التحـــليـل التـــوافـــقـــي

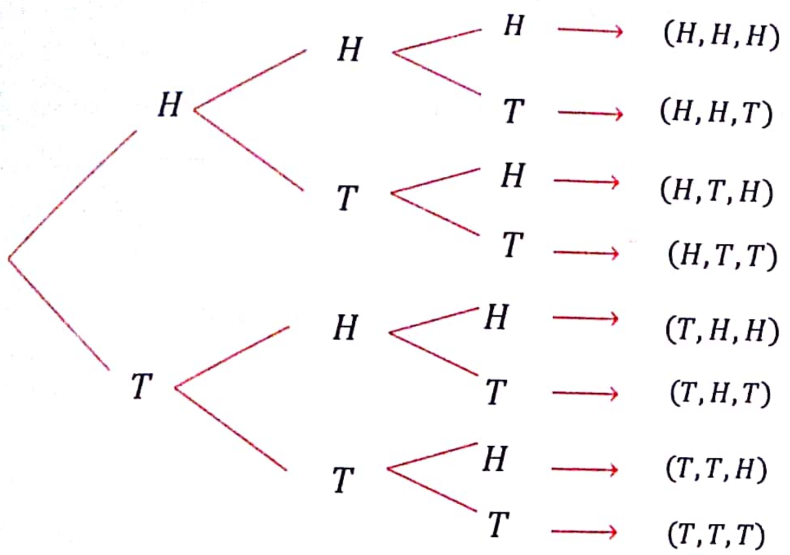
تمهيد:

نهدف من هذا البحث إلى استخدام طرائق العدّ لإيجاد عدد عناصر مجموعة وإيجاد عدد الطرق الممكنة لإجراء تجربة ما.

أولاً: استعمال التمثيل الشجري:

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات متتالية فإنه يمكن تمثيل فضاء العينة بالمخطط الشجري المجاور:

حيث نرمز بـ H للشعار و T للكتابة.



نلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة

هو: $n(\Omega) = 2^3 = 8$

ثانياً: استعمال الخانات:

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين فإنه يمكن تمثيل فضاء العينة بطريقة الخانات:

لدينا خيارين لملئ الخانة الأولى.

ونقابل كل خيار من الخانة الأولى خيارين لملئ الخانة الثانية

نلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^2 = 4$

خانة 1	خانة 2
T	T
	H
H	T
	H

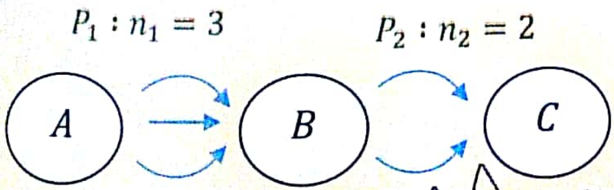
ثالثاً: المبدأ الأساسي في العدّ:

مثال توضيحي: لدينا ثلاث مدن A و B و C يمكن الإنتقال من المدينة A إلى B بثلاث طرق ويمكن الانتقال من المدينة B إلى المدينة C بطريقتين، بكم طريقة يمكن الإنتقال من المدينة A إلى المدينة C مروراً بالمدينة B

مناقشة الحل: نلاحظ أننا يمكننا الإنتقال من A إلى B بثلاث طرق

ويمكننا الإنتقال من B إلى C بطريقتين

اي أن الإنتقال من A إلى C يتم عبر مرحلتين P_1 و P_2



فحسب المبدأ الأساسي في العدّ يمكن الإنتقال من A إلى C بـ $(n = n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6)$ أي يوجد 6 طرق.

الخلاصة: إذا كان لدينا عمل يتم عبر r مرحلة، وكانت المرحلة الأولى تتم بـ n_1 طريقة وكانت المرحلة الثانية تتم بـ n_2 طريقة، وكانت المرحلة الثالثة تتم بـ n_3 طريقة و...... وكانت المرحلة الأخيرة تتم بـ n_r طريقة فإن عدد طرق إنجاز هذا العمل هو:

$$\boxed{\text{عدد الطرق} = n_1 . n_2 . n_3 \cdots\cdots\cdots . n_r}$$

التباديل على مجموعة:

بفرض E مجموعة غير خالية مكونة من n عنصراً نسمي تبديلاً على المجموعة E كل قائمة مكونة من n بنداً تضم جميع عناصر E .

فمثلاً: المجموعة $E=\{a,b,c\}$ عندئذ يكون كلاً من (a,b,c) , (a,c,b) تبديلاً على E ومنه فكرة التباديل للمجموعة E تاول إلى ملئ ثلاث خانات مرقمة بحيث تحوي كل خانة حرفاً واحداً من E وتكون الحروف الواردة في الخانات مختلفة مثنى مثنى.

ففي المثال السابق نلاحظ انه يوجد ثلاث خيارات لملء الخانة الأولى ويوافق كل منها خيارين لملء الخانة الثانية ويوافق كل منها خيار واحد لملء الخانة الثالثة.

خانة 3	خانة 2	خانة 1

ومنه عدد تباديل المجموعة E يساوي $3\times2\times1=6$ وهذا يقابل العدد $3!$

تعريف: يعطى عدد تباديل مجموعة E مكونة من n عنصراً $(n\geq1)$ بالصيغة:

$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\times2\times1$ ويقرا n عاملي ونصطلح $0!=1$

الخلاصة: في التباديل يوجد أهمية للترتيب ونستخدم كافة العناصر ولا يوجد تكرار.

مثال (1) : بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب مختلفة على رف فيه 5 أماكن؟

عدد طرق التباديل هي: عدد الطرق $=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ طريقة

مثال (2): لتكن المجموعة $E=\{a,s,n,r\}$ بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة مؤلفة من اربعة أحرف مختلفة من حروف المجموعة E

عدد طرق تشكيل الكلمة هو عدد الطرق $=4!=4\times3\times2\times1=24$ طريقة

توضيح:

يمكن اختيار الحرف الأول بـ 4 طرق
يمكن اختيار الحرف الثاني بـ 3 طرق
يمكن اختيار الحرف الثالث بـ 2 طريقة
يمكن اختيار الحرف الرابع بـ 1 طريقة

حسب المبدأ الأساسي في العد: (عدد الطرق $=4\times3\times2\times1=24$ طريقة)

****

التراتيب:

أولاً: القوائم دون تكرار:

بفرض E مجموعة مؤلفة من n عنصر وبفرض لدينا مجموعة جزئية من E مكونة من r عنصر بنودها مختلفة مثنى مثنى حيث $1\leq r\leq n$ نسمي كل قائمة مكونة من r بنداً مأخوذة من E ترتيباً طوله r

ومنه لترتيب مجموعة طولها r مأخوذة من n عنصر نستخدم قانون التراتيب:

$$\boxed{P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\times(n-r+1)}$$

ويمكن كتابة قانون التراتيب بالشكل: $$\boxed{P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}}$$

الخلاصة: تستخدم التراتيب إذا كان لدينا مجموعة تحوي n عنصر واردنا ترتيب r عنصر منها هي قوائم، وتستخدم في تحديد المراكز او المناصب او ترتيب الأماكن وفي مسائل سحب (بطاقات او كرات) على التتالي دون إعادة.

حسان البيطار 0933756454 خلدون سبروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

مثال ①: بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب مختلفة من مجموعة تحوي 6 كتب على رف؟

طريقة اولى : $P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ طريقة

طريقة ثانية : $P_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ طريقة

مثال ②: يشترك في سباق للخيول ثمانية متسابقين بكم طريقة يمكن تعيين الفائز الأول والثاني والثالث علماً انه لا يصل متسابقين معاً إلى خط النهاية بنفس الوقت؟

طريقة اولى: $P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ طريقة

طريقة ثانية:

عدد طرق تعيين الفائز الأول 8 طرق
عدد طرق تعيين الفائز الثاني 7 طرق
عدد طرق تعيين الفائز الثالث 6 طرق

حسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرق $= 8 \times 7 \times 6 = 336$ طريقة

ثانياً: القوائم مع تكرار:

في هذه الحالة يسمح بتكرار عناصر المجموعة E في بنود القائمة.

