الموضوع

★ التابع اللغارتمي:

هو تابع يأخذ الشكل:

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$f(x) = \ln(2x+1)$$

$$f(x) = 2x^2 + \ln(5x+3)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x+5}\right)$$

- مجموعة تعريف التابع اللغارتمي:

ما داخل اللغارتم أكبر تماماً من الصفر.

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$g(x) > 0$$

- حالات $g(x)$:

① $g(x)$ من الدرجة الأولى:

$$f(x) = \ln(x-3)$$

$$x-3 > 0$$

$$x > 3$$

$$D =]3, +\infty[$$

$$f(x) = \ln(3x-6)$$

$$3x-6 > 0$$

$$3x > 6$$

$$x > \frac{6}{3}$$

$$x > 2$$

$$D =]2, +\infty[$$

$$f(x) = 2\ln(6x+1)$$

$$6x+1 > 0$$

$$6x > -1$$

$$x > -\frac{1}{6}$$

$$D =]-\frac{1}{6}, +\infty[$$

$$f(x) = \ln(3-x)$$

$$3-x > 0$$

$$-x > -3$$

$$x < \frac{-3}{-1}$$

$$x < 3$$

$$D =]-\infty, 3[$$

$$f(x) = \ln(4-2x)$$

$$4-2x > 0$$

$$-2x > -4$$

$$x < \frac{-4}{-2}$$

$$x < 2$$

$$D =]-\infty, 2[$$

لوغارتم

ملاحظة: حالة ثانية؟:

اذا كان ما داخل اللوغارتم كسري أو ضربي أو تربيعي نحتاج جدول دراسة إشارة.

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x-3}{x+2}\right)$$

$3x-3=0$; $3x=3$; $x=1$

$x+2=0$; $x=-2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$3x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
كسر	$+$	$-$	$+$	
المتراجحة	م	ع	م	

$D =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)$$

$2x+1=0$; $2x=-1$; $x=-\frac{1}{2}$

$x-5=0$; $x=5$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$
كسر	$+$	$-$	$+$	
متراجحة	م	ع	م	

$D =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]5, +\infty[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{3-2x}\right)$$

$x+3=0$; $x=-3$

$3-2x=0$; $-2x=-3$; $x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$; $x=1,5$

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$3-2x$	$+$	$+$	0	$-$
كسر	$-$	$+$	$-$	
متراجحة	ع	م	ع	

$D =]-3, \frac{3}{2}[$

$$f(x) = \ln[(2x+1)(x+5)]$$

$2x+1=0$; $2x=-1$; $x=-\frac{1}{2}$

$x+5=0$; $x=-5$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$
كسر	$+$	$-$	$+$	
متراجحة	م	ع	م	

$D =]-\infty, -5[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

الموضوع

التمرين :

$f(x) = \ln(x^2+3x+2)$

$x^2+3x+2=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (3)^2-4(1)(2)$

$\Delta = 9-8=1$

$x_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
إشارة		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$

تدريب ص154 :

في الحالات الآتية عين مجموعة قيم x التي تجعل المقدار معرفاً :

① $\ln(x^2)$

$x^2=0$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{0}$

$x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$- - - -$	0	$+ + + +$	
x^2		$+$	|	$+$	

$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

② $\ln(1-x)$

$1-x>0$

$-x>-1$

$x<1$

$D =]-\infty, 1[$

③ $\ln(x-3)$

$x-3>0$

$x>3$

$D =]3, +\infty[$

④ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$

$x \neq 0$ $\qquad$ $1+x>0$

$\qquad\qquad$ $x>-1$

$x \neq 0$ $\qquad$ $]-1, +\infty[$

$-1 \qquad 0$

$D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

⑤ $\frac{1}{\ln(x)}$

حفظ $\ln(1)=0$

$\ln(x)$ $\qquad$ $\ln x \neq 0$

$x>0$ $\qquad$ $x \neq 1$

$]0, +\infty[$

$0 \qquad 1$

$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

⑥ $\ln(x^2+4x)$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

إما $x=0$

أو $x+4=0$

$x=-4$

x	$-\infty$ -4 0 $+\infty$
x^2+4x	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$D=]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

⑦ $f(x)=\ln x^2-3x+2$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-3)^2-4(1)(2)$

$\Delta=9-8=1$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+3-1}{2}=\frac{+2}{2}=1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$D=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

⑧ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

تدريب منه عند الاستاذ

أوجد

$f(x)=\ln(2x)$

$f(x)=\ln\left(\frac{x+3}{1-x}\right)$

$f(x)=\ln(x^2-2x)$

$f(x)=\ln(x^2-4)$

$f(x)=\ln x$

$f(x)=\ln(x^2-1)$

حل التمارين السابقة:

8) $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

$x-3=0$ $2-x=0$

$x=3$ $-x=-2$

$x=2$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-3$	$-\ -\ -\ -\ -$		0	$+\ +\ +\ +$
$2-x$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	
الكسر	$-$	$+$	$-$	
المتراجحة	ع	ح	غ	

$D=]2,3[$

حل تدريب منه عند الاستاذ:

① $f(x)=\ln(2x)$

$2x>0$

الموضوع

① $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{1-x}\right)$

$x+3=0$, $x=-3$ $\quad$ $1-x=0$, $-x=-1$, $x=1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
كسر		$-$		$+$		$-$	
م.ع		ع		ح		ع	

$D =]3, 1[$

③ $f(x) = \ln(x^2-2x)$

$x^2-2x>0$

$x(x-2)=0$

إما $x=0$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

④ $f(x) = \ln(x^2-4)$

$x^2-4=0$

$x^2=4$

إما $x=2$

أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

⑤ $f(x) = \ln(x)$

$x>0$

$D =]0, +\infty[$

⑥ $f(x) = \ln(x^2-1)$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

إما $x=1$

أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = \ln(x^2-3)$

$x^2-3=0$

$x^2=3 \rightarrow x_1=\sqrt{3}$

$x_2=-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	
		ح		ع		ح	

$D =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

الجذر هو أس $\frac{1}{2}$ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

* خواص التابع اللوغاريتمي:

① $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a.b)$

لوغاريتم الجمع ← لوغاريتم الضرب

مثال $\ln(7) + \ln(2) = \ln(7.2)$
$= \ln(14)$

② $\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$

لوغاريتم الطرح ← لوغاريتم قسمة

$\ln(8) - \ln(5) = \ln(\frac{8}{5})$

③ خاصية الأس

$\ln(a)^n = n \ln(a)$

$\ln 5^2 = 2\ln 5$

$\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln(2)$

$\ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x)$

④ حفظ $\ln(1) = 0$

⑤ اللوغاريتم يزيله e

$\ln$ يزيله e

$\ln e^a = a$

$\ln e^7 = 7$

$\ln e^{-2} = -2$

$\ln e = 1$

⑥ $\ln(\frac{1}{a}) = \ln(a)$

$\ln(\frac{3}{5}) = -\ln(\frac{5}{3})$

$\ln(\frac{1}{4}) = -\ln(4)$

⑦ $\ln(0^+) = -\infty$

⑧ $\ln(+\infty) = +\infty$

$\boxed{9} + \boxed{10} + \boxed{11}$ خواص حل معادلات ومتراجحات

⑨ $\ln(a) = \ln(b)$
$\Rightarrow a = b$

⑩ $\ln(a) < \ln(b)$
$a < b$

⑪ $\ln(a) > \ln(b)$
$a > b$

⑫ $\ln(x) = m$

$e^{\ln x} = e^m$

$\boxed{x = e^m}$

$e^{\ln(x)} = e^3$

$\boxed{x = e^3}$

* حل المعادلة اللوغاريتمية:

من الشكل $\ln(a) = \ln(b)$

① نوجد مجموعة التعريف للطرف الأول D_1

② نوجد مجموعة تعريف الطرف الثاني

③ نوجد تقاطع مجموعة التعريف

④ نزيل الـ $\ln$ من الطرفين ونحل المعادلة لإيجاد قيم x.

⑤ نقبل x الذي ينتمي إلى D

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

$-3x > 0$; $x^2 - 4 = 0$

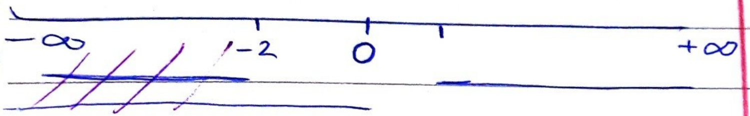
$x < \frac{0}{-3}$; $x^2 = 4$

$x < 0$; $x = 2$

$D_1 =]-\infty, 0[$; $x = -2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
	+	0 −	0 +	

$D_2 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$



$D = D_1 \cap D_2 =]-\infty, -2[$

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

$-3x = x^2 - 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(1)(-4)$

$\Delta = 9 + 16 = 25 = \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \notin D$ مرفوض

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \in D$ مقبول

$\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$2x > 0$; $x^2 - 1 = 0$

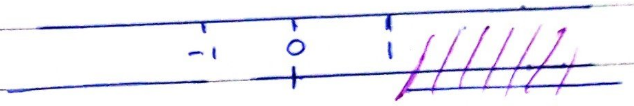
$x > \frac{0}{2}$; $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$, $x = 1$

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	+	0 −	0 +	

$D_2 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$



$D = D_1 \cap D_2 =]1, +\infty[$

$\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$2x = x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1)$

$\Delta = 4 + 4 = 8 = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \notin D$ مرفوض

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \in D$ مقبول

$\ln(x+11) = \ln(x+3)$

$x+11>0$; $x+3>0$

$x>-11$; $x>-3$

$D_1=]-11,+\infty[$; $D_2=]-3,+\infty[$

$-\infty \quad -11 \quad -3 \quad 0 \quad +\infty$

$D= D_1\cap D_2 =]-3,+\infty[$

$\ln(x+11) = \ln(x+3)$

$x+11 = x+3$

$x-x = -11+3$

$0 \neq -8$

مستحيل الحل

$2\ln x = \ln(2x^2+8x)$

$x>0$; $2x^2+8x=0$

$D_1=]0,+\infty[$; $x(2x+8)=0$

اما $x=0$

او $2x+8=0$

$2x=-8$

$x=\frac{-8}{2}=-4$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$2x+8$	$-$	0	$+$	$+$
S	$+$	0	$-$ 0	$+$

$D_2=]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

$-\infty \quad -4 \quad 0 \quad +\infty$

$D= D_1\cap D_2 =]0,+\infty[$

$2\ln x = \ln(2x^2+8x)$

$\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$

$x^2 = 2x^2+8x$

$2x^2+8x-x^2=0$

$x^2+8x=0$

$x(x+8)=0$

اما $x=0 \notin D$ مرفوض

او $x+8=0$

$x=-8 \notin D$ مرفوض

الموضوع

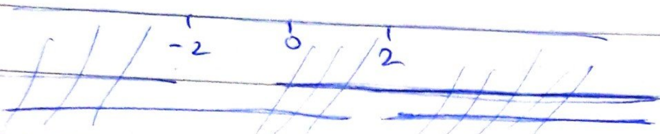
ص 175

تمرين (14)

* حل كلا من المعادلات الاتية

$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

$D_1 = \mathbb{R}\setminus[-2]$ $\quad D_2 = \mathbb{R}\setminus[2]$



$D =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

$\ln|(x+2)(x-2)| = 0$

$\ln|x^2-4| = 0$

$\ln|x^2-4| = \ln(1)$

$|x^2-4| = 1$

اما $x^2-4 = 1$

$x^2 = 5 \nearrow$ $x_1 = \sqrt{5}$ مقبول ، $x_2 = -\sqrt{5}$ مقبول

أو $x^2-4 = -1$

$x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3}$ مقبول

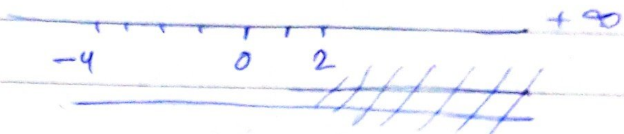
$\searrow x = -\sqrt{3}$ مقبول

$\ln(x-2) + \ln(x+4) = 3\ln(2)$

$x-2>0$; $x+4>0$

$x>2$; $x>-4$

$]2,+\infty[$; $]-4,+\infty[$



$D = D_1 \cap D_2 =]2,+\infty[$

$\ln[(x-2)\cdot(x+4)] = \ln(8)$

$\ln[x^2+4x-2x-8] = \ln(8)$

$\ln[x^2+2x-8] = \ln(8)$

$x^2+2x-8 = 8$

$x^2+2x-8-8 = 0$

$x^2+2x-16 = 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (2)^2-4(1)(-16)$

