المسألة الأولى / شبكة التحليل :

لتكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = 3e^{x} - x - 3$$

الطلب الأول:

أثبت أن المستقيم $d : y = -x - 3$ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي وادرس تغيرات f.
و نظم جدولاً ؟.

الحل:

نريد إثبات أن $d : y = -x - 3$ مقارب للخط C

بما أن التابع f معرف على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
سندرس فيما إذا كان d مقارب للخط عند $+\infty$ وعند $-\infty$

عند $-\infty$

$f(x) - y_D =$

$= 3e^{x} - x - 3 + x + 3$

$= 3e^{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \to -\infty} 3e^{x} = 0$$

حيث : $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

ومنه المستقيم $d : y = -x - 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

عند $+\infty$

$f(x) - y_D =$

$= 3e^{x} - x - 3 + x + 3$

$= 3e^{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \to +\infty} 3e^{x} = +\infty$$

ومنه المستقيم $d : y = -x - 3$ ليس مقارب للخط عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي

بما أن $d : y = -x - 3$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_D = 3e^{x} > 0$

ومنه الخط C فوق D.

الطلب الثاني / مسألة الاولى رئيسية

ادرس تغيرات التابع

$$f(x) = 3e^{x} - x - 3$$

الحل

التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - (-\infty) - 3 = +\infty$$

حيث

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty \quad \text{ح.ع.ت}$$

$$f(x) = x\left(\frac{3e^{x}}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3e^{x}}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right)$$

$$= +\infty\,(+\infty - 1 - 0)$$

$$= +\infty\,(+\infty)$$

$$= +\infty$$

حيث:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

نشتق وندرس المشتق.

$$f'(x) = 3e^{x} - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$3e^{x} - 1 = 0$$

$$3e^{x} = 1$$

$$e^{x} = \frac{1}{3}$$

$$\cancel{\ln e^{x}}$$

$$\ln e^{x} = \ln \frac{1}{3}$$

$$x = \ln \frac{1}{3}$$

$$x = \ln 1 - \ln 3$$

$$\boxed{\ln 1 = 0}$$

$$x = 0 - \ln 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 3$$

$$f(-\ln 3) = 3e^{-\ln 3} + \ln 3 - 3$$

$$f(-\ln 3) = \frac{3}{e^{\ln 3}} + \ln 3 - 3$$

$$f(-\ln 3) = \frac{3}{3} + \ln 3 - 3$$

$$f(-\ln 3) = 1 + \ln 3 - 3$$

$$\boxed{f(-\ln 3) = -2 + \ln 3}$$

نرسم جدول تغيرات التابع

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2+\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

المسألة الأولى / ايلك /

الطلب الثالث:

استنتج ان للمعادلة $f(x)=0$ جذرين

احدهما سالب وهو الصفر والاخر a

وأثبت $-3 < a < -2$

الحل من جدول تغيرات التابع

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2+\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

نريد اثبات ان للمعادلة $f(x)=0$ جذرين

التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty, -\ln 3[$

$$f(]-\infty, -\ln 3[) =]-2+\ln 3, +\infty[$$

$0 \in f(]-\infty, -\ln 3[)$ ومنه للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد ضمن المجال $]-\infty, -\ln 3[$

أيضاً:

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\ln 3, +\infty[$

$$f(]-\ln 3, +\infty[) =]-2+\ln 3, +\infty[$$

$0 \in f(]-\ln 3, +\infty[)$ ومنه للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد ضمن المجال $]-\ln 3, +\infty[$

نريد اثبات ان احد جذور المعادلة $f(x)=0$ هو $\boxed{x=0}$

$$f(0) = 3e^{0} - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$$

عالماً ان $f(0)=0$ $\Leftarrow$ احد جذور المعادلة $f(x)=0$

نريد اثبات ان الجذر الاخر يقع ضمن

$$-3 < a < -2$$

$$f(-3) = 3e^{-3} + 3 - 3 = 3e^{-3} > 0$$

$$f(-2) = 3e^{-2} + 2 - 3 = 3e^{-2} - 1 < 0$$

عالماً ان $f(-3) \cdot f(-2) < 0$ $\Leftarrow$ الجذر الاخر للمعادلة يقع ضمن المجال $]-3, -2[$

أي كيف

$$-3 < a < -2$$

الطلب الرابع: / مسألة اولى تكملة

ارسم الخط البياني واحسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور ox والمستقيم $x=\ln 2$

• $f(x) = 3e^{x} - x - 3$

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2+\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

