الإحصاء فى مجال الأعمال

Business Statistic

تأليف

أ.د. على السيد عبده الديب   **أ.د. محمد عبد المنعم جودة حزين**

قسم التأمين والعلوم الإكتوارية

كلية التجارة – جامعة القاهرة

٢٠١٨–٢٠١٩

بسم الله الرحمن الرحيم

(لقد أحصاهم وعدهم عدا)

صدق الله العظيم (مريم ٩٤)

بسم الله الرحمن الرحيم

(ربنا لا تؤاخذنا إن نسينا أو أخطأنا)

صدق الله العظيم (البقرة من الآية ٢٨٦)

مقدمة

يعتمد التطور الإقتصادى على تطويع النظريات العلمية وقابليتها للتطبيق وترشيد القرارات الإدارية. ويرتكز ذلك فى جميع الأحوال على ضرورة توافر قاعدة بيانات يمكن الاسترشاد بنتائج تحليلها فى تحديد اتجاه الظاهرة – أو الظواهر – محل الدراسة.

وتحتل العلوم الرياضية والإحصائية مكان الصدارة فى مجال جمع وتحليل وعرض البيانات وصولاً إلى نتائج تهيىء لمتخذ القرارات أن يحدد – وبدرجة دقة معينة – اتجاهات الظواهر والعلاقات التداخلية بينها.

وتأسيساً على ذلك فقد أسهمت العلوم الرياضية والإحصائية فى تطوير العلوم التطبيقية والإنسانية ، الأمر الذى وضعها فى مقدمة اهتمامات الدراسات التجارية لتأهيل وصقل قدرات طلاب التجارة وإعدادهم لقيادة دفة الحياة الاقتصادية.

ومن ثم فقد حرص المؤلفان على أن يجمع هذا الكتاب بين دفتيه مجموعة من الموضوعات الأساسية تم عرضها وتسلسلها بأسلوب سهل يمكن فهمه واستيعابه.

ويحتوى هذا المرجع على دراسة متكاملة لأساسيات علمى الإحصاء الوصفى والإحصاء التحليلى ، وتمت هذه الدراسة فى ستة أبواب مختلفة ، يختص الباب الأول منها بدراسة مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) ، ويختص الباب الثانى بدراسة مقاييس التشتت ، ويختص الباب الثالث بدراسة الارتباط والانحدار ، وتخص هذه الموضوعات علم الإحصاء الوصفى ، كما يختص الباب الرابع بدراسة التوزيعات الاحتمالية ، ويختص الباب الخامس بدراسة نظرية العينات والتقدير ، ويعتبر البابان الرابع والخامس هما عصب علم الإحصاء التحليلى ، ويعتبر الباب السادس وهو الأرقام القياسية هو عصب علم الإحصاء التطبيقى.

ونأمل بهذا المرجع أن يكون فيه إضافة لمكتبة الإحصاء الغنية بالكثير من المراجع العلمية الهامة ، وأن يكون فى هذا المرجع دعم وإضافة للباحثين فى مختلف مجالات البحث العلمى.

والله ولى التوفيق ،،،

المؤلفان

الباب الأول
مقاييس النزعة المركزية
(المتوسطات)

ويحتوى على :

الفصل الأول : الوسط الحسابى

الفصل الثانى : الوسيط

الفصل الثالث : المنوال

الفصل الرابع : متوسط الإنحرافات المطلقة

الباب الأول
مقاييس النزعة المركزية
Measures of central tendency

مقدمة:

إن تجميع البيانات وتبويبها مع كونها تعتبر المرحلة الأولى والأساسية في الدراسات الإحصائية ومعالجتها وتهذيبها وتنقيتها إجراءات حتمية وضرورية حتى يمكن استخدامها والاستفادة منها.

واستعرضنا في الفصول السابقة كيفية عرض البيانات في صورة بيانية يسهل قراءة اتجاهات الظواهر منها والوصول إلى إمكانية استخدامها في القرارات الإدارية.

غير أنه يجب أن يكون معلوماً أن عملية جمع البيانات لا تتوقف عند الحصول عليها واستخدامها وتوظيفها في الدراسات الإحصائية المختلفة. ولكنها عملية متكررة ومتجددة ومستمرة، ويرجع ذلك إلى اختلاف البيانات من فترة لأخرى نتيجة لمجموعة من العوامل والمتغيرات. وغير خافٍ أن الظواهر التى نخضعها للدراسة تختلف باختلاف الظروف الاجتماعية والاقتصادية، بجانب ما يمكن أن تحدثه التطورات العلمية والاكتشافات الحديثة.

ولعل مستوى الأجور أو الدخول في منتصف القرن الماضى تختلف اختلافاً واضحاً عن مستوى الأجور أو الدخول في السنوات الاخيرة. فإذا كان الأجر اليومي لأحد العاملين جنيه واحد عام ١٩٧٠ وربما كان هذا الأجر مناسباً مع مستوى الأسعار ويكفي لتغطية احتياجاته فإنه يصعب الاعتماد عليه عام ٢٠١٨، وهكذا.. نجد أن الحصول على مسكن عام ١٩٧٠ ربما يكلف مائة جنيه أو نحو ذلك فهو لا يقارن اطلاقاً بتكلفة الحصول على مسكن عام ٢٠١٨ مثلاً.

نخلص من ذلك ان الدراسات الإحصائية تحتاج إلى استمرارية جمع البيانات وتبويبها وعرضها تمهيداً لتحليلها باستخدام المؤشرات والأساليب الرياضية وصولاً إلى نتائج يمكن الاعتماد عليها والاسترشاد بها في اتخاذ القرارات الإدارية التى تناسب المرحلة.