فإذا كان لدينا r خانة فيكون لدينا n خيار للبنـد الأول و n خيار للبند الثاني ……… n خيار للبند r، إذاً عدد هذه القوائم هو n^r

خانة r	………	خانة 2	خانة 1

الخلاصة: قد نحتاج أحياناً إلى تكرار العناصر المختارة ففي هذه الحالة تؤول التراتيب إلى المبدأ الأساسي في العدّ.

مثال: صف يحوي 20 طالب بكم طريقة يمكن تعيين الطالب الأولي في مادة الرياضيات والفيزياء والكيمياء.

نلاحظ أنه نفس الطالب محتمل أن يكون أولي في المواد الثلاثة معاً لذلك لا يمكن استخدام قانون P_n^r لأنه يوجد تكرار في هذه الحالة لذلك نستخدم المبدأ الأساسي في العدّ:

يمكن اختيار الأولي في مادة الرياضيات بـ 20 طريقة
يمكن اختيار الأولي في مادة الفيزياء بـ 20 طريقة
يمكن اختيار الأولي في مادة الكيمياء بـ 20 طريقة

حسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرق $= 20 \times 20 \times 20 = 8000$ طريقة

تمرين:

كم عدداً طبيعياً مكوناً من 4 ارقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام $\{0,1,2,4,7,8\}$ ليكون العدّد اقل من 4000

توضيح:

يجب أن تكون الأعداد مكونة من 4 ارقام لذا لا يمكن أن يكون في الألوف صفر

ويجوز تكرار الأرقام لأنه لم يذكر خلاف ذلك.

الأعداد يجب أن تكون اقل من 4000 لذا لا يمكن استخدام الأرقام 8,7,4 في خانة الألوف.

يمكن اختيار رقم احاد الألوف بـ 2 طريقة
يمكن اختيار رقم المئات بـ 6 طرق
يمكن اختيار رقم العشرات بـ 6 طرق
يمكن اختيار رقم الآحاد بـ 6 طرق

وحسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرق $= 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 432$ طريقة

****

تمارين صفحة 152:

1) اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة:

$\boxed{1}$ $$\frac{21!}{20!}=\frac{21\times 20!}{20!}=21$$

$\boxed{2}$ $$\frac{17!}{15!}=\frac{17\times 16\times 15!}{15!}=17\times 16=272$$

$\boxed{3}$ $$\frac{6!-5!}{5!}=\frac{6\times 5!-5!}{5!}=\frac{5!(6-1)}{5!}=6-1=5$$

$\boxed{4}$ $$\frac{6\times 4!}{5!}=\frac{6\times 4!}{5\times 4!}=\frac{6}{5}$$

$\boxed{5}$ $$\frac{7!\times 5!}{10!}=\frac{7!\times 5!}{10\times 9\times 8\times 7!}=\frac{5!}{10\times 9\times 8}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{6}$$

$\boxed{6}$ $$\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!}=\frac{1}{5!}-\frac{42}{7\times 6\times 5!}=\frac{1}{5!}-\frac{1}{5!}=0$$

$\boxed{7}$ $$\frac{6!}{(3!)^2}=\frac{6!}{3!\times 3!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 3!}=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=5\times 4=20$$

$\boxed{8}$ $$\frac{9!}{5!\times 4!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 4!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=9\times 2\times 7=126$$

$\boxed{9}$ $$\frac{9!}{6!\times 3!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 3!}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=3\times 4\times 7=84$$

$\boxed{10}$ $$\frac{6!+7!}{2!\,3!\,4!}=\frac{6!+7\times 6!}{2\times 1\times 3\times 2\times 1\times 4!}=\frac{6!\,(1+7)}{12\times 4!}=\frac{6\times 5\times 4!\times 8}{12\times 4!}=\frac{6\times 5\times 8}{12}=5\times 4=20$$

---

2) اختزل المقادير الآتية:

$\boxed{1}$ $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)(n)=n^2+n$$

$\boxed{2}$ $$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}=(2n+1)(2n)=4n^2+2n$$

$\boxed{3}$ $$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}=\frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2n(n-1)!-(n-1)!}=\frac{(2n-1)!\,[2n-1]}{(n-1)!\,[2n-1]}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots\left(\overbrace{2n-n}^{n}\right)(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$=(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots n$$

$\boxed{4}$ $$\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1)n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$$

$\boxed{5}$ $$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)n!}=\frac{1}{n!}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{1}{n!}\left[\frac{n}{n+1}\right]$$

$$=\frac{n}{n(n-1)!\,(n+1)}=\frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$$

0955561648 طارق سعد الدين

0932791896 خلدون سيروان

0933756454 حسان البيطار

$$\boxed{6}\ \frac{(2n)!}{1\times3\times5\cdots\cdots\times(2n-1)}$$

$$=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots\left(\overbrace{2n-n}^{n}\right)(n-1)\cdots\cdots5\times4\times3\times2\times1}{1\times3\times5\times\cdots\cdots(2n-1)}$$

$$=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots\cdots\times6\times4\times2$$

$$=2(n).2(n-1).2(n-2)\cdots\cdots\times2(3)\times2(2)\times2(1)$$

$$=2^n[n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\times3\times2\times1]=2^n.n!$$

---

3) اكتب جميع تباديل المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

المجموعة E تحوي 4 عناصر فإن عدد التباديل هو: $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = !4$ = عدد التباديل

$$\Omega=\{(a,b,c,d),(a,b,d,c),(a,d,b,c),(a,d,c,b),(a,c,b,d),(a,c,d,b),(b,a,c,d)$$
$$(b,a,d,c),(b,d,a,c),(b,d,c,a),(b,c,a,d),(b,c,d,a),(c,a,d,b),(c,a,b,d)$$
$$(c,b,a,d),(c,b,d,a),(c,d,a,b),(c,d,b,a),(d,a,b,c),(d,a,c,b),(d,b,a,c)$$
$$(d,b,c,a),(d,c,a,b),(d,c,b,a)\}$$

---

4) لتكن المجموعة $S=\{1,2,5,8,9\}$

1. كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

نلاحظ أن العدد مؤلف من منزلتين ويمكن التكرار أي يمكن اختيار الآحاد بـ 5 طرق ويمكن اختيار العشرات بـــ 5 طرق

وحسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد الطرق المطلوبة:

عدد الطرق $= 5 \times 5 = 25$ طريقة

2. كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

بما أن أرقام العدد مختلفة (لا يمكن أن يكون للآحاد وللعشرات نفس الرقم) فإن عدد طرق تشكيل العدد هو:

$P_5^2 = 5 \times 4 = 20$ طريقة

3. كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

يكون العدد زوجي إذا كان آحاده زوجي ومنه:

يمكن اختيار الآحاد بـ 2 طريقة
يمكن اختيار العشرات بـ 5 طرق
حسب المبدأ الأساسي في العد عدد طرق تشكيل العدد:

عدد الطرق $= 5 \times 2 = 10$ طرق

---

5) في أحد مراكز الهاتف مهندسان وأربعة عمال كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟

يمكن اختيار المهندس بـ 2 طريقة
يمكن اختيار العامل بـ 4 طرق
حسب المبدأ الأساسي في العد عدد الطرق المطلوبة

عدد الطرق $= 4 \times 2 = 8$ طرق

---

6) يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين سر للنادي؟

بما ان الترتيب مهم فإن الاختيار يتم بـ P_7^3 اي: عدد الطرق $= P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ طرق

---

7) اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟ (لا توجد حالات تساو).

ترتيب المراكز مهم ومنه يمكن توزيع الميداليات بـ: عدد الطرق $= P_{100}^3 = 100 \times 99 \times 98 = 970200$ طريقة

التوافيق

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصراً وليكن r عدداً طبيعياً يحقق $0 \le r \le n$ نسمي توفيقاً يضم r عنصراً من E كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من E وفي هذه الحالة يكون ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية غير مهم.