نقطة مساعدة

$x=0 \Rightarrow y=0$

نقطة مساعدة $(0,0)$

من الجدول

نقطة مساعدة $(-\ln 3, -2+\ln 3)$

$\boxed{-\ln 3 \simeq -1.1}$

$\boxed{-2+\ln 3 \simeq -0.9}$

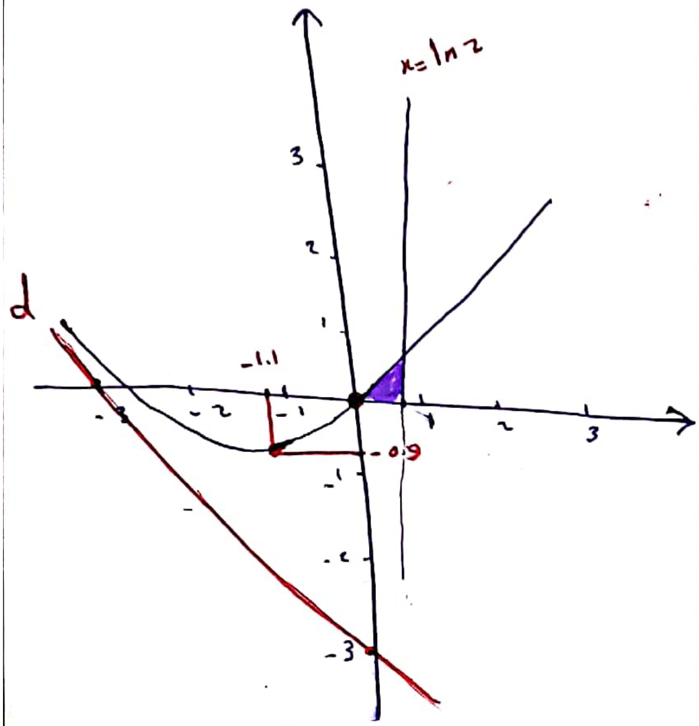
رسم المقارب

$d: y = -x-3$

x	0	-3
y	-3	0

نقط مساعدة لرسم المقارب

$(0,-3)$ $(-3,0)$



• احسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور ox والمستقيم $x=\ln 2$

$\boxed{\ln 2 \simeq 0.6}$

$$S = \int_{0}^{\ln 2} f(x)\,dx$$

$$S = \left[3e^{x} - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^{\ln 2}$$

$$S = \left[3e^{\ln 2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - 3(\ln 2)\right] - \left[3e^{0} - 0 - 0\right]$$

$$S = \left[3(2) - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2^3\right] - 3$$

$$S = [\ 6 - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 8 - 3$$

$$S = 3 - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 8$$

المسألة الثانية / زينب خليل

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I :]0,+\infty[$

ووفق

$$f(x) = x+1 - \frac{\ln x}{x}$$

- برهن ان المستقيم D الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخط C
- ادرس الوضع النسبي للخطين C و D

الحل

$$f(x) - y_D = x+1 - \frac{\ln x}{x} - x - 1$$

$$f(x) - y_D = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_D = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} \right]$$

من مجموعة التعريف

$$= 0$$

حيث $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- دراسة الوضع النسبي:

ندرس إشارة الفرق اي

$$-\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$$

$$e^{\ln x} = e^0 \qquad \boxed{e^0 = 1}$$

$$\boxed{x = 1}$$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_D$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق D		C تحت D.	

نقطة تقاطع
$(1, 2)$

المسألة الثالثة / بنك التحليل

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

الحل

التابع مستمر واشتقاقي في كل المجال $I =]1,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 1 + 1 + \infty = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty}$$ حيث

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0}$$ حيث

نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = 1 + 2\left[\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}\right]$$

$$= 1 + 2\left[\frac{\frac{(1)(x-1)-(1)(x)}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}\right]$$

$$f'(x) = 1 + 2\left[\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right]$$

$$f'(x) = 1 + 2\left[\frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)}{x}\right]$$

$$f'(x) = 1 + 2\left[\frac{-1}{x(x-1)}\right]$$

$$1 - \frac{2}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x(x-1) - 2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}$$

نعدم المشتق

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

إما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

مرفوض لا ينتمي لمجموعة تعريف التابع

$$f(2) = 2 + 1 + 2\ln\left(\frac{2}{2-1}\right)$$

$$= 3 + 2\ln(2)$$

$$\boxed{f(2) = 3 + 2\ln(2)}$$

السـئلة الثالثة لبنك

$f(2) = 3 + 2\ln 2$

نرسم جدول تغيرات التابع

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

أثبت أن $d: y = x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

نريد إثبات أن $d: y = x+1$ مقارب

$f(x) - y_d$

$= x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x - 1$

$= 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_d\right) = \lim_{x \to +\infty} 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$= 0$

حسب $\boxed{\lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t}{t-1}\right) = 0}$

ومنه $y = x+1$ مقارب للخط البياني C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

ندرس إشارة الفرق.

$f(x) - y_d = 2\ln \frac{x}{x-1}$

نلاحظ أن

$\frac{x}{x-1} > 1$

لأن البسط أكبر من المقام

ومنه

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln 1$

نضرب ب 2

$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 2\ln 1$

$\ln 1 = 0$

$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

ومنه الخط C فوق d

المسألة الثالثة / تتمة

رسم الخط البياني .