وتأسيساً على ذلك فإن عرض البيانات في صورة رسوم وأشكال بيانية قد لا تحقق الهدف واستخدامها في جميع المراحل، ويرجع ذلك إلى مجموعة من العوامل أهمها إمكانية تداخل المتغيرات وتشابكها مما يمكن أن يحدث تأثيراً واضحاً في اتجاهات الظواهر. ومن ثم فإننا نحتاج إلى تحديث البيانات وتحليلها وصولاً إلى نتائج استخدام المؤشرات الإحصائية.

وتعتبر المقاييس الإحصائية والمتوسطات أسلوباً يهتم بتحديد القيمة المتوسطة والتى تتجمع حولها قيم الظاهرة ونستخلص منها مدى تقارب أو تباعد القيم عن هذه القيمة المتوسطة وهو ما يطلق عليه النزعة المركزية.

وقد استقرت مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات كمؤشرات ترتكز عليها غالبية الدراسات، غير انه يجب توافر مجموعة من الأسس في المؤشر موضوع الدراسة، ومن أهمها:

أ - إمكانية تحديده رياضياً وبأسلوب علمى.

ب- يجب أن يكون للمؤشر خصائص مميزة.

جـ- يجب أن تتناول دراسة المؤشر المرغوب في استخدامه جميع مفردات الظاهرة.

د - بالرغم من تناول الدراسة جميع المفردات فإنه يجب أن لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

وعموماً فإن الدراسة فى هذا المجال تتضمن مجموعة من المؤشرات، تم التعارف عليها بمقاييس النزعة المركزية ومن أهمها:

١- الوسط الحسابي Arithmetic Mean

٢- الوسيط Median

٣- المنوال Mode

٤- الوسط الهندسي Geometric Mean

ونوه إلى أن دراسة هذه المؤشرات واستخدامها يجب أن يتناول تطبيق كل منها البيانات الإحصائية المبوبة وغير المبوبة.

الفصل الأول

الوســـط الحســـابي

Arithmetic Mean

يعتبر الوسط الحسابي احد المقاييس الإحصائية التي يمكن الاعتماد عليها لمعرفة اتجاه الظاهرة موضوع الدراسة ؛ وقد تزايد استخدام الوسط الحسابي للوصول إلى مؤشر إحصائي من البيانات المتاحة سواء كانت في صورة مفردات أو تم تجميعها في صورة جداول تكرارية ، مع مراعاة أن تحديد الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية لا يتأثر بانتظام التوزيع أو اختلاف أطوال الفئات .

أولا : في حالة المفردات :

يمكن تحديد الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات بتحديد مجموع المفردات ثم قسمة المجموع على عدد المفردات وعلى ذلك فإن المعادلة تكون على الصورة التالية :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$$

مثال (١) :

فيما يلي الأجر اليومي لمجموعة من العاملين بالجنيه :

١٨ ، ٣٥ ، ٢٢ ، ١٧ ، ٥٣

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي للأجر .

الحـــل

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{١٨+٣٥+٢٢+١٧+٥٣}{٥}$$

$$= \frac{١٤٥}{٥} = ٢٩ \text{ جنيها}$$

يتضح من المثال السابق أن تحديد الوسط الحسابي لا يحتاج إلى ترتيب المفردات تصاعديا أو تنازلياً كما أنه سهل الحصول على النتائج .

ويمكن استخدام الرموز للوصول إلى الوسط الحسابي وتبسيط المعادلات؛ فإذا رمزنا لمجموعة المفردات بالرمز (س) فإن المجموع نرمز له بالرمز (مجـ) وبذلك يكون مجموع (س) من المفردات هو (مجـ س)، ونرمز لعدد المفردات بالرمز (ن) .

وغير خاف أن قيمة المفردات تكون كما يلي :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$، $س_٥$، ...، ... ، ... ، $س_ن$

فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز (س/) فإن المعادلة تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}}$$

مثال (٢) :

فيما يلي بيان بالمبيعات اليومية لأحد محلات التجزئة خلال فترة معينة (القيمة بالألف جنيه):

١٦ ، ٩، ١٤ ، ٢١ ، ١٢ ، ١٨ ، ١٥

والمطلوب : تحديد الوسط الحسابي للمبيعات .

الحـــل

فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز ($\overline{س}$) فإن المعادلة تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}}$$

$$\overline{س} = \frac{١٦ + ٩ + ١٤ + ٢١ + ١٢ + ١٨ + ١٥}{٧} = \frac{١٠٥}{٧} = ١٥ \text{ ألف جنيه}$$

يلاحظ أن قيمة المفردات يمكن أن تكون كبيرة مما قد يؤدي إلى صعوبة الجمع وبالتالي تزايد احتمالات الخطأ في الحساب والوصول إلى نتائج غير مرغوب فيها . ولذلك يمكن تبسيط العمليات الحسابية باستخدام طرق وسيطة منها طريقة الانحرافات البسيطة ، وطريقة الانحرافات المختصرة .

١/١ طريقة الانحرافات البسيطة :

تعتمد هذه الطريقة على اختيار أي رقم من بين المفردات (س) واعتباره وسط فرضى نرمز له بالرمز (أ)، ثم نقوم بطرح الوسط الفرضي (أ) الذي تم تحديده من قيمة (س) نحصل على انحرافات المفردات عن الوسط الفرضي ونرمز لهذه الانحرافات بالرمز ($ح_س$) وتسمى الانحرافات البسيطة .

ويجب عند اختيار الوسط الفرضي (أ) أن نختار قيمة تتوسط المفردات من حيث القيمة وليس العدد حتى يؤدي طرح هذه القيمة إلى وجود مجموعة انحرافات بإشارة موجبة ومجموعة أخرى بإشارة سالبة ثم نوجد مجموع هذه الانحرافات ونرمز للمجموع بالرمز (مجـ $ح_س$) وبذلك يمكن إيجاد الوسط الحسابي للإنحرافات ثم يضاف الوسط الفرضي السابق طرحه للوصول إلى الوسط الحسابي المطلوب ، وتأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح س}}{ن} + أ}$$

مثال (٣) :

فيما يلي بيان بالأرباح السنوية لمجموعة من الشركات (القيمة بالألف جنيه):

٥٨٠ ، ٦٧٠ ، ٤٥٠ ، ٧٠٠ ، ٥٥٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي .

