الفصـــل الرابــــــــع

التوزيعات الاحتمالية المنقطعه

THE DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

- **مقدمــــــــــــــة**

هنـــاك عدة توزيعات احتماليـــة متقطعة منها توزيع برنولي ، توزيـــع ثنائي الحديـــن، توزيع ثنائي الحدين السالـــب، توزيـــع كثير الحدود، توزيــــع الهيبروجيومتريك وتوزيع بواسون، ولكننا سندرس في هذا الفصل فقط توزيـــع ثنائي الحدين وتوزيع بواسون نظرا لما لهذين التوزيعين من تطبيقات واسعة في التجارة والاقتصاد.

- **توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution**

في كثير من التطبيقات الاقتصادية والتجارية كثيرا ما نكون معنيـــين بدراســـة الاختبارات التي يكون لها نتيجتين ممكنتين فقط وهما ما تدعيان عادة بالنجاح أو الفشل، مثل هذه الاختبارات تعرف بالاختبارات ثنائية الحدين ، مثل اختبار مـــا إذا كان أحد المصابيح الكهربائية التي ينتجها مصنع ما سليما أو معيبا . ويقـــال للتجربة التي تتكون من عدة اختبارات ثنائية الحدين بالتجربة ثنائية الحدين مثل سؤال 100 طالب ما إذا كانوا يدخنون أم لا . ويجب أن يتحقق في أي تجربـــة ثنائية الحدين الشروط الأربعة التالية:

1. عدد الاختبارات محدود.
2. لكل اختبار فقط نتيجتين ممكنتين وهما النجاح أو الفشل.

3. احتمال النجاح يكون ثابت في كل الاختبارات ولا يختلف من اختبار لآخر.
4. الاختبارات مستقلة بعضها عن بعض.

من خلال المثال التالي سوف نوضح ونشتق التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ثنائي الحدين في تجربة ثنائية الحدين وهو ما يعرف باسم التوزيع ثنائي الحدين.

مثـــــال 1:

لو كانت n هي عدد الاختبارات في التجربة ثنائية الحدين وهـــي إلقاء قطعة عمله معدنية وكانت P هي احتمال الحصول على الوجه صوره (أي النجاح) و (1-P) ويرمز لها بالرمز q هي احتمال عدم ظهور الوجه صوره (أي الفشل) أي هي احتمال ظهور الوجه كتابه في كل اختبار:

أولاً: لو جعلنا n = 1

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

S = (ص و ك)

حيث ص ترمز إلى الوجه صوره

ك ترمز إلى الوجه كتابه

دع X تمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور الوجه صوره

فتكون القيم الممكنة لـــ X هي 0 ، 1

P هي احتمال ظهور الصوره

q= (I-P) هي احتمال ظهور الكتابة

فيكون التوزيع الاحتمالي للمتغير x على الشكل التالي:

جــدول 1

التوزيع ثنائي الحدين

n = 1

X = x	**f (x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك) = q
1	f (1) = P (ص) = P
المجموع	**q + P = 1**

ثانياً : لو جعلنا n = 2

فان مجموع الحالات المكنة تكون

S = (ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك)

حيث ص ص تعني الأولى صورة والثانية صورة

ك ك تعني الأولى كتابة والثانية كتابة

ص ك تعني الأولى صورة والثانية كتابة

ك ص تعني الأولى كتابة والثانية صورة

أي أن عدد الحالات الممكنة 4 حالات

وتكون احتمالات هذه الحالات هي

qq , qp, pq, pp

حيث أن الاختبارات مستقلة

وتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2

ويكون التوزيع الاحتمالي لــ x كما في الجدول التالي:

جـــــدول (2)

توزيع ثنائي الحدين

$n = 2$

X = x	**f(x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك ك) = P (ك) P (ك) = qq = q^2
1	f (1) = P (ص ك) + P (ك ص) = P (ص) P (ك) + P (ك) P (ص)
	= Pq + qP = 2qP
2	f (2) = P (ص ص) + P (ص) P (ص) = PP = P^2
المجموع	**$q^2 + 2qP + P^2 = (q+P)^2 = 1$**

ثالثـــاً: لو جعلنا n تساوي 3

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

S = { ص ص ص، ك ص ص، ص ك ص، ك ك ص، ص ص ك، ك ص ك، ص ك ك ، ك ك ك }

أي أن مجموع الحالات الممكنة = 8 حالات

وتكون الاحتمالات المناظرة لهذه الحالات هي

qqq, qqP, qPq, qPP, Pqq, PqP, PPq, PPP

وتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3

ويكون التوزيع الاحتمالي لــ x كما في الجدول التالي:

جـــــدول 3

توزيع ثنائي الحدين

$n = 3$

X = x	**f(x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك ك ك) = P (ك) P (ك) P (ك) = q^3
1	f (1) = P (ص ك ك) + P (ك ص ك) + P (ك ص ص) $= q^2 p + q^2 p + q^2 p = 3 q^2 p$
2	f (2) = P (ص ص ك) + P (ص ك ص) + P (ك ص ص) $= qp^2 + qp^2 + qp^2 = 3qp^2$
3	f (3) = P (ص ص ص) = P (ص) P (ص) P (ص) = p^3
المجموع	$\mathbf{q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + P^3 = (q+p)^3 = 1}$

نلاحظ من الجداول الثلاثة السابقة أن عدد الحالات الممكنة هو :

إذا كانت n تساوي 1 فان الحالات الممكنة = $2^1 = 2$

إذا كانت n تساوي 2 فان الحالات الممكنة = $2^2 = 4$

إذا كانت n تساوي 3 فان الحالات الممكنة = $2^3 = 8$

وبتعميم هذه النتيجة يكون عدد الحالات الممكنة بتجربة ثنائيـــة الحـــدين يساوي 2^n إذا كانت التجربة مكونه من n اختبار. إذا ما اســـتمرينا فـــي زيادة عدد الاختبارات n فاننا بصورة عامة نســـتطيع أن نطبـــق نفـــس الطريقة كما في الجداول الثلاثة السابقة ولكن العمليات الحسابية ســـتكون طويلة ومملة ولا بد من طريقة عامة تسهل لنا ذلك.

والآن نستطيع القول بأن احتمال الحصول على الوجه صورة x مرة بالضبط في تجربة ثنائية الحدين تتكون من n اختبار (القاء قطعة عملـــه) عندما يكون ترتيب الصورة والكتابة معينة أو مبينة هو احتمـــال وقـــوع الحادث (ظهور الوجه صورة) x مرة وعدم وقوعة $(n-x)$ مرة وذلك في حالات مختلفة.

احتمال وقوع الحادث (صورة) x مرة هو P^x

احتمال عدم وقوع الحادث $n-x$ مرة هو q^{n-x}

ومن قاعدة ضرب الاحتمالات يكون احتمال وقوع الحادث x مرة هو p^x q^{n-x}

وعدد الحالات المواتية لوقوع الحادث يمكننا حسابه بالتوافيق وهو يساوي توافيق x من n أي

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

وهكذا يكون الاحتمال المطلوب وهو الحصول على الوجه صوره x مرة بالضبط من n اختبار مساوياً إلى :

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

مثـــــلاً ، لو كانت n تساوي 3 تكون احتمالات ظهور الوجه صوره 0 ، 1 ، 2 ، 3 مرات هي على التوالي :

$$(3^3)\ p^3\ ,\ (2^3)\ p^2\ q\ ,\ (1^3)\ pq^2\ ,\ (0^3)\ q3$$

$$p^3\ ,\ 3p^2q\ ,\ 3pq^2\ ,\ q^3$$

وهي نفس الاحتمالات التي حصلنا عليها في جدول (3)

ويلاحظ أن القيم الناتجة عن القانون

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \ldots, n$$

هي نفسها قيم الحد x في مفكوك ثنائي الحدين

$$(q+p)^n$$

حيــــث

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \ldots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + p^n$$

ومن هنا جاءت تسمية هذا التوزيع الاحتمالي بالتوزيع ثنائي الحدين

وباختصار فان توزيع ثنائي الحدين هو:

التوزيع ثنائي الحدين:

هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع x والـــذي يمثل عدد مرات النجاح في n اختبـــار ثنـــائي الحـــدين ، ويعطي هذا التوزيع بالصيغة

$$\mathbf{f(x)} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث :

i) $x = 0, 1, \ldots, n$

ii) p هي احتمال النجاح في كل اختبار

iii) q هي احتمال الفشل في كل اختبار

iv) $p + q = 1$

مثـــال 2 :

طلب من أحد منتجي الكراسي (المقاعد) المدرسية أن يضع في كل غرفة دراسة بعض المقاعد الخاصة بالأعسرين (الايسرين). إذا كان يعلم أن 10% من السكان أعسرين ما هو احتمال ان غرفة لعشرين طالبا:

i) لا تحتوي على أي عسر

ii) اثنان منهم اعسران

iii) أكثر من أثنين منهم أعسرين

الحــــل: دع x تمثل عدد الاعسرين الموجودين في هذه الغرفة

تكون القيم الممكنة لـــ x هي 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 20