$\Delta = 4+64 = 68 = 2\sqrt{17}$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{17}}{2}$

$= -1+\sqrt{17}$ $\in D$ مقبول

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{17}}{2}$

$= -1-\sqrt{17}$

$\notin D$ مرفوض

الترتيب دريل
العقبة المطلقة

201

$\ln|x+3| + \ln|x-3| = 0$

$D_1 = R\setminus[-3]$, $D_2 = R[3]$

$D = D_1 \cap D_2 =]-\infty,-3[\cup]-3,3[\cup]3,+\infty[$

$\ln|(x+3).(x-3)| = 0$

$\ln|x^2-9| = 0$

$\ln|x^2-9| = \ln(1)$

إما $x^2-9 = 1$

$x^2 = 10 \rightarrow x = \sqrt{10}$

$x = -\sqrt{10}$

أو $x^2-9 = -1$

$x^2 = 8 \Longrightarrow x_1 = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -2\sqrt{2}$

$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$R\setminus[-\frac{3}{2}]$ $R\setminus[1]$

$D =]-\infty,-\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2},0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\ln|(2x+3).(x-1)| = \ln(x^2)$

$\ln|2x^2-2x+3x+3| = \ln(x^2)$

$\ln|2x^2-x+3| = \ln(x^2)$

$2x^2-x+3 = x^2$

$2x^2-x+3-x^2 = 0$

إما $x^2-x+3 = 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= (1)^2-4(1)(3)$

$= 1+12 = 13$

إما $x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

أو $x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

أو $2x^2-2x+3x-3 = x^2$

$3x^2+x-3 = 0$

$\Delta = 37$

إما $x_1 = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}$

أو $x_2 = \frac{-1-\sqrt{37}}{6}$

* حل المتراجحات اللوغاريتمية:

1. نوجد D_1 مجموعة تعريف الطرف الأول
2. نوجد D_2 مجموعة تعريف الطرف الثاني
3. نأخذ D تقاطع D_1 و D_2.
4. نحل المتراجحة بعد اختصار اللوغاريتم من الطرفين نوجد مجال الحل D'
5. تقاطع D و D' لينتج الحلول.

مثال:

$\ln(x-2) > \ln(2x-1)$

$x-2 > 0$; $2x-1 > 0$

$x > 2$; $2x > 1$

$]2,+\infty[$; $x > \frac{1}{2}$

$]\frac{1}{2},+\infty[$

$\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

$2x > 0$

$x > \frac{0}{2}$

$x > 0$

$]0,+\infty[$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=1$

$x=-1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	$+$	0 $-$	0	$+$

$]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

$D = D_1 \cap D_2 =]1,+\infty[$

$2x \geq x^2-1$

$x^2-1-2x \leq 0$

$x^2-2x-1 \leq 0$

$x^2-2x-1=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (-2)^2-4(1)(-1)$

$\Delta = 4+4 = 8 = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
	$+$	0 $-$	0	$+$

$S = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

$D = D_1 \cap D_2 =]2,+\infty[$

$x-2 \leq 2x-1$

$-x \leq +1$

$x \geq \frac{+1}{-1}$

$x \geq -1$

$D = [-1,+\infty[$

$S =]2,+\infty[$

$\ln(x+3) \geq \ln(2x-1)$

$x+3 > 0$

$x > -3$

$D =]-3,+\infty[$

$2x-1 > 0$

$2x > +1$

$x > \frac{1}{2}$

$D =]\frac{1}{2},+\infty[$

$-3 \quad 0 \quad \frac{1}{2}$

$D = D_1 \cap D_2 =]\frac{1}{2},+\infty[$

$x+3 \geq 2x-1$

$x-2x \geq -3-1$

$-x \geq -4$

$x \leq 4$

$D' =]-\infty,4]$

$S =]\frac{1}{2},4]$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 4$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D' = [0,1]$

$0 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad +\infty$

$S = D \cap D' =]\frac{1}{3}, 1]$

$2\ln x > \ln(3x-2)$

$x > 0 \qquad 3x-2>0$

$D_1\ ]0,+\infty[\qquad 3x>2$

$\boxed{x > \frac{2}{3}}$

$D_2 =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$0 \quad \frac{2}{3}$

$D = D_1 \cap D_2 =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$\ln(x^2) > \ln(3x-2)$

$x^2 > 3x-2$

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(+2)$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+3+1}{2} = \frac{4}{2} =$

$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$S = D \cap D' =]1, 1+\sqrt{2}]$

ص 158 :

$\ln(3x^2 - x) \leq \ln(x) + \ln(2)$

$3x^2 - x > 0 \qquad x > 0$

$3x^2 - x = 0 \qquad D_2 =]0, +\infty[$

$x(3x-1) = 0$

إما $x = 0$

أو $3x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_1 =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

$0 \quad \frac{1}{3}$

$D = D_1 \cap D_2 =]\frac{1}{3}, +\infty[$

$\ln(3x^2 - x) \leq \ln(x.2)$

$\ln(3x^2 - x) \leq \ln(2x)$

$3x^2 - x \leq 2x$

$3x^2 - x - 2x \leq 0$

$3x^2 - 3x \leq 0$

$x(3x-3) \leq 0$

إما $x = 0$

أو $3x - 3 = 0$

$x = 1$

$2\ln x \leq \ln(-6x-8)$

$x > 0$ $\qquad$ $D_1 =]0,+\infty[$

$-6x-8 > 0$

$-6x > 8$

$x < -\frac{8}{6}$

$x < -\frac{4}{3}$

$D_2 =]-\infty, -\frac{4}{3}[$

$-\infty \quad -\frac{4}{3} \quad 0 \quad +\infty$

$D = \emptyset$

مستحيل الحل.

$\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$5-x > 0$ $\qquad$ $x-1 > 0$

$-x > -5$ $\qquad$ $x > 1$

$x < 5$ $\qquad$ $D_2 =]1,+\infty[$

$D_1 =]-\infty, 5[$

$-\infty \quad 1 \quad 5 \quad +\infty$

$D = D_1 \cap D_2 =]1,5[$

$\ln 3 \leq \ln[(5-x)(x-1)]$

$\ln 3 \leq \ln(5x-5-x^2+x)$

$\ln 3 \leq \ln(-x^2+6x-5)$

$3 \leq -x^2+6x-5$

$x^2-6x+5+3 \leq 0$

$x^2-6x+8 \leq 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (-6)^2-4(1)(8)$

$\Delta = 36-32 = 4$

الموضوع

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D' =]-\infty, 1[\cup]2,+\infty[$

$S = D \cap D'$

$0 \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

$=]\frac{2}{3}, 1[\cup]2,+\infty[$

$2\ln x > \ln(4x-5)$

$x > 0$ $\qquad$ $D_1 =]0,+\infty[$

$4x-5 > 0$

$4x > 5$

$x > \frac{5}{4}$

$D_2 =]\frac{5}{4},+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 =]\frac{5}{4},+\infty[$

$\ln(x^2) > \ln(4x-5)$

$x^2 > 4x-5$

$x^2-4x+5 > 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (4)^2-4(1)(+5)$

$\Delta = 16-20 = -4$

مستحيل الحل

الموضوع

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{+6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
		+	0	−	0	+	
		ع		ح		ع	

$D' = [2, 4]$

$S = D \cap D' = [2, 4]$

* تمرين ص 157-158

① بسط كتابة الأعداد الآتية

$a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$

$a = \ln\left(3 \times \frac{1}{3}\right)$

$a = \ln\left(\frac{3}{3}\right)$

$a = \ln(1) = 0$

$b = \ln \frac{1}{16}$

$= -\ln 16$ خاصية المقلوب

$= -\ln 2^4$

$= -4\ln 2$ خاصية الاس

$c = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\ln 2^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\ln 2$

$= \frac{1}{4}\ln 2$

② اكتب كلاً من الاعداد الآتية بدلالة $\ln 5$ و $\ln 2$

$a = \ln(50)$

$= \ln(25 \times 2)$

$= \ln 25 + \ln 2$

$= \ln 5^2 + \ln 2$

$= 2\ln 5 + \ln 2$

$b = \ln\left(\frac{16}{25}\right)$

$= \ln 16 - \ln 25$

$= \ln 2^4 - \ln 5^2$

$= 4\ln 2 - 2\ln 5$

$c = \ln(250)$

$= \ln(125 \times 2)$

$= \ln 125 + \ln 2$

$= \ln 5^3 + \ln 2$

$= 3\ln 5 + \ln 2$

الموضوع

$x = 2\ln 3$, $y = 3\ln 2$ ②

$x = \ln 3^2$ $\quad y = \ln 2^3$

$= \ln 9$ $\quad = \ln 8$

$x > y$

⑥ أثبت صحة المساويات الآتية:

$\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})$

$\ln(1+x) = \ln(x \cdot (1+\frac{1}{x}))$

$= \ln(x + \frac{x}{x})$

$= \ln(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x})$

$\ln(1+x) = \ln(x+1)$

$\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})$

$\ln(1+x^2) = \ln(x^2) + \ln(1+\frac{1}{x^2})$

$\ln(1+x^2) = \ln[(x^2 \cdot (1+\frac{1}{x^2})]$

$\ln(1+x^2) = \ln(x^2 + \frac{x^2}{x^2})$

$\ln(1+x^2) = \ln(x^2+1)$

③ أثبت أن

$\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$

$\ell_1 = \ln[(2+\sqrt{3}).(2-\sqrt{3})]$

$= \ln(2^2 - \sqrt{3}^2)$

$= \ln(4-3)$

$= \ln(1)$

$= 0 \; \ell_2$

$\ln(5-2\sqrt{6}) + \ln(5+2\sqrt{6}) = 0$

$\ell_1 = \ln[(5-2\sqrt{6}).(5+2\sqrt{6})]$

$= \ln[5^2 - (2\sqrt{6})^2]$

$= \ln[25 - 4\times 6]$

$= \ln[25-24]$

$= \ln[1]$

$= 0 = \ell_2$

④ في كل حالة قارن بين عددين x و y بدون استعمال آلة حاسبة

① $y = \ln 2 + \ln 3$

$x = \ln 5$, $y = \ln 2 + \ln 3$

$y = \ln 3.2$

$y = \ln 6$

$x < y$

- في كل من الحالتين الآتيتين عين مجموعة قيم x التي تحقق المساواة ما مجموعة التعريف؟

① $\ln(x^2-x)=\ln x+\ln(x-1)$.

$x^2-x>0$; $x>0$; $x-1>0$

$x^2-x=0$; $D_2=]0,+\infty[$; $x>1$

$x(x-1)=0$; $D_3=]1,+\infty[$

$x=0$

أو $x-1=0$

$x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_1=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$D=D_1\cap D_2\cap D_3=]1,+\infty[$

② $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$

$x-1>0$; $x+2>0$

$x-1=0$; $x>1$; $x>-2$

$x=1$; $D_2=]1,+\infty[$; $D_3=]-2,+\infty[$

$x+2=0$

$x=-2$; $D=D_1\cap D_2\cap D_3$

$=]1,+\infty[$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
كسر	$+$	$-$	$+$	
	ح	ع	ح	

$D=]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$

8 * في كل حالة مما يلي عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة

① $2^n\leq 100$

نأخذ $\ln$ الطرفين

$\ln 2^n\leq \ln 100$

$n\ln 2\leq \ln 100$

$n\leq \frac{\ln 100}{\ln 2}$

بمعنى أن $n\in[0,1,2,3,4,5,6]$

② $\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 10^{-2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq \frac{1}{10^{-2}}$; $\ln 3^n\geq \ln 100$

$\frac{1^n}{3^n}\leq\frac{1}{10^2}$; $n\ln 3\geq \ln 100$

$\frac{1}{3^n}\leq\frac{1}{10^2}$; $n\geq\frac{\ln 100}{\ln 3}$

$3^n\geq 10^2$; $n\in[5,+\infty[$ $n\geq 4,19$

③ $0,2\geq\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$\ln(0,2)\geq n.\ln(0,4)$

$\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,4)}\geq n$

$1,75\geq n$

$n\in[0,1]$

④ $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n\geq 2$

$\ln\left(1+\frac{3}{100}\right)^n\geq \ln(2)$

$n\ln\left(\frac{103}{100}\right)\geq \ln(2)$

$n\ln(1,03)\geq \ln(2)$

$n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)}$

$n \geq 23{,}44$

$n \in [24, +\infty[$

10) في كل حالة آتية ارسم في معلم متجانس مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط المشار إليه.