الحـــل

الطريقة المباشـرة :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن}$$

$$\bar{س} = \frac{٥٨٠ + ٦٧٠ + ٤٥٠ + ٧٠٠ + ٥٥٠}{٥} = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

طريقة الانحرافات البسيطة :

نختار وسط فرضي (أ) يتوسط القيم للمفردات ويراعي أن أكبر قيمة هي (٧٠٠) وأصغر قيمة هي (٤٥٠) وباختيار القيمة (٥٨٠) مثلا على أنها وسط فرضي (أ) فإن الحل يكون كما يلي:

س	$ح_س$ = س – أ
٥٨٠	٠
٦٧٠	٩٠
٤٥٠	ـ١٣٠
٧٠٠	١٢٠
٥٥٠	ـ٣٠
مجموع	٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح س}}{\text{ن}} + \text{أ}$$

$$\bar{س} = \frac{٥٠}{٥} + ٥٨٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

ملاحظـات :

- يتم اختيار وسط فرضي (أ) من بين قيم المفردات وليس هناك أي شروط لاختيـار رقم معين ، بغض النظر عن ترتيبه بين المفردات .
- إن اختيار أكبر قيمة أو أصـغر قيمـة لا يـؤدي إلـى خطـأ النتيجـة ولكن يترتـب عليـه أن تكون قيم الانحرافات موجبه أو سالبة وبقيم كبيرة نسبيا .
- إن اختيار قيمة تتوسط القيم يؤدي إلـى تصـغير قيم الانحـرافات الموجبـة والسـالبة مما يترتب عليه سهولة الحساب .
- يلاحظ أن قيمة الوسط الحسـابي لا تختلـف بـاختلاف الطريقـة المسـتخدمة وقد توصـلنا على نفس النتيجة .
- يلاحظ أن مجموع انحرافات المفردات عن الوسط الحسابي يسـاوى صـفر ، فـي حين أن مجموع انحرافات المفردات عن الوسط الفرضـي لا يسـاوى صـفرا ، غيـر أن ذلـك يمكـن أن يحـدث مصـادفة إذا كـان الوسـط الفرضـي الـذي تـم اختيـاره يسـاوى الوسـط الحسابي للمفردات وتأكيدا لذلك نجد أن :

س	س – $\bar{س}$
٥٨٠	١٠-
٦٧٠	٨٠+
٤٥٠	١٤٠-
٧٠٠	١١٠+
٥٥٠	٤٠-
مجموع	١٩٠-١٩٠=٠

- في الجدول السابق طرحنا قيمة الوسط الحسابي ($\bar{س}$ = ٥٩٠) من جميع قيم س لنحصل على انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي ، ثم جمعنا الانحرافات الموجبة والسالبة للتأكد من أن مجموع الانحرافات يساوي صفرا.

حـل آخـر

بفرض أ = ٤٥٠ فإنه يمكن حل المثال كما يلي :

س	$ح_س$ = س – أ
٥٨٠	١٣٠
٦٧٠	٢٢٠
٤٥٠	٠
٧٠٠	٢٥٠
٥٥٠	١٠٠
مجموع	٧٠٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ ح_س}{ن} + أ$$

$$\bar{س} = \frac{٧٠٠}{٥} + ٥٨٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

<u>٢/١ طريقة الانحرافات المختصرة :</u>

تعتمد طريقة الانحرافات المختصرة على قسمة جميع المفردات على مقدار ثابت – يفضل أن تكون جميع المفردات تقبل القسمة عليه – ونرمز للمقدار الثابت بالرمز (ث) ، ثم نحصل على الانحرافات المختصرة ونرمز لها بالرمز ($ح_س$) . وبإيجاد مجموع الانحرافات المختصرة وقسمتها على عدد المفردات (ن) نحصل على الوسط الحسابي للانحرافات المختصرة ، ثم يضرب هذا الوسط في قيمة المقدار الثابت (ث) نحصل على الوسط الحسابي المطلوب وتأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$\boxed{\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث}$$

مثال (٤) :

أوجد الوسط الحسابي في المثال السابق باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة .

الحــل

س	$ح_س = \frac{س}{ث}$
٥٨٠	٥٨
٦٧٠	٦٧
٤٥٠	٤٥
٧٠٠	٧٠
٥٥٠	٥٥
مجموع	٢٩٥

ث = ١٠   **ن = ٥**

$$\boxed{\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث}$$

$$\bar{س} = \frac{٢٩٥}{٥} \times ١٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

٣/١ <u>طريقة الانحرافات المختزلة :</u>

يمكن إدماج الطريقتين السابقتين (البسيطة والمختصرة) معا وصولا إلي طريقة الانحرافات المختزلة . بمعني أننا نقوم باختيار وسط فرضي (أ) من بين المفردات ، وبطرح الوسط الفرضي (أ) نحصل على الانحرافات البسيطة ($ح_س$) ثم نقسم الانحرافات البسيطة على مقدار ثابت (ث) لنحصل على الانحرافات المختزلة .

وبإيجاد الوسط الحسابي للانحرافات المختزلة ثم ضربه في المقدار الثابت وجمع الوسط الفرضي نحصل على الوسط الحسابي المطلوب . وتأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$\boxed{\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث + أ}$$

مثال (٥) :

احسب الوسط الحسابي للمفردات في المثال الأسبق باستخدام طريقة الانحرافات المختزلة .