دع p تساوي احتمال أن يكون الفرد اعسرا

q تساوي احتمال أن لا يكون الفرد اعسرا

$$\therefore \quad p = 0.10$$

$$q = 1\text{-}P \qquad = 0.90$$

$$n = 20$$

i) p (لا تحتوي على اعسر) = f(0)

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$f(0) = \binom{20}{0} p^0 q^{20}$$

$$= (q)^{20} = (0.90)^{20}$$

$$= 0.122$$

ii) P (اثنان اعسران) = f (2)

$$f(2) = \binom{20}{2} p^2 \ q^{18}$$

$$= 190\ (0.01)^2\ (0.90)^{18}$$

$$= 190\ (0.01)\ (0.9)^{18}$$

$$= 0.285$$

iii) P (اكثر من اثنين) = $p\ (x > 2) = 1 - p\ (x \leq 2)$

$$= 1 - \{p\ (x=0) + p\ (x=1) + p\ (x=2\ )\}$$

$$= 1 - \{(0.9)^{20} + 20\ (0.1)\ (0.9)^{19} + 0.285\}$$

$$= 1 - \{\ 0.122 + 0.270 + 0.285\}$$

$$= 0.323$$

- توقع التوزيع ثنائي الحدين

بالعودة إلى المثال السابق وهو تجربة إلقاء قطعة عملة n مرة وبجعل n تساوي 1 فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (1) والتوقع لهذا التوزيع محسوب في جدول (4) التالي:

جـــــدول (4)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 1$

X	**f (x)**	**x f (x)**
0 1	q p	0 p
المجمــــــوع		$\mu = \sum_{0}^{1} xf(x) = p$

وبجعل n تساوي 2 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره معطى في الجدول (2) والتوقــع (أو الوســط الحسابي) لهذا التوزيع محسوب في جدول (5) التالي:

جـــــدول (5)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 2$

X	**f(x)**	**x f (x)**
0 1 2	q^2 2pq p^2	0 2qp $2p^2$
المجمــــــوع		**E(x) = 2p (q+p) =2p**

وبجعل n تساوي 3 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى فــي الجــدول (3) والتوقــع (أو الوسط الحسابي) لهذا التوزيع يمكن حسابه كما في جدول (6) التالي:

جـــــدول (6)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 3$

X	f(x)	X f (x)
0	q^3	0
1	$3p^2q$	$3q^2 p$
2	$3qp^2$	$6q p^2$
3	P^3	$3p^3$
المجمـــــــوع		$\mu = E(x) = 3p(q^2 + 2qp + p^2)$ $= 3p\,(q + p)^2 = 3p$

وهكذا فاننا نلاحظ بأن الوسط الحسابي (أو التوقع) للتوزيع ثنائي الحدين هو :

P إذا كانت n تساوي 1

$2p$ إذا كانت n تساوي 2

$3p$ إذا كانت n تساوي 3

ويمكننا الآن أن نعمم هذه النتيجة فنقول بأن توقع التوزيع ثنائي الحدين يساوي $n\,p$ لـــ n من الاختبارات.

> **– توقع التوزيع ثنائي الحدين**
>
> **إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار فإن عدد مرات النجاح المتوقعة من n اختبار هو $\mu = np$**

ويمكننا أن نبرهن ذلك أيضاً باستخدام تعريف التوقع كما يلي

$$\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x\, n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!}\; p^{x}\; q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!\;\; p^{x-1}\;\; q^{(n-1)-(x-1)}}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1}\; p^{x-1}\; q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= np\,(q+p)^{n-1}$$

$$= np$$

<u>مثـــال 3</u> : إذا ألقيت قطعة نقدية 100 مرة فما هو عدد المرات المتوقعـــة لظهور الوجه صورة؟

<u>الحـــــل</u>: دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهـــور الوجـــه صورة وهكذا فإن x لها توزيع ثنائي الحدين بـــ

$$P = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

وتوقع التوزيع ثنائي الحدين = np

$$\mu = E(x) = np = 100 \left(\frac{1}{2}\right) = 50$$

وهـــــو المطلــوب

- **تباين التوزيع ثنائي الحدين**

بالعودة إلى مثال (1) وهو تجربة إلقاء قطعة نقد n مرة وباستخدام قانون التباين $\sigma_x^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x)$ وبجعــل n تأخــذ القــيم 1، 2، 3 نستطيع أن نصل إلى صيغة عامة لتباين التوزيع ثنائي الحدين.