فمثلاً: $\{a,b\}$, $\{b,a\}$ تمثلان المجموعة نفسها ونكتب قانون التوافيق بالشكل:

$$\boxed{C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,.\,r!}}$$

مثال: صندوق يحوي 8 كرات بكم طريقة يمكن اختيار 3 كرات من الصندوق السابق.

طريقة اولى : $\binom{8}{3} = \frac{P_8^3}{3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 8\times7 = 56$ طريقة

طريقة ثانية : $\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!\,.3!} = \frac{8!}{5!\,.3!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\,.\,3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$ طريقة

الخلاصة: نستخدم التوافيق عندما نكون أمام اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصر من مجموعة أوسع تحوي n عنصر.

ومعنى التوافيق $\binom{n}{r}$ هو عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من r عنصر والمأخوذة من مجموعة تضم n عنصر.

مثال: مغلف يحوي 16 بطاقة ملونة 4 حمراء و4 خضراء و4 صفراء و4 زرقاء وكل لون مرقم من 1 إلى 4 نسحب 5 بطاقات من المغلف.

1. **كم سحباً يضم تماماً بطاقتين زرقاء اللون.**
2. **كم سحباً يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل رقم (1).**

1. يجب سحب بطاقتين من البطاقات الزرقاء والبطاقات الثلاث المتبقية يجب سحبها من البطاقات الـ 12 المتبقية ومنه طرق السحب هي:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{4}{2}\binom{12}{3} = \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 2\times3\times2\times11\times10 = 1320 \text{ طريقة}$$

2. لنرمز بالرمز A إلى مجموعة السحوبات التي يضم كل منها بطاقة واحدة على الأقل تحمل رقم 1

نلاحظ انه من الأسهل الاعتماد على حساب عدد عناصر متمم المجموعة A وهو $\acute{A}$

اي $\acute{A}$ تضم السحوبات التي لا تحمل رقم 1 اي اختيار 5 بطاقات من 12 بطاقة (بعد حذف 4 بطاقات تحمل الرقم 1).

$$n(A) = \underbrace{\binom{16}{5}}_{\text{عدد السحوبات الكلية}} - \underbrace{n(\acute{A})}_{\text{عدد السحوبات التي لا تضم 1}}$$

$$n(A) = \binom{16}{5} - \binom{12}{5}$$

$$= \frac{16\times15\times14\times13\times12}{5\times4\times3\times2\times1} - \frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1} = 4368 - 792 = 3576 \text{ طريقة}$$

خواص عدد التوافيق $\binom{n}{r}$:

1. اياً كان العددان الطبيعيان r و n وكان $0 \le r \le n$ كان $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ بشرط $r > \frac{n}{2}$
2. $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$
3. اياً كان العددان الطبيعيان r و n وكان $1 \le r \le n$ كان $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$
4. يتساوى توفيقان $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ عندما: $p = q$ او $p + q = n$

والحل يجب ان يحقق الشرط: $((n \ge p)\ (n \ge q))$

تمارين صفحة 155:

1) اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة او كسور غير قابلة للاختزال.

$\boxed{1}\ \binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$	$\boxed{2}\ \binom{12}{8}=\binom{12}{4}=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$
$\boxed{3}\ \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{\frac{7\times6}{2\times1}}{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}=\frac{7\times6}{3\times8\times7}=\frac{1}{4}$	$\boxed{4}\ \frac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{6\times5}{2\times1}}{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}=\frac{25}{14}$
$\boxed{5}\ \frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}=\frac{8\times7\times6}{9\times8\times7}=\frac{2}{3}$	$\boxed{6}\ \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}}=\frac{1}{10}$

---

2) اثبت صحة المساواة $n\binom{n-1}{r-1}=r\binom{n}{r}$ في حالة $n\geq 2$ و $1\leq r\leq n$

طريقة أولى :

$$L_1=n\binom{n-1}{r-1}=n\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!}=\frac{n(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$L_2=r\binom{n}{r}=r\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{r\,n!}{r(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

ومنه $L_1=L_2$ فالمساواة السابقة صحيحة.

طريقة ثانية:

$$L_1=n\binom{n-1}{r-1}=n\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!}=\frac{n(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\cdot\frac{r}{r}$$

$$=r\cdot\frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!}=r\cdot\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=r\binom{n}{r}=L_2$$

إذاً $L_1=L_2$ فالمساواة السابقة صحيحة.

---

3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

$\boxed{1}\ \binom{n}{2}=36$

شرط الحل $n\geq 2$:

$$\frac{n(n-1)}{2\times1}=36$$

$$\frac{n^2-n}{2}=36$$

$$n^2-n-72=0$$

$(n-9)(n+8)=0 \Rightarrow$ إما $\boxed{n=9}$ (مقبول) او $n=-8$ (مرفوض)

$\boxed{2}\ 3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$

شرط الحل $((n\geq4)\cap(n\geq2))$ ومنه: $n\geq 4$

من شرط الحل $n\neq0$ و $n-1\neq0$ نقسم الطرفين على $n(n-1)$:

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=14\frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{8}=7$$
$$(n-2)(n-3)=56$$
$$n^2-5n-50=0 \Rightarrow (n-10)(n+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } \boxed{n=10} & (\text{مقبول}) \\ \text{او } n=-5 & (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$: $\left.\begin{matrix}10\geq n+2\\ 10\geq 3n\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\leq n\leq 3$ شرط الحل

إما $3n+n+2=10$

$4n+2=10$

$\boxed{n=2}$ (مقبول)

او $3n=n+2$

$2n=2$

$\boxed{n=1}$ (مقبول)

---

4) نريد تاليف لجنة مكونة من اربعة اشخاص ماخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً واربع عشر امراة.

1. كم لجنة مختلفة يمكننا تاليفها؟

عدد طرق اختيار 4 أشخاص من 29 شخص:

$$\binom{29}{4}=\frac{29\times 28\times 27\times 26}{4\times 3\times 2\times 1}=23751 \quad \text{لجنة}$$

2. كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين وامراتين يمكننا تاليفها؟

نرمز للرجل بـ m و نرمز للمرأة بـ f

$$A=\{(f,f,m,m)\}$$
$$n(A)=\binom{14}{2}\binom{15}{2}=\frac{14\times 13}{2\times 1}\times\frac{15\times 14}{2\times 1}=7\times 13\times 15\times 7=9555 \quad \text{لجنة}$$

***

منشور ذي الحدين: أياً كان العددان العقديان b,a وأياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$ كان:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n.b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}.b+\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2+\cdots\cdots+\binom{n}{n}a^0.b^n$$
$$=a^n+n.a^{n-1}.b+\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2+\cdots\cdots+b^n$$

ملاحظة: الحد ذي الدليل r في منشور $(a+b)^n$ ترتيبه $r+1$ ويعطى بالعلاقة:

$$\boxed{T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r}$$

اي: الحد الأول هو T_0 والحد الثاني هو T_1 والحد الثالث T_2 و..... والحد $r+1$ هو T_r

مثال: اوجد منشور كلاً من المقدارين $A=(2x-1)^5$ ، $B=(1+i)^6$

$A=(2x-1)^5$ حيث $(a=2x),(b=-1),\ (n=5)$:

$$=\binom{5}{0}(2x)^5(-1)^0+\binom{5}{1}(2x)^4(-1)^1+\binom{5}{2}(2x)^3(-1)^2+\binom{5}{3}(2x)^2(-1)^3+\binom{5}{4}(2x)^1(-1)^4$$
$$+\binom{5}{5}(2x)^0(-1)^5$$
$$=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$$

$B=(1+i)^6$ حيث $(a=1),(b=i)\ ,\ (n=6)$:

$$=\binom{6}{0}(1)^6(i)^0+\binom{6}{1}(1)^5(i)^1+\binom{6}{2}(1)^4(i)^2+\binom{6}{3}(1)^3(i)^3+\binom{6}{4}(1)^2(i)^4+\binom{6}{5}(1)(i)^5+\binom{6}{6}(1)^0(i)^6$$
$$=1+6i+15i^2+20i^3+15i^4+6i^5+i^6$$
$$=1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i$$