جدول تغيرات التابع :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$		0		
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$\ln 2 \simeq 0.7$

$3 + 2(0.7) = 4.4$

النقطة الحدية :

$(2,\ 3+2\ln 2)$

تقريباً

4.4

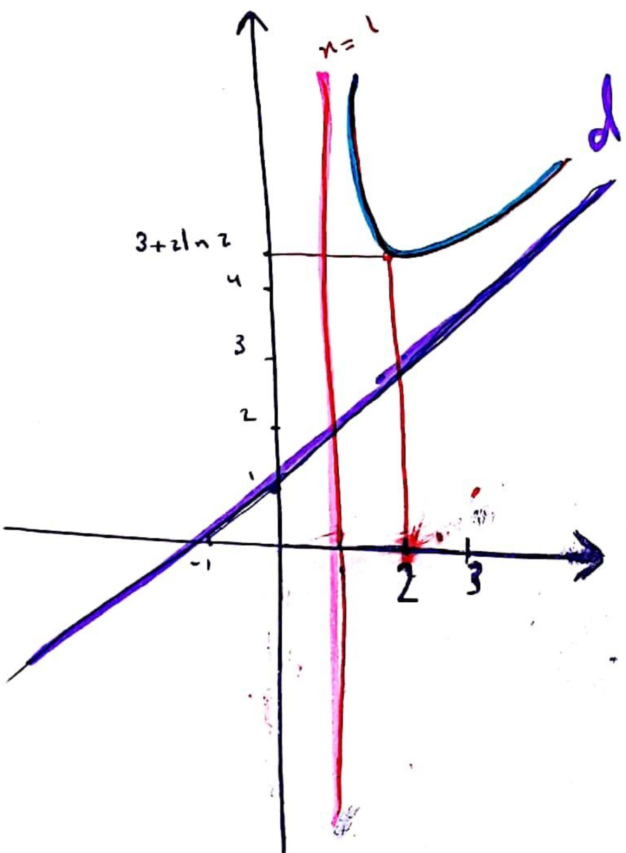
$x = 1$ مقارب شاقولي

$y = x + 1$ مقارب افقي

رسم المقارب

x	0	-1
y	1	0

$(0,1)$ $(-1,0)$



المسألة الرابعة / أنشطة تحليل :

ليكن التابع

$$x \to f(x) = x - \ln x$$

المعرف على $I =]0, +\infty[$

والمطلوب :

① جد $f(1)$ واحسب $f'(x)$

على هذا المجال ثم $f'(1)$

$$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$\boxed{\ln 1 = 0}$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f'(1) = 0$$

② ما نهاية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$$

انّ :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

ومنه :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1} = f'(1) = 0$$

وهو المطلوب.

المسألة الخامسة / شلبه تحليل:

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف وفق

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$$

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

$\boxed{1}$ أثبت ان g اشتقاقي عند 0

الحل

لإثبات ان g اشتقاقي يجب ان نثبت ان

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \text{عدد}$$

$g(x) = x\sqrt{x}$

$g(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

ومنه

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \underset{\text{عدد}}{0}$$

ومنه g اشتقاقي عند الصفر

استنتج ان f اشتقاقي عند الصفر.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$$

ان $g(x) = x\sqrt{x}$

نفرض $h(x) = \frac{1}{x+1}$

ان $g(x)$ اشتقاقي عند الصفر

ان $h(x)$ اشتقاقي عند الصفر

$\Leftarrow$ $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر

لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين عند الصفر

تكملة السؤال الخامسة / البنك

أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

الشكل العام لمعادلة المماس:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

بناخد $x = 0$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$f(0) = \frac{1}{0+1} - 0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{1} - 0 + 0$$

$$f'(0) = -1$$

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$$y - 1 = -x$$

$$\boxed{y = -x + 1}$$ → معادلة المماس

Monira Alebraheem

المسألة السادسة / البنك:

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$$

الطلب الأول:

أثبت أن المستقيم D_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

نحسب $f(x) - y_{D_1}$

$$= x + \frac{2}{e^x+1} - x$$

$$f(x) - y_{D_1} = \frac{2}{e^x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_{D_1}) = \lim \frac{2}{e^x+1} = 0$$

حيث $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

ومنه $y_{D_1} = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق.

$$f(x) - y_{D_1} = \frac{2}{e^x+1} > 0$$

ومنه الخط C يقع فوق D_1

الطلب الثاني

هل $D_2 : y = x + 2$ مقارب للخط C عند $-\infty$ ؟

وادرس الوضع النسبي.

$$f(x) - y_{D_2} = x + \frac{2}{e^x+1} - x - 2$$

$$f(x) - y_{D_2} = \frac{2}{e^x+1} - 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y_{D_2} = 2 - 2 = 0$$

حيث $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

دراسة الوضع النسبي:

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_{D_2} = \frac{2}{e^x+1} - \frac{2}{1}\,(e^x+1)$$

$$f(x) - y_{D_2} = \frac{2 - 2e^x - 2}{e^x+1}$$

$$= \frac{-2e^x}{e^x+1} < 0$$

ومنه الخط C يقع تحت D_2

تكملة المسألة السادسة / البلنة

ادرس تغيرات التابع f وارسم C مع رسم المقاربات.

