .

5- احسب المجموع: $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_8$

السؤال الثالث:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \end{cases}$

1- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أيّاً كان العدد الطبيعي n .

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

السؤال الرابع:

بيّن نوع المتتالية الآتية وأوجد أساسها:

1- $u_n = 5^{n+1}$

2- $u_n = \frac{2n+5}{3}$

السؤال الخامس:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

قسم النهايات

السؤال الأول :

فيما يلي أوجد نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a :

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x \quad a=-\infty$

2) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \quad a=-1,+\infty$

3) $f(x)=\frac{\sin^2 4x}{4x^2} \quad a=0$

السؤال الثاني :

ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$ ، ثم أثبت وجود عدد يحقق الشرط:

إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9\ ,\ 5.1[$

السؤال الثالث :

ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$:

1- عيّن D_f.

2- أوجد الأعداد a,b,c التي تحقق: $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$.

3- ادرس نهاية التابع f عند حدود مجموعة تعريفه.

السؤال الرابع :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=-\frac{2x}{x+1}$، المطلوب:

1- أوجد نهاية التابع f عند $\pm\infty$ وعند -1 ثم أوجد معادلة المستقيمات المقاربة لخطه البياني.

2- ادرس الوضع النسبي لكل مقارب وجدته.

السؤال الخامس :

أثبت أن $\Delta: y=7x+5$ مقارب مائل للخط البياني c للتابع f المعطى وفق :

$f(x)=7x+5-\frac{7}{\sqrt{x^2+1}}$ ثم ادرس الوضع النسبي ل c مع Δ .

السؤال السادس :

أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع التالية ثم احسب نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف :

$$f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad , \quad f(x) = \frac{4x^2}{(x-3)(7-x)}$$

السؤال السابع:

ليكن f التابع المعطى بالعلاقة : $f(x) = \frac{2\cos x - 2}{x^2}$.

1- أوجد مجموعة تعريفه .

2- احسب نهاية التابع f عند $a = 0$.

السؤال الثامن :

ليكن لدينا التابع f المعطى بالعلاقة : $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$:

1- أوجد مجموعة تعريفه ، ثم أثبت أن التابع f يكتب بالشكل : $f(x) = a + \frac{b}{x+3}$.

2- أوجد عدداً A يحقق الشرط : إذا كان $x < A$ كان $f(x)$ في المجال $]-1.95 , 2.05[$.

السؤال التاسع:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$، والمطلوب:

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمَّ $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (x+1)\right)$.

2- استنتج وجود مقارب مائل Δ ل C_f في جوار $+\infty$.

3- ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع المقارب Δ.

4- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

5- أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وأن نهاية $(f(x) - ax)$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b.

6- استنتج وجود مقارب مائل ل C_f في جوار $-\infty$.

السؤال العاشر:

نرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - E(x)}{x^2 + 1}$$

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$.

2- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$ ثم ادرس استمرارية f على $I = [0,2]$.

السؤال الحادي عشر:

إذا علمت أن: $|f(x) + 1| \leq |x - 1| \cos^2\left(\frac{1}{x-1}\right)$ احسب $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

السؤال الثاني عشر:

فيما يلي جدول تغيرات التابع f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

1- أوجد D_f.

2- أوجد كلاً من:

$$f(1)\ ,\ \lim_{x \to -\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x \to 0} f(x)\ ,\ \lim_{x \to +\infty} f(x)\ ,\ f(D_f)\ .$$

3- أوجد معادلة المماس الأفقي.

4- بين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية.

السؤال الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$

1- احسب نهاية f عند $\pm\infty$. هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

2- أثبت أن $y = 2x$ مقارب لـ C عند $-\infty$ وادرس وضعه النسبي.

3- هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم $y = 2x + 1$؟

السؤال الرابع عشر:

f هو التابع المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق العلاقة: $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$ حيث: $x > 1$

1- أثبت أن: $\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$

2- استنتج نهاية f عند $+\infty$

السؤال الخامس عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ حيث: $a,b,c\in\mathbb{R}$، المطلوب:

1- أوجد a,b,c إذا علمت أن C يمر بالنقطة $A(-2,-1)$ و $f'(-2)=0$ كما أنه يملك مقارب شاقولي.

2- إذا علمت أن $a=3\ ,b=3\ ,c=1$:

a) أثبت أن $y=x+2$ مقارب مائل لـ C وادرس وضعه النسبي.

b) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، وارسم خطه البياني.

السؤال السادس عشر:

ادرس في كل حالة نهاية f عند a:

1- $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x \quad a=+\infty$

2- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad a=3$

3- $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \quad a=1,+\infty$

4- $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \quad a=-1,+\infty$

السؤال السابع عشر:

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة: $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عند $\pm\infty,1$ ثم أوجد معادلة المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيّن وضع C بالنسبة لمقارباته الأفقية والشاقولية.

السؤال الثامن عشر:

احسب نهاية كل تابع مما يأتي عند a المعطاة، وذلك في حال وجودها:

1) $f(x)=\frac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1} \quad a=1$

2) $f(x)=\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3} \quad a=0$

3) $f(x)=x\cdot\frac{\cos x}{x^2+1} \quad a=+\infty$

4) $f(x)=\frac{x^2}{2+\frac{1}{\cos x}} \quad a=0$

5) $f(x)=x\cdot\frac{\tan 2x}{3x^2+3\sin^2 x} \quad a=0$

السؤال التاسع عشر:

احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة: $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$، ثم أعط عدداً A يحقق الشرط:
إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

السؤال العشرون:

عين فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f، ثم ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف.

1- $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$

2- $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

3- $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

السؤال الواحد والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، المطلوب:

1- أثبت أن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

2- هل المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$؟ علل ذلك

3- استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $-\infty$

السؤال الثاني والعشرون:

احسب نهاية كل تابع مما يأتي عند a المعطاة، وذلك في حال وجودها:

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$ $\quad a=3$ $\quad$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}-x$ $\quad a=+\infty$

3) $f(x)=x\cdot\frac{sinx}{\cos x-1}$ $\quad a=0$ $\quad$ 4) $f(x)=\frac{\tan x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\quad a=\frac{\pi}{2}$

السؤال الثالث والعشرون:

فيما يأتي C هو الخط البياني الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f. بيّن ماله من مقاربات أفقية أو شاقولية أو مائلة.

1- $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$

2- $f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$

السؤال الرابع والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$، أوجد a, b, c علماً أن:

1- $x = 3$ مقارب شاقولي.

2- $y = 2x - 5$ مقارب مائل عند $\pm\infty$.

3- C يمر بالنقطة $A(1,2)$.

السؤال الخامس والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ، ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم خطه البياني.

السؤال السادس والعشرون:

في كل من الحالات التالية، ادرس نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \quad a = +\infty$

2) $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \quad a = +\infty$

3) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x \cdot \sin x} \quad a = 0$

4) $f(x) = \frac{\sin 3x}{4x} \quad a = 0$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad a = -\infty$

السؤال السابع والعشرون:

بيّن في كل حالة إن كان ثمة مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية أو مائلة لـ C

1) $f(x) = \frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$

2) $f(x) = -x + 3 + \frac{1}{x+2}$

السؤال الثامن والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

1- احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2- اكتب ثلاثي الحدود $x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية.

3- استنتج وجود مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$.

السؤال التاسع والعشرون:

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة: $f(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$، المطلوب:

1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

2- أوجد الأعداد a,b التي تحقق: $f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}$

3- ادرس نهاية f عند حدود مجموعة تعريفه.

السؤال الثلاثون:

يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على $[0,2]$ وفق: $f(x)=E(x)+\big(x-E(x)\big)^2$، المطلوب:

1- اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$.

2- أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$.

السؤال الواحد والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$، المطلوب:

1- استنتج معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $+\infty$ معللاً ذلك.

2- بين الوضع النسبي لـ C و Δ.

السؤال الثاني والثلاثون:

احسب نهاية كل من التوابع الآتية عند القيمة المعطاة a:

1- $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin x}$ $\quad a=0$

2- $f(x)=\frac{E(x)}{x}$ $\quad a=+\infty$

3- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $\quad a=0$

السؤال الثالث والثلاثون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق العلاقة: $f(x) = -\frac{2x}{x+1}$، المطلوب:

1- أوجد نهايات f عند $\pm\infty$ وعند -1 ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وادرس الوضع النسبي لكل مقارب وجدته.