0955561648 طارق سعد الدين 0932791896 خلدون سيروان 0933756454 حسان البيطار

تمارين صفحة 159:

1) انشر كلاً من العبارات الآتية:

1 $(2+x)^4 = \binom{4}{0}(2)^4(x)^0 + \binom{4}{1}(2)^3(x)^1 + \binom{4}{2}(2)^2(x)^2 + \binom{4}{3}(2)^1(x)^3 + \binom{4}{4}(2)^0(x)^4$

$= (1)(16)(1) + (4)(8)x + (6)(4)x^2 + (4)(2)x^3 + (1)(1)x^4$

$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

---

2 $(1-x)^5 =$

$= \binom{5}{0}(1)^5(-x)^0 + \binom{5}{1}(1)^4(-x)^1 + \binom{5}{2}(1)^3(-x)^2 + \binom{5}{3}(1)^2(-x)^3 + \binom{5}{4}(1)^1(-x)^4$

$+ \binom{5}{5}(1)^0(-x)^5$

$= (1)(1)(1) + (5)(1)(-x) + (10)(1)(x^2) + (10)(1)(-x^3) + (5)(1)(x^4) + (1)(1)(-x^5)$

$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

---

3 $(2x+1)^6 =$

$= \binom{6}{0}(2x)^6(1)^0 + \binom{6}{1}(2x)^5(1)^1 + \binom{6}{2}(2x)^4(1)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(1)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2(1)^4$

$+ \binom{6}{5}(2x)^1(1)^5 + \binom{6}{6}(2x)^0(1)^6$

$= (1)(64x^6)(1) + (6)(32x^5)(1) + (15)(16x^4)(1) + (20)(8x^3)(1)$

$+(15)(4x^2)(1) + (6)(2x)(1) + (1)(1)(1)$

$= 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$

---

4 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}(x)^4\left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}(x)^3\left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}(x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}(x)^1\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}(x)^0\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$= (1)(x^4)(1) + (4)(x^3)\left(\frac{1}{x}\right) + 6(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right) + (4)(x)\left(\frac{1}{x^3}\right) + (1)(1)\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

---

5 $(1+2i)^3 = \binom{3}{0}(1)^3(2i)^0 + \binom{3}{1}(1)^2(2i)^1 + \binom{3}{2}(1)^1(2i)^2 + \binom{3}{3}(1)^0(2i)^3$

$= (1)(1)(1) + (3)(1)(2i) + (3)(1)(4i^2) + (1)(1)(8i^3)$

$= 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$

---

6 $(2-i)^4 = \binom{4}{0}(2)^4(-i)^0 + \binom{4}{1}(2)^3(-i)^1 + \binom{4}{2}(2)^2(-i)^2 + \binom{4}{3}(2)^1(-i)^3 + \binom{4}{4}(2)^0(-i)^4$

$= (1)(16)(1) + (4)(8)(-i) + (6)(4)(i^2) + (4)(2)(-i^3) + (1)(1)(i^4)$

$= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 24i$

---

2) عين في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x

لدينا: $b=\frac{1}{x}$ ، $a=x$ ، $n=10$

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r=\binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{10}{r}x^{10-r}\frac{1}{x^r}$$

$$=\binom{10}{r}x^{10-r}.x^{-r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{T_r=\binom{10}{r}x^{10-2r}}$$

لنوجد دليل الحد الذي يحوي x^2 و الذي يحقق :

$$x^2=x^{10-2r}$$

$$2=10-2r$$

$$2r=8\quad\Rightarrow\quad\boxed{r=4}$$

$$T_4=\binom{10}{4}x^{10-2(4)}=\binom{10}{4}x^2$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}x^2=210\,x^2$$

الحد الثابت المستقل عن x فيه x^0 ودليله يحقق :

$$x^0=x^{10-2r}$$

$$0=10-2r$$

$$2r=10\quad\Rightarrow\quad\boxed{r=5}$$

$$T_5=\binom{10}{5}x^{10-2(5)}=\binom{10}{5}x^0$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252\,x^0=252$$

---

3) ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت مستقل عن x

$$T_r=\binom{n}{r}(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{n}{r}x^{2n-2r}\frac{1}{x^r}$$

$$=\binom{n}{r}x^{2n-2r}.x^{-r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{T_r=\binom{n}{r}x^{2n-3r}}$$

وجود حد ثابت يكافئ وجود قيمة للدليل r تحقق الشرط:

$$x^0=x^{2n-3r}$$

$$0=2n-3r$$

$$3r=2n\Rightarrow r=\frac{2n}{3}$$

وبما ان n عدد طبيعي فيجب ان يكون n من مضاعفات العدد (3) ماعدا العدد الصفر

---

4) اختزل منشور المقدار $(1+x)^6+(1-x)^6$

باستخدام منشور ذي الحدين:

$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$

$$(1-x)^6=1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$$

$$(1+x)^6+(1-x)^6=2+30x^2+30x^4+2x^6$$

انشطة

نشاط (1): انواع السحب المختلفة:

نتأمل صندوق يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 , 7 , 8 , 9 نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة.

1) **كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟**

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

2) **كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية؟**

a) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$

b) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 والثانية تحمل الرقم 7

$$1 \times 1 \times 4 = 4$$

c) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8

$$4 \times 1 \times 1 = 4$$

d) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7

$$4 \times 1 \times 4 = 16$$

في حالة السحب دون إعادة:

1) $4 \times 3 \times 2 = 24$

2) a) $1 \times 1 \times 1 = 1$ b) $1 \times 1 \times 2 = 2$

c) $2 \times 1 \times 1 = 2$ d) $3 \times 1 \times 2 = 6$

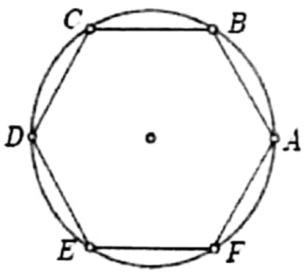
في حالة السحب معاً:

1) كم عدد النتائج الممكنة: $\binom{4}{3} = 4$

2) كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 : $\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$

3) كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 9,8 : $\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} = 2$

نشاط (2): مثلثات في مسدس:



في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F

موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم

نجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث

1) **ما عدد المثلثات التي يمكن ان نحصل عليها بهذا الأسلوب؟**

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

2) **ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن ان نحصل عليها بهذا الأسلوب؟**

ينقسم العمل لمرحلتين: المرحلة الأولى: عدد طرق إنشاء قطر المسدس المار من مركز الدائرة ويتم بـ 3 طرق

المرحلة الثانية: عدد طرق انشاء مثلث قائم ويتم بأربع طرق تقابل كل طريقة لإنشاء القطر

عدد المثلثات يكون جداء طرق كل مرحلة $4 \times 3 = 12$

3) **ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن ان نحصل عليها بهذا الأسلوب؟**

كل ضلعين متجاورين في المسدس تشكل مثلث منفرج زاويته $\frac{2\pi}{3}$

عدد المثلثات المنفرجة 6

نشاط (3): منعاً من السرقة: يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكون من عدد ذي اربع خانات يمكن لأي منها ان يأخذ اياً من القيم $0,1,\ldots,9$

1) a) ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجر إدخال أي خانة صحيحة في مكانها.