فكرة:

معادلة مستقيم $ax + by + c = 0$

قطع مكافئ $x^2 + y = 0 \,/\, y^2 + x = 0$

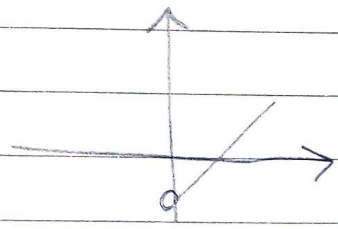
قطع زائد $x \cdot y =$ عدد

① $\ln(x) = \ln(y+1)$

$x > 0 \qquad y > -1$

معادلة نصف مستقيم $x = y + 1$

منزوع منه النقطة $(0,-1)$



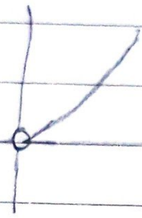
② $\ln y = 2\ln x$

$y > 0 \quad ; \quad x > 0$

$\ln y = \ln x^2$

قطع مكافئ $y = x^2$

منزوع منه نقطة $(0,0)$

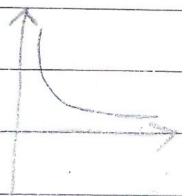


③ $\ln x + \ln y = 0$

$x > 0 \qquad y > 0$

$\ln(x \cdot y) = \ln(1)$

$x \cdot y = 1$



* تطبيقات على خواص اللوغارتم :

① بسط كتابة الأعداد الآتية :

$a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$

$a = \ln (3)\left(\frac{1}{3}\right)$

$a = \ln\left(\frac{3}{3}\right) = \ln(1) = 0$

$b = \ln \frac{1}{16}$

$b = -\ln 16 = -4 \ln 2$

$c = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

$c = \frac{1}{2} \ln 2^{\frac{1}{2}}$

$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln 2$

$c = \frac{1}{4} \ln 2$

$\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})=0$

$\ell_1 \ \ln(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\ln(2^2-(\sqrt{3})^2)$

$\ln(4-3)$

$=\ln(1)=0=\ell_2$

④ في كل من الحالتين الآتيتين قارن بين

$x=\ln 5 \quad , y=\ln 2+\ln 3$

$y=\ln(2\cdot 3)$

$x<y \quad y=\ln(6)$

$x=2\ln 3 \quad , y=3\ln 2$

$x=\ln 3^2 \quad y=\ln 2^3$

$x=\ln 9 \quad y=\ln 8$

$x>y$

⑤ فيما يأتي بسط كل من a, b

$a=\ln 567-\ln 72-\ln\frac{7}{8}+\ln\frac{1}{27}$

$=\ln 567-[\ln 72+\ln\frac{7}{8}]-\ln 27$

$=\ln 567-\ln 27-[\ln 72+\ln\frac{7}{8}]$

$=\ln[\frac{567}{27}]-[\ln\frac{72\times 7}{8}]$

$=\ln 21-\ln[63]$

$=\ln(\frac{21}{63})=\ln(\frac{1}{3})=-\ln 3$

$b=\ln\sqrt{216}+\ln\sqrt{75}-\ln 15-\ln\sqrt{27}$

$=\ln\sqrt{216}+\ln\sqrt{75}-\ln\sqrt{225}-\ln\sqrt{27}$

$=\ln\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{27}}+\ln\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{225}}$

$=\ln\sqrt{\frac{216}{27}}+\ln\sqrt{\frac{75}{225}}$

$=\ln\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}+\ln\sqrt{\frac{1}{3}}$

$=\ln 2\sqrt{\frac{6}{3}}+\ln\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\ln 2\sqrt{2}-\ln\sqrt{3}$

$=\ln 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}-\ln 3^{\frac{1}{2}}$

$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

$=\frac{2}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

$=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

⑥ اثبت صحة المتساويتين الآتيتين

$\ln(1+x)=\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})$

$\ln(1+x)=\ln(x)(1+\frac{1}{x})$

$\ln(1+x)=\ln(x+\frac{x}{x})$

$\ln(1+x)=\ln(x+1)$

$\ln(1+x^2)=2\ln x+\ln(1+\frac{1}{x^2})$

$\ln(1+x^2)=\ln x^2+\ln(1+\frac{1}{x^2})$

$\ln(1+x^2)=\ln(x^2)(1+\frac{1}{x^2})$

$\ln(1+x^2)=\ln x^2+\frac{1}{x^2}$

$\ln(1+x^2) = \ln(x^2 + \frac{x^2}{x^2})$

$\ln(1+x^2) = \ln(x^2+1)$

- عين كل من الحالتين الآتيتين مجموعة قيم x التي تحقق العلاقة:

$\ln(x^2-x) = \ln x + \ln(x-1)$

$x^2-x>0$ $\quad x>0$ $\quad x-1>0$

$x^2-x=0$ $\quad D_2\ ]0,+\infty[$ $\quad x>1$

$x(x-1)=0$ $\quad D_3\ ]1,+\infty[$

$x=0$

$x-1=0,\ x=1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
	+	0 −	0 +	

$]-\infty,0[\ \cup\ ]1,+\infty[$

$D =]1,+\infty[$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

$\frac{x-1}{x+2}>0$ $\quad x-1>0$ $\quad x+2>0$

$x-1=0$ $\quad x>1$ $\quad x>-2$

$x=1$ $\quad]1,+\infty[$ $\quad]-2,+\infty[$

$x+2=0$

$x=-2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
	+	−	0 +	

- في كل مما يأتي عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة المعطاة:

$2^n \leq 100$

$\ln 2^n \leq \ln 100$

$n \ln 2 \leq \ln 100$

$n \leq \frac{\ln 100}{\ln 2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \ln(10^{-2})$

$n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right)$

$n \leq \frac{\ln(\frac{1}{100})}{\ln(\frac{1}{3})}$

$n \leq \frac{-\ln 100}{-\ln 3} \rightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 3}$

$0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$\ln(0,2) \geq \ln\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$\frac{\ln 0,2}{\ln 0,4} \geq n$

هام

(10) ارسم في معلم متجانس مجموعة النقاط M التي تحقق $\ln x - \ln(y+1)$

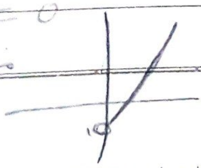
$x>0$ $\quad y>-1$

x	y	(x,y)
0	-1	$(0,-1)$
1	0	$(1,0)$

$x = y+1$

$x-y-1=0$

معادلة مستقيم



*دراسة تغيرات التابع اللوغارتم:

- اشتقاق التابع اللوغارتمي:

$\ast \quad f(x)' = \frac{\ast'}{\ast}$

① $f(x) = \ln(3x-1)$

$f'(x) = \frac{(3x-1)'}{3x-1}$

$f'(x) = \frac{3}{3x-1}$

② $f(x) = \ln(2x^2+5x+1)$

$f'(x) = \frac{(2x^2+5x+1)'}{2x^2+5x+1}$

$f(x)' = \frac{4x+5}{2x^2+5x+1}$

③ $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)'}{\frac{3x+1}{x+2}}$

$f'(x) = \frac{\frac{(3x+1)'(x+2)-(3x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}}{\frac{3x+1}{x+2}}$

$= \frac{\frac{3(x+2)-1(3x+1)}{(x+2)^2}}{\frac{3x+1}{x+2}}$

$= \frac{\frac{3x+6-3x-1}{x+2}}{\frac{3x+1}{1}} = \frac{5}{(x+2)(3x+1)}$

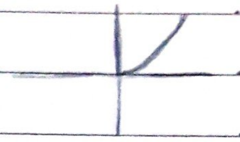
$\ln y = \ln x$

$y > 0 \qquad x > 0$

$\ln y = \ln x^2$

$y = x^2$

$x^2 - y = 0$

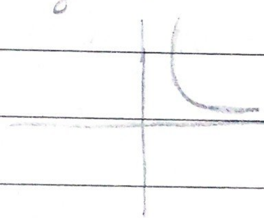


$\ln x + \ln y = 0$

$x > 0 \quad y > 0$

$\ln(x.y) = \ln(1)$

قطع زائد $\quad x.y = 1$



الموضوع

④ $f(x) = \ln\left(\frac{x+5}{x+3}\right)$

$$f(x)' = \frac{\frac{(x+5)'(x+3) - (x+5)(x+3)'}{(x+3)^2}}{\frac{x+5}{x+3}}$$

$$= \frac{\frac{1(x+3) - 1(x+5)}{(x+3)^2}}{\frac{x+5}{x+3}}$$

$$= \frac{\frac{x+3-x+5}{(x+3)^2}}{\frac{x+5}{x+3}}$$

$$= \frac{\frac{-2}{(x+3)^{\cancel{2}}}}{\frac{x+5}{\cancel{x+3}}}$$

$$= \frac{-2}{(x+3)(x+5)} = \frac{-2}{x^2+5x+3x+15}$$

$$= \frac{-2}{x^2+8x+15}$$

⑤ $f(x) = \ln\left(\frac{3-2x}{x+5}\right)$

$$f(x)' = \frac{\frac{(3-2x)'(x+5) - (3-2x)(x+5)'}{(x+5)^2}}{\frac{3-2x}{x+5}}$$

$$f(x)' = \frac{\frac{-2(x+5) - 1(3-2x)}{x+5}}{\frac{3-2x}{1}}$$

$$f(x') = \frac{\frac{-2x-10-3+2x}{x+5}}{\frac{3-2x}{1}}$$

$$f(x') = \frac{\frac{-13}{x+5}}{\frac{3-2x}{1}}$$

$$f(x)' = \frac{-13}{(3-2x)(x+5)}$$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

$$f(x)' = \frac{\frac{(x+1)'(1-x) - (x+1)(1-x)'}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}}$$

$$f(x)' = \frac{\frac{1(1-x) + 1(x+1)}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}}$$

$$= \frac{\frac{1-x+x+1}{1-x}}{\frac{x+1}{1}} = \frac{\frac{2}{1-x}}{\frac{x+1}{1}}$$

$$= \frac{2}{(1-x)(x+1)}$$

الموضوع

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

⑨ $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f(x)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-x}{x^2} = \frac{-1}{x}$$

⑩ $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{(x)'}{x}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2}$$

$$= \frac{1-x}{x^2}$$

⑥ $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)$

$$= \frac{\frac{(x^2+2)'(x-1) - (x^2+2)(x-1)'}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+2}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{2x(x-1) - 1(x^2+2)}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+2}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{2x^2-2x-x^2-2}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+2}{1}}$$

$$= \frac{\frac{x^2-2x-2}{(x-1)}}{\frac{x^2+2}{1}} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)(x^2+2)}$$

⑦ $f(x) = \ln(x)$

$$f(x)' = (x)' = \frac{1}{x}$$

⑧ $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

$$f(x)' = \frac{\frac{(x)'}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$f(x)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$f(x) = 2x^2 + \ln(5x)$$

$$f(x)' = (2x^2)' + \frac{(5x)'}{5x}$$

$$f(x)' = 4x + \frac{5}{5x}$$

$$f(x)' = \frac{20x^2}{5x} + \frac{5}{5x}$$

$$f(x)' = \frac{20x^2+5}{5x}$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$f(x)' = \frac{(x)' \cdot \ln(x) - (x) \cdot (\ln(x))'}{\ln(x)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{(x)'}{x}}{\ln(x)^2}$$

$$= \frac{\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln(x)^2}$$

$$= \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f(x)' = \frac{\ln(x)'(x) - \ln(x) \cdot (x)'}{(x)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x)'}{x}(x) - \ln(x)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (x) - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

مثال عن دراسة التابع اللوغارتمي:

$$f(x) = \ln(x)$$

$$x > 0$$

$$D =]0, +\infty[$$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

① نهايات على الأطراف:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي بجوار ∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

② الاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x} > 0$$

فالتابع متزايد تماماً.