بجعل n تساوي 1 يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشــوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (1) وتوقع هــذا التوزيع كما حسب في الجدول (4) وهو p وأما تباين هذا التوزيع فــيمكن حسابه كما في جدول (7) التالي:

جــــدول (7)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

n = 1

X	f(x)	x - μ	$(x-\mu)^2 f(x)$
0	q	0-p	$q^2 q$
1	p	1-p	$(1-p)^2 p$
المجمــوع			$\sigma_x^2 = \mathbf{p^2q + q^2p}$ $\mathbf{= pq\,(p+q) = pq}$

وبجعل n تساوي 2 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (2) وتوقع هـــذا التوزيع هو 2p كما حسب في جدول (5) وأما تباين هذا التوزيع فـــيمكن الوصول إليه كما في جدول (8) التالي:

جــــدول (8)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

$n = 2$

X	**f(x)**	**x – u**	**$(x-u)^2\ f(x)$**
0	q^2	$-2p$	$4p^2\ q^2$
1	$2pq$	$1-2p$	$(1-2p)^2\ 2pq$
2	p^2	$2-2p$	$4(1-p)^2\ p^2$
المجمـــوع			$\sigma_x^2 = 4p^2q^2+(1-2p)^2\ 2pq+4(1-p)^2\ p^2$ $= 4p^2q^2+ (1-4p+4p^2)\ 2pq + 4q^2\ p^2$ $= 8p^2q^2+ 2pq - 8p^2q + 8p^2\ q$ $= 8p^2\ q\ (q-1 + p) + 2p\ q$ $= 8p^2\ q\ (0) + 2p\ q$ $= 2pq$

وبجعل n تساوي 3 فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (3) وتوقـــع هـــذا التوزيع كما حسب في جدول (6) هو 3p ويمكننا بنفس الطريقة السابقة أن نصل إلى تباين هذا التوزيع يساوي 3pq عندما n تساوي 3

وهكذا يكون تباين التوزيع ثنائي الحدين يساوي:

pq عندما n تساوي 1

2pq عندما n تساوي 2

3Pq عندما n تساوي 3

ويمكننا تعميم هذه النتيجة بالقول بان تباين التوزيع ثنائي الحدين يســـاوي npq لـــ n اختبار

– تباين التوزيع ثنائي الحدين **إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار فإن تباين التوزيع الاحتمالي لـــ n اختبار هو**

ويمكننا برهنه ذلك أيضا باستخدام قوانين التوقع والتباين كما يلي

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x^2\, n!\, p^x\, q^{n-x}}{x!\,(n-x)!}$$

وبالتعويض محل x^2 بـــ $x(x-1)+x$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{[x(x-1)+x]\, n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)\ n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x-0}^{n} \frac{xn!}{x!(n-x)!} p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)\,(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!}\ p^x\, q^{(n-2)-(x-2)} + E(x)$$

$$= n\,(n\text{-}1)\, p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!}\ p^{x\text{-}2}\, q^{(n\text{-}2)\text{-}(x\text{-}2)} + np$$

$$= n\,(n\text{-}1)\, p^2\ (q+p)^{n-2} + np$$

$$= n^2\, p^2 - np^2 + np$$

$$\sigma_x^2 \quad = E\,(x2) - [E(x)]^2$$

$$= n^2\, p^2 - np^2 + np - n^2\, p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np\,(1 - p)$$

$$= npq$$

وهكذا فان $\sigma^2 = npq$

والانحراف المعياري للتوزيع ثنائي الحـــدين يســـاوي الجـــذر التربيعـــي الموجب للتباين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$$

مثــال 4 :

بالعودة إلى مثال 3 وهو إلقاء قطعة نقد 100 مره فما هو التباين والانحراف المعياري لعدد مرات ظهور الوجه صورة؟

الحـــــل:

دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره وهكذا فان x لها توزيع ثنائي الحدين فيه

$$P = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

$$\text{التباين} = \sigma_x^2 = npq$$

$$= 100 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 25$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$$

- **توزيع بواســـــــــون**

يستخدم توزيع بواسون في التجارب التي تكون نتيجتهـــا وقـــوع الحدث موضع الاهتمام عددا صحيحاً من المرات خلال وحده زمنية محددة (مثل الدقيقة أو الساعة أو اليوم ... الخ) أو على وحده أو منطقة محـــددة من الحيز (مثل الطول أو المساحة) ، بينما يستخدم توزيع ثنائي الحـــدين

لمعرفة عدد مرات وقوع الحدث موضع الاهتمام في عدد محدد من الاختبارات . ومن أمثلة تطبيقات توزيع بواسون:

أ) المسائل التي تحتاج إلى الانتظار أو المرتبطه بالزمن مثل :

- عدد حوادث السير في أسبوع بمدينة ما.
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة.
- عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة في اليوم.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها الراديوتاكسي في الدقيقة.