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$$

التابع مستمر ومشتق على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + 2 = -\infty$$

منبه

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

منبه

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

نشتق ونعدم المشتق

$$f'(x) = 1 + \frac{-e^x(2)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$$

وبالتالي التابع متزايد تماماً

نرسم جدول تغيرات التابع

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	↗	

رسم الخط البياني:

نقاط مساعدة:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + \frac{2}{2}$
$= 1$

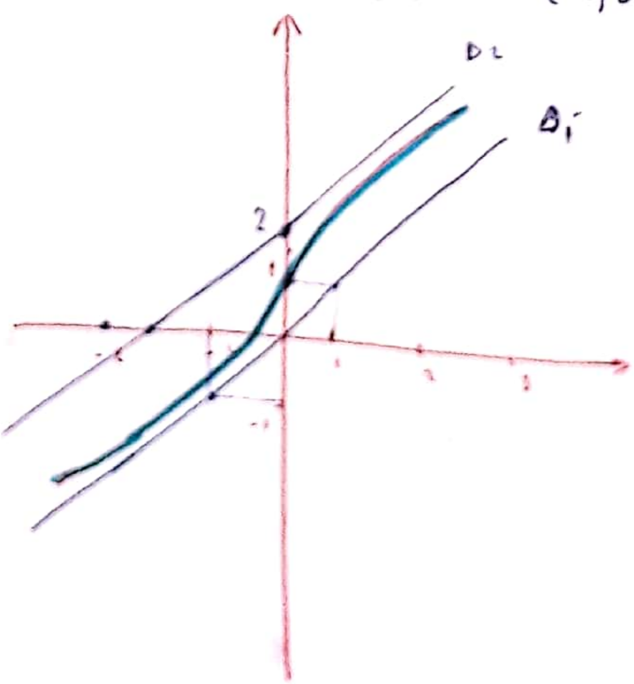
$f(0) = 1$

$\boxed{(0,1) \text{ نقطة مساعدة}}$

رسم المقاربات

$y = x$ → $(1,1)$, $(-1,-1)$

$y = x + 2$ → $(0,2)$, $(-2,0)$



المسألة السابعة / نبلّه العليل

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$

وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 1}$$

$\boxed{1}$ أثبت أن المستقيم $d: y = x$ مقارب مائل للخط C

أولاً: نقسم قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x + 2 & x^2 - 1 \\ \mp x^3 \pm x & x \\ \hline 2 & \end{array}$$

الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$\frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{2}{x^2 - 1}$$

لإثبات أن $y = x$ مقارب مائل:

$$f(x) - y_d = x + \frac{2}{x^2 - 1} - x$$

$$f(x) - y_d = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_d) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = 0$$

ومنه $d: y = x$ مقارب مائل للخط في C في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_d = \frac{2}{x^2 - 1}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x) - y_d$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
الوضع النسبي		C فوق d		C تحت d		C فوق d	

الطلب الثاني:

احسب A, B حيث:

$$f(x) = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{x^2 - 1} = x + \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

بالمطابقة

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}_{(x+1)} + \frac{B}{x+1}_{(x-1)}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

تكملة السابقة / السؤال

ومنه

$2 = A - B$

$0 = A + B$ بالجمع

$2 = 2A$

$\Rightarrow \boxed{A = 1}$

$\Rightarrow \boxed{B = -1}$

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

احسب

$$I = \int_0^t [f(x) - x]\,dx$$

$$\int_0^t \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} - x\right) dx$$

$$\int_0^t \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_0^t$$

$$\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) - \underbrace{\left(\ln(-1) - \ln(1)\right)}_{0}$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1|$$

المطلب الثالث:

احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمستقيم (d) والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

$$\int_2^3 |f(x) - y_d|\,dx$$

$$\int_2^3 \left| x + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} - x \right| dx$$

$$\int_2^3 \left| \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} \right| dx$$

$$S = \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^3$$

$$S = \big[\ln|3-1| - \ln|3+1|\big] - \big[\ln|2-1| - \ln|2+1|\big]$$

$$= \big[\ln|2| - \ln|4|\big] - \big[\ln|1| - \ln|3|\big]$$

$$\left[\ln\left|\frac{2}{4}\right|\right] - \big[-\ln|3|\big]$$

$$= \ln\frac{1}{2} + \ln 3$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} \times 3\right)$$

$$\boxed{S = \ln\frac{3}{2}}$$

من خواص اللوغاريتم

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

المسألة الثامنة / تحليل

لتكن التابع f المعرف على

$I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x - 1 - \ln x$$

الطلب الاول:

ادرس تغيرات التابع وبين القيم الكبرى والصغرى محلياً.