الحـل

س	$ح_س$ = س - أ	$ح_س = \frac{س}{ث}$
(٥٨٠)	٠	٠
٦٧٠	٩٠	٩
٤٥٠	-١٣٠	-١٣
٧٠٠	١٢٠	١٢
٥٥٠	-٣٠	-٣
مجموع	---	٥

أ = ٥٨٠ ث = ١٠ ن = ٥

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح س}}{ن} \times ث + أ$$

$$\bar{س} = \frac{٥}{٥} \times ١٠ + ٥٨٠ = ٥٩٠$$ **ألف جنيه**

ثانيا : إيجاد الوسط الحسابي في حالة التوزيعات :

يمكـن أن تكـون البيانـات مبوبـة فـي صـورة توزيعـات تكراريـة بسـيطة (فئـات وتكرارات)، وقد تكون الفئات متساوية أو غير متساوية ، بمعني أن التوزيع التكراري قد يكون منتظما أو غير منتظم .

ويراعي أن إيجاد الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية لا يتأثر بنوع التوزيع ، ويعتمد أساسا على تحديد مراكز الفئات . فإذا رمزنا للفئات بالرمز (ف) والتكرارات بالرمز (ك) فإننا نرمز لمركز الفئة بالرمز (س) ، حيث :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدني للفئة + الحد الأعلي}}{٢}$$

أو

$$\text{مركز الفئة} = \text{الحد الأدني للفئة} + \frac{1}{2}\ \text{طول الفئة}$$

١/٢ الطريقة المباشرة :

- نحصل على مراكز الفئات (س) .
- نضرب التكرارات (ك) في مراكز الفئات (س) نحصل على (ك س) ثم نوجد مجموعها ونرمز له بالرمز (مجـ ك س).
- نوجد الوسط الحسابي ($س^/$) بقسمة (مجـ ك س) على (مجـ ك) .

مثـال (٦) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الدعاية والإعلان (القيمة بالألف جنيه):

فئات	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-
تكرارات	٣٥	٦٥	٩٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لمصروفات الدعاية والإعلان

الحـل

ف	ك	س	ك س
٦٠-	٣٥	٧٠	٢٤٥٠
٨٠-	٦٥	٩٠	٥٨٥٠
١٠٠-	٩٠	١١٠	٩٩٠٠
١٢٠-	٥٠	١٣٠	٦٥٠٠
١٤٠-	٣٠	١٥٠	٤٥٠٠
١٦٠-	٢٠	١٧٠	٣٤٠٠
١٨٠-٢٠٠	١٠	١٩٠	١٩٠٠
مجموع	٣٠٠	---	٣٤٥٠٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\bar{س} = \frac{٣٤٥٠٠}{٣٠٠} = ١١٥ \text{ ألف جنيه}$$

٢/٣ طريقة الانحرافات البسيطة :

يمكن استخدام الانحرافات البسيطة باختيار وسط فرضى من مراكز الفئات ثم ضرب الانحرافات البسيطة في التكرارات ، والحصول على المجموع وتكون المعادلة على النحو التالي :

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} + أ}$$

ف	ك	س	ح س	ك $ح_س$
٦٠-	٣٥	٧٠	٤٠-	١٤٠٠-
٨٠-	٦٥	٩٠	٢٠-	١٣٠٠-
١٠٠-	٩٠	(١١٠)	٠	٠
١٢٠-	٥٠	١٣٠	٢٠	١٠٠٠
١٤٠-	٣٠	١٥٠	٤٠	١٢٠٠
١٦٠-	٢٠	١٧٠	٦٠	١٢٠٠
١٨٠-٢٠٠	١٠	١٩٠	٨٠	٨٠٠
	٣٠٠			١٥٠٠

أ = ١١٠

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} + أ}$$

$$\bar{س} = \frac{١٥٠٠}{٣٠٠} + ١١٠ = ١١٥ \text{ ألف جنيه}$$

٣/٢ طريقة الانحرافات المختزلة :

يمكن اتباع طريقة الانحرافات المختزلة بقسمة الانحرافات البسيطة على مقدار ثابت (ث) ، ثم ضرب الانحرافات المختزلة في التكرارات والحصول على المجموع (مجـ ك حس). وتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك ح س}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}$$

ويكون حل المثال على النحو التالي :

ف	ك	س	ح س	ح$_{س}$	ك$_{س}$ح$_{س}$
٦٠-	٣٥	٧٠	٤٠-	٢-	٧٠-
٨٠-	٦٥	٩٠	٢٠-	١-	٦٥-
١٠٠-	٩٠	(١١٠)	٠	٠	٠
١٢٠-	٥٠	١٣٠	٢٠	١	٥٠
١٤٠-	٣٠	١٥٠	٤٠	٢	٦٠
١٦٠-	٢٠	١٧٠	٦٠	٣	٦٠
١٨٠-٢٠٠	١٠	١٩٠	٨٠	٤	٤٠
مجموع	٣٠٠				٧٥

أ = ١١٠ **ث = ٢٠**

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك ح س}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}$$

$$\bar{س} = \frac{٧٥}{٣٠٠} \times ٢٠ + ١١٠ = ١١٥ \text{ ألف جنيه}$$

مثال (٧) :

قامت شركة النهضة للصناعات الغذائية بتوزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه كما يلي :

فئات	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٧٠-	٢٠٠-	٢٤٠-	مجموع
عددالعاملين	٨٠	٢٢٠	٢٧٠	١٥٠	٦٠	٢٠	٨٠٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحساب للأجر .