2- أوجد معادلة المماس في نقطة M فاصلتها $x = 0$.

السؤال الرابع والثلاثون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$، المطلوب:

1- أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

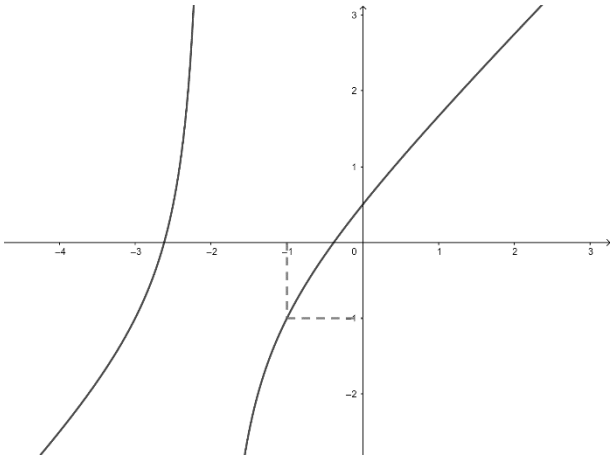
2- أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

3- أثبت وجود عدد حقيقي b يحقق: $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b$.

4- أثبت أن $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$.

السؤال الخامس والثلاثون:

انظر الشكل المرسوم جانباً ثم أجب عن الأسئلة التالية:



1- أوجد D_f

2- أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3- إذا كانت قاعدة ربط التابع f من الشكل $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+c}$، مستعيناً بالمعلومات الواردة في الخط البياني أوجد قيمة a, b, c.

السؤال السادس والثلاثون:

في كل من الحالات التالية، ادرس نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a:

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+8}$ $a=+\infty$ 2) $f(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-1}$ $a=1$

3) $f(x)=\frac{x^2}{\cos x-1}$ $a=0$ 4) $f(x)=\frac{x^2+2x}{\sin x}$ $a=0$

5) $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$ $a=+\infty$

السؤال السابع والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}$، المطلوب:

1- أثبت أن f يُكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$

2- أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل لـ C في جوار $\pm\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C مع d

السؤال الثامن والثلاثون:

عين قيمة m كي يكون التابع f مستمراً عند (1)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x\neq 1\\ m & x=1\end{cases}$$

السؤال التاسع والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=x+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، المطلوب:

1- أثبت أن f تابع فردي.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- أثبت أن $y=x+2$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

السؤال الأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق العلاقة: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$ ، المطلوب:

أولاً: عين a,b لكي يمر C بالنقطة $(1,5)$ كما أنه يملك مماس أفقي في هذه النقطة.

ثانياً: من أجل $a=2\ ,b=1$:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج ما له من مقاربات.

2- أثبت أن $y=2x-1$ مقارب مائل لـ C وادرس وضعه النسبي.

3- أثبت أن $A(-1,-3)$ مركز تناظر لـ C.

4- ارسم C مع المقاربات.

السؤال الواحد والأربعون:

في كل من الحالات التالية، ادرس نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a:

1) $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$ $\quad a=0$ $\quad$ 2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-2}$ $\quad a=0$

3) $f(x)=\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ $\quad a=0$ $\quad$ 4) $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $\quad a=0$

السؤال الثاني والأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$، المطلوب:

1- أثبت أن $\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-1}$ أيّاً تكن: $x>1$

2- استنتج نهاية f عند $+\infty$

السؤال الثالث والأربعون:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعطى بالعلاقة: $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$ وليكن Δ المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=x+1$، المطلوب:

1- أثبت أن التابع f يكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ ثم عين $a,b,c\in\mathbb{R}$.

2- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x+1$ مقارب ل C في جوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

السؤال الرابع والأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=\sqrt{x^2+6x+10}$ ، المطلوب:

1- a) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+3)\big)$.

b) استنتج وجود مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.

2- ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و C.

السؤال الخامس والأربعون:

في كل من الحالات التالية، ادرس نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a:

1- $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+x-1 \quad a=-\infty$

2- $f(x)=\frac{\cos 4x-1}{x\cdot\sin x} \quad a=0$

3- $f(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-1} \quad a=+\infty,1$

السؤال السادس والأربعون:

إذا علمت أن: $|f(x)+2|\le\frac{\cos x}{x^2}$ ، احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

السؤال السابع والأربعون:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ ، بيّن فيما إذا كان C يقبل مقاربات أفقية أو شاقولية وادرس الوضع النسبي لكل مقارب وجدته.

السؤال الثامن والأربعون:

ليكن f التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{3x+2}{x-3}$، المطلوب:

1- احسب نهاية f عند $+\infty$.

2- استنتج نهاية $f\big(f(x)\big)$ عند $+\infty$.

3- أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x.

السؤال التاسع والأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$ وفق العلاقة:

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2+1}$$

1- اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

2- ادرس النهاية عند حدود مجالات D_f ثم أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على مجالات D_f.

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

4- أثبت وجود مقارب مائل معادلته $y=x+1$ للتابع عند $+\infty$.

السؤال الخمسون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=1-\frac{1}{x^2+1}$، المطلوب:

أثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}$ وعين $f(\mathbb{R})$.

السؤال الواحد والخمسون:

انظر جدول التغيرات المجاور ثم أجب عن الأسئلة التالية:

x	$-\infty$		-1		4		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

1- أوجد مجموعة تعريف التابع f.

2- استخرج ما للتابع من مقاربات شاقولية أو أفقية.

3- هل يمكن للتابع f أن يملك مقارب مائل؟ لماذا؟

4- بيّن ما للتابع من قيم حدية

السؤال الثاني والخمسون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=x^3-3x$،المطلوب:

1- أثبت أن f تابع فردي.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- بيّن ما للتابع من قيم حدية.

4- أوجد معادلة المماس في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

5- ارسم C.

السؤال الثالث والخمسون:

ليكن التابع $f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$ بفرض أن $g(x)=\sqrt{2x-1}$، أوجد $g(1)\,,g'(x)\,,g'(1)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

السؤال الرابع والخمسون:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ وفق الصيغة: $f(x)=\frac{4x-5}{2x+3}$، المطلوب:

1- احسب نهاية f عند $+\infty$.

2- عين العدد A الذي يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05.

السؤال الخامس والخمسون:

احسب نهاية كل من التوابع الآتية:

1- $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ $\qquad a=0$

2- $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$ $\qquad a=+\infty$

3- $f(x)=\frac{E(x)-1}{x}$ $\qquad a=+\infty$

السؤال السادس والخمسون:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعطى بالعلاقة: $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}$، المطلوب:

1- اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ وأوجد a,b,c.

2- أثبت أن المستقيم $y=x+1$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$.

3- ادرس وضع C_f بالنسبة لـ Δ.

السؤال السابع والخمسون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=x^3-2x^2-1$، المطلوب:

1- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً C في المجال $[2,3]$.

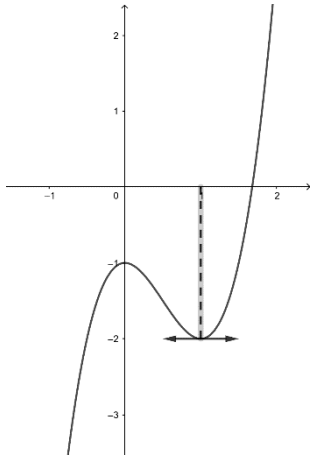
2- اكتب معادلة المماس T في نقطة M فاصلتها 2.

السؤال الثامن والخمسون:

ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. أثبت أن C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

السؤال التاسع والخمسون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ والذي خطه البياني C مبيَّن في الشكل المرافق:



1- أوجد D_f.

2- أوجد $f(D_f)$.

3- أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4- إذا كانت قاعدة ربط التابع f هي من الشكل: $f(x)=ax^3+bx^2+c$ عين $a,b,c\in\mathbb{R}$.

السؤال الستون:

بين إن كان ثمة مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية أو مائلة لـ C:

1- $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x-1}$ $\quad a=0$ $\quad$ 2- $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $\quad a=1$

السؤال الواحد والستون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

1- احسب نهاية f عند الصفر.

2- هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$؟ علل إجابتك

السؤال الثاني والستون:

ليكن f التابع المعين بالعلاقة: $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$

1- عين D_f.

2- أوجد الأعداد a,b,c التي تحقق: $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$.

3- ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f.

السؤال الثالث والستون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$، وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أثبت أن لـ C محور تناظر.

2- ادرس نهاية f عند $\pm\infty$.

3- أثبت أن $f(x)-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ أيّاً يكن x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$. عين الوضع النسبي ل C مع d.

4- ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=-f(x)$ وليكن $H=C\cup C'$. أثبت أن معادلة H هي $y^2-x^2=1$.

5- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

7- ارسم C.

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول :

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x} \quad a=0$

2- $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \quad a=1$

السؤال الثاني :

بيّن إن كان ثمة مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية أو مائلة ل C:

1- $f(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$

2- $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$

السؤال الثالث :

احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة : $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ، ثم أعط عدداً A يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9\ ,\ 5.1[$

السؤال الرابع :

ادرس نهاية التابع $f(x)=\frac{E(x)}{x}$ عند $+\infty$

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية :

التمرين الأوّل :

ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5\ ,\ +\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$:

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2- أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$

التمرين الثاني :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & ;x\neq 0 \\ 0 & ;x=0 \end{cases}$

1- احسب نهاية f عند (0)

2- هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$؟علل إجابتك

التمرين الثالث:

يرمز $E(x)$ إلى تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ، ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق : $f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$

1- اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2- أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$

التمرين الرابع :

ليكن f التابع المعين بالعلاقة : $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$

1- عيّن D_f

2- أوجد الأعداد a,b,c التي تحقق : $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

3- ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$:

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$

2- استنتج وجود مقارب مائل Δ ل C في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و C

4- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

5- أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وأن نهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$

6- استنتج وجود مقارب مائل ل C للتابع f في جوار $-\infty$

المسألة الثانية :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المطلوب:

1- أثبت أن ل C محور تناظر

2- ادرس نهاية f عند تابع $\pm\infty$

3- أثبت أن $f(x) - x = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ أيا تكن $x \in \mathbb{R}$ ثم استنتج أن C يقبل مقارباً d مائلاً في جوار $+\infty$ ، ثم عين الوضع النسبي ل C مع d

4- ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = -g(x)$ وليكن $H =$ $C \cup C'$ أثبت أن معادلة H هي $y^2 - x^2 = 1$

5- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

6- ما عدد حلول المعادلة $f(m) = 0$

7- ارسم C

قسم الاشتقاق

السؤال الأول:

أثبت صحة المتراجحة $sinx \geq x$ أيّاً تكن $x \leq 0$.

السؤال الثاني:

ليكن $f(x) = \sqrt{x^3}$. احسب القيمة التقريبية لميل المماس لـ C في نقطة فاصلتها $x = 4.1$.

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - 1$.
ادرس تغيرات f وبيّن ما لها من قيم حدية.

السؤال الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج المقاربات وادرس الوضع النسبي لكل مقارب وجدته.

2- بيّن ما له من قيم حدية.

3- استنتج بيانياً وتبعاً لقيم m عدد حلول المعادلة الآتية: $(\lambda-2)x^2 + (\lambda+1)x + \lambda + 1 = 0$

4- برهن أن للتابع h المعرف بالعلاقة: $h(x) = f(|x|)$ تابع زوجي واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع h من C.

السؤال الخامس:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sin x$، المطلوب:

1- أوجد المشتقات للتابع f حتى المرتبة الرابعة.

2- بافتراض f اشتقاقي n مرة على $\mathbb{R}$، أثبت أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $f(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right)$

السؤال السادس:

أثبت صحة المتراجحتين $\tan x \leq x + \frac{x^3}{3}$ و $\tan x \leq x + \frac{(\tan x)^3}{3}$ في حالة $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

ثم استنتج قيمة $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

السؤال السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$، المطلوب:

1- أثبت أن التابع المعطى وفق: $g(x)=f(\tan x)-x$ هو تابع ثابت وعين قيمته.

2- اكتب معادلة المماس لـ C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

السؤال الثامن:

أثبت صحة المتراجحة: $2\sin x+\tan x\geq 3x$ أياً تكن x من المجال $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

السؤال التاسع:

اعتماداً على تعريف المشتق. أوجد: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$

السؤال العاشر:

اعتماداً على تعريف المشتق. احسب نهاية كل من التوابع الآتية:

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad a=0$ $\qquad$ 2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ $\quad a=1$

السؤال الحادي عشر:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

1- احسب التابع المشتق للتابع f

2- استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$h: x\to \sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}$ $\qquad$ $g: x\to \sqrt{x}+\sqrt{1+x}$

3- استنتج أن: $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$ أيّاً تكن x من $\mathbb{R}$.

السؤال الثاني عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\cos x+\sin^2 x$

1- أثبت أن f تابع دوري دوره $T=2\pi$

2- ادرس الصفة الفردية أو الزوجية لـ f واستنتج إمكانية دراسته على المجال $I=[0,\pi]$

3- أثبت من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=\sin x\,(2\cos x-1)$

السؤال الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ بالعلاقة: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، وبيّن ما له من مقاربات وقيم حدية.

2- عيّن الأعداد الحقيقية a,b,c التي تحقق: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

3- أوجد معادلة المقارب المائل ل C في جوار $\pm\infty$.

4- أثبت أن $I(1,2)$ مركز تناظر ل C.

5- حدد هندسياً عدد حلول المعادلة $x^2-mx+m=0$.

6- ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

7- أثبت أنه مهما تكن $n\geq 2$ فإنه $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{(n+1)}}$

السؤال الرابع عشر:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=ax^3+bx^2+3x$

عيّن قيمة a,b ليكون للتابع f قيمة حدية هي $f(1)=3$

السؤال الخامس عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

1- احسب التابع المشتق للتابع f

2- استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1+x}$

3- استنتج أن $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$ أيّاً كانت $x\in\mathbb{R}$

السؤال السادس عشر:

اعتماداً على تعريف العدد المشتق ، احسب نهاية التوابع التالية عند القيمة المعطاة a:

1- $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad a=0$

2- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ $\quad a=1$

السؤال السابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، واستنتج ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية ، وعين ما له من قيم حدية

2- استنتج تبعاً لقيم m ما للمعادلة الآتية من حلول : $(m-2)x^2+(m+1)x+m+1=0$

3- ارسم كل مقارب وجدته وارسم C .

السؤال الثامن عشر :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

1- احسب التابع المشتق f' .

2- استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

a) $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ b) $h(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

السؤال التاسع عشر :

في الحالتين الآتيتين، احسب نهاية التابع f عند a اعتماداً على تعريف العدد المشتق .

1) $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $a=0$ 2) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $a=0$

السؤال العشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونطم جدولاً بها، واستنتج ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية، وعين ما له من قيم حدية .

2- استنتج تبعاً لقيم m ما للمعادلة الآتية من حلول: $(m-2)x^2+(m+1)x+m+1=0$

3- ارسم كل مقارب وجدته وارسم C .

السؤال الواحد والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x$

عين قيمة a, b ليكون للتابع f قيمة حدية هي $f(1) = 3$.

السؤال الثاني والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1- أوجد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، واستنتج معادلة المقارب الشاقولي للخط C.

2- أثبت أن المستقيم: $\Delta: y = x - 4$ مقارب للخط C عند $\pm\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما .

3- اكتب معادلة كل مماس للخط C يوازي المستقيم الذي معادلته: $d: y = -4x$

السؤال الثالث والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، المطلوب:

1- أثبت أن f تابع فردي .

2- أوجد نهاية f عند $\pm\infty$ واستنتج معادلة كل مقارب أفقي للخط C .

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

4- اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

5- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس Δ والخط C .

السؤال الرابع والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

1- هل f اشتقاقي عند $x = 0$؟

2- أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج معادلة المستقيم Δ المقارب الأفقي لـ C في جوار $+\infty$.

3- ادرس الوضع النسبي للخط C والمقارب Δ .

4- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .

5- بيّن مع التعليل أن $f(0)$ قيمة صغرى محلياً للتابع f .