ما عدد الرمّازات التي تسبب انطلاق الإنذار

عدد الرمّازات التي تصلح للقفل: $10\times10\times10\times10=10000$

عدد الرمّازات التي تسبب انطلاق الانذار 9999

b) ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل والمكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

$$10\times9\times8\times7=5040$$

2) عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة ان يعيد إدخال الرمّاز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع. يتذكر المالك ان الرمّاز الصحيح مكون من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنه نسي ترتيبها

كم رمّازاً مختلفاً يمكن للمالك ان يكون من هذه الأرقام؟

يمكن وضع الرقم (1) باربع طرق يمكن وضع الرقم (5) بثلاث طرق

اما العددان 9 و 9 يتم وضعهما بطريقة واحدة ومنه عدد الرمّازات $=3\times4\times1=12$

نشاط (4): تحويل العبارات المثلثية: حول كل عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات x

$$\cos^4 x=(\cos x)^4=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4$$
$$=\frac{\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)^4}{16}$$
$$=\frac{1}{16}\left(e^{4xi}+4e^{2xi}+6+4e^{-2xi}+e^{-4xi}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left[e^{4xi}+e^{-4xi}+4\left(e^{2xi}+e^{-2xi}\right)+6\right]$$
$$=\frac{1}{16}(2\cos 4x+8\cos 2x+6)$$
$$=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$$

$$\cos^2 x.\sin^2 x=(\cos x)^2(\sin x)^2$$
$$=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)^2}{(2)^2}.\frac{\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)^2}{(2i)^2}$$
$$=\frac{\left(\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)\right)^2}{(4)(-4)}$$
$$=\frac{-1}{16}\left(e^{2xi}-e^{-2xi}\right)^2$$
$$=\frac{-1}{16}\left(e^{4xi}-2+e^{-4xi}\right)$$
$$=\frac{-1}{16}\left(e^{4xi}+e^{-4xi}-2\right)$$
$$=\frac{-1}{16}(2\cos 4x-2)$$
$$=\frac{-1}{8}(\cos 4x-1)$$

$$\sin^5 x=(\sin x)^5$$
$$=\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^5$$
$$=\frac{\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)^5}{(2i)^5}$$
$$=\frac{1}{32i}\left(e^{5xi}-5e^{3xi}+10e^{xi}-10e^{-xi}+5e^{-3xi}-e^{-5xi}\right)$$
$$=\frac{1}{32i}\left[e^{5xi}-e^{-5xi}-5\left(e^{3xi}-e^{-3xi}\right)+10\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{32i}(2i\sin 5x-10i\sin 3x+20i\sin x)$$
$$=\frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x)$$

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

تمرينات ومسائل

1) اثبت صحة العلاقتين:

$\boxed{2}$ $\dfrac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{n+1-r}$

$$L_1 = \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

$$= \frac{\dfrac{(n+1)n!}{(n+1-r)(n-r)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!}} = \frac{n+1}{n+1-r} = L_2$$

$\boxed{1}$ $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$

$$L_1 = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1-r-1)!\,(r+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

$$= \frac{\dfrac{(n+1)n!}{(n-r)!\,(r+1)r!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}} = \frac{n+1}{r+1} = L_2$$

---

2) احسب قيمة كل من n و r إذا علمت:

$\boxed{2}$ $2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

$$2\frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!} = 5\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$\frac{2}{(n-r)!\,(r+1)r!} = \frac{5}{(n+1-r)(n-r)!\,r!}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n+1-r}$$

$$5r+5 = 2n+2-2r$$

$$\boxed{3 = 2n-7r} \qquad \boxed{2}$$

$\boxed{1}$ $3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

$$3\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = 8\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$$

$$\frac{3}{(n-r)!\,r(r-1)!} = \frac{8}{(n-r+1)(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$$

$$3n-3r+3 = 8r$$

$$\boxed{3 = 11r-3n} \qquad \boxed{1}$$

بمطابقة $\boxed{2}$ و $\boxed{1}$ نجد :

$$11r-3n = 2n-7r$$

$$18r = 5n \Longrightarrow n = \frac{18r}{5}\ (*) \xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{2}} 3 = \frac{36r-35r}{5} \Longrightarrow \boxed{r=15} \xrightarrow{\text{نعوض في } (*)} \boxed{n=54}$$

ملاحظة: لإيجاد قيمة n في التراتيب نضع شرط الحل: $n \geq r$ ثم نستخدم قانون P_n^r

3) عين n في كل من الحالات الآتية:

$\boxed{2}$ $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$

شرط الحل $(n \geq 6) \cap (n \geq 5)$ ومنه: $n \geq 6$

$$P_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$18P_{n-2}^4 = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

بعد المساواة و الاختصار نجد ان :

$$n(n-1) = 18(n-5)$$

$$n^2-n = 18n-90$$

$$n^2-19n+90 = 0$$

$$(n-10)(n-9) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{n=10} \text{ (مقبول)} \\ \boxed{n=9} \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$

شرط الحل $(n \geq 3) \cap (n \geq 2)$ ومنه: $n \geq 3$

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n(n-1)(n-2)$$

$$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$$

$$n^2+n+2n+2 = 14n-28$$

$$n^2+3n+2-14n+28 = 0$$

$$n^2-11n+30 = 0$$

$$(n-6)(n-5) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{n=6} \text{ (مقبول)} \\ \boxed{n=5} \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

4 $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$ شرط الحل $(n \geq 6) \cap (n \geq 6)$ ومنه: $n \geq 6$ $P_n^6 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ $12P_{n-1}^5 = 12(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ بعد المساواة و الاختصار نجد ان : $\boxed{n = 12}$ (مقبول)	**3** $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$ شرط الحل $(n \geq 4) \cap (n \geq 4)$ ومنه: $n \geq 4$ $n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$ $\boxed{n = 10}$ (مقبول)
6 $P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$ شرط الحل $(n \geq -1) \cap (n \geq 1)$ ومنه: $n \geq 1$ $(n+2)(n+1)n = 6(n+2)$ $(n+1)n = 6$ $n^2 + n = 6$ $n^2 + n - 6 = 0$ $(n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -3 & \text{(مرفوض)} \\ \boxed{n = 2} & \text{(مقبول)} \end{cases}$	**5** $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$ شرط الحل $(n \geq 0) \cap (n \geq 2)$ ومنه: $n \geq 2$ $(n+1)(n)\,(n-1) = 2\,(n+2)\,(n+1)$ $n(n-1) = 2(n+2)$ $n^2 - n = 2n + 4$ $n^2 - 3n - 4 = 0$ $(n-4)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n = 4} & \text{(مقبول)} \\ n = -1 & \text{(مرفوض)} \end{cases}$
8 $P_n^2 = 5P_{n-1}^1$ شرط الحل $(n \geq 2) \cap (n \geq 2)$ ومنه: $n \geq 2$ $n\,(n-1) = 5\,(n-1)$ $\boxed{n = 5}$ (مقبول)	**7** $P_{n+2}^3 = 4P_{n+1}^2$ شرط الحل $(n \geq 1) \cap (n \geq 1)$ ومنه: $n \geq 1$ $(n+2)(n+1)(n) = 4(n+1)(n)$ $n + 2 = 4$ $\boxed{n = 2}$ (مقبول)

---

4) يلتقي عشرة اصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل، عمم الحالة السابقة إلى حالة n صديق.

نعلم أن المصافحة تتم بين شخصين لمرة واحدة فقط:

وبالتالي عدد المصافحات يساوي عدد طرق اختيار شخصين من عشرة أشخاص:

في حالة 10 اصدقاء : $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ مصافحة = عدد المصافحات

في حالة n صديق : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ مصافحة = عدد المصافحات

---

5) في احد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة.

1. بكم طريقة يمكن للطالب ان يختار الأسئلة؟

يمكن اختيار الأسئلة السبعة من العشرة بـ:

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ طريقة = عدد الطرق

2. بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية؟

بما ان الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية فإنه يجب اختيار ثلاثة أسئلة من الأسئلة الستة الباقية:

$\binom{4}{4}\binom{6}{3} = 1 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ طريقة = عدد الطرق

---

6) صف فيه 12 طالب و 8 طالبات ارادوا ان ينتخبوا لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة اشخاص، بكم طريقة يتم انتخاب اللجنة في الحالات الآتية:

1. اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

بفرض الطالب m والطالبة f فإن اللجنة: $\{(f, f, m, m, m)\}$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} = \frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 6160 \text{ طريقة}$$

2. ان يكون في اللجنة طالبتين على الأكثر.

$\{(f, f, m, m, m), (f, m, m, m, m), (m, m, m, m, m)\}$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{1}\binom{12}{4} + \binom{12}{5}$$
$$= \frac{8\times7}{2}\times\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} + 8\times\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} + \frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1}$$
$$= 6160 + 3960 + 792 = 10912 \text{ طريقة}$$

3. ان يكون في اللجنة طالبتين على الأقل.