الحـل

الطريقة المباشرة :

ف	ك	س	ك س
١٠٠-	٨٠	١١٠	٨٨٠٠
١٢٠-	٢٢٠	١٣٠	٢٨٦٠٠
١٤٠-	٢٧٠	١٥٥	٤١٨٥٠
١٧٠-	١٥٠	١٨٥	٢٧٧٥٠
٢٠٠-	٦٠	٢٢٠	١٣٢٠٠
٢٤٠-٢٦٠	٢٠	٢٥٠	٥٠٠٠
مجموع	٨٠٠		١٢٥٢٠٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٢٥٠٠}{٨٠٠}$$

= ١٥٦,٥ جنيها

طريقة الانحرافات البسيطة :

ف	ك	س	ح س	ك $ح_س$
١٠٠-	٨٠	١١٠	٤٥-	٣٦٠٠-
١٢٠-	٢٢٠	١٣٠	٢٥-	٥٥٠٠-
١٤٠-	٢٧٠	(١٥٥)	٠	٠
١٧٠-	١٥٠	١٨٥	٣٠	٤٥٠٠
٢٠٠-	٦٠	٢٢٠	٦٥	٣٩٠٠
٢٤٠-٢٦٠	٢٠	٢٥٠	٩٥	١٩٠٠
مجموع	٨٠٠			١٢٠٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$س = \frac{١٢٠٠}{٨٠٠} + ١٥٥ = ١٥٦,٥ \text{ جنيه}$$

طريقة الانحرافات المختزلة :

ف	ك	س	ح س	حس	ك حس
-١٠٠	٨٠	١١٠	-٤٥	-٩	-٧٢٠
-١٢٠	٢٢٠	١٣٠	-٢٥	-٥	-١١٠٠
-١٤٠	٢٧٠	(١٥٥)	٠	٠	٠
-١٧٠	١٥٠	١٨٥	٣٠	٦	٩٠٠
-٢٠٠	٦٠	٢٢٠	٦٥	١٣	٧٨٠
٢٦٠-٢٤٠	٢٠	٢٥٠	٩٥	١٩	٣٨٠
مجموع	٨٠٠	--	--	--	٢٤٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك ح س}}{\text{مجـ ك}} \times ث + أ$$

$$\bar{س} = \frac{٢٤٠}{٨٠٠} \times ٥ + ١٥٥ = ١٥٦,٥ \text{ جنيه}$$

يلاحظ أننا توصلنا إلى نفس النتيجة باستخدام الطرق المختلفة . ولذلك فإن طريقة الانحرافات المختزلة تعتبر أفضل الطرق لسهولة الأرقام.

ويمكن في ضوء الدراسة السابقة أن نستخلص مجموعة خصائص للوسط الحسابي ، من أهمها :

١- مجموع انحرافات المفردات عن الوسط الحسابي بساوى صفر .

٢- يمكن الحصول على الوسط الحسابي لمجموعة مفردات إذا علم مجموعها دون الحاجة إلى تفاصيل الأعداد .

٣- لا يتأثر الوسط الحسابي باختلاف التوزيع .

٤- يمكن أن يتأثر الوسط الحسابي بالمفردات المتطرفة .

تطبيقات الفصل الأول

١- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الإعلان بالألف جنيه شهريا :

فئات	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٤٠	-٤٥	-٥٠	مجموع
عدد الشركات	٣٨	٥٢	١٠٠	٦٠	٣٠	٢٠	٣٠٠

والمطلوب : إيجاد الوسط الحسابي لمصروفات الإعلان .

٢- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا:

فئات الربح	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	مجموع
عدد الشركات	٦٥	٩٥	١٢٠	٥٠	١٥	٥	٣٥٠

احسب الوسط الحسابي للأرباح .

٣- البيانات التالية تم استخراجها من سجلات شركة النهضة عن أجور العاملين ، وتم توزيع العاملين حسب فئات الأجر:

فئات الأجر	-٢٠٠	-٢٢٠	-٢٤٠	-٢٦٠	-٢٧٠	-٢٨٠	-٢٩٠
عدد الشركات	٣٥	٧٥	١٠٠	٤٠	٣٠	١٥	٥

احسب الوسط الحسابي للأجر .

٤- فيما يلي توزيع مجموعة من الطلاب حسب فئات الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان أحد المقررات الدراسية .

فئات الدرجات	-٠	-٧	-١٠	-١٣	-١٦	١٨-٢٠	المجموع
عدد الطلاب	٨	٢٢	٩٠	١٢٠	٤٥	١٥	٣٠٠

احسب الوسط الحسابي للدرجات .

الفصـل الثانى

الوســـيط Median

يعتبر الوسيط أحد المقاييس الإحصائية التـي يمكن الاعتمـاد عليهـا للوصـول إلـى نتائج يمكن أن تحقق إفـادة فـي اتخـاذ القـرارات الإداريـة . ويؤخـذ علـى الوسـيط انـه لايأخذ في اعتباره القيم المتطرفة .

<u>أولا</u> : <u>إيجاد الوسيط فى حالة المفردات</u> :

خطـوات الحـل :

١- يتم ترتيب المفردات تصاعديا أو تنازليا .

٢- يتم تحديد عدد المفردات .

١/٢ إذا كان عدد المفردات فرديـا ، فـإن الوسيط يسـاوى القيمـة التـي تتوسـط المفردات .

٢/٢ إذا كان عدد المفردات زوجيا ، فإن الوسيط يساوى نصـف حاصـل جمـع القيمتين المتوسطتين .

مثـال (١) :

فيما يلي بيان المنفق على الطعام لمجموعة من الأسر أسبوعيا بالجنيه :

٢٢٥ ، ٧٠ ، ١٩٨ ، ٥٤ ، ٣١٨ ، ١٣٧ ، ٣٢١

احسب الوسـيط .

الحــل

- يتم ترتيب المفردات تصاعديا أو تنازليا .