6- ارسم الخط البياني C للتابع f .

السؤال الخامس والعشرون:

انظر جدول التغيرات التالي ثم أجب:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

1- أوجد D_f

2- أوجد $f(D_f)$

3- أوجد $f(-1)$

4- أوجد معادلة المماس T في نقطة فاصلتها $x = -1$

5- ما القيم الحدية التي يملكها التابع

6- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

7- هل يملك التابع f مقاربات أفقية أو شاقولية؟ علل ذلك

8- هل يملك f مقاربات مائلة؟ علل ذلك

9- ارسم المنحني C وارسم T

10- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ بيانياً.

11- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ بيانياً.

السؤال السادس والعشرون:

انظر جدول التغيرات التالي ثم أجب:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	1

1- اكتب مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي.

2- أوجد النهايات عند أطراف مجموعة تعريفه.

3- أوجد ما لـ C من مقاربات أفقية أو شاقولية مبيناً وضعها النسبي.

4- هل يوجد لـ C مقاربات مائلة؟ علل ذلك.

5- ناقش بحسب قيم K عدد حلول المعادلة: $f(x) = K$.

السؤال السابع والعشرون:

انظر جدول التغيرات التالي ثم أجب:

x	1		5		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

1- أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي.

2- أوجد النهايات عند أطراف مجموعة تعريفه.

3- هل لـ C مقاربات موازية لمحاور الإحداثيات؟

4- هل التابع f اشتقاقي عند 1

5- هل يقبل C مماساً عند النقطة التي فاصلتها $x = 1$، علل ذلك.

6- هل $f(5) = 2$ قيمة حدية؟

7- بفرض أن التابع يعطى بقاعدة الربط: $f(x) = \sqrt{ax + b}$. أوجد قيم a, b.

السؤال الثامن والعشرون:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1- اكتب مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي.

2- أوجد النهايات عند أطراف مجموعة تعريفه.

3- أوجد المقاربات الموازية لمحاور الإحداثيات.

4- ما عدد القيم الحدية؟ دل عليها.

5- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$؟

6- اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x = 0$.

7- بفرض أن التابع معطى بقاعدة الربط $f(x) = a + \frac{b}{x^2+1}$، أوجد قيم a, b.

السؤال التاسع والعشرون:

فيما يلي نجد جدول تغيرات التابع f الذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

1- عين القيم الحدية للتابع f وحدد نوعها واكتب معادلة كل مماس أفقي تجده

2- هل f اشتقاقي عند (0)

3- هل يقبل C مقارب مائل عند $+\infty$

4- أوجد عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

أولاً : أجب عن السؤالين الآتيين :

السؤال الأوّل :

فيما يلي جدول تغيرات التابع f الذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ 0$	$\searrow$	-1

1- أوجد :

$$D_f \ , f(D_f), f(-1) \ , f'(-1)$$

2- ما هي القيم الحدية التي يملكها التابع ؟

3- هل هناك نقاط مقاربة؟ ما هي؟

4- أوجد معادلة المماس في النقطة $(-1,2)$

السؤال الثاني :

ليكن g التابع المعرف على $I =]-8, +\infty[$ وفق: $g(x) = \sqrt{x+8} - 2\sqrt{2}$

احسب كلاً من: $g(0) \ , g'(0) \ , g'(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+8}-2\sqrt{2}}{x}$

ثانياً : حل السؤالين الآتيين :

السؤال الأوّل :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ وفق: $f(x) = \frac{|x|+1}{2x+1}$، المطلوب:

1- ادرس قابلية f للاشتقاق عند (0) .

2- اكتب معادلة نصفي المماسين .

السؤال الثاني :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x) = -\frac{1}{x}$ والمطلوب:

1- احسب f'', f' .

2- أثبت لأجل كل $x \neq 0$ مستخدماً البرهان بالتدريج أنه مهما كانت $n \geq 1$ فإن:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

ثالثاً : حل المسألة الآتية :

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ بالعلاقة: $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$ والمطلوب:

1- أوجد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه وبين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية .

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

3- أوجد $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ ثم استنتج وجود مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ يُطلب تعيينه .

4- أثبت أن $I(-1,-3)$ مركز تناظر ل C .

5- ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .

قسم نهاية متتالية

السؤال الأوّل :

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$, $x_0 = 4$.

1- نعرف المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة : $y_n = x_n - 8$ ، أثبت أن y_n هندسية

2- اكتب y_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

السؤال الثاني :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية وفق : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

1- أثبت أن $0 < u_n < 1$ أياً كانت $n \in \mathbb{N}$

2- نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ ، أثبت أنها هندسية واستنتج v_n بدلالة n

3- اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

السؤال الثالث :

- لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أنها حسابية وعين أساسها ثم احسب:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$$

- لتكن المتتاليتان $(y_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق : $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$, $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ أثبت أنهما متجاورتان .

السؤال الرابع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$, $u_0 = 0$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$

2- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

3- علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها

السؤال الخامس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \end{cases}$

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

2- أثبت بالتدريج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً تكن n

3- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

السؤال السادس:

نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \frac{t_n+2S_n}{3} \end{cases} , \begin{cases} S_0 = 12 \\ S_{n+1} = \frac{t_n+3S_n}{4} \end{cases}$$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها

2- أثبت أن المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

السؤال السابع:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند $n \geq 1$ وفق : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2- استنتج أن العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

3- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

السؤال الثامن:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق : $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

جد عدداً طبيعياً n_0 يحق : $\forall n > n_0$ فإن $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$

السؤال التاسع:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

1- اكتب u_n بصيغة أخرى

2- أثبت أن u_n متقاربة

السؤال العاشر:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق : $u_0 = 3\,, u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$

1- أثبت أن $u_n > 0$ أيّاً تكن n

2- المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق : $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ أثبت أنها هندسية وجد نهايتها

السؤال الحادي عشر:

أثبت أن المتتاليتين $t_n = \frac{n}{n+1}$, $S_n = \frac{n+1}{n}$ متجاورتان

السؤال الثاني عشر:

لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$ متتاليتان معرفتان وفق : $tn = -\frac{1}{2n+4}$, $s_n = \frac{1}{n+1}$ أثبت أنهما متجاورتان .

السؤال الثالث عشر:

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \end{cases} \quad , \quad y_n = x_n + 3$$

1- أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية

2- احسب y_n ثم x_n بدلالة n

3- ليكن $S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ ، اكتب S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

السؤال الرابع عشر:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق : $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$. أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة واحسب نهايتها

السؤال الخامس عشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة : $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

1- أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$ أيّاً تكن $n \in \mathbb{N}$

2- استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

السؤال السادس عشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = n\sqrt{n}$. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق: $u_n > 10^6$ من أجل $n > n_0$

أولاً : أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأوّل :

ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{10^n}{n}$

السؤال الثاني :

أثبت أن $3n^2 \geq (n+1)^2$ أياً كان العدد الطبيعي n

السؤال الثالث :

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{n+(-1)^n}{3n+1}$ متقاربة

ثانياً : حل التمرينين الآتيين :

التمرين الأوّل :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$ ، المطلوب :

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $n \leq 2^n$ أيا كان العدد الطبيعي n

2- استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

التمرين الثاني :

أثبت أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 2}$, $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفتين وفق :

$v_n = u_n + \frac{1}{n}$, $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ متجاورتان

ثالثاً : حل المسألة الآتية :

المسألة الأولى :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n} \end{cases}$ ، المطلوب :

1- أثبت بالتدريج أن $u_n > 1$ وأن $u_{n+1} > u_n$ ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة

2- نعرف المتتالية $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ، أثبت v_n حسابية ، عين حدها الأول وأساسها

3- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

قسم التابع

اللوغاريتمي

السؤال الأوّل:

في الحالات الآتية أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع التالية:

1- $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

2- $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x+1)$

3- $f(x)=\frac{1}{\ln|x-3|}$

4- $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

السؤال الثاني:

حل المعادلات الآتية:

1- $\ln x=\ln(x^2-2x)$

2- $3\ln x=\ln(3x-2)$

3- $\ln 3=\ln(5-x)+\ln(x-1)$

4- $\ln|x-2|+\ln x=2\ln 3$

السؤال الثالث:

حل المتراجحات الآتية:

1- $\ln(2-x)\geq 1$

2- $\ln(3x^2-x)\leq \ln x+\ln 2$

3- $\ln(x+11)\geq \ln(x+3)+\ln(x+2)$

السؤال الرابع:

جد نهاية التابع f عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$ $\quad a=+\infty$

2- $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ $\quad a=0$

3- $f(x)=x(1-\ln x)$ $\quad a=0$

4- $f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$ $\quad a=+\infty$

السؤال الخامس:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $D \in \mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \ln(ax + b)$، عين a, b علماً أن:

1- المستقيم $x = \frac{1}{2}$ مقارب للخط البياني c

2- c يقطع المحور $x'x$ في النقطة $A(1,0)$

السؤال السادس:

انطلاقاً من الخط البياني للتابع $f(x) = \ln x$ ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية:

1- $f_1(x) = \ln(-x)$

2- $f_2(x) = -\ln x$

3- $f_3(x) = -\ln(-x)$

السؤال السابع:

حل التمارين التالية :

1- $\ln|x + 1| + \ln|x - 1| = 0$

2- $\ln(1 + \frac{2}{x}) \leq \ln x$

السؤال الثامن:

أوجد نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه :

1- $f(x) = x^2 - \ln x$

2- $f(x) = x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

السؤال التاسع:

ادرس التابع f المعطى وفق العلاقة : $f(x) = \frac{1}{x} + x \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$ وارسم خطه البياني

السؤال العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة : $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)$

1- تحقق أن D_f مجموعة تعريف التابع f هي $]2,4[$

2- برهن أن منحني التابع C متناظر بالنسبة للنقطة $(3,0)$

3- أوجد نهاية التابع f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه

4- ارسم الخط البياني C للتابع f

5- استنتج الخط البياني للتابع $f_1(x) = |f(x)|$

السؤال الحادي عشر:

ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$.

احسب كلاً من $g(1)$, $g'(1)$, $g'(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln 2}{x-1}$

السؤال الثاني عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ بالعلاقة :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- أوجد $f'(x)$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- ارسم c

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق : $u_n = f(n)$ وليكن :

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، أثبت أن : $S_n = \ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

السؤال الثالث عشر:

أثبت أنه $\forall x \in]-1, +\infty[$ كان $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$

السؤال الرابع عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[=I$ وفق :

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل ل c وادرس وضعه النسبي .

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وارسم كل مقارب وجدته وارسم c .

3- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$.

السؤال الخامس عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,e[\cup]e,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج ما له من قيم حدية وبين نوعها

2- ارسم ما وجدته من مقاربات وارسم c

3- احسب مساحة السطح المحصور بين c و $x'x$ والمستقيمين $\Delta_2: x=\frac{1}{e}$, $\Delta_1: x=\frac{1}{e^2}$

السؤال السادس عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\ln(ax+b)$ ، المطلوب:

1- عين a,b علماً أن $x=\frac{1}{2}$ مقارب ل C كما أن C يقطع $x'x$ في النقطة $A(1,0)$

2- من أجل $a=2\,,b=-1$ نحصل على التابع : $f(x)=\ln(2x-1)$

a) أوجد مجموعة تعريفه ثم ادرس تغيراته ونظم جدولاً بها

b) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج C_1 الخط البياني للتابع

$$f_1(x)=|\ln(2x-1)|$$

c) برهن أن التابع f تقابل وعين تقابله العكسي

d) برهن أن $F(x)=\frac{1}{2}[(2x-1)\ln(2x-1)-2x]$ تابع أصلي ل f على $]\frac{1}{2},+\infty[$ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيم $x=2$.

السؤال السابع عشر:

حل المعادلات الآتية:

1- $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

2- $\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2$

السؤال الثامن عشر:

ليكن a, b عددان حقيقيان ، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق :

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + ax + b$ ، عين a, b علماً أن:

1- النقطة $A(2,1) \in C$

2- المماس في A يوازي المستقيم $\Delta: y = x + 6$

السؤال التاسع عشر:

ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1- ادرس نهاية f عند طرفي مجموعة تعريفه

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يحقق : $\alpha \in]1,2[$

4- اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

5- ارسم المماس ثم ارسم C

السؤال العشرون:

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة : $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1- أثبت أن f تابع فردي

2- أثبت أن $\Delta: y = x$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي لـ C مع المستقيم Δ .

السؤال الواحد والعشرون:

أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع التالية:

1- $f(x) = \ln(1-x)$

2- $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

3- $f(x) = \ln|x-1|$

4- $f(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

السؤال الثاني والعشرون:

حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

1- $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

2- $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

3- $\ln(2-x) \geq 1$

4- $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

السؤال الثالث والعشرون:

جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه :

1- $f(x) = x(1-\ln x)$

2- $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

السؤال الرابع والعشرون:

أثبت صحة المتراجحة : $\ln x \leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)$ أيّاً تكن $x > 0$

السؤال الخامس والعشرون:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية : $\ln(x-1) = \ln x - \ln(x+1)$

السؤال السادس والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- أثبت أن f متزايد تماماً على I

2- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب ل C في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي ل C ومقاربه d

4- ارسم في معلم واحد d ثم الخط البياني C .

السؤال السابع والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[\cup]-\infty, -2[$ وفق :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- أوجد f' ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيراته

3- ارسم الخط البياني C في معلم متجانس

السؤال الثامن والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1- أثبت أن f تابع فردي

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3- ارسم الخط البياني C في معلم متجانس

السؤال التاسع والعشرون:

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x + 5\ln y = 14 \end{cases}$$

السؤال الثلاثون:

حل كل من المعادلات والمتراجحات التالية:

1) $\ln|x-1|+\ln(x+1)=3\ln 2$

2) $2\ln x+\ln(2x+5)<\ln|2-x|$

السؤال الواحد والثلاثون:

أثبت أن $2(\sqrt{x}-1)\leq \ln x$ أيّاً كانت $x>0$ واستنتج أن $2\leq e\leq 4$ بأخذ قيم مناسبة للعدد x .

السؤال الثاني والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x)=2-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$

1- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x-\ln 2$ مقارب ل C. ثم ادرس وضعه النسبي.

2- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟ علل إجابتك.

التمرين الثالث والثلاثون:

ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x)=\frac{1}{x\ln x}+1$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم خطه البياني بعد تحديد مجموعة تعريفه .

2- ناقش بحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx\ln x-1=0$

السؤال الرابع والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

1- أوجد مجموعة تعريف التابع D_f .

2- احسب نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه وأوجد ما له من مقاربات .

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

4- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في D_f ، ثم عيّنه.

5- ارسم C_f في معلم متجانس ثم استنتج الرسم البياني للتابع: $g(x)=\ln\left(\frac{2|x|}{|x|-1}\right)$.

السؤال الخامس والثلاثون:

أثبت صحة المتراجحة التالية : $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$ أيّاً تكن $x > 0$

السؤال السادس والثلاثون:

أوجد مجموعة تعريف التوابع التالية :

1- $f(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

2- $f(x) = \ln|1-x^2|$

السؤال السابع والثلاثون:

حل المعادلات أو المتراجحات التالية :

1- $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

2- $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

3- $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

السؤال الثامن والثلاثون:

جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه :

1- $f(x) = x(1-\ln x)$

2- $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

3- $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

السؤال التاسع والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة : $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)$ ، المطلوب :

1- أوجد مجموعة تعريف التابع f

2- برهن أن منحني التابع C متناظر بالنسبة للنقطة $(3,0)$

3- أوجد نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه

4- ارسم الخط البياني للتابع C

5- استنتج الرسم البياني للتابع $g(x) = |f(x)|$

السؤال الأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

1- أوجد ما للخط C من مقاربات أفقية أو شاقولية

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على قيمته الصغرى محلياً

3- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=1$ وادرس الوضع النسبي للخط C مع المماس T

4- ارسم المماس T وارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C

5- احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمين: $x=e\,,x=1$.

السؤال الوحد والأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-1-\frac{\ln x}{x+1}$

1- أثبت أن المستقيم : $\Delta: y=2x-1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

2- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ

السؤال الثاني والأربعون:

أثبت أن $\ln(x+1)\leq x$ أيّاً كانت : $x\in]-1,+\infty[$

السؤال الثالث والأربعون:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرّف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x^2-\ln x$.

1- جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه .

2- ادرس تغيرات التابع f، ونظم جدولاً بها .

3- اكتب معادلة المماس T للخط البياني c في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

4- في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني c .

5- احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني c ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ ، $x=e$.

6- نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n=n^2-\ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

السؤال الرابع والأربعون:

ليكن C_f , C_g الخطان البيانيان للتابعين $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$, $g(x) = \ln(x+1)^2$ بالترتيب .

برهن أن C_f , C_g متماسان في $O(0,0)$ واكتب معادلة المماس المشترك في نقطة التماس .

السؤال الخامس والأربعون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها

2- استنتج كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C وادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي

3- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج بيانياً عدد حلول المعادلة : $f(x) = \lambda$

4- احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمين:

$$x = e^{-2} , x = e^{-1}$$

السؤال السادس والأربعون:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[\cup]-\infty,-2[$ بالعلاقة :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- أوجد $f'(x)$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- ارسم c

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق : $u_n = f(n)$ وليكن :

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، أثبت أن : $S_n = \ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

السؤال السابع والأربعون:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$

السؤال الثامن والأربعون:

ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$.

احسب كلاً من $g(1)$, $g'(1)$, $g'(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln 2}{x-1}$

السؤال التاسع والأربعون:

① ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2,-1[\cup]-1, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^3+1} + x$$

a) أوجد $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b) أثبت أن المستقيم : $\Delta: y = x$ مقارب للخط C ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ

② حل المعادلة : $\ln|2x+4| + \ln|x-2| = 2\ln|x|$

السؤال الخمسون:

❶ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{a}{x} + (x-b)\ln x$ ، عين a, b علماً أن:

1- النقطة $A(1,1) \in C$

2- المماس للخط C في A أفقي .

❷ أثبت أن $\ln(x-1) < x-1$ أيّاً كانت $x > 1$

السؤال الواحد والخمسون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

2- أثبت أن المستقيم : $\Delta: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس وضعهما النسبي

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]1,2[$

4- ارسم في معلم واحد المستقيم Δ ثم ارسم الخط C .

أولاً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأوّل :

حل المعادلة : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

السؤال الثاني :

حل المتراجحة : $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - x\ln x$$

ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني

السؤال الرابع :

هل f اشتقاقي عند $x = 0$ ؟ بيّن ذلك $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

ثانياً : حل التمارين الآتية :

التمرين الأوّل :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي للخط C ومقاربه d

التمرين الثاني :

جد الحل المشترك لحملة المعادلتين :

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(x.y) = 1 \end{cases}$$

التمرين الثالث :

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ ، المطلوب:

1- أثبت أن f تابع فردي

2- ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$

3- ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $]-1,1[$

التمرين الرابع :

ليكن a, b عددين حقيقيين ، في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن c الخ البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$ ، عين a, b إذا علمت أن :

1- النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من c

2- المماس للخط البياني c في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$.

<u>ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين :</u>

المسألة الأولى :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

1- أوجد D_f

2- أثبت أن النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر ل c

3- ارسم c

المسألة الثانية :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ ، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم أوجد ما له من مقاربات موازية لـ $x'x$ أو لـ $y'y$

2- دل على القيم الحدية إن وجدت

3- أوجد معادلة المماس في النقطة التي تعدم $f'(x)$

4- ارسم ما وجدت من مقاربات وارسم المماس ثم ارسم c

قسم التابع الأسي

السؤال الأوّل:

❶ ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $g(x) = e^x + 2 - x$
ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة : $g(x) > 0$

❷ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

1- أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
2- بيّن أن للمعادلة $f(x) = 0$ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
3- أثبت أن المستقيم : $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي لهما
4- ارسم Δ ثم ارسم C
5- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين : $x = 0 \, , x = 1$

السؤال الثاني :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$
1- أثبت أن المستقيم : $\Delta: y = x - 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما
2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وعين قيمته الحدية محلياً وبيّن نوعها
3- استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما (0) والآخر α يحقق $1 < \alpha < 2$
4- ارسم المقارب المائل Δ ثم ارسم الخط C
5- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمقارب Δ والمستقيمين :
$x = \ln 2 \, , x = \ln 3$

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
1- أوجد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه
2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها
3- ارسم الخط البياني C
4- استنتج عدد حلول المعادلة $x^2 \cdot e^{-x} = 1$
5- احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيم $y = 1$

السؤال الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = e^x$

احسب $f(\ln 2), f'(x), f'^{(\ln 2)}$ ثم استنتج : $\lim\limits_{x \to \ln 2} \frac{e^x - 2}{x - \ln 2}$

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x \cdot e^{-x}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم عين القيم الحدية مبينا نوعها

2- ارسم الخط البياني C

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x = 1 , x = 0$

4- بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين

5- لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق : $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ أيّاً كانت $n \in \mathbb{N}$

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة ثم بين أنها متقاربة واحسب نهايتها

السؤال السادس:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e} e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

السؤال السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = ae^{2x} + be^x + 1$

1. عين a, b ليكون للتابع f قيمة حدية محلية هي $f(0) = 0$
2. من أجل $a = 1 , b = -2$ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الصغرى محلياً
3. استنتج ما للخط C من مقاربات توازي المحورين ثم ارسم كل مقارب وجدته وارسم C
4. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{e^{-x} + e^x - 2}{e^x}$
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين : $x = \ln 2 , x = \ln 3$

السؤال الثامن:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = e^x - 1$. والمطلوب :

1- جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$.

2- احسب : $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$.

السؤال التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج المقاربين Δ_1 , Δ_2 الموازيين للمحور $x'x$

2- استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في $\mathbb{R}$ ثم أوجد ذلك الجذر

3- أوجد معادلة المماس Δ للخط C في نقطة تقاطعه مع المحور $y'y$ ثم ارسم Δ , Δ_1 , Δ_2 وارسم C

4- أثبت أن C متناظر بالنسبة للمبدأ O

5- استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$

احسب المساحة المحصورة بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=\ln 3 , x=-\ln 3$.

السؤال العاشر:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} e^x-e^y=\frac{1}{e} \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$

السؤال الحادي عشر:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4^x-2^{x+2}+3=0$ ثم استنتج حلول المتراجحة : $4^x+3\le 2^{x+2}$

السؤال الثاني عشر:

اكتب بأبسط شكل ممكن :

1- $A=e^{\ln 5}+e^{\ln 3}$

2- $B=e^{\frac{1}{2}\ln 9}+e^{\ln 2}$

3- $C=e^{-\ln\frac{3}{4}}+e^{\ln\frac{2}{3}}$

4- $D=\ln e^x+e^{\ln(x-1)-\ln x}$

5- $E=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

6- $F=\frac{e^{4x}}{e(e^x)^2}$

السؤال الثالث عشر:

اكتب بأبسط شكل ممكن:

1- $A = e^{\ln 5} + e^{\ln 3}$

2- $B = e^{\frac{1}{2}\ln 9} + e^{\ln 2}$

3- $C = e^{-\ln\frac{3}{4}} + e^{\ln\frac{2}{3}}$

4- $D = \ln e^{x} + e^{\ln(x-1)-\ln x}$

5- $E = \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

6- $F = \frac{e^{4x}}{e(e^{x})^{2}}$

السؤال الرابع عشر:

حل المعادلات والمتراجحات الآتية:

1- $e^{3x} - 5e^{x} + 4 = 0$

2- $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

3- $e^{x+1} = 2$

4- $\frac{e^{x}+2}{e^{x}} \geq \frac{1}{3}$

السؤال الخامس عشر:

جد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x) = 2xe^{-x}$ $\quad a = +\infty$

2- $f(x) = \frac{e^{x}-1}{2x}$ $\quad a = 0, +\infty$

3- $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad a = \pm\infty$

4- $f(x) = (2-x)^{\frac{2}{x-1}}$ $\quad a = 1$

السؤال السادس عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = (1-x)e^x$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2- اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

3- ارسم C في معلم متجانس

السؤال السابع عشر:

اكتب بأبسط شكل ممكن:

1- $A = e^{\ln 5} + e^{\ln 3}$

2- $B = e^{\frac{1}{2}\ln 9} + e^{\ln 2}$

3- $C = e^{-\ln\frac{3}{4}} + e^{\ln\frac{2}{3}}$

4- $D = \ln e^x + e^{\ln(x-1)-\ln x}$

5- $E = \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

6- $F = \frac{e^{4x}}{e(e^x)^2}$

السؤال الثامن عشر:

حل المعادلات والمتراجحات الآتية:

1- $e^{3x} - 5e^x + 4 = 0$

2- $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

3- $e^{x+1} = 2$

4- $\frac{e^x+2}{e^x} \geq \frac{1}{3}$

السؤال التاسع عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = (1-x)e^x$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2- اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

3- ارسم C في معلم متجانس

السؤال العشرون:

جد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x) = 2xe^{-x}$ $\quad a = +\infty$

2- $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ $\quad a = 0, +\infty$

3- $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad a = \pm\infty$

4- $f(x) = (2 - x)^{\frac{2}{x-1}}$ $\quad a = 1$

السؤال الواحد والعشرون:

أثبت أن $e^x \geq x + 1$ أيّاً كانت $x \in \mathbb{R}$

السؤال الثاني والعشرون:

جد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x) = 2xe^{-x}$ $\quad a = +\infty$

2- $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ $\quad a = 0, +\infty$

3- $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad a = \pm\infty$

4- $f(x) = (2 - x)^{\frac{2}{x-1}}$ $\quad a = 1$

السؤال الثالث والعشرون:

حل المعادلات والمتراجحات الآتية:

1- $e^{3x} - 5e^x + 4 = 0$

2- $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

3- $e^{x+1} = 2$

4- $\frac{e^x + 2}{e^x} \geq \frac{1}{3}$

السؤال الرابع والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = (1-x)e^x$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2- اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

3- ارسم C في معلم متجانس

التمرين الخامس والعشرون:

ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة $f(x) = x \cdot 2^x$ وارسم خطه البياني .

التمرين السادس والعشرون:

جد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ $\quad a = +\infty$

2- $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad a = -\infty$

3- $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$ $\quad a = +\infty$

التمرين السابع والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ ، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم خطه البياني

2- استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعطى بالعلاقة : $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

التمرين الثامن والعشرون:

أثبت أن $e^x \geq 1 + x$ أيا تكن $x \in \mathbb{R}$.

السؤال التاسع والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما له من مقاربات

2- أثبت أن النقطة $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ C

3- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

4- استنتج الخط البياني للتابع : $g(x) = f(-x)$

السؤال الثلاثون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

2- استنتج أن المعادلة $(1 - x)e^x = 1$ تقبل حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$

3- أثبت أن $\Delta: y = x - 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

4- ارسم C في معلم متجانس، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع : $g(x) = x + e^{1-x}$.

المسألة الواحد والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$

1- أثبت أن $\Delta_1: y = x - 1$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

2- أثبت أن $\Delta_2: y = x + 3$ مقارب لـ C في جوار $-\infty$

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

4- اكتب معادلة المماس T في نقطة تقاطع C مع محور التراتيب وادرس وضع C مع T

5- ارسم كلاً من Δ_2 , Δ_1 , T , C

المسألة الثاني والثلاثون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق العلاقة : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

1- أثبت أن f معرف على $\mathbb{R}$

2- أثبت أن المستقيم $y = 2x$ مقارب مائل لـ C . وادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

3- أوجد معادلة المماس الموازي لمحور الفواصل

4- هل يملك f قيمة حدية ؟ بين نوعها

5- ارسم كلا من Δ و C .

السؤال الأوّل:

حل المعادلات الآتية:

1- $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

2- $e^{2(x-1)} - e^{x-1} = 0$

السؤال الثاني:

حل المتراجحات الآتية:

1- $e^{2x} - 2e^{x} - 3 < 0$

2- $5^{-x} < 5^{2x}$

التمرين الأول:

جد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيمة المعطاة a :

1- $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$ $\quad a = 1$

2- $f(x) = \frac{1}{x}(e^{x} - 1)$ $\quad a = 0, +\infty$

3- $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad a = -\infty$

التمرين الثاني:

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1- $2y + 3y' = 1$

2- $2y' = y - 1$

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = e^{x} - x$

1- جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y = -x$ مقارب لـ C

3- أوجد معادلة المماس T في نقطة منه فاصلتها $x = 0$

4- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، ثم ارسم $d\ ,T\ ,C$

قسم التكامل

السؤال الأوّل :

أثبت أن التابع $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$ يكتب بالشكل $f(x)=x+2+\frac{1}{x}$ ثم احسب $I=\int_1^2 f(x)dx$

السؤال الثاني :

عين تابعاً أصلياً للتابع $f(x)=\sin^2 x$ على $\mathbb{R}$

السؤال الثالث :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$ ، المطلوب:

1- عين الأعداد الحقيقية a,b,c التي تحقق : $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

2- احسب $\int_0^1 f(x)dx$

السؤال الرابع :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$ ، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2- ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي ثم ارسم C

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x=0\,,x=1$

السؤال الخامس :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=x(1+e^x)$ ، المطلوب :

1- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C وادرس وضعه النسبي

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ، ثم ارسم C

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيم $x=1$.

السؤال السادس:

نريد حساب $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}$. احسب $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}$ ثم $I+J$ ثم استنتج J

السؤال السابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$

1- عين الأعداد a,b التي تحقق : $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}$

2- احسب $I=\int_1^2 f(x)dx$

السؤال الثامن:

عين تابعاً أصلياً لكل من التوابع الآتية على المجال المعطى :

1- $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ $\quad]0,\frac{\pi}{2}[$

2- $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$ $\quad \mathbb{R}$

3- $f(x)=\sin x+\sin^3 x$ $\quad \mathbb{R}$

السؤال التاسع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$ ، المطلوب :

1- عين a,b,c التي تحقق $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

2- احسب $\int_0^1 f(x)dx$

السؤال العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$ ، المطلوب :

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم خطه البياني

2- احسب مساحة السطح المحصور بين C و $y'y$ والمستقيم $x=1$.

السؤال الحادي عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=xe^{-x}$ ، المطلوب:

1- احسب $\int_0^{\ln 3} f(x)dx$

2- أثبت أن التابع $y=f(x)$ هو حل المعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$

السؤال الثاني عشر:

احسب كلاً مما يأتي :

1- $A = \int_{-1}^{1} |x|(1-x)dx$

2- $B = \int_{0}^{\ln 2} e^x(1-e^x)^3 dx$

3- $C = \int_{-3}^{0} \frac{3x}{2\sqrt{1-x}} dx$

4- $D = \int_{0}^{1} \frac{x+7}{x^2-2x-8} dx$

السؤال الثالث عشر:

أثبت صحة المساواة : $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$ ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$

السؤال الرابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم الذي معادلته $x = 1$.

السؤال الخامس عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$. احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين الذين معادلتهما $x = \frac{1}{e}$ و $x' = \frac{1}{e^2}$ علماً أن C فوق $x'x$.

السؤال السادس عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x+1}$ ، المطلوب :

1- جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

2- احسب $I = \int_0^2 f(x)dx$

السؤال السابع عشر:

ارسم في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الخط البياني للتابع $f(x) = \ln x$ واحسب بالتجزئة $\int_1^e \ln x \, dx$. ماذا يمثل ناتج هذا التكامل؟

السؤال الثامن عشر:

ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $g(x) = 2e^{-x}\cos x$ ، المطلوب:

1- احسب $g'(x)\,,g''(x)$

2- جد العددين a,b اللذين يحققان $g(x) = ag'(x) + bg''(x)$

3- استنتج التابع الأصلي G للتابع g الذي يحقق $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

السؤال التاسع عشر:

ليكن $I = \int_e^1 \frac{\ln x^2}{x}$, $J = \int_1^e \frac{1+2\ln x}{x}$ ، احسب I ثم احسب $I + J$ ثم استنتج J .

السؤال العشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x + 2 - xe^x$ ، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبين ماله من قيم حدية

2- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 2$ مماس ل C وادرس وضعه النسبي

3- ارسم المستقيم d ثم ارسم C

4- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومقاربه المائل والمستقيم $x = 1$.