عساعج $\ln x$ مع
x موجب دائماً
بالاكبر لـ وجود
الاني 2Oup x

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x}$

* نهايات التابع اللوغارتمي:

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \ln(+\infty) = +\infty$

② $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x \quad \ln(0^+) = -\infty$

③ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

④ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

* دراسة التابع اللوغارتمي:

قواعد النهايات:

⑤ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

⑥ $\lim\limits_{x \to 0^+} x . \ln x = 0$

⑦ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \frac{\ln(1+2(0))}{0}$

$= \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0} =$ ع.ت

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\ln(1+2x)}{2x} = 2 \lim \frac{\ln(1+2x)}{2x}$

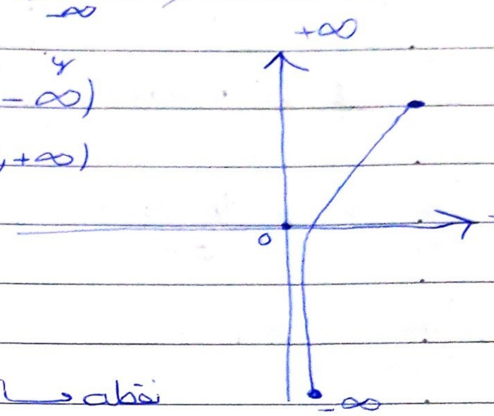
$= 2(1) = 2$

الموضوع

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

$(0, -\infty)$

$(+\infty, +\infty)$



نقطة تقاطع الرسم

$f(x) = 0$

$\ln(x) = 0$

$x = 1$

$(1, 0)$

خطوات:

① نهايات.

② الاشتقاق.

③ $f'(x)$ $=0$, >0, <0

إذا كان $=0$

$x = \cancel{x} \Rightarrow f(x)$

④ جدول تغيرات.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$$

الحل:

① $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} = \frac{\ln(1+6(0))}{(0)} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$= \lim_{x\to 0} \frac{6\ln(1+6x)}{6x}$

$= 6 \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{6x}$

$= 6(1) = 6$

② $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+3x)}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3(0))}{2(0)} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+3x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \times \frac{3\ln(1+3x)}{3x} = \frac{3}{2}$

$= \lim \frac{3}{2} \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x}$

$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{4x} =$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6(0))}{4(0)} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \times \frac{\ln(1+6x)}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{6}{4} \times \frac{\ln(1+6x)}{6x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{6}{4} \times 1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

ملاحظة:

لإزالة حالات عدم التعيين في التابع اللوغاريتمي نجرب أولاً التحويل إلى قاعدة شهيرة ثم نجرب إخراج عامل مشترك ثم نجرب الاشتقاق حسب التعريف.

* تدرب ص 165:

جد نهاية كل من ما يلي:

① $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\lim(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم تعيين

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x \cdot x} = \lim \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}$ قاعدة

$= 0 \cdot 0 = 0$

الموضوع

① $\lim\limits_{x \to 0} [(x^2 - x) . \ln x]$

$= (0^2 - 0) . \ln(0)$

$= 0 . (-\infty)$ ح ع ت

$\lim\limits_{x \to 0} [x^2 \ln x - x \ln x]$

$= \lim [x . \underbrace{x . \ln x}_{\text{قاعدة } 0} - \underbrace{x \ln x}_{\text{قاعدة } 0}]$ ، $x \to 0$

$= 0.0 - 0 = 0$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ ح ع ت

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})}$

$= \frac{1}{2} (+\infty) = +\infty$

2) فيما يلي جد نهايات التابع f
عند أطراف مجالات تعريفه :

① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

② $f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{0 - (-\infty)}{0} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty - \infty}{+\infty}$ ح ع ت

$f(x) = \frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x}$

$= 1 - \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$

③ $f(x) = x - \ln x$

$D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - \ln(0^+) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \ln(+\infty) = +\infty - \infty$

ح ع ت

$f(x) = x(1 - \frac{\ln x}{x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0) = +\infty$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$D =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{\ln(0^+)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\ln(+\infty)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{\ln(1^-)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

كقاعدة ln(٠-١) هو سالب

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{\ln(1)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

(7) $f(x) = x(1 - \ln x)$

$D =]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0(1 - \ln(0^+)]$

$= 0(1 - (-\infty)]$

$= 0 + \infty$ ح ع ت

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = x - x\ln x$

$= 0 - 0 = 0$

$\lim f(x) = +\infty(1 - \ln(+\infty))$

$= +\infty(1 - (+\infty))$

$= +\infty - \infty = -\infty$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$

$]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} - \ln(0^+)$

$= +\infty - (-\infty) = \cancel{+\infty}$

$= +\infty + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{+\infty} - \ln(+\infty)$

$= 0 - (+\infty) = -\infty$

(5) $f(x) = \dfrac{\overset{\text{تاكره}}{x} \cdot \ln x}{x+1}$

$D =]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0+1} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ ح ع ت

$f(x) = \dfrac{x \cdot \ln x}{x+1} = \dfrac{x \cdot \ln x}{x(1 + \frac{1}{x})}$

$= \dfrac{\ln x}{x \cdot \frac{1}{x}} = \dfrac{\ln(+\infty)}{1 + \frac{1}{+\infty}} = \dfrac{+\infty}{1} = +\infty$

8

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$D =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \ln\left(\frac{-1+1}{-1-4}\right) = \ln\left(\frac{0}{-5}\right)$

$= \ln(0) = -\infty$

$\lim f(x) = \ln\left(\frac{4+1}{4-4}\right) = \ln\left(\frac{5}{0^+}\right)$

$= \ln(+\infty[= +\infty$

9

$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

$D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+}(\ln(0^+) - 1)$

$= +\infty(-\infty)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty}(\ln(+\infty) - 1)$

$= 0 + \infty$ ح.ع.ت

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

$= 0 - 0 = 0$

10

$f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

$D =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{0+1}{\ln(0^+)} = \frac{0+1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{1+1}{\ln(1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1+1}{\ln(1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{x}{\ln(x)} = \frac{(+\infty)}{\ln(+\infty)}$

$= \frac{+\infty}{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{x}{\ln x} + \left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \left(\frac{1}{+\infty} + 1\right)$

$= +\infty + 1 = +\infty$

*** اشتقاق التابع اللوغاريتم:**

ـ هو مشتق ما داخل اللوغاريتم على ما داخل اللوغاريتم.

① $f(x) = \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{(x)'}{(x)} = \frac{1}{x}$$

② $f(x) = \ln(2-x)$

$$f'(x) = \frac{(2-x)'}{(2-x)} = \frac{-1}{2-x}$$

③ $f(x) = \ln(2x-4)$

$$f(x)' = \frac{(2x-4)'}{(2x-4)}$$

$$f(x)' = \frac{2}{2x-4}$$

④ $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$

ب. شتق

$$f(x)' = \frac{(x+3)'(x-1) - (x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f(x)' = \frac{1(x-1) - (x+3)(1)}{(x-1)^2}$$

$$f(x)' = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

(11) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty + \ln(+\infty + 1) - \ln(+\infty)$$

$$= +\infty + \infty - \infty \quad \text{ش ع}$$

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$= +\infty + \ln(1)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \ln(0^+ + 1) - \ln(0^+)$$

$$= 0 + 0 - (-\infty)$$

$$= 0 + \infty$$

$$= +\infty$$

الموضوع

5

$f(x) = \ln(2)$

$f'(x) = \frac{(2)'}{2} = \frac{0}{2} = 0$

تدريب:

- احسب $f'(x)$ لكل مما يلي:

1) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 5)$

$f'(x) = \frac{(x^2-3x+5)'}{x^2-3x+5}$

$= \frac{(2x-3)}{x^2-3x+5}$

2) $f(x) = \ln(2x-7)$

$f(x)' = \frac{(2x-7)'}{2x-7}$

$= \frac{2}{2x-7}$

3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{\ln x' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2}$

$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$

$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$

تدريب ص 165 :

- أوجد اشتقاق التوابع الآتية:

$f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

$f'(x) = \frac{(x-2)'}{(x-2)} - \frac{(x+2)'}{(x+2)}$

$f'(x) = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x+2)}$

$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$f'(x) = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{4}{(x^2-4)}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$f(x)' = \dfrac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

$f(x)' = \dfrac{\frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$

$= \dfrac{\frac{1(x+1)-(1)(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$

$= \dfrac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$

$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{2}{(x^2-1)}$

$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$f(x)' = \frac{-1}{x^2} - \cancel{\ln}\, \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$= \frac{-1}{x^2} - \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$

$= \frac{-1}{x^2}_{(x+1)} - \frac{-x}{x^2(x+1)}$

$= \frac{-(x+1)+x}{x^2(x+1)}$

$= \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$

$f(x) = \ln(1+x^2)$

$f(x)' = \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)}$

$= \frac{2x}{1+x^2}$

تذكرة

- المقارب المائل:

$y = ax+b$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y = 0$ فهو مقارب مائل

الوضع النسبي

$f(x)-y>0$ | $f(x)-y<0$ | $f(x)-y$ بدون جدول
Δ فوق C | Δ تحت C

* ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال:

$]0,+\infty[$

$f(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}$

① اثبت أن d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C.

② ادرس الوضع النسبي بين C و d

الموضوع

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = x+1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1)$$

$$= \frac{-\ln x}{x} = 0$$ قاعدة

مقارب مائل.

② . الوضع النسبي.

ندرس اشارة $\frac{-\ln x}{x}$

$\frac{-\ln x}{x} = 0 \Rightarrow -\ln x = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$

بين صفر والواحد $\ln x$ سالب

x	0		1		$+\infty$
$\frac{-\ln x}{x}$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	C فوق Δ		Δ تحت C	

* دراسة تابع كل تراجعة :

- أثبت أنه $\ln(x) < 2\sqrt{x}$

أياً كانت $x > 0$

$\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$

دراسة تغيرات $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$

نعوض المتعلق وايجاد x و $f(x)$

ندرس المتراجحة من السطر الثالث

$f(x)$.

ندرس الاطراد :

$$f'(x) = \frac{x'}{x} - 2\frac{x'}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0$

$\sqrt{x} - x = 0$

نربع $\sqrt{x} = x$

$x = x^2$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

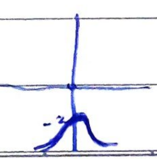
إما $x = 0$ مرفوض

أو $x - 1 = 0$ $\boxed{x = 1}$ مقبول

$f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1}$

$= 0 - 2 = -2$

x	0	جرب $\frac{1}{4}$	1	جرب 4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	



$f(x) \leq -2$

$f(x) < 0$

$\ln x - 2\sqrt{x} < 0$

خصه $\ln x < 2\sqrt{x}$

الموضوع

اثبت انه اذا كان $x > 0$
فان

$\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$

$\ln x - 2(\sqrt{x} - 1) \leq 0$

$f(x) = \ln x - 2(\sqrt{x} - 1)$

$f(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$

ندرس الاطراد :

$f(x)' = \dfrac{x'}{x} - 2\dfrac{x'}{2\sqrt{x}}$

$f(x)' = \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2\sqrt{x}}$

$f(x)' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x)' = \dfrac{\sqrt{x} - x}{x\sqrt{x}}$

$f(x)' = 0$

$\sqrt{x} - x = 0$

$\sqrt{x} = x$

$x = x^2$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ مرفوض

$x - 1 = 0$

$x = 1$
مقبول

$f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} + 2$

$f(1) = 0 - 2 + 2$

$f(1) = 0$

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	$+\infty$
$f(x)'$		+	0	−	
$f(x)$		↗	0	↘	

$f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 4 - \dfrac{1}{\frac{1}{2}}$

$= 4 - 2 = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4}$

$= -\dfrac{1}{4}$

$\ln x - 2(\sqrt{x} - 1) \leq 0$

محقق $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$

الموضوع

تمرينات ومسائل

مسألة ثانية:

ليكن لدينا a وb عددين حقيقيين

في معلم متجانس $[O, \vec{i}, \vec{j}]$، C

هو الخط البياني للتابع f

المعرف على $\mathbb{R}^*$ ووفق

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$$

النقطة $A(1,0)$ هي نقطة

تماس بين C مع مستقيم

يوازي المستقيم الذي معادلته

$y = 3x+2$ ، استفد من هذه المعطيات

في تعيين a وb.