٥٤ ، ٧٠ ، ١٣٧ ، ١٩٨ ، ٢٢٥ ، ٣١٨ ، ٣٢١

- عدد المفردات سبعة وهو عدد فردي .
- الوسيط = القيمة المتوسطة = ١٩٨

حـــل آخـــر :

- ترتيب المفردات تنازليا :

٣٢١ ، ٣١٨ ، ٢٢٥ ، ١٩٨ ، ١٣٧ ، ٧٠ ، ٥٤

- عدد المفردات فرديا
- الوسيط = ١٩٨

مثـال (٢):

فيما يلي بيان بالدخل الشهري لمجموعة من العاملين بالجنيه:

٤٧٥ ، ٣١٥ ، ٦٢٥ ، ١٦٠ ، ٧٣٥ ، ٣٧١ ، ٣٩٥ ، ١٢٠

احسب الوسيط .

الحـــــل

- ترتيب المفردات تصاعديا :

١٢٠ ، ١٦٠ ، ٢١٥ ، ٢٧١ ، ٣٩٥ ، ٤٧٥ ، ٦٢٥ ، ٧٣٥

- الوسيط = $\frac{١}{٢}$ مجموع القيمتين المتوسطتين

- الوسيط = $\frac{٢٧١ + ٣٩٥}{٢}$ = $\frac{٦٦٦}{٢}$ = ٣٣٣ جنيها

ثانيا : <u>إيجاد الوسيط فى حالة التوزيعات التكرارية</u> :

للحصول على الوسيط في حالة التوزيعات التكرارية يمكن استخدام طريقتين :

- الطريقة الأولى بالحساب ، وتستخدم المعادلة التالية :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدني لفئة الوسيط} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

الطريقة الثانية بالرسم من المنحني التكراري المتجمع الصاعد أو الهابط

خطوات تحديد الوسيط من التوزيعات التكرارية :

١- يتم إعداد جدول توزيع تكراري متجمع صاعد أو جدول توزيع تكراري متجمع هابط .

٢- نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$

٣- تحدد الطريقة التي يمكن اتباعها :

١/٣ طريقة الحسـاب :

- فـي هـذه الطريقـة يـتم تحديـد التكـرار السـابق لترتيـب الوسـيط ، والتكـرار اللاحق.
- تحدد فئة الوسيط لتحديد الحد الأدني للفئة ثم تطبق المعادلة السابقة .

٢/٣ طريقـة الرسـم :

- نرسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد أو الهابط .
- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي .
- نرسم خطا أفقيا من نقطة ترتيب الوسيط حتى يقطع المنحني في نقطة .
- نسقط عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة ، تكون هذه النقطة هي قيمة الوسيط .

ملاحظـــة :

تستخدم التكرارات الصاعدة أو الهابطة ، كما يمكن أن تستخدم النسب المئوية للتكرارات .

مثـال (٣):

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الربح المحققة (القيمة بالآلف جنيه) :

فئات الربح	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-
عدد الشركات	٣٥	٨٥	١١٥	٧٥	٥٠	٣٠	١٠

احسـب :

١- الوسيط بطريقتين مختلفتين (بالحساب والرسم).
٢- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من (١٣٠) ألف جنيه .
٣- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من (١٠٠) ألف جنيه .
٤- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من (٨٠) ألف جنيه .

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

فئات	التكرارات الصاعدة	نسبة %
اقل من ٤٠	٠	٠
اقل من ٦٠	٣٥	٨.٧٥
اقل من ٨٠	١٢٠	٣٠.٠٠
اقل من ١٠٠	٢٣٥	٥٨.٧٥
اقل من ١٢٠	٣١٠	٧٧.٥٠
اقل من ١٤٠	٣٦٠	٩٠.٠٠
اقل من ١٦٠	٣٩٠	٩٧.٧٥
اقل من ١٨٠	٤٠٠	١٠٠.٠٠

أولا : باستخدام التكرارات الصاعدة :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٤٠٠}{٢} = ٢٠٠$$

يلاحظ أن ترتيب الوسيط يقع بين ١٢٠ ، ٢٣٥ وبذلك يتم تحديد التكرار السابق لترتيب الوسيط (١٢٠) والتكرار اللاحق لترتيب الوسيط (٢٣٥) وتكون فئة الوسيط (٨٠ – ١٠٠).

طريقة الحساب :

$$\textbf{الوسيط} = \textbf{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \frac{\textbf{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\textbf{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times ٢٠$$

$$\textbf{الوسيط} = ٨٠ + \frac{٢٠٠ - ١٢٠}{٢٣٥ - ١٢٠} \times ٢٠$$

$$= ٨٠ + ١٣.٩١٣ = ٩٣.٩١٣ \textbf{ ألف جنيه}$$

ثانيا : باستخدام النسب المئوية للتكرارات الصاعدة :

$$\textbf{ترتيب الوسيط} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

يلاحظ أن ترتيب الوسيط يقع بين ٣٠.٠٠ ، ٥٨.٧٥ في عمود النسب المئوية ، وتكون فئة الوسيط (٨٠ – ١٠٠) ، وباستخدام المعادلة نجد أن :

$$\boxed{\textbf{الوسيط} = \textbf{الحد الأدني لفئة الوسيط} + \frac{\textbf{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\textbf{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times \textbf{طول الفئة}}$$

$$\textbf{الوسيط} = \frac{٥٠ - ٣٠}{٥٨.٧٥ - ٣٠} \times ٢٠ = ٩٣.٩١٣ \textbf{ ألف جنيه}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها .

- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من ١٠٠ ألف جنيه = ٢٣٥ شركة (من الجدول الصاعد مباشرة)
- نسبة الشركات التي تحقق ربحا أقل من ٨٠ ألف جنيه = ٣٠%

يلاحظ أنه أمكن استخراج بعض القيم من الجدول مباشرة أما باقي القيم سواء تتعلق بالتكرارات أو النسب المئوية للتكرارات غير موجودة بالجدول، ولذلك يجب رسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد بحسب التكرارات لاستخراج ما يتعلق بالتكرارات ، وأيضا رسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد بحسب النسبة المئوية للإجابة عما يكون غير موجود بالجدول .