نلاحظ أن متمم الحالة هو: في اللجنة طالبة واحدة على الأكثر ومنه عدد الطرق:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{20}{5} - \left[\binom{8}{1}\binom{12}{4} + \binom{8}{0}\binom{12}{5}\right] = 15504 - [3960 + 792]$$
$$= 15504 - 4752 = 10752 \text{ طريقة}$$

---

7) احسب امثال x^3 في منشور $(2+3x)^{15}$

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r}.b^r \quad , \quad (a=2), \ (b=3x), \ (n=15)$$

الحد الذي فيه x^3 هو T_3 ومنه:

$$T_3 = \binom{15}{3}(2)^{15-3}.(3x)^3 = \binom{15}{3}(2)^{12}.(27x^3) = (455).(4096).(27x^3) = 50319360\,x^3$$

إذاً أمثال x^3 هو: 50319360

---

8) ما آحاد وعشرات العدد 11^{11}

$$11^{11} = (1+10)^{11}$$
$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r}.b^r \quad , \quad (a=1), (b=10), (n=11)$$
$$T_r = \binom{11}{r}(1)^{11-r}.(10)^r$$

الحد الأول $T_0 = 1$

الحد الثاني $T_1 = 110$

الحد الثالث $T_2 = 5500$

ومنه باقي الحدود آحادها و عشراتها اصفار وبالتالي بجمع هذه الحدود يكون العدد الناتج آحاده (1) وعشراته (1)

---

9) ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول x) في منشور $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{12}$

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r}.b^r \quad , \quad (a=x) \ , \ \left(b=\frac{1}{x^3}\right) \ , \ (n=12)$$
$$T_r = \binom{12}{r}(x)^{12-r}.\left(\frac{1}{x^3}\right)^r = \binom{12}{r}x^{12-r}.\frac{1}{x^{3r}} = \binom{12}{r}x^{12-r}.x^{-3r}$$
$$T_r = \binom{12}{r}x^{12-4r}$$

دليل الحد الثابت الذي لا يحوي المتحول x يحقق الشرط: $12-4r=0$

$$4r = 12 \implies \boxed{r=3}$$

الحد الذي لا يتعلق بالمتحول x هو الحد:

$$T_3 = \binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$$

10) عدد اقطار مضلع محدب:

اثبت ان عدد اقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة: $\frac{n(n-3)}{2}$

الضلع: هو قطعة مستقيمة تصل بين راسين متتاليين

القطر: هو قطعة مستقيمة تصل بين راسين غير متتاليين

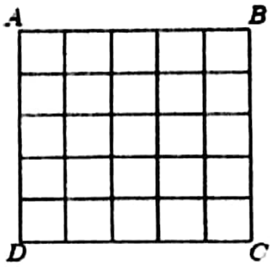
عدد القطع المستقيمة الواصلة بين اي راسين (اضلاع او اقطار) يعطى بـ $\binom{n}{2}$

عدد الأقطار = عدد القطع المستقيمة الواصلة بين اي راسين - عدد الأضلاع

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-1-2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

---

11) التعداد على الشبكة:



في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$ ونرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل، علماً ان المربع مستطيل خاص.

استنتج ان عدد المستطيلات المنشودة يساوي عدد اساليب اختيار مستقيمين شاقوليين ومستقيمين افقيين.

لتشكيل مستطيل يلزمنا تقاطع مستقيمين شاقوليين و مستقيمين افقيين

عدد المستقيمات الشاقولية 6 ومنه عدد طرق اختيار مستقيمين منها بـ $\binom{6}{2}$ طريقة

عدد المستقيمات الأفقية 6 ومنه عدد طرق اختيار مستقيمين منها بـ $\binom{6}{2}$ طريقة

$$\text{عدد المستطيلات} = \binom{6}{2}\binom{6}{2} = 15 \times 15 = 225 \quad \text{مستطيل}$$

---

12) من خواص عدد التوافيق:

في حالة عدد طبيعي n ادرس كيف تتغير الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$

واستنتج ان المساواة $\binom{n}{P} = \binom{n}{q}$ تكافئ $P = q$ أو $P + q = n$

لدينا المتتالية $\left\{\binom{n}{r}\right\}_{0\le r\le n}$ ، باخذ قيمتين للعدد n هما $n = 5$, $n = 4$ نجد:

$$n = 5 \Rightarrow \left\{\binom{5}{r}\right\}_{0\le r\le 5} = \left\{\binom{5}{0},\binom{5}{1},\binom{5}{2},\binom{5}{3},\binom{5}{4},\binom{5}{5}\right\}$$
$$= \{1,5,10,10,5,1\}$$

$$n = 4 \Rightarrow \left\{\binom{4}{r}\right\}_{0\le r\le 4} = \left\{\binom{4}{0},\binom{4}{1},\binom{4}{2},\binom{4}{3},\binom{4}{4}\right\}$$
$$= \{1,4,6,4,1\}$$

في كلا الحالتين السابقتين وجدنا ان الحدود تتزايد ثم تبدأ بالتناقص

1. اثبت ان $\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n-r}{r+1}$

$$L_1 = \frac{\frac{n!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!\,r!}} = \frac{(n-r)!\,r!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}$$
$$= \frac{(n-r)(n-r-1)!\,r!}{(n-r-1)!\,(r+1)r!} = \frac{n-r}{r+1} = L_2$$

2. a) نفترض ان $n = 2m$ اثبت ان $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$ في حالة $m > r$ و $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$ في حالة $m \le r$ ،

استنتج ان $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left\{\binom{2m}{r}\right\}_{0\le r\le 2m}$

في حال $n = 2m$ (اي عدد عناصر المجموعة الكلي زوجي كما وجدنا في المثال عندما $n = 4$ فهنا $m = 2$)، لدينا:

$$\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \Leftrightarrow \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \frac{n-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-r}{r+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2m - r < r + 1 \Leftrightarrow 2m < 2r + 1 \xLeftrightarrow{\text{يمكن ان نكتب}} m \le r$$

$$\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \Leftrightarrow \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-r}{r+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2m-r}{r+1} > 1$$

$$\Leftrightarrow 2m - r > r + 1 \Leftrightarrow 2m > 2r + 1 \xLeftrightarrow{\text{يمكن ان نكتب}} m > r$$

وبالتالي يمكن أن نعبر عن النتائج السابقة بالجدول الآتي:

r	0		m		$2m$
$\binom{2m}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m}{m}$	$\searrow$	1

وهذا برهن أن $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left\{\binom{2m}{r}\right\}_{0\le r\le 2m}$

وبالفعل وجدنا في حال كان $n = 2m = 4$ حيث $m = 2$ كان أكبر التوفيقات

$$\binom{2(2)}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

$\{1,4,6,4,1\}$

b) نفترض ان $n = 2m + 1$ اثبت ان $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$ في حالة $m > r$ و $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$ في حالة $m < r$

استنتج ان $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$ هي اكبر اعداد التوافيق $\left\{\binom{2m+1}{r}\right\}_{0\le r\le 2m+1}$.