* معادلة المستقيم $ax+by+c=0$ (1)

$y = mx + p$

(2) مستقيم يوازي مستقيم له الميل ذاته.

$y = 2x+5 \qquad y = 3x-1$

$m_1 \neq m_2$

$y = 5x-1 \ , \ y = 5x-4$

$m_1 = m_2$

(3) قيمة المشتق في نقطة التماس هي ميل المماس

$f(x)'$ ← نعوض نقطة تماس

$m =$ ذلك

النقطة A هي نقطة التماس نعوض إحداثياتها في f.

$(1,0)$: x ، $f(x)$

$$0 = a(1) + b + \frac{1}{1}\ln(1)$$

$$\boxed{0 = a + b} \ \dots (1)$$

مماس $m \Longleftarrow f(x)'$

نعوض إحداثيات النقطة A بـ $f(x)'$ ونساوي m

$$f(x)' = a + 0 + \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \ln' x$$

$$f(x)' = a + \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$f(x)' = a + \left(\frac{-\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x)' = a + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = a + \frac{1 - \ln(1)}{1^2}$$

$$f'(1) = a + 1$$

$$f'(1) = m$$

$$a + 1 = 3$$

$$\boxed{a = 2}$$

نعوض في (1) : $0 = 2 + b$

$$\boxed{b = -2}$$

مسألة على نفس النمط :

ليكن a و b عددين حقيقيين

C الخط البياني للتابع f

المعرف بـ

$f(x)=\ln(\frac{x}{2})+ax+b$

ولتكن النقطة $A(2,1)$

نقطة من C وليكن

المستقيم الذي معادلته

$y-x-6=0$

يوازي المماس عين a و b.

$y-x-6=0$

$y=x+6 \Rightarrow m=1$

$A(2,1)$

$f(2)=\ln(\frac{2}{2})+a(2)+b$

$1=\ln(1)+2a+b$

$1=0+2a+b$

$\boxed{1=2a+b}$ ...①

$\boxed{m=1}$

$f'(x)=\frac{(\frac{x}{2})'}{\frac{x}{2}}+a+0$

$f'(x)=\frac{\frac{(x)'(2)-(2)'(x)}{2^2}}{\frac{x}{2}}+a$

$f'(x)=\frac{\frac{2-0}{4}}{\frac{x}{2}}=\frac{4}{4x}=\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{1}{x}+a$

$f'(2)=\frac{1}{2}+a$

↓

$1=\frac{1}{2}+a$

$\boxed{a=\frac{1}{2}}$

$1=2a+b$

$1=2(\frac{1}{2})+b$

$1=1+b$

$\boxed{b=0}$

المسألة 8 :

- ادرس تغيرات التوابع الآتية وارسمها :

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$D=]0,+\infty[$

① النهايات على أطراف مجموعة التعريف

② حدد المقاربات إن وجد

③ نشتق

④ نساوي $f'(x)$ بالـ 0 ونطالب بـ قيم x

⑤ نعوض قيم x بـ $f(x)$

⑥ ننظم جدول.

x	0	0		+∞
$f'(x)$	//	±	0	±
$f(x)$	//	نهاية $f(\text{قيم } x \to)$		

الموضوع

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

معرف وقابل للاشتقاق ومستمر على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot \ln x - x \cdot \ln(x)'}{(x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$$\frac{\ln x - 1}{x^2} = 0$$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$\boxed{x = e^1}$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

*خطوات دراسة تغير التابع:

① نوجد مجموعة D_f

② نحسب النهايات حسب D.

③ نشتق $f(x)$ ثم نعدم المشتق $f'(x)$ نوجد صورة x الناتج.

④ ننظم جدول تغيرات التابع.

المسألة 5: هام

انتكن U_n متتالية معرفة وفق $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ على n^* جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a - اثبت انه $S_n = \ln(n+1)$

b - جد نهاية

① $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln(1) = 0$

① $S_n = U_1+U_2+U_3+U_4+\dots+U_n$

$= \ln\left(\frac{1+1}{1}\right)+\ln\left(\frac{2+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{3+1}{3}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$=\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\frac{5}{4}+\dots+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}$

$=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\dots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\ln(n+1)$

(b) $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(+\infty)=+\infty$

المسألة 18 : هامة جداً .

تذكرة:

- التابع الفردي والتابع الزوجي .

① مجموعة التعريف متناظرة :

$\forall x\in D$ $]-\infty,+\infty[$

فإن $-x\in D$ $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$]-1,1[$

$]-4,4[$

① زوجي - $f(x)$

متناظر بالنسبة لـ yy' $f(x)=$

$-f(x)$ فردي متناظر بالنسبة لـ O .

- ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $I=]-1,1[$ وفق

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

المطلوب :

① اثبت ان التابع فردي

② ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$

③ ارسم الخط البياني للتابع f .

الحل :

① ① شرط $\forall x\in D$ محقق فإن $-x\in D$

$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{1-(-x)}\right)$

$=\ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)$

$=-\ln\left(\frac{1+x}{-x+1}\right)$

$=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

② شرط محقق $=-f(x)$

التابع فردي

② $D[0,1[$

نعوض $f(0)=\ln\left(\frac{0+1}{1-0}\right)=\ln(1)=\ln(1)=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\ln\left(\frac{1+1}{0^+}\right)$

$=\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)=\ln(+\infty)$

الموضوع

وظيفة :
ادرس تغيرات التابع السابق
على المجال $]-1,1[$

$D =]-1,1[$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln\frac{(1+1)}{1-1} = \ln\frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \ln\left(\frac{1+1}{1-1}\right) = \ln\frac{2}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

$f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$

$f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{(x+1)'(1-x)-(x+1)(1-x)'}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}}$

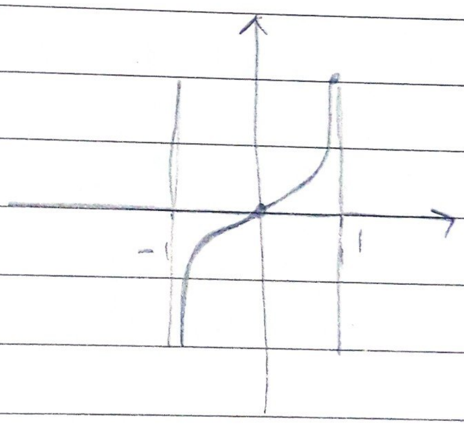
$= \dfrac{1-x+x+1}{(1-x)(x+1)}$

$= \dfrac{2}{(1-x)(x+1)} > 0$

$f'(x) > 0$

فالتابع متزايد تماماً

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



الموضوع

مسألة 21:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]1,+\infty[$ ووفقه $f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً.

② اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب الخط C بجوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمقارب d

ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

الحل:

① $\lim f(x) = 1+1+2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)$

$= 2+2\ln(+\infty)$

$= 2+2(+\infty) = +\infty$

$$f'(x) = 1+2\,\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = 1+2\,\frac{\frac{(x)'(x-1)-(x-1)'(x)}{(x-1)^2}}{\frac{x}{(x-1)}}$$

$$f'(x) = 1+2\,\frac{\frac{x-1-\cancel{(x)}}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= 1+2\,\frac{-1}{x(x-1)}$$

$$= 1-\frac{2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{x(x-1)}-\frac{2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$$

$f'(x)=0$

$x^2-x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-1)^2-4(1)(-2)$

$\Delta=1+8=9$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ مرفوض

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$ مقبول

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2)=2+1+2\ln\left(\frac{2}{1}\right)$

$f(2)=3+2\ln(2)$

$\ln(x)$
$]0,1[\ -\ |\ +\ x>1$

مسألة 22 :

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$

وفق $f(x)=x+4+\ln(\frac{x}{x+1})$

① اثبت أن f متزايد تماماً على I.

$f(x)= x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$f(x)' = 1-0+\frac{\left(\frac{(x)'(x+1)-(x)(x+1)'}{(x+1)^2}\right)}{\frac{x}{x+1}}$

~~f(x)...~~

$f(x)' = 1+\frac{\frac{1(x+1)-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$

$f(x)' = 1+\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$

$f(x)' = 1+\frac{x(x+1)}{\cancel{x}(x+1)}$

$f(x)' = \frac{x^2+1}{x(x+1)} > 0$

f متزايد تماماً

② $y = x+1$

$\lim f(x)-y = x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\cancel{-x-1}$

$= 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$= 2\ln\left(\frac{x}{x}\right)$

$= 2(0) = 0$

إذاً هو مقارب مائل.

③ الوضع النسبي = دراسة اشارة $f(x)-y$

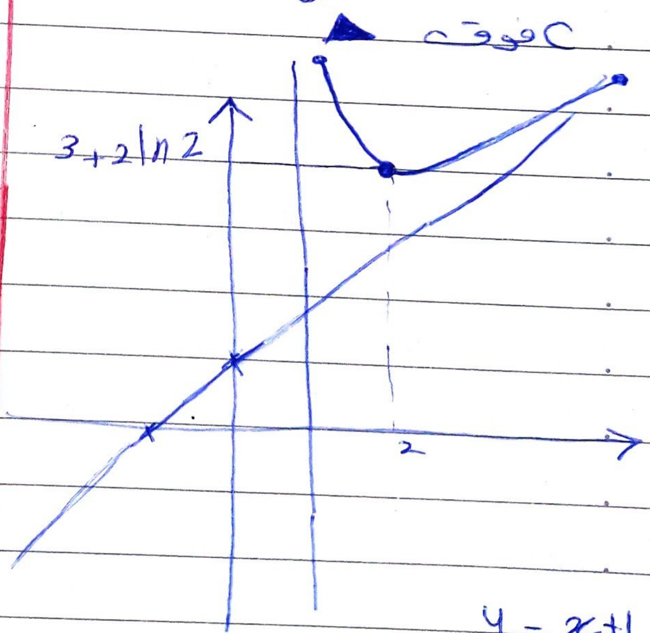
$x > x-1$

$\frac{x}{x-1} > 1$

$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$f(x)-y > 0$

C فوق Δ



$y = x+1$

x	y	(x,y)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)

الموضوع

إضافة

② ادرس تغيرات التابع ونظم جدوله في $]0,+\infty[$

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 4 + \ln\left(\frac{0}{0+1}\right) = 0 - 4 + \ln(0) = -4 - \infty = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي في جوار

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 4 + \ln\left(\frac{x}{x}\right) = +\infty$$

$f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③ اثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x - 4 = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = 0$$

اذاً هو مقارب مائل في جوار $+\infty$

④ ادرس الوضع النسبي بين المقارب المائل والخط C.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \cancel{x-4}$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$$

$x+1 > x$

$\frac{x}{x+1} < 1$

$f(x) - y < 0$

C تحت Δ

⑤ ارسم الخط C وارسم المقارب Δ

ملاحظات:

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

التربيع يزيل القيمة المطلقة.

$\ln(+\infty) = +\infty$, $\ln(0^+) = -\infty$

$\frac{x}{\ln x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

اذا كانت $-x$ وبنلاحظ 0 نحطو 0^+ ونغير الاشارة.