ان التابع مستمر واشتقاقي على

$]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 - 1 - (-\infty)$$

$= +\infty$ مقارب شاقولي $x = 0$

حيث

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty \quad \text{ح.ع.ت}$$

$$f(x) = x\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]$$

$$= +\infty\,[1 - 0 - 0] = +\infty$$

حيث

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

نشتق ونعدم المشتق

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{(1)} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x - 1}{x} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1 - 1 - \ln 1$$

$$= 0$$

$$f(1) = 0$$

نرسم جدول تغيرات التابع

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ ان

$f(1) = 0$

قيمة حدية محلية صغرى.

الطلب الثاني / السنة الثامنة / ملف

استنتج من تغيرات التابع أن

$\ln x < x$ أيا كانت

$x \in]0,+\infty[$

نلاحظ:

$\ln x < x$

$\ln x - x < 0$

$-\ln x + x > 0$

$-\ln x + x - 1 > -1 > 0$

ومنه

$-\ln x + x - 1 > 0$

$f(x) > 0$

نتحقق من حلول المتراجحة

$f(x) > 0$

من جدول تغيرات التابع نلاحظ أن

$f(x) > 0$

أيا تكن x من المجال

$]0,+\infty[$

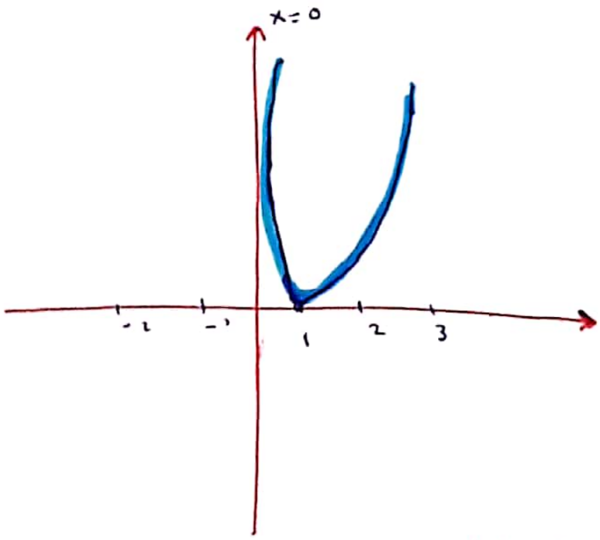
الطلب الثالث

ارسم الخط البياني C

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي.

$(1,0)$ نقطة صغرى.



الطلب الرابع:

أثبت أن $g(x)=\frac{x^2}{2}-x\ln x$

تابع أصلي للتابع f على المجال $]0,+\infty[$

يكون $g(x)$ تابع أصلي ل f إذا تحقق:

$$\boxed{g'(x)=f(x)}$$

$g'(x)=\frac{4x}{4}-\ln x-x\frac{1}{x}$

$g'(x)=x-\ln x-1=f(x)$

ونجد أن g قابل للاشتقاق على المجال

$]0,+\infty[$

وأيضاً $g'(x)=f(x)$

$\Leftarrow$ $g(x)$ تابع أصلي ل f على

المجال $]0,+\infty[$

CamScanner

المسألة التاسعة / البند التحليلي

لتكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

وخطه البياني c :

[1] اثبت انه اذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان:

أ) $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$

نريد اثبات ان

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$$

$$= x + \left(-1 + \frac{2}{e^x+1}\right)$$

نوحد مقامات

$$= x + \left(\frac{-1}{\underset{(e^x+1)}{1}} + \frac{2}{e^x+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{-e^x - 1 + 2}{e^x+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{-e^x + 1}{e^x+1}\right)$$

$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$$

ومنه $f(x)$ تكتب بالشكل:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$$

ب) $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

نريد اثبات ان

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$= x + \left(1 - \frac{2e^x}{e^x+1}\right)$$

نوحد مقامات

$$= x + \left(\frac{1}{\underset{(e^x+1)}{1}} - \frac{2e^x}{e^x+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{e^x + 1 - 2e^x}{e^x+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{-e^x + 1}{e^x+1}\right)$$

$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$$

ومنه $f(x)$ تكتب بالشكل

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها.

الحل

ان التابع مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

تكملة المسألة التاسعة عشر

وجدنا

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

حيث $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

حيث $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$

$$f'(x) = 1 + \frac{-e^x(2)}{(e^x+1)^2}$$

نوحد مقامات

$$= \frac{1}{\underset{(e^x+1)^2}{1}} + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$$

ومنه التابع متزايد تماماً

نرسم جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

الطلب الثالث:

أثبت أن المعادلة

$$x(e^x+1) = e^x - 1$$

لها حل وحيد ثم اوجده.

$$x(e^x+1) = e^x - 1$$

نقسم على e^x+1

$$x = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0$$

ومنه أصبح

$$f(x) = 0$$

الطلب الرابع

أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد ثم اوجده.