في حال $n = 2m + 1$ (اي عدد عناصر المجموعة الكلي فردي كما وجدنا في المثال $n = 5$ هنا $m = 2$)

$$\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \Leftrightarrow \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \frac{n-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m+1-r}{r+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2m + 1 - r < r + 1 \Leftrightarrow 2m < 2r \Leftrightarrow m < r$$

$$\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \Leftrightarrow \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-r}{r+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2m+1-r}{r+1} > 1$$

$$\Leftrightarrow 2m + 1 - r > r + 1 \Leftrightarrow 2m > 2r \Leftrightarrow m > r$$

وبالتالي يمكن أن نعبر عن النتائج السابقة بالجدول الآتي:

r	0		m	$m+1$		$2m+1$
$\binom{2m+1}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	$\searrow$	1

وهذا برهن ان $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$ هو اكبر اعداد التوافيق $\left\{\binom{2m+1}{r}\right\}_{0\le r\le 2m+1}$

وبالفعل وجدنا في حال كان $n = 2m+1$ حيث $m = 2$ كان اكبر التوفيقات

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2(2)+1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2(2)+1}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

$\{1,5,10,10,5,1\}$

نلاحظ أخيراً ان المساواة $\binom{n}{q} = \binom{n}{P}$ تقتضي ان يكون: -

$$\binom{n}{P} = \binom{n}{q} = \binom{n}{n-P} = \binom{n}{n-q}$$

سنراعي وضع العددين P و q بالنسبة لـ $\frac{n}{2}$

في حال $q < \frac{n}{2}$ ، $P < \frac{n}{2}$ عندئذٍ $\binom{n}{q} = \binom{n}{P}$ وبالتالي $P = q$

في حال $q > \frac{n}{2}$ ، $P < \frac{n}{2}$ عندئذٍ $\binom{n}{n-q} = \binom{n}{P}$ وبالتالي $P = n - q$

في حال $q > \frac{n}{2}$ ، $P > \frac{n}{2}$ عندئذٍ $\binom{n}{n-q} = \binom{n}{n-P}$ اي $n - P = n - q$ او $P = q$

وبالتالي نستنتج من جميع الحالات انه إما $P = q$ أو $P + q = n$

---

13) ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a و b عددان طبيعيان

فإذا علمت ان امثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a + b$؟

أمثال x في أي كثير حدود تساوي $\grave{F}(0)$

F اشتقاقي على R

$$\grave{F}(x) = 5a(1+ax)^4(1+bx)^4 + 4b(1+bx)^3(1+ax)^5$$
$$\grave{F}(0) = 5a + 4b$$

أمثال x تساوي $(5a + 4b)$ و منه :

$$\boxed{5a + 4b = 62}$$
$$4a \le 5a \le 5a \quad ①$$
$$4b \le 4b \le 5b \quad ②$$
$$4a + 4b \le 5a + 4b \le 5a + 5b \quad : ② + ①$$
$$\underbrace{4(a+b) \le \quad 62 \quad \le 5(a+b)}$$

$$4(a+b) \le 62 \qquad\qquad 62 \le 5(a+b)$$
$$a + b \le 15.5 \qquad\qquad 12.4 \le a + b$$
$$12.4 \le a + b \le 15.5$$

و بما ان $(a+b)$ عدد طبيعي إذاً قيمه الممكنة هي:

$$a + b \in \{13,14,15\}$$

14) يريد معلم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل.
ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية؟

نلاحظ أن تلميذ واحد فقط سينال جائزتين في حين ينال كل واحد من باقي التلاميذ جائزة واحدة فقط
لذلك يتم توزيع الهدايا على مرحلتين :

المرحلة الأولى : اختيار هديتين من $(n+1)$ و يتم بـ $\binom{n+1}{2}$ طريقة و نعتبر هاتين الهديتين بمثابة هدية واحدة .

المرحلة الثانية : توزيع n هدية على n تلميذ و تتم بـ $n!$ طريقة , بالتالي ب0لاعتماد على المبدا الأساسي للعدّ:

$$\text{عدد النتائج} = \binom{n+1}{2} \times n! = \frac{(n+1)(n)}{2 \times 1} \times n! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

---

15) لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ ولدينا مجموعة H من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية: ارقامها مختلفة وماخوذة من S لا يوجد اي عدد منها من مضاعفات العدّد 5 كل عدد منها اكبر من 20000 فما هو عدد عناصر H؟

عشرات الألوف	آحاد الألوف	مئات	عشرات	آحاد
5				
يحوي أحد الأرقام $\{2,3,4,5\}$				لا يحوي الرقم 5

نميز حالتين:

الحالة الأولى:

الرقم 5 موجود في خانة عشرات الألوف عندئذ:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد : 4

عدد طرق اختيار رقم العشرات : 3

عدد طرق اختيار رقم المئات : 2

عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف : 1

عدد طرق اختيار رقم عشرات الألوف: 1

حسب المبدأ الأساسي في العدّ فإن عدد عناصر H في هذه الحالة هو:

$1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ عنصر

الحالة الثانية:

احد الأرقام $\{2,3,4\}$ في خانة عشرات الألوف عندئذ:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد : 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات : 3

عدد طرق اختيار رقم المئات : 2

عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف : 1

عدد طرق اختيار رقم عشرات الألوف: 3

حسب المبدأ الأساسي في العدّ فإن عدد عناصر H في هذه الحالة هو:

$3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$ عنصر

إذاً عدد عناصر H المطلوب هو: $24 + 54 = 78$ عنصر

---

16) صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

$n(\Omega) = n^r = 10^3 = 1000$ نتيجة

2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟

نرمز للكرة الحمراء R والكرة البيضاء W والكرة السوداء B

$C = \{(RRR), (WWW), (BBB)\}$

$n(C) = [6 \times 6 \times 4 \times (3)] + [3 \times 3 \times 7 \times (3)] + [1 \times 1 \times 9 \times (3)] = 648$ نتيجة

3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟

$F = \{(RwB)\}$

$n(F) = (6 \times 3 \times 1) \times (6) = 108$ نتائج

4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

بفرض A مجموعة السحوبات التي تدل على ان الكرات الثلاث ليست جميعها من لون واحد.

إن متمم A هو ان تكون جميع الكرات من لون واحد و نرمز له بـ $\acute{A}$:

$\acute{A} = \{(RRR), (www), (BBB)\}$

$n(\acute{A}) = (6 \times 6 \times 6) + (3 \times 3 \times 3) + (1 \times 1 \times 1) = 244$

$n(A) = n(\Omega) - n(\acute{A}) = 1000 - 244 = 756$ نتيجة

5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

$H = \{(R\grave{R}\grave{R}), (RR\grave{R}), (RRR)\}$

$n(H) = [6 \times 4 \times 4 \times (3)] + [6 \times 6 \times 4 \times (3)] + [6 \times 6 \times 6] = 936$ نتيجة

6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرة سوداء واحدة على الأقل؟

بفرض E مجموعة السحوبات التي تدل على ان الكرات الثلاث فيها كرة سوداء واحدة على الأقل.

إن متمم E هو عدم وجود اي كرة سوداء و نرمز له بـ $\grave{E}$:

$\grave{E} = \{(\grave{B}\grave{B}\grave{B})\}$

$n(\grave{E}) = 9 \times 9 \times 9 = 729$

$n(E) = n(\Omega) - n(\grave{E}) = 1000 - 729 = 271$ نتيجة

---

17) صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

$n(\Omega) = P_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ نتيجة

2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟

$A = \{(RR\grave{R}), (ww\grave{w})\}$

$n(A) = [6 \times 5 \times 4 \times (3)] + [3 \times 2 \times 7 \times (3)] = 486$ نتيجة

3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟

$B = \{(RwB)\}$

$n(B) = 6 \times 3 \times 1 \times (3!) = 108$ نتائج

4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

بفرض C مجموعة السحوبات التي تدل على ان الكرات الثلاثة ليست جميعها من لون واحد

إن متمم C هو ان تكون جميع الكرات من لون واحد ونرمز له بـ $\grave{C}$:

$\grave{C} = \{(RRR), (www)\}$

$n(\grave{C}) = (6 \times 5 \times 4) + (3 \times 2 \times 1) = 126$

$n(C) = n(\Omega) - n(\grave{C}) = 720 - 126 = 594$ نتيجة

5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

بفرض D مجموعة السحوبات التي تدل على ان الكرات الثلاثة فيها كرة حمراء واحدة على الأقل

إن متمم D هو عدم وجود اي كرة حمراء ونرمز له بـ $\grave{D}$:

$\grave{D} = \{(\grave{R}\grave{R}\grave{R})\}$

$n(\grave{D}) = 4 \times 3 \times 2 = 24$

$n(D) = n(\Omega) - n(\grave{D}) = 720 - 24 = 696$ نتيجة

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سبروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأقل؟