$\ln x$ يكون سالب $]0,1[$

الموضوع

① $f(x) = x + \ln(x^2-1)$

$f(x)' = 1 + \ln \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}$

$f(x)' = 1 + \frac{2x-1}{x^2-1}$

$f(x)' = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2x-1}{x^2-1}$

$f(x)' = \frac{x^2-1+2x-1}{x^2-1}$

$f(x)' = \frac{x^2+2x-2}{x^2-1} > 0$

فيني كتير محير

متزايد تماماً

② $I =]1, +\infty[$

$f(x) = x + \ln(x^2-1)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 + \ln((1)^2-1)$

$= 1 + \ln(0) = 1 - \infty = -\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

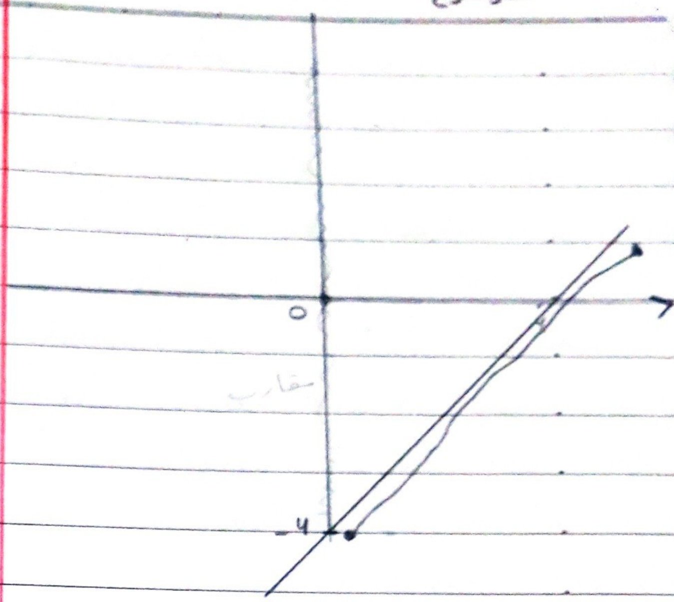
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(x^2)$

$= +\infty + \ln(+\infty)^2$

$= +\infty$

$f'(x) > 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	////	+	
$f(x)$	////	$-\infty$ ↗	$+\infty$



$(0, -\infty)$

$(+\infty, +\infty)$

$y = x - 4$

x	y	(x,y)
0	-4	(0,-4)
-4	0	(-4,0)

مسألة 25 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ ويعطى $f(x) = x + \ln(x^2-1)$

① اثبت ان f متزايد تماماً على I

② ادرس تغيرات التابع ونظم بها جدولاً

③ اثبت ان α محصورة $1{,}2 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$

④ اثبت ان المعادلة حل وحيد $f(x) = 0$. α

الموضوع

③ ش: التابع متزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$

ثق: $0 \in f]1,+\infty[=]-\infty,+\infty[$

يوجد حل وحيد.

④ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1+\ln(1^2-1) = -\infty < 0$

$f(\sqrt{1+\frac{1}{e}}) = 1+\ln[(\sqrt{1+\frac{1}{e}})^2-1]$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln[\cancel{1}+\frac{1}{e}\cancel{-1}]$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln[\frac{1}{e}]$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \cancel{\ln}(\cancel{e}^{-1})$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1 > 0$

اذاً $1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$

مسألة 26:

ليكن C الخط البياني للتابع

$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

① تحقق أن D_f مجموعة تعريف التابع f هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

② احسب نهايات f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه.

③ اثبت أن f متناقص تماماً على كل من مجالي D.

إهمال

④ ارسم جدول تغيرات التابع f.

⑤ ارسم في معلم متجانس الخط البياني C.

الحل:

① $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

$2x > 0$, $x-1=0$

$2x=0$, $x=1$

$x=\frac{0}{2}=0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
كسر	$+$	$-$		$+$
قرار	م	غ		م

ومنه نجد أن

$D =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

② $D =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2).$$

$y = \ln(2)$ مقارب افقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

$y = \ln(2)$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \ln\left(\frac{2(0)}{0-1}\right) = \ln(0) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{2(1)}{1-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty.$$

$x = 1$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

③ $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{x-1}\right)'}{\frac{2x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(2x)'(x-1) - (x-1)'(2x)}{(x-1)^2}}{\frac{2x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2}}{\frac{2x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2 - 2x}{2x(x-1)} = \frac{-2}{2x(x-1)}$$

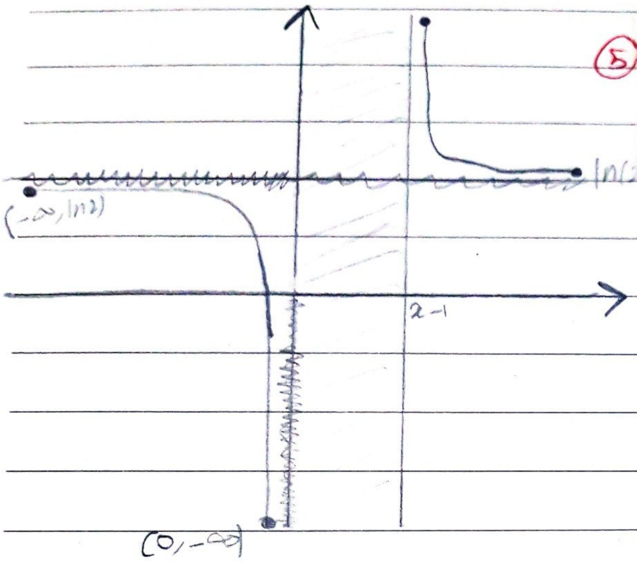
$$\frac{-2}{2x(x-1)}$$ ٣٥

مناقض تماما؟

④

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	‖	$-$	
$f(x)$	$\ln(2)$	↘	$-\infty$ ‖	‖	‖ $+\infty$	↘	$\ln(2)$

⑤



دورة 2021:   (٦٠) د

* ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① اثبت ان f تابع تزايد على المجال $I =]0, +\infty[$ و استنتج $f(I)$

② اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C بجوار $+\infty$

③ ادرس الوضع النسبي بين الخط C و الخط البياني.

الموضوع

① $f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$I =]0,+\infty[$

$f(x)' = 1 - 0 + \frac{\frac{(x)'(x+1)-(x)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$

$f(x)' = 1 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$

$f(x)' = 1 + \frac{1}{x(x+1)}$

$f(x)' = \frac{x(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}$

$f(x)' = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$

متزايد تماماً

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 4 + \ln\left(\frac{0}{0+1}\right)$

$= 0 - 4 + \ln\left(\frac{0}{1}\right)$

$= 0 - 4 + \ln(0)$

$= -4 - \infty = -\infty$

$x=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 4 + \ln\left(\frac{x}{x}\right)$

$= +\infty - 4 + \ln(1)$

$= +\infty - 4 + 0$

$= +\infty$

$f(I) =]-\infty, +\infty[$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - (x-4)$

$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

اذاً هو مقارب مائل في جوار $+\infty$

③ $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$

$x+1 > x$

$\frac{x}{x+1} < 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y < 0$

C تحت Δ

*مسألة 23: هام.

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

① ادرس تغيرات f ونظم بها جدولاً.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - \ln\left(2 + \frac{1}{0^+}\right)$

$= 0 - \ln(2 + \infty)$

$= -\ln(+\infty)$

$= -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي بجوار $-\infty$

الموضوع

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \ln\left(2 + \frac{1}{+\infty}\right) = +\infty$$

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right)'}{2 + \frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$$

$$= 1 - \frac{-1}{x(2x+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{x(2x+1)}$$

$$= \frac{x(2x+1)+1}{x(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)} > 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

② اثبت ان المستقيم d ذو المعادلة $y = x - \ln(2)$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - (x - \ln(2))$$

$$= x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x + \ln(2)$$

$$= -\ln(2) + \ln(2)$$

$$= 0$$

اذا d مقارب مائل لـ C

$\ln(1) = 0$
$\ln(2) = 0,7$
$\ln(3) = 1,1$
$\ln(4) = 1,3$

③ ادرس الوضع النسبي لـ C و d.

$$f(x) - y = -\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \ln 2 < 0$$

C تحت d.

④ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي للمجال $]1,2[$.

التابع معرف ومتزايد ومستمر تماما على المجال $]0,+\infty[$

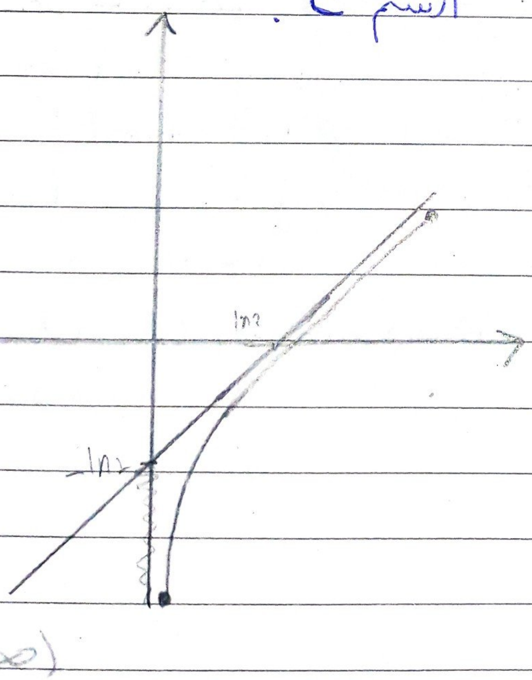
فهو متزايد تماما على $]1,2[$

$$f(1) = 1 - \ln\left(2 + \frac{1}{1}\right) = 1 - \ln(3) < 0$$

$$f(2) = 2 - \ln\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 2 - \ln(2,5) > 0$$

$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

⑤ ارسم المقارب المائل d ثم ارسم C.



$(0, -\infty)$

الموضوع

* مبرهنة الحل الوحيد: $f(x)=\alpha$

ش①: التابع f متزايد تماماً أو متناقص تماماً من سطر ①

ش②: $\alpha \in f(]a,b[)$ سطر ③

مثال:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$			0		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

أثبت أن المعادلة $f(x)=4$ حل وحيد على D.

① عند $x\in]-\infty,3[$ يكون التابع متناقص تماماً.

$4\in f(]-\infty,3[)=]-2,+\infty[$

يوجد حل وحيد على المجال $]-\infty,3[$

② عند $x\in]3,+\infty[$ التابع متزايد تماماً

$4\notin f(]3,+\infty[$

لا يوجد حل.

من ① و ② نجد أنه يوجد حل وحيد.

مثال (2):

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حلان.

① عند $x\in]-\infty,2[$ يكون التابع متناقص تماماً.

$0\in f(]-\infty,2[)=]-2,+\infty[$

يوجد حل وحيد على المجال $]-\infty,2[$.

② عند $x\in]2,+\infty[$ يكون التابع متزايد تماماً.

$0\in f(]2,+\infty[)=]-2,+\infty[$

يوجد حل وحيد على المجال $]2,+\infty[$

من ① و ② نجد أن للمعادلة حلان

* حالة خاصة:

مبرهنة الحل الوحيد في حال $x\in]a,b[$

أو $x\in]a,b[$ و $f(x)=0$

ش①: التابع متزايد تماماً / متناقص تماماً على المجال $]a,b[$

ش②: $f(a)\times f(b)<0$

$f(a)=\_\_\_$

$f(b)=\_\_\_$

الموضوع

* ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على مجموعة $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$، وليكن C' الخط البياني للتابع G مقصور f على $]1,+\infty[$.

1) اثبت أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C

2) ادرس تغيرات التابع G ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب للخط C'.

3) ارسم كل مقارب وجدته فارسم C' ثم ارسم C.