تكملة المسألة التاسعة/البلاك

تكملة الطلب الثالث:

اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

من جدول تغيرات التابع نجد أن:

التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty , +\infty[$

$0 \in f\,]-\infty , +\infty[\;=\;]-\infty , +\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

ثم أوجد α.

بالتجريب نجد أن $x=0$

$\Rightarrow f(0)=0$

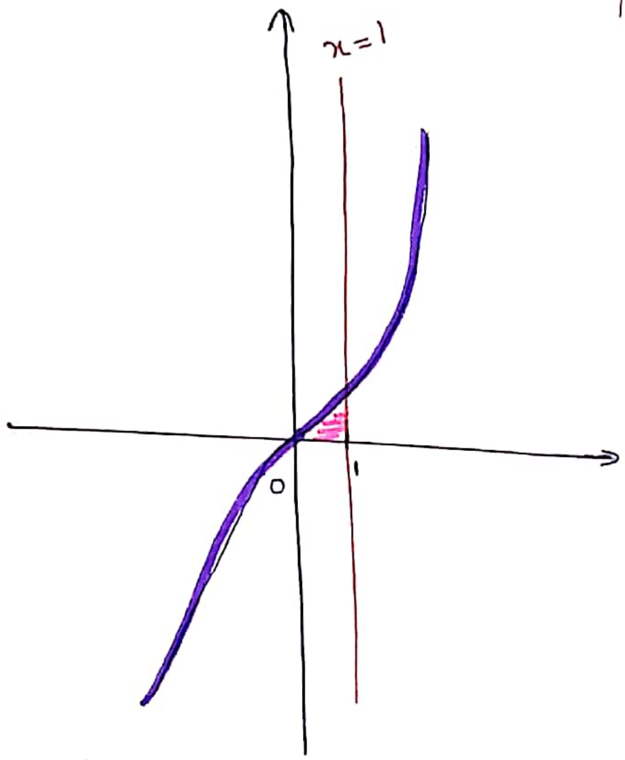
ومنه $x=0$ حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$.

الطلب الرابع:

ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$

رسم الخط البياني:

$(0,0)$ ← نقطة مساعدة



$$S = \int_0^1 f(x)\,dx$$

وجدنا $f(x) = x+1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$

$$S = \int_0^1 x+1 \;-\; 2\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 - 2\left[\ln|e^x+1|\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}+1\right)-0\right] - 2\left[\ln|e^1+1| - \ln|2|\right]$$

$$= \frac{3}{2} - 2\ln(e+1) + 2\ln 2$$

$$S = \frac{3}{2} - 2\ln\frac{2}{e+1}$$

Monira Al-ebraheem

المسألة العاشرة / نبلك

1) كم حل للمعادلة $f(x)=1$

نرسم المستقيم $y=1$ يقطع الخط البياني في 4 نقاط ومنه للمعادلة 4 حلول

2) ما هي قيمة $f'(0)$

نلاحظ عند النقطة التي فاصلتها $\boxed{0}$ يوجد مماس أفقي للخط البياني ومنه المشتق عند النقطة التي فاصلتها صفر يكون معدوم

$f'(0)=0$

3) كم عدد القيم الحدية الظاهرة بالشكل وما هي؟

قيمة صغرى محلياً $f(-2)=0$

قيمة كبرى محلياً $f(0)=2$

~~xxxxxxxx~~

قيمة صغرى محلياً $f(2)=0$

4) عيّن $f(]-2,2[)$

نرسم المستقيمين $x=-2$, $x=2$

ونحدد الخط البياني بين المستقيمين

نسقط الخط البياني على محور التراتيب

$]0,3]$

الصفر هو صورة لـ -2 و 2 وعندها المجال مفتوح

3 هي صورة للصفر وهي تنتمي للمجال

4) أوجد

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نشير الى الخط البياني الى أقصى اليمين ونسقطه على محور التراتيب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

المسألة الحادية عشر / نبلك

1) أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي.