$F = \{(B\grave{B}\grave{B}\dot{B})\}$

$n(F) = 1 \times 9 \times 8 \times (3) = 216$ نتيجة

---

18) لتكن $S = \{1,2,3,\cdots\cdots,29,30\}$ كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على 3 يساوي (0) : $A_0 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على 3 يساوي (1) : $A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على 3 يساوي (2) : $A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$

يمكن اختيار عناصر المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر , بحيث يكون مجموع الأرقام من مضاعفات العدد 3

بالشكل : $\{(a_0a_0a_0),(a_1a_1a_1),(a_2a_2a_2),(a_0a_1a_2)\}$

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1} =$$ عدد المجموعات الجزئية المطلوبة

$= 120 + 120 + 120 + 1000 = 1360$ مجموعة

---

19) ليكن A_n العدد المعرف بالصيغة: $A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$

1. تحقق ان A_3 , A_4 هما عددان طبيعيان.

$$A_3 = (2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3$$
$$= 8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3} + 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 52 \in N$$
$$A_4 = (2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4$$
$$(2+\sqrt{3})^4 = \binom{4}{0}(2)^4(\sqrt{3})^0 + \binom{4}{1}(2)^3(\sqrt{3})^1 + \binom{4}{2}(2)^2(\sqrt{3})^2 + \binom{4}{3}(2)^1(\sqrt{3})^3 + \binom{4}{4}(2)^0(\sqrt{3})^4$$
$$= 16 + 32\sqrt{3} + 72 + 24\sqrt{3} + 9 = 97 + 56\sqrt{3}$$
$$(2-\sqrt{3})^4 = 16 - 32\sqrt{3} + 72 - 24\sqrt{3} + 9 = 97 - 56\sqrt{3}$$
$$A_4 = 97 + 56\sqrt{3} + 97 - 56\sqrt{3} = 194 \in N$$

2. اثبت ان A_n عدد طبيعي اياً كانت قيمة العدد الطبيعي n

$$A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

الحد ذي الدليل r في المنشور $(2+\sqrt{3})^n$ يعطى بالشكل:

$$\boxed{T_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r}$$

الحد ذي الدليل r في المنشور $(2-\sqrt{3})^n$ يعطى بالشكل:

$$\grave{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (-\sqrt{3})^r$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} (-1)^r (\sqrt{3})^r$$
$$\boxed{\grave{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r (-1)^r}$$

ومنه :

$$T_r + \grave{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} \sqrt{3}^r + \binom{n}{r} . 2^{n-r} . \sqrt{3}^r (-1)^r$$
$$\boxed{T_r + \grave{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} \sqrt{3}^r (1 + (-1)^r)}$$

نميز حالتين لـ r :

فردي أي $(r = 2k+1)$:

$$T_r + \acute{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (1 + (-1)^r)$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (1 - 1)$$
$$= 0 \quad (\text{طبيعي})$$

زوجي أي $(r = 2k)$:

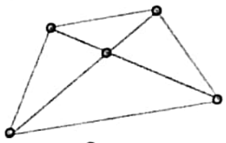
$$T_r + \acute{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (1 + (-1)^r)$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (2) \quad (\text{طبيعي})$$

بملاحظة : $\boxed{\left(\sqrt{3}\right)^r = \left(\sqrt{3}\right)^{2k} = 3^k}$

ومنه A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n

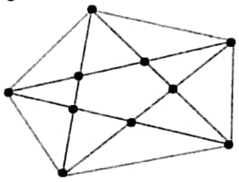
---

20) نتأمل مضلعاً محدباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n \geq 4)$ نسمي قطراً في المضلع كل قطعة مستقيمة تصل بين راسين غير متتاليين في المضلع، نفترض اننا في الحالة العامة حيث لا تتلاقى اي ثلاثة اقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة احد رؤوس المضلع احسب D_n عدد نقاط تقاطع اقطار المضلع بدلالة n يمكن البدء بتعيين D_5, D_4



في الشكل الرباعي عدد نقاط تقاطع الأقطار $D_4 = 5$

$$\underbrace{4}_{\text{تقاطع الأقطار مع الرؤوس}} + \underbrace{1}_{\text{تقاطع الأقطار مع بعضها}} = 5$$



في الشكل الخماسي عدد نقاط تقاطع الأقطار $D_5 = 10$

$$\underbrace{5}_{\text{تقاطع الأقطار مع الرؤوس}} + \underbrace{5}_{\text{تقاطع الأقطار مع بعضها}} = 10$$

نلاحظ بشكل عام: عدد نقاط تقاطع الأقطار مع الرؤوس يساوي عدد الرؤوس n

عدد نقاط تقاطع الأقطار مع بعضها يساوي عدد طرق تشكيل شكل رباعي $\binom{n}{4}$

ومنه عدد نقاط تقاطع أقطار مضلع بدلالة n يعطى بالشكل: $D_n = \binom{n}{4} + n$

---

21) اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ثم أجب عن السؤال الموافق.

1. $\cos^3 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$

طريقة أولى :

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$$

طريقة ثانية :

نعلم أن : $\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3$$
$$= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^0 + \binom{3}{1}\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^1 + \binom{3}{2}\left(e^{ix}\right)^1\left(e^{-ix}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(e^{ix}\right)^0\left(e^{-ix}\right)^3\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left[e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[2\cos 3x + 3(2\cos x)\right]$$

$$= \frac{1}{8}[2\cos 3x + 6\cos x]$$

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right) \; dx = \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{12}\sin 0 + \frac{3}{4}\sin 0\right)$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - (0+0) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

2. $\sin^3 x$، واستنتج قيمة $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$

طريقة أولى :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}$$

طريقة ثانية :

نعلم ان : $\boxed{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

$$\sin^3 x = \frac{-1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[\binom{3}{0}\left(e^{ix}\right)^3\left(-e^{-ix}\right)^0 + \binom{3}{1}\left(e^{ix}\right)^2\left(-e^{-ix}\right)^1 + \binom{3}{2}\left(e^{ix}\right)^1\left(-e^{-ix}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(e^{ix}\right)^0\left(-e^{-ix}\right)^3\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} - e^{-3ix}\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3ix} - e^{-3ix} - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[2i\sin 3x - 3(2i\sin x)\right]$$

$$= \frac{-1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$\boxed{\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0} -4\left(\frac{\sin x}{\tan x}\right)^3$$ حيث $(x \neq 0)$:

$$= \lim_{x\to 0}(-4)\left(\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^3 = \lim_{x\to 0}\left(-4\cos^3 x\right) = -4$$

3. $\sin^4 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \; dx$

نعلم ان: $\boxed{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$, $\boxed{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

$$\sin^4 x = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\binom{4}{0}\left(e^{ix}\right)^4\left(-e^{-ix}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(e^{ix}\right)^3\left(-e^{-ix}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(e^{ix}\right)^2\left(-e^{-ix}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(e^{ix}\right)^1\left(-e^{-ix}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(e^{ix}\right)^0\left(-e^{-ix}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix}.e^{-ix} + 6e^{2ix}.e^{-2ix} - 4e^{ix}.e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{16}[2\cos 4x - 8\cos 2x + 6] = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

4. $\cos x . \sin^4 x$، واحسب $F(t) = \int_0^x \cos t . \sin^4 t \; dt$ بطريقتين.

وجدنا من الطلب السابق :

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$\cos x . \sin^4 x = \frac{1}{8}\cos x . \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x . \cos x + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)[\cos 3x + \cos x] + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{16}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{4}[\cos 3x + \cos x] + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{16}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{16}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$$

$$F(t) = \int_0^x \cos t . \sin^4 t \; dt = \int_0^x \left[\frac{1}{16}(\cos 5t + \cos 3t) - \frac{1}{4}\left(\cos 3t - \frac{1}{2}\cos t\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{3}\sin 3t\right]_0^x - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{80}\sin 5x + \frac{1}{48}\sin 3x - \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$$

$$= \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$$

طريقة ثانية:

$$F(t) = \int_0^x \cos t . \sin^4 t \; dt = \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^x = \frac{\sin^5 x}{5}$$