* الحل:

1) $\forall x\in D$

فإن $-x\in D$ شرط 1 محقق

$$f(-x)=\ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right)$$

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-(-1+x)}{-(x+1)}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{x-1}{1+x}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

$$=-f(x)$$

شرط 2 محقق

التابع متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O

2) $D=]1,+\infty[$

$$G(x)=\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^+} G(x)=\ln\left(\frac{1+1}{0^+}\right)=\ln(+\infty)=+\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} G(x)=\ln\left(\frac{x}{x}\right)=\ln(1)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

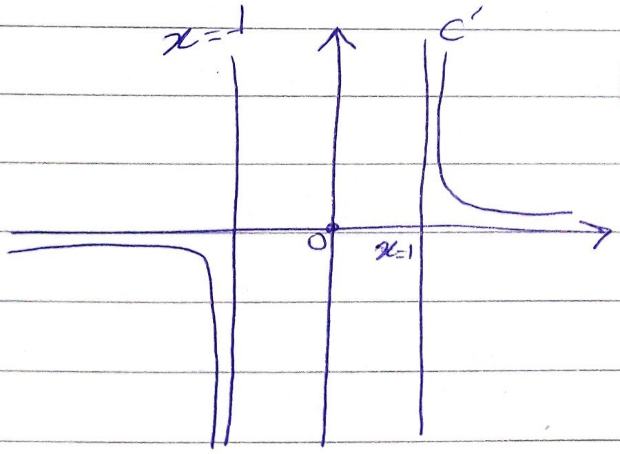
$$g(x)'=\frac{\left(\frac{1+x}{x-1}\right)'}{\frac{1+x}{x-1}}$$

$$g(x)'=\frac{\frac{(1+x)'(x-1)-(1+x)(x-1)'}{(x-1)^2}}{\frac{1+x}{x-1}}$$

$$g(x)'=\frac{x-1-x-1}{(x-1)(1+x)}=\frac{-2}{(x-1)(1+x)}<0$$

فالتابع $g(x)$ متناقص تماماً

3)



الموضوع

* ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x+1)-x$

① ادرس تغيرات التابع f ونظم بها جدولاً ودل على القيم الحدية.

$$f(x)=\ln(x+1)-x$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\ln(-1+1)-(+1)$$
$$=\ln(0)+1$$
$$=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقول في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\ln(+\infty+1)-(+\infty)$$
$$=\ln(+\infty)-\infty$$
$$=+\infty-\infty$$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=-x=-(+\infty)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}-1$$

$$f(x)'=\frac{1}{x+1}-1$$

$$f(x)'=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}$$

$$f(x)'=\frac{\cancel{1}-x\cancel{-1}}{x+1}$$

$$=\frac{-x}{x+1}$$

$$f(x)'=0$$
$$\Rightarrow -x=0$$
$$\boxed{x=0}$$

$$f(0)=\ln(0+1)-0=\ln(1)=0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

$f(0)=0$

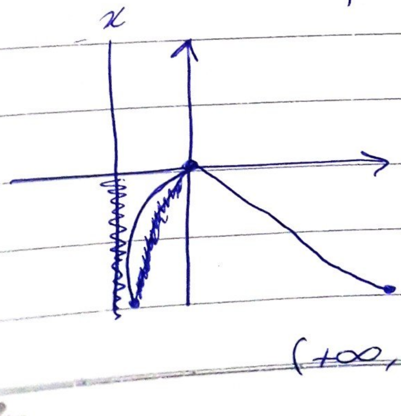
قيمة حدية كبرى.

② استنتج من جدول التغيرات حل المتراجحة

$$\ln(x+1)\leq x$$
$$\ln(x+1)-x\leq 0$$
$$f(x)\leq 0$$

محققة عندما $x\in]-1,+\infty[$

③ ارسم الخط البياني للتابع f.



$(+\infty,-\infty)$

الموضوع

* ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرف $f(x) = x+1+\ln x$ على $]0,+\infty[$.

① ادرس تغيرات التابع f ونظم بها جدولاً.

② اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]\frac{1}{4},\frac{1}{2}[$.

الحل:

①
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0+1+\ln(0) = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي في جواره

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty+1+\ln(+\infty) = +\infty$$

$$f(x)' = 1+0+\frac{x'}{x} = 1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$f(x)'=0$

$x+1=0$

$x=-1 \notin D$

$f(x)>0$

فالتابع متزايد تماماً

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

② ش1) التابع متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ فهو متزايد تماماً على أي مجموعة جزئية ولتكن $]\frac{1}{4},\frac{1}{2}[$

ش2)
$$f(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{4}+1+\ln(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{4}+\frac{4}{4}-\ln(4) = \frac{5}{4}-\ln(4) = 1,25-1,38<0$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}+1+\ln(\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{2}-\ln(2) = 1,5-0,7 = 0,8>0$$

$f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{1}{2})<0$

المعادلة حل وحيد

الموضوع

✱ مسألة 24 :

ـ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق

$]4,+\infty[\ ,\ f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

① اثبت أن d مستقيم مقارب للخط البياني C حيث $d: y=5-2x$

② ادرس الوضع النسبي للخط C و مقاربه d

③ ادرس تغيرات f و نظم بها جدولاً ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

④ اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α.

الحل :

①
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = 5-\cancel{2x}+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)-(\cancel{5}-\cancel{2x})$$
$$=3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$
$$=3\ln(1)=\ln(1)^3=\ln(1)=0$$

اذاً هو مقارب مائل في جوار $+\infty$

②
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 1$$

③
$$f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = 5-2(4)+3\ln\left(\frac{4+1}{4-4}\right)$$
$$=5-8+3\ln\left(\frac{5}{0^+}\right)$$
$$=-3+3\ln(+\infty)$$
$$=+\infty$$

$x=4$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5-2(+\infty)+3\ln\left(\frac{x}{x}\right)$$
$$=5-2(+\infty)+3\ln(1)$$
$$=-\infty$$

$$f'(x)=-2+3\left(\frac{\frac{(x+1)'(x-4)-(x+1)(x-4)'}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}}\right)$$

$$f'(x)=-2+3\left(\frac{\frac{1(x-4)-1(x+1)}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}}\right)$$

$$f'(x)=-2+3\left(\frac{\frac{x-4-x-1}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}}\right)$$

$$f'(x)=-2+3\left(\frac{-5}{(x+1)(x-4)}\right)$$

$$f'(x)=-2-\frac{15}{(x+1)(x-4)}$$

$$f'(x)=\frac{-2(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-4)}-\frac{15}{(x+1)(x-4)}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{-17(x+1)(x-4)}}{(x+1)(x-4)}$$

$$\cancel{f'(x)}=\frac{-17[\cancel{x^2-4x+x-4}]}{(x+1)(x-4)}$$

$$\frac{-17[\cancel{x^2-3x-4}]}{(x+1)(x-4)}$$

الموضوع

$$f(x)' = \frac{-2\,(x^2-4x+x-4)\ -15}{(x+1)(x-4)}$$

$$f(x)' = \frac{-2x^2-2x+8x+8-15}{(x+1)\,(x-4)}$$

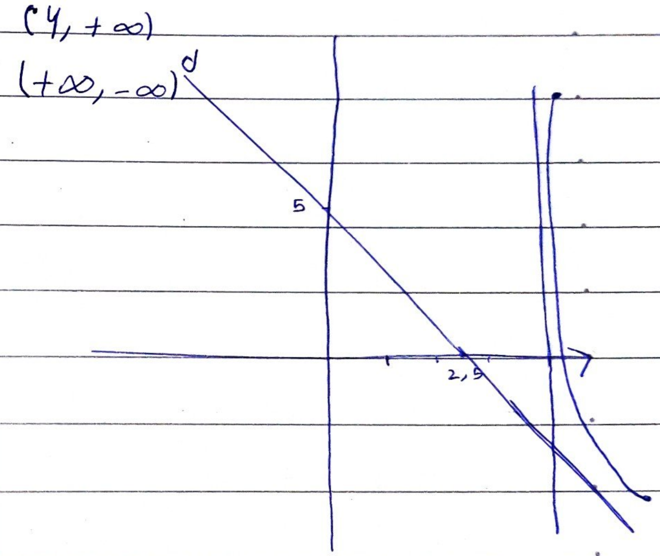
$$f(x)' = \frac{-2x^2+6x-7}{(x+1)\,(x-4)}$$

مميز

x	4	$+\infty$
$f(x)'$	▨	$-$
$f(x)$	▨ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

$(4,+\infty)$

$(+\infty,-\infty)$



x	y	(x,y)
0	5	$(0,5)$
$2,5$	0	$(2,5,0)$

④ ~~نجد~~ التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]4,+\infty[$

$0 \in f(]4,+\infty[) =]+\infty,-\infty[$

يوجد حل وحيد α.

مسألة 27:

ليكن C الخط البياني للتابع f وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

① تحقق أن مجموعة تعريف التابع f هي $]1,+3[$

② اثبت أن $4-x \in D_f$ إلا كان x من D_f.

الحل:

① $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

$\frac{x-1}{3-x} > 0$

$x-1=0 \quad x=1$

$3-x=0 \quad -x=-3 \quad x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$
كسر	$-$	0	$+$ 0	$-$

$D=]1,+3[$

② $x \in D_f$

$x \in]1,3[$

$-1 \times \quad 1 < x < 3$

$+4 \quad -1 < -x < -3$

$4-1 < 4-x < 4-3$

$3 < 4-x < 1$

$1 < 4-x < 3$

$4-x \in]1,3[$

$4-x \in D_f$

محقق

*** نقطة التناظر:**

$f(a-x) + f(a+x) = 2b$

(a,b)

مثال:

$f(2-x) + f(2+x) = 8$

$(2,4)$

$f(2a-x) + f(x) = 2b$

(a,b)

$f(8-x) + f(x) = 4$

$(4,2)$

③ a ـ احسب عند كل x

$f(4-x) + f(x)$

b ـ استنتج ان النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C

الحل:

a ـ $f(4-x) + f(x)$

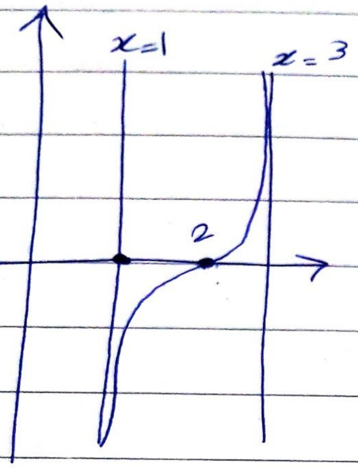
$= \ln\left(\frac{4-x-1}{3-(4-x)}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

$= \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

$= -\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

$= 0$

x	1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



الموضوع

$f(4-x)+f(x)=0$

$f(2a-x)+f(x)=b$

$a=2$

$b=0 \Rightarrow A(2,0)$

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف المجموعة.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{0}{2}\right) = \ln(0) = -\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي بجوار $+\infty$.

$$f(x)' = \frac{\left(\frac{x-1}{3-x}\right)'}{\frac{x-1}{3-x}}$$

$$= \frac{\frac{(x-1)'(3-x)-(x-1)(3-x)'}{(3-x)^2}}{\frac{x-1}{3-x}}$$

$$= \frac{\frac{3-x+x-1}{(3-x)^2}}{\frac{x-1}{3-x}}$$

$$= \frac{2}{(3-x)(x-1)} > 0$$

التابع متزايد تماماً

- ليكن لدينا التابع

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-4}$$

① تحقق أن مجموعة التعريف D هي:

$]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

② أوجد النهايات على أطراف مجموعة التعريف.

③ ادرس تغيرات التابع ونظم بجدول.

④ ارسم الخط C.

*** الحل:**

① $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-4}$

$\frac{x+1}{x-4} > 0$

$x+1=0 \quad x=-1$; $x-4=0 \quad x=4$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
كسر	$+$		$-$		$+$
التراجح	ح		ع		ح

$]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

② $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$y=0$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \ln\left(\frac{-1+1}{-1-4}\right) = \left(\frac{0}{-5}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \ln\left(\frac{4+1}{4-4}\right) =$

$= \ln\left(\frac{5}{0^+}\right) = +\infty$

$x=4$ مقارب شاقولي جوار $+\infty$

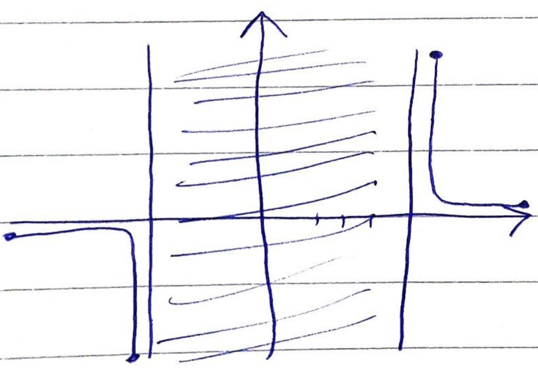
③ $$f'(x) = \frac{\frac{(x+1)'(x-4)-(x+1)(x-4)'}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x-4-x-1}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-5}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{(x-4)}}$$

$$= \frac{-5}{(x-4)(x+1)} < 0$$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0



$f(x) = x+1 - \ln(\frac{x}{x})$

① بين أن مجموعة التعريف $D =]0,+\infty[$

② اثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل. ثم ادرس وضعه النسبي.

③ أوجد نهاياته على أطراف مجموعة التعريف

④ ادرس التغيرات ونظم بها جدولاً.

⑤ ارسم المقاربات وارسم الخط C.