مجموعة تعريف التابع

$]-\infty,+\infty[$

المستقر الفعلي $[0,+\infty[$

2) هل التابع زوجي أم فردي؟ علل ذلك؟

التابع زوجي

لأن خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

3) أوجد

$f(1)=3$

$f(0)=4$

$f(2)=0$

$f(-2)=0$

$f(-1)=2$

المسألة الحادية عشر / بيك

أوجد

$f'(1)$

$(1,3)$ $(0,5)$

$$f'(1) = \frac{5-3}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$f'(a) = 0$ يوجد مماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها تساوي الصفر

$f'(2) = 0$

يوجد مماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها 2

$f'(-2) = 0$

يوجد مماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها -2

أوجد معادلة المماس (d) في النقطة التي فاصلتها تساوي (1)

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f(1) = 3$ $f'(1) = -2$

$y - 3 = -2(x-1)$

$y - 3 = -2x + 2$

$y = -2x + 2 + 3$

$y = -2x + 5$

أوجد $f([-2,2])$

$f([-2,2]) = [0, 4]$

صورة -2 و 2 وعندها الحل معلوم

صورة الصفر وعندها الحل

ما مجموعة حلول المتراجحة

$f(x) \geq 5$

$]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

4 حلول

إذا طلب الحلول نسقط نقاط تقاطع المستقيم ~~مع~~ مع $y = 2$

الخط البياني على محور الفواصل.

نظم جدول تغيرات التابع:

طلب الجدول ما بيجي بالامتحان بس للتدريب!

مجموعة التعريف

نقط العنى الحدية

x	$-\infty$		-2		a		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

المسألة الثانية عشر / بنك خليل

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	-1

$\boxed{1}$ ما هي القيم الحدية المحلية؟ وما نوعها؟

$f(1) = e$

قيمة صغرى محلياً

$\boxed{2}$ هل يوجد مقاربات مائلة؟

لا يوجد

$\boxed{3}$ ما هي المقاربات الأفقية والشاقولية؟

$x = 0$ مقارب شاقولي

$x = e$ مقارب شاقولي

$y = -1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$\boxed{4}$ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$

احصرها بمجالات

حل وحيد محصور ضمن المجال

$]1, e[$

$\boxed{5}$ اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x = 1$

الشكل العام لمعادلة المماس

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f(1) = 0$

$f'(1) = 0$

$y - 0 = 0(x-1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 0}$ معادلة المماس

$\boxed{6}$ اوجد مجموعة تعريف التابع

$]0, e[\cup]e, +\infty[$

$\boxed{7}$ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

للمعادلة

$\boxed{8}$ برهن ان للمعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد

ان التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال

$]e, +\infty[$

$-1 \in f\,]e, +\infty[=]-\infty, -1[$

ومنه للمعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد.

~~أو طريقة ثانية~~ في المجال $]e, +\infty[$

$-2 \notin f\,(]0, e[)$

$\boxed{9}$ اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث.

$g(x) = \ln(f(x))$

$\ln$ معرف عندما المضمون موجب تماماً

$f(x) > 0$

من السطر الاول نأخذ الحالات

$]0, 1[\cup]1, e[$

المسألة الثالثة عشر / [illegible]

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\searrow$	-3

1. عين مجموعة تعريف التابع.

$]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

2. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C.

$x = -2$ مقارب شاقولي

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$y = -3$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

3. هل يوجد مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه؟

لا يوجد

4. هل f اشتقاقي عند 3؟

كلا

5. عين القيم الحدية للتابع f.

$f(3) = 0$ قيمة عظمى محلية.

المسألة الرابعة عشر / البنك :

لتكن التابع f المعرف على

$I =]0, +\infty[$

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

وخطه البياني c

والتابع g معرف على I وفق

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$$

والمطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً به.

الحل: g مستمر واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = \infty - 1 - (-\infty)$$

$$= \infty - 1 + \infty$$

حيث $\lim_{x \to 0^{>}} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^{>}} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 - 1 - (+\infty)$$

$$= +\infty$$

حيث $\lim_{x \to +\infty} \ln x = 0$

نشتق ونعدم المشتق.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$$

نرسم جدول تغيرات التابع.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖	$+\infty \searrow$	$-\infty$

الطلب الثاني :

بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$

الحل

إن التابع g مستمر متناقص تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$$0 \in g(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد

من أجل $\alpha = 1$

$$g(1) = \frac{1}{1} - 1 - \ln 1$$

$$= 1 - 1 - 0 = 0$$

$\boxed{\ln 1 = 0}$

ومنه $\alpha = 1$ جذر وحيد للمعادلة $g(x) = 0$

الطلب الثالث:

تكملة المسألة الرابعة عشر / تبعك

أثبت أن

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

الحل

$$f(x) = e^{-x}(1+\ln x)$$

$$f'(x) = -e^{-x}(1+\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)e^{-x}$$

$$= \frac{-(1+\ln x)}{e^x} + \frac{\frac{1}{x}}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-1-\ln x+\frac{1}{x}}{e^x}$$

لكن

$$g(x) = -1-\ln x+\frac{1}{x}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

وهو المطلوب.