السؤال الواحد والعشرون:

أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

5) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}$

6) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}$

7) $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 2x$

8) $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 2x$

9) $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$

10) $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$

11) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

12) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

13) $f(x) = \frac{1}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

14) $f(x) = \frac{1}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

15) $f(x) = 2x\,cos^2\,x$

16) $f(x) = 2x\,cos^2\,x$

17) $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{2x+1}}$

18) $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{2x+1}}$

19) $f(x) = x^r \cdot ln\,x$
$;r \in \mathbb{Q}\{-1\}$

20) $f(x) = x^r \cdot ln\,x$
$;r \in \mathbb{Q}\{-1\}$

21) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

22) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

السؤال الثاني والعشرون:

احسب كلا من الكاملات الآتية:

1) $\int_1^2 x\cos(x^2)\,dx$

2) $\int_1^2 x\cos(x^2)\,dx$

3) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

4) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5) $\int_1^e x \cdot \ln x\,dx$

6) $\int_1^e x \cdot \ln x\,dx$

7) $\int_1^2 \frac{x+1}{x\sqrt{x}}\,dx$

8) $\int_1^2 \frac{x+1}{x\sqrt{x}}\,dx$

9) $\int_1^2 \sqrt[3]{1-x}dx$

10) $\int_1^2 \sqrt[3]{1-x}dx$

11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$

12) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$

13) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

14) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

15) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

16) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

17) $\int_1^e (x - 1 - \ln x)dx$

18) $\int_1^e (x - 1 - \ln x)dx$

19) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1} dx$

20) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1} dx$

21) $\int_0^{\ln 2} x \cdot e^x \, dx$

22) $\int_0^{\ln 2} x \cdot e^x \, dx$

23) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} dx$

24) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} dx$

25) $\int_0^3 |2x+2| dx$

26) $\int_0^3 |2x+2| dx$

27) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$

28) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$

29) $\int_0^3 |x^2-3x+2| dx$

30) $\int_0^3 |x^2-3x+2| dx$

السؤال الثالث والعشرون:

ليكن $f(x) = x^2 + 1$. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y = x + 3$

السؤال الرابع والعشرون:

ليكن $f(x) = 2x\sqrt{x^2-9}$. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمستقيمين $x = 3 \, , x = 0$ والخط C حول $x'x$ دورة كاملة .

السؤال الخامس والعشرون:

ليكن $f(x) = x^3 - 1$. احسب مساحة السطح المحصور بين $x'x$ و $y'y$ والمستقيم $y = 7$

السؤال السادس والعشرون:

احسب S مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين $C_1 \, , C_2$ حيث : $f_1(x) = \ln x$

$f_2(x) = (\ln x)^2$

السؤال السابع والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$

1- أثبت أن f تابع زوجي واستنتج الصفة التناظرية ل C

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x = 1 \, , x = -1$

4- احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة $x'x$

السؤال الثامن والعشرون:

ليكن f_1 , f_2 تابعين معرفين على $\mathbb{R}$ وفق : $f_2(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = e^{x}$.

1- احسب S مساحة السطح المحصور بين C_1 , C_2 والمستقيم $x = 1$.

2- احسب v حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول $x'x$ دورة كاملة .

السؤال التاسع والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبيّن ما له من مقاربات ودل على القيم الحدية مبيناً نوعها

2- اكتب معادلة المماس ل C في نقطة منه فاصلتها $x = 2$ وادرس وضع C بالنسبة للمماس

3- ارسم المماس والمقاربات وارسم C

4- احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x = e$, $x = 1$

السؤال الثلاثون:

ليكن f التابع المعرف على $]0,1[\cup]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبيّن ما له من مقاربات ودل على القيم الحدية مبيناً نوعها

2- ارسم المقاربات وارسم C

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x = e$, $x = 2$

السؤال الواحد والثلاثون:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-1, +\infty[$ وفق : $f(x) = \ln(x + 1)$

ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق : $g(x) = \frac{x}{x+1}$

1- أثبت أن C_1 , C_2 متماسين في المبدأ ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عنده

2- ادرس تغيرات g , f واستنتج كل مقارب

3- ارسم C_1 , C_2 والمماس المشترك

4- احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x = 2$

السؤال الثاني والثلاثون:

ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x) = \ln\left(\frac{2x+\lambda-2}{\lambda x+1}\right)$

1- عيّن λ ليمر C بالنقطة $M(2, \ln 2)$

2- برهن أن التابع F المعرف بالعلاقة : $F(x) = x\ln(2x-2) - x - \ln(x-1)$ هو تابع أصلي ل f ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x = \frac{5}{2}$, $x = \frac{3}{2}$

السؤال الثالث والثلاثون:

أوجد التابع الأصلي لكل مما يلي :

1- $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

2- $f(x) = \sin 5x$

3- $f(x) = \frac{3}{x} - 5$

4- $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3}$

السؤال الرابع والثلاثون:

في كل من الحالات الآتية ، تحقق أن F تابع أصلي ل f :

1- $f(x) = \tan^2 x$ $\quad F(x) = \tan x - x$

2- $f(x) = \cos x - x \cdot \sin x$ $\quad F(x) = x \cdot \cos x$

3- $f(x) = \ln x$ $\quad F(x) = x \cdot \ln x - x$

السؤال الخامس والثلاثون:

احسب التكامل المحدد:

1- $\int_{-1}^{+1} \sqrt{(x+1)^3}\,dx$

2- $\int_0^2 \frac{2}{x-3}\,dx$

3- $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

4- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

السؤال السادس والثلاثون:

احسب كلاً من التكاملات الآتية بالتجزئة :

1- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x\,dx$

2- $\int_1^e \ln x\,dx$

السؤال السابع والثلاثون:

احسب تكامل كل من الكسور التالية :

1- $\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-4}dx$

2- $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2-1}dx$

السؤال الثامن والثلاثون:

أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع الآتية:

1- $f(x)=\frac{\sqrt[3]{\ln x-5}}{x}$

2- $f(x)=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sqrt{1+cos4x}}$

3- $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$

4- $f(x)=\frac{\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

5- $f(x)=(x+2)^5(x+3)$

6- $f(x)=\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

7- $f(x)=x^4e^{-\ln x}$

8- $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

9- $f(x)=\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$

10- $f(x)=\frac{e^{-\tan x}}{\cos^2 x}$

11- $f(x)=\frac{\cos 5x}{e^{\sin 5x}}$

12- $f(x)=\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

13- $f(x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

14- $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}$

15- $f(x)=\sqrt{e^{2x-4}}$

16- $f(x)=(1+e^x)e^x$

17- $f(x)=\frac{e^{3x}}{\ln 3+e^{3x}}$

18- $f(x)=\frac{1}{\frac{1}{\sin 2x}-\cot 2x}$

19- $f(x)=\sqrt{\sin x}\cos^3 x$

20- $f(x)=(\cos x-\sin 2x)^2$

21- $f(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln x + x}$

22- $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$

23- $f(x) = (x+1)^2\sqrt{x}$

24- $f(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

25- $f(x) = \sin^2 x\,(1 + \cot^2 x)$

أولاً : أجب عن السؤالين الآتيين :

السؤال الأوّل :

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$ الذي يُكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}$

a) أوجد a,b,c .

b) احسب $I=\int_1^2 f(x)dx$

السؤال الثاني :

احسب S مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين للتابعين f_1 , f_2 المعرفين وفق :

$f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=\ln^2 x$

ثانياً : حل التمرينين الآتيين :

التمرين الأوّل :

a) عيّن تابعاً أصليا لكل من :

1- $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ $\quad]0,\frac{\pi}{2}[$

2- $f(x)=\sin 2x\cdot\cos x$

b) احسب $J=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}$

التمرين الثاني :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^3-x^2+x-2}{x^2-x-2}$

1- عين a,b,c التي تحقق : $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

2- احسب $\int_0^1 f(x)dx$

ثالثاً : حل المسألة الآتية :

المسألة الأولى :

ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x)=\ln(2x-1)$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $F(x)=\frac{1}{2}[(2x-1)\ln(2x-1)-2x]$ تابع أصلي ل f .

2- احسب مساحة السطح المحصور بين c و $x'x$ والمستقيم $x=2$.

RIE | RASOUL

INTERNATIONAL EDUCATION