توضيح :

(١) لتحديد نسبة الشركات التي تحقق ربحا أقل من ١١٠ ألف جنيه أو أي رقم غير موجود صراحة بالجدول يتبع الخطوات التالية:

- نرسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد .
- نحدد على المحور الأفقي الرقم المطلوب (١١٠ مثلا).
- نرسم عمودا من النقطة المطلوبة حتى يقطع المنحني في نقطة .
- نرسم خطا أفقيا من نقطة التقاطع حتى يقطع المحور الرأسي في نقطة ، تكون هي النسبة المطلوبة .

(٢) لتحديد الوسيط بالرسم من النسب المئوية يتبع ما يلي :

- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ، وهو ٥٠% في جميع الأحوال لأن النسب المئوية تنتهي عند ١٠٠%.
- نرسم خطا أفقيا من نقطة ترتيب الوسيط حتى يقطع المنحني في نقطة (لاحظ اتجاه السهم).
- نسقط عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون هي قيمة الوسيط .

ثالثا : باستخدام التكرارات الهابطة :

الجدول التكراري المتجمع الهابط

فئات	التكرارات الصاعدة	نسبة %
٤٠ فأكثر	٤٠٠	١٠٠.٠٠%
٦٠ فأكثر	٣٦٥	٩١.٢٥
٨٠ فأكثر	٢٨٠	٧٠.٠٠
١٠٠ فأكثر	١٦٥	٤١.٢٥
١٢٠ فأكثر	٩٠	٢٢.٥٠
١٤٠ فأكثر	٤٠	١٠.٠٠
١٦٠ فأكثر	١٠	٢.٥٠
١٨٠ فأكثر	صفر	صفر

- عدد الشركات التي تحقق ربحا ٨٠ ألف جنيه فأكثر ٢٨٠ شركة
- عدد الشركات التي تحقق ربحا ١٠٠ ألف جنيه فأكثر ١٦٥ شركة

طريقـة الحسـاب :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدني لفئة الوسيط} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

يلاحظ أن المعادلة لم تتغير سواء استخدمنا التكرارات الصاعدة أو التكرارات الهابطة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٤٠٠}{٢} = ٢٠٠$$

ومن جدول التكرارات الهابطـة نجد أن ترتيب الوسيط يقع بين ٢٨٠ ، ١٦٥ وبذلك يكون التكرار السابق ٢٨٠ والتكرار اللاحق ١٦٥ وتكون فئة الوسيط (٨٠-١٠٠).

$$\text{الوسيط} = ٨٠ + \frac{٢٠٠ - ٢٨٠}{١٦٥ - ٢٨٠} \times ٢٠ = ٩٣.٩١٣ \text{ ألف جنيه}$$

رابعا : باستخدام النسبة المئوية للتكرارات الهابطة :

* ترتيب الوسيط $= \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$
* يقع ترتيب الوسيط بين ٧٠% ، ٤١.٢٥%
* فئة الوسيط (٨٠ – ١٠٠)

$$\text{الوسيط} = ٨٠ + \frac{٥٠ - ٧٠}{٤١.٢٥ - ٧٠} \times ٢٠ = ٩٣.٩١٣ \text{ ألف جنيه}$$

توضيـح :

(١) لتحديد الوسيط بالرسم من النسب المئوية للتكرارات الهابطة يتبع ما يلي:

- نرسم المنحني التكراري المتجمع الهابط بحسب النسبة المئوية .
- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي .
- نرسم خطا أفقيا من نقطة ترتيب الوسيط حتى يلاقي المنحني في نقطة (لاحظ اتجاه السهم عن ٥٠%)

- نرسم عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون هي قيمة الوسيط (لاحظ اتجاه السهم)

(٢) نسبة الشركات التي تحقق ربحا ١١٥ ألف جنيه فأكثر :

- نحدد النقطة المطلوبة على المحور الأفقي .
- نرسم عمودا من هذه النقطة حتى يلاقي المنحني في نقطة (لاحظ اتجاه السهم عند ١١٥).
- نرسم خطا أفقيا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الرأسي في نقطة تكون هي النسبة المطلوبة (لاحظ اتجاه السهم).
- نسبة الشركات التي تحقق ربحا ١١٥ ألف جنيه فأكثر هي ٢٨%

- عدد الشركات التي تدفع أقل من ٤٠ ألف جنيه = ١٢٠ شركة
- عدد الشركات التي تدفع أقل من ٨٠ ألف جنيه = ٣٢٠ شركة
- نسبة الشركات التي تدفع أقل من ٦٠ ألف جنيه = ٥٧.٥%
- نسبة الشركات التي تدفع أقل من ٩٠ ألف جنيه = ٨٨.٧٥ %

ثانيا : طريقة الحساب لتحديد الوسيط باستخدام النسب المئوية :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

$$\text{الوسيط} = ٤٠ + \frac{٥٠ - ٣٠}{٥٧.٥ - ٣٠} \times ٢٠ = ٥٤.٥٥ \text{ ألف جنيه}$$

- نسبة الشركات التي تدفع ٣٥ ألف جنيه فأكثر = ٨٠%
- نسبة الشركات التي تدفع ٧٠ ألف جنيه فأكثر = ٣٣%

ملاحظات :

- يعتمد الوسيط على القيم المتوسطة ولا يتأثر بالقيم المتطرفة لأنه لايأخذها في الاعتبار ، في حين أن الوسط الحسابي يأخذ جميع القيم .
- يعتمد الوسيط على ترتيب المفردات أو التوزيعات التجميعية الصاعدة أو الهابطة ، ويمكن تحديده بالحساب أو الرسم .
- يمكن تحديد الوسيط بالرسم من نقطة تقاطع المنحني التكراري المتجمع الصاعد والمنحني التكراري المتجمع الهابط ، وإسقاط عمود على المحور الأفقي .