الطلب الرابع:

مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

$$f(x) = e^{-x}(1+\ln x)$$

f مستمر واشتقاقي على

$I =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = e^{0}(1+(-\infty))$$

$$= 1(-\infty) = -\infty$$

حيث

$$\boxed{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0(\infty) \quad \text{ح.ع.ت}$$

$$f(x) = e^{-x}(1+\ln x)$$

$$= e^{-x} + e^{-x}.\ln x$$

$$= \frac{1}{e^x} + \frac{x}{x} \times \frac{\ln x}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 0 + (0)(0) = 0$$

حيث

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0}$$

تكملة الطلب الرابع

من الطلب السابق وجدنا

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

نعدم المشتق

$f'(x)=0$

$\Rightarrow g(x)=0$

وجدنا أن للمعادلة

$g(x)=0$ حل وحيد

$\alpha = 1$

$f(1) = e^{-1}(1+0) = e^{-1}$

$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{e}$

نرسم جدول تغيرات التابع :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

رسم الخط البياني

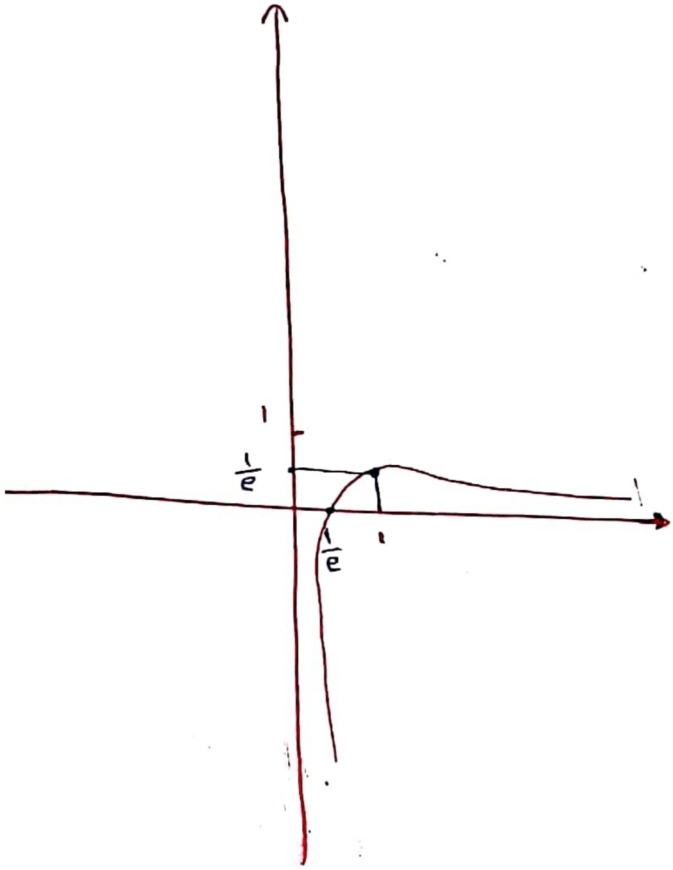
$x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{e}$

$(0, \frac{1}{e})$ نقطة مساعدة

$(1, \frac{1}{e})$ ~~قمة~~ نقطة مساعدة

قمة كبرى

$\boxed{\frac{1}{e} \simeq 0.3}$



$x=0$ مقارب شاقولي

$y=0$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

تكملة المسألة الرابعة عشر

منك

Monira Al-ebraheem

المسألة الخامسة عشر / إليك

لتكن التابع f المعرف على

$I =]0,+\infty[$

$$f(x) = x - 4 + \frac{\ln x}{x+1}$$

وخطه البياني C

الطلب الأول:

أثبت أن f متزايد تماماً على I واستنتج $f(I)$

ندرس تغيرات التابع:

f مستمر واشتقاقي على $I =]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$$

حيث

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln t}{t+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

حيث

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t+1} = 0$$

نشتق التابع:

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{(1)(x+1)-(1)(x)}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{-x}+(\cancel{x}+1)}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

ومنه f متزايد تماماً على I

نرسم جدول تغيرات التابع

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(I) = f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

تكملة المسألة الخامسة شترابك

الطلب الثاني :

أثبت أن المستقيم الذي معادلته

$y = x - 4$ مقارب للخط

C في جوار $+\infty$

وادرس الوضع النسبي .

الحل

$$f(x) - y_D = x - 4 + \ln \frac{x}{x+1} - x + 4$$

$$\cancel{= x - 4 + \ln \frac{x}{x+1}}$$

$$f(x) - y_D = \ln \frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 0$$

حيث

$$\lim_{t \to +\infty} \ln \frac{t}{t+1} = 0$$

ومنه

$y = x - 4$ مقارب للخط C في

جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي .

لدراسة الوضع النسبي ندرس

اشارة الفرق .

$$f(x) - y_D = \ln \frac{x}{x+1}$$

ان :

$$x < x + 1$$

$$\ln x < \ln x + 1$$

$$\ln x - \ln x + 1 < 0$$

$$\ln \frac{x}{x+1} < 0$$

ومنه

$$f(x) - y_D < 0$$

ومنه الخط C تحت D.

Monira Al-ebraheem

CamScanner