ب) المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ أو الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة ومنها :

- عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة المساحة
- عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران
- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة التي ترتكبها إحدى السكرتيرات

وهكذا فان المتغير البواسوني هو متغير متقطع ياخذ قيمة من القيم صفر أو 1 أو 2 أو ... في فترة زمنية متصلة أو في حيز أو منطقة متصلة ويجب أن يحقق الشروط الثلاثة التالية:

1- عدد مرات النجاح مستقلة في فترتين متتاليتين من الزمن أو منطقتين متصلتين من الحيز.

2- احتمال النجاح خلال فترة قصيرة من الزمن أو منطقة صغيرة من الحيز يتناسب مع طول هذه الفترة أو منطقة هذا الحيز.

3- احتمال نجاحين أو أكثر خلال فترة زمنية قصيرة أو منطقة من الحيز صغيرة يكون صغيراً جداً بحيث يمكن إهماله.

والتوزيع الاحتمالي لمتغير بواسون العشوائي يـــدعي بتوزيـــع بواسون ويعطي حسب التعريف التالي:

- توزيع بواسون

إذا كانت X هي متغير بواسون العشوائي وان القيم الممكنة لــ X هي 0، 1، 2، ... فان التوزيع الاحتمالي لــ X يدعى بتوزيع بواسون. ويعطى بالصيغة التالية:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x\,!}$$

حيث

x = 0، 1، 2 ، ...

e = ثابت قيمته 2.71828

λ = متوسط عدد مرات النجاح في الفترة الزمنية أو منقطة الحيز المحددة وتسمى معلمة التوزيع.

<u>مثـــال 5:</u>

افترض أن متوسط عدد الزبائن في الدقيقة الذين يدخلون احد المحلات التجارية هو ثلاثة زبائن ، باستخدام توزيع بواسون أوجد احتمال ان أربعة زبائن بالضبط سيدخلون المحل خلال دقيقة معينة.

الحـــــل:

دع x تمثل المتغير العشوائي عدد الزبائن الذين يدخلون المحل في الدقيقة فيكون لـــ x توزيع بواسوني متوسطة λ تساوي 3 . باســـتخدام صيغة توزيع بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x\,!}$$

$$p(x=4) = f\,(4) = \frac{e^{-3} \quad (3)^{4}}{4\,!}$$

$$= \frac{0.05 \;\; (81)}{24}$$

(حيث $e^{-3} = 0.05$)

$$= \frac{135}{800}$$

$$= 0.16875$$

مثـــال 6:

إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحة زجاجية كبيرة هو واحد لكل 20 قدم مربع فما هو احتمال ان شريحة 3 × 10 قدم :

i) لا تحتوي على عيوب.

ii) تحتوي على عيب واحد على الأقل.

الحـــــل:

دع x تمثل عدد العيوب في الشريحة 3×10

فيكون لــ x توزيع بواسوني معلمته هي

$$\lambda = \frac{3 \times 10}{20} = 1.5$$

أي أن متوسط عدد العيوب في الشريحة 3×10 هو 1.5

وبتطبيق صيغة بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x!}$$

i) $P\,(x=0) = f(0) = \dfrac{e^{-1.5}\,(1.5)^{0}}{0!} = e^{-1.5} =$

0.223

ii) p (عيب واحد على الأقل) = 1-p (x=0) =

1 - 0.223

= 0.777

- **توقع وتباين توزيع بواسون**

إذا كانت x تمثل متغير بواسوني وبالتالي لها توزيع بواسون

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda > 0$$

فان توقع وتباين متغير بواسون العشوائي x يساوي معلمة التوزيع أي يساوي λ أي أن:

$$\mu_X = E(x) = \lambda$$

$$\sigma_X^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda$$

البرهـــــان:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \ f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

ومن المعروف في التفاضل والتكامل أن

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots = \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\therefore \ E(x) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

بتعويض X^2 بالقيمة $X(X-1)+X$ ينتج

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{[x(x-1)+x]\ e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{[x(x-1)\ e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{x\,e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{x\,e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x-2)!} + E(x)$$

$$= \lambda^{2} e^{-\lambda} \sum_{2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^{2} e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^{2} + \lambda$$

var (x) = E (x2) – [E (x)]2

$$= (\lambda^{2} + \lambda) - \lambda^{2}$$

$$= \lambda$$