* الحل:

① $f(x) = x+1 - \ln(\frac{x}{x})$

$\frac{x}{x} > 0$

$x > 0$

$D =]0,+\infty[$

② $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = x+1 - \ln(\frac{x}{x}) - (x+1)$

$= -\ln(\frac{x}{x}) = -\ln(1) = 0$

اذاً هو مقارب مائل

الوضع النسبي: $f(x) - y = 0$

$-\frac{\ln(x)}{x} = 0$ | $-\ln(\frac{x}{x})$

$\ln(x) = 0$

$x = 1$ | $-\ln(\frac{x}{x}) = 0$

x		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+ \; 0$	$-$	
الوضع النسبي		C فوق Δ	C تحت Δ	

③ $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0+1-\ln(\frac{0}{0})$

$= 0+1-\ln(0) = +\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 1 - \ln(\frac{x}{x})$

$= +\infty + 1 - 0$

$= +\infty$

④ $f'(x) = 1 - \frac{\ln(x)'(x) - \ln(x)(x)'}{(x)^2}$

$= 1 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \cancel{1}\ln x}{x^2}$

$= \frac{x^2}{x^2} - \frac{1-\ln x}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 1 - \ln(x)}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$\boxed{x^2 - 1 - \ln(x) = 0}$

عندما نشتق التابع $f(x)$ ومساواته بالصفر ونتج مقدار غير قادر على معرفة اشارته نشكل تابع مساعد $g(x)$ ونشتقه لمعرفة اشارته.

* نشكل تابع مساعد:

$g(x) = x^2 - 1 - \ln(x)$

$g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$= \frac{2x^2-1}{x}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$ → $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$e = 2,7$

201

الموضوع

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

محل لامتا.

تمرين هام:

- لتكن لدينا المعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$

أوجد قيمة m ليكون للمعادلة

جذران متخالفان

$$x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(\ln(m+1)$$

$$\Delta = 4 - 4(\ln(m+1)$$

$\Delta > 0$ حتى يكون للمعادلة جذران

$$4 - 4\ln(m+1) > 0$$

$m + 1 > 0$ شرط الحل

$m > -1 \qquad D_1 =]-1, +\infty[$

$$4 - 4\ln(m+1) > 0$$

$$4 > 4\ln(m+1)$$

$$1 > \ln(m+1)$$

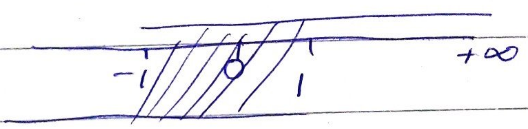
$$e^1 > \cancel{\ln}_e (m+1)$$

$$e > m+1$$

$$-1 + e > m$$

$$D_2 =]-\infty, e-1[$$

$S = D_1 \cap D_2$ مجموعة الحلول



$$S =]-1, e-1[$$

الموضوع

مسألة 17 :

ليكن لدينا التابع.

$p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

① اكتب $p(x)$ بشكل جداء لعاملين.

② حل المتراجحة $p(x) \leq 0$

③ حل المتراجحة $\ln x^2 + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

- الحل :

①
$p(1) = 2(1)^3 + 5(1) + 1 - 2$

$= 2 + 5 + 1 - 2$

$= 8 - 2 = 6 \neq 0$

$p(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1) + (-1) - 2$

$= 2(-1) + 5(1) - 1 - 2$

$= -2 + 5 - 1 - 2$

$= 0$

معنى $x = -1$ نقسم على $x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x - 2 \\
x+1 & 2x^3 + 5x^2 + x - 2 \\
 & \mp 2x^3 \mp 2x^2 \\
\hline
 & 0 + 3x^2 + x \\
 & \mp 3x^2 \mp 3x \\
\hline
 & 0 - 2x - 2 \\
 & \pm 2x \pm 2 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

$p(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$

② $p(x) = 0$

إما $x + 1 = 0$

$x = -1$

أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2)$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

أو $x_2 = \frac{-3+5}{2(2)} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
حل المتراجحة		ح		غ		ح		غ	

$D =]-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}[$

③ $\ln x^2 + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$x^2 > 0$; $2x + 5 > 0$; $2 - x > 0$

$x^2 = 0$; $2x + 5 > 0$; $-x > -2$

$D_1 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; $2x = -5$; $x < 2$

$x = \frac{-5}{2}$; $D_3 =]-\infty, 2[$

$D_2 =]\frac{-5}{2}, +\infty[$

الموضوع

$\ln(x^2)(2x+5) \leqslant \ln 2 - x$

$\ln(2x^3+5x^2) \leqslant \ln 2 - x$

$2x^3+5x^2 \leqslant 2-x$

$2x^2+5x^2+x-2 \leqslant 0$

$p(x) \leqslant 0$

$\cancel{D}$

تقاطع $D' =]-\frac{5}{2}, 0[\cup]0, 2[$

$D =]-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}]$

$S = D \cap D' = \cancel{\emptyset}$

$]-\frac{5}{2}, -2] \cup [-1, 0[\cup]0, \frac{1}{2}]$

f معرف $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

① احسب نهايات f عند اطراف مجموعة التعريف.

② أوجد $f'(x)$ ثم ادرس اشارة المشتق ثم نظم جدولا لتغيرات تابع f.

③ ارسم الخط في معلم متجانس.

الحل:

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \ln\left(\frac{-2+2}{-2}\right) = \ln\left(\frac{0}{-2}\right) = \ln(0) = -\infty$

$x=-2$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{0+2}{0}\right) = +\infty$

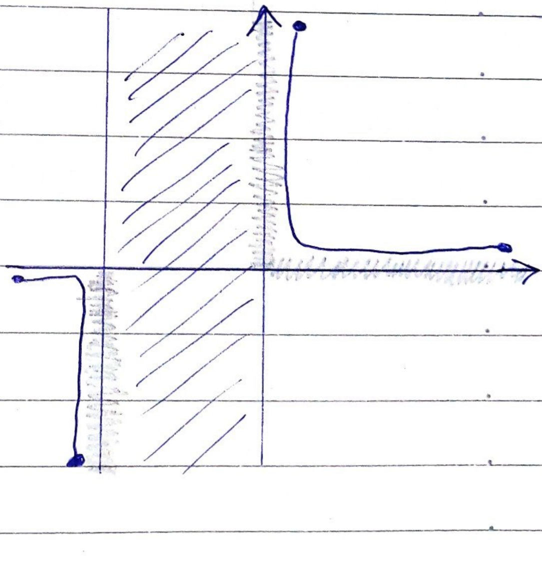
② $f'(x) = \dfrac{\frac{(x+2)'(x) - (x+2)(x)'}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{x - x - 2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{x(x+2)} < 0$

③

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\infty$		$+\infty \searrow 0$



13600
2000

201

الموضوع

مسألة:

- ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(\frac{x}{x+1})$.
- ولتكن U_n متتالية معرفة وفق $U_n=f(n)$.

① ادرس تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$ ونظم بها جدولاً واكتب معادلة كل مقارب.

② ارسم الخط C على المجال $]0,+\infty[$

③ اثبت ان النقطة A $A(-\frac{1}{2},0)$ هي مركز تناظر للخط C ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع f.

الحل:

① $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ln(\frac{0}{0+1})=\ln(0)=-\infty$

$x=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\ln(\frac{x}{x})=\ln(1)=0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

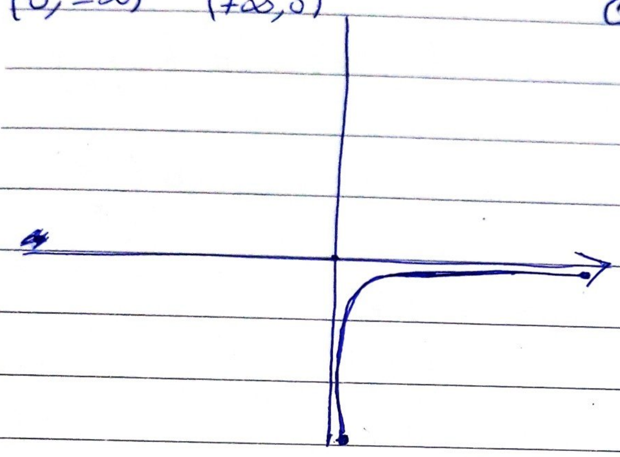
$$f'(x)=\frac{\frac{(x)'(x+1)-(x)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$ ②

$$f'(x)=\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}>0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0

$(0,-\infty)$ $(+\infty,0)$ ②



③ $f(2a+x)+f(a-x)=2b$

$f((-\frac{1}{2})+x)+f((-\frac{1}{2})-x)=2(0)$

$f((-1)-x)+f(-x)=0$

$\ln(\frac{-1-x}{-x})+\ln(\frac{-x}{-1+x})$

الموضوع

④ ضع $S_n = U_1 + U_2 + \_\_\_\_ + U_n$

أثبت $S_n = -\ln(n+1)$

⑤ أوجد نهاية U_n و نهاية S_n.

④

$$U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$U_n = f(n) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) + \ln\left(\frac{2}{2+1}\right) + \ln\left(\frac{3}{3+1}\right)$$

$$+ \_\_\_ \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \_\_ \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = -\ln(n+1)$$

⑤ [illegible]

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\ln\left(\frac{n}{n}\right) = -\ln(\cancel{+\infty}) = -\infty$$

$$\ell_1 = f(-1-x) + f(x)$$

$$= \ln\left(\frac{-1-x}{-1-x+1}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-1-x}{-x}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

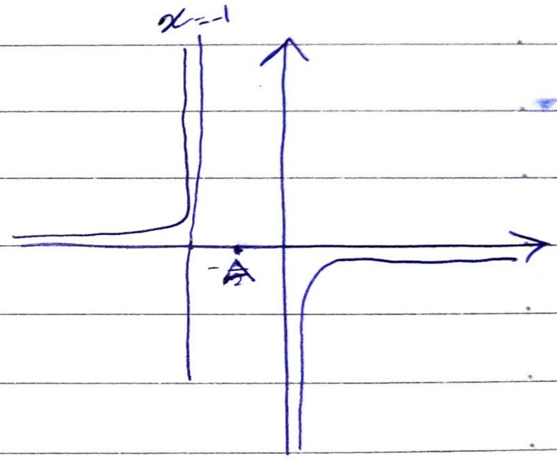
$$= \ln\left(\frac{-(1+x)}{-x}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$0 = 2b$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

هي نقطة تناظر



الموضوع

* ليكن لدينا التابع $f(x)=2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

① اثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$

مقارب مائل للخط C بجوار

$-\infty$ و $+\infty$.

ثم ادرس الوضع النسبي بين

الخط C و d.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \cancel{2x}-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-(\cancel{2x}-1)$$

$$=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{x}{x}\right)=-\ln(1)=0$$

~~مقارب~~

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\cancel{2x}-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-(\cancel{2x}-1)$$

$$=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{x}{x}\right)=0.$$

مقارب مائل بجوار $-\infty$ و $+\infty$

الوضع النسبي:

عندما $x\in]-\infty,-1[$

$$\frac{x+1}{x-1}<1$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$$

$$-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$$

$$f(x)-y>0$$

C فوق d

عندما $x\in]1,+\infty[$

$$\frac{x+1}{x-1}>1$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$$

$$-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$$

$$f(x)-y<0$$

C تحت d.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم بها جدولاً واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2(+\infty)-1-\ln\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$=+\infty-1-\ln(1)$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2(-\infty)-1-\ln\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=2(-1)-1-\ln\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right)$$

$$=-3-\ln(0)$$

$$=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to1} f(x)=2(1)-1-\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)$$

$$=\cancel{2}\,1-\ln(+\infty)$$

$$=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي بجوار $-\infty$

③ اثبت أن النقطة $I(0,-1)$

نقطة تناظر للخط C

④ ارسم ما وجدته من مقاربات

الموضوع

$$f'(x) = 2 - \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 2 - \frac{\frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 2 - \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= 2 - \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= 2 + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = 0$$

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = -2$$

$$2 = -2(x+1)(x-1)$$

$$2 = -2(x^2 - x + x - 1)$$

$$2 = -2(x^2 - 1)$$

$$2 = -2x^2 + 2$$

$$2x^2 = +2 - 2$$

$$2x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \implies x = 0 \notin D$$

مستحيل

التابع متزايد

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$
$F(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow +\infty$