تطبيقات الفصل الثانى

١- فيما يلي درجات الحرارة المسجلة خلال فترات متعددة :

١٨	٢٢	١٩	٢٢	٢١	١٨	٢٥

والمطلوب : إيجاد الوسيط للدرجات ، ومقارنته بالوسط الحسابي

٢- فيما يلي توزيع مجموعة شركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا:

فئات الربح	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-٨٠	مجموع
عدد الشركات	٤٨	٧٢	١١٥	٣٠	٢٥	١٠	٣٠٠

والمطلوب :

١- إيجاد الوسيط بطريقتين مختلفتين (بالحساب والرسم).

٢- تحديد عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من ٤٥ ألف جنيه.

٣- تحدد نسبة الشركات التي تحقق ربحا أقل من ٥٥ ألف جنيه .

٤- تحديد عدد الشركات التي تحقق ربحا ٥٣ ألف جنيه فأكثر .

٥- تحديد نسبة الشركات التي تحقق ربحا ٣٥ ألف جنيه فأكثر .

٦- إيجاد الوسط الحسابي للأرباح

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من الأسر بحسب فئات الإنفاق على الطعام (القيمة بالجنيه شهريا) :

فئات الإنفاق	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-	مجموع
عدد الأسر	٧٥	١٢٥	١٦٥	٩٥	٣٠	١٠	٥٠٠

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي للإنفاق على الطعام .

٢- إيجاد الوسيط بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).
٣- تحديد عدد الأسر التي تنفق ١٣٠ جنيه فأكثر
٤- تحديد نسبة الأسر التي تنفق ١١٠ جنيه فأكثر .
٥- تحديد عدد الأسر التي تنفق اقل من ١١٥ جنيه .
٦- تحديد نسبة الأسر التي تنفق أقل من ١٤٥ جنيه .

٤- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات مدة الخدمة :

فئات مدة الخدمة	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-
عدد العاملين	٨٥	١٢٥	١٧٥	٩٠	١٥	٨	٢

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي لمدة الخدمة .
٢- إيجاد الوسيط بالرسم فقط .
٣- تحديد عدد العاملين الذين تصل مدة خدمتهم أقل من ١٨ سنة .
٤- تحديد نسبة العاملين الذين تصل مدة خدمتهم أقل من ١٥ سنة .
٥- تحديد عدد العاملين الذين تصل مدة خدمتهم ١٠ سنوات فأكثر
٦- تحديد نسبة العاملين الذين تصل مدة خدمتهم ١٥ سنة فأكثر .

الفصـــل الثالث

المنـــوالMode

يعتبر المنوال أحد مقاييس النزعة المركزية ، وهو لا يتأثر بالقيم المتطرفة ولكنه يتأثر بالقيمة الشائعة ، ولذا يقال أن المنوال في حالة المفردات هو القيمة الأكثر شيوعا، . أو الأكثر تكرارا في حالة التوزيعات التكرارية .

أولا : إيجاد المنـوال من المفردات :

إذا كان لدينا مجموعة مفردات ، فإن المنوال هو القيمة التي تكررت أكثر من غيرها . وقد لا توجد قيمة مكررة بين المفردات وفي هذه الحالة لا توجد قيمة منوالية . يضاف إلى ذلك إذا تكررت قيمتان فإنه يقال أن لدينا قيمتين منواليتين ... وهكذا ..

مثـال (١) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة من الطلاب في امتحان مادة الرياضة :

١٨ ، ١٢ ، ١٥ ، صفر ، ٢٠ ، ١٢

احسب المنـوال .

الحـــــل

المنـوال = ١٢ وهي الدرجة التي تكررت

مثـال (٢):

بفرض أن درجات الطلاب هي :

١٨ ، ١٢ ، ١٥ ، صفر ، ٢٠ ، ١٢ ، ١٥

احسب المنـوال .

الحـــــل

المنـوال = ١٢ ، ١٥ توجد قيمتين منواليتين

مثـال (٣) :

إذا كانت درجات الطلاب هي :

١٨ ، ١٢ ، ١٥ ، صفر ، ١٧ ، ٢٠

احسب المنوال .

الحـــــل

لا توجد قيمة منواليـة .

ثانيا : إيجاد المنوال من التوزيعات التكرارية المنتظمة :

يجب قبل البحث عن إيجاد قيمة المنوال من التوزيعات التكرارية النظر أولا إلى نوع التوزيع التكراري ، وتحديد ما إذا كان التوزيع منتظما أو غير منتظم، الأمر الذي يجب إزاءه تعديل التكرارات من عدمه ، ويمكن تحديد المنوال بطريقتين : الطريقة الرياضية (طريقة الحساب) وتتضمن العديد من الطرق ، الطريقة الثانية وهي طريقة الرسم ، وسوف تقتصر الدراسة في هذا المجال على طريقة الفروق كأحد أهم الطرق الرياضية ، كما تقتصر على المدرج التكراري كوسيلة بيانية لتحديد المنوال .

١ـ الطريقة الرياضية (طريقة الحساب) :

تعتمد هذه الطريقة – طريقة الفروق – على تحديد نوع التوزيع ، فإذا كان التوزيع منتظما لا يلزم تعديل التكرارات . ويجب مراعاة الفئات المفتوحة من حدها الأدنى أو حدها الأعلى ، فإذا وجدت فئات مفتوحة وكانت جميع الفئات متساوية يجب إغلاق الفئات المفتوحة مع مراعاة انتظام التوزيع. بمعني أنه يجب تحديد أطوال الفئات الأخرى وإغلاق الفئة المفتوحة بحيث يتساوى طولها مع الأطوال للفئات الأخرى .

وتأتي المرحلة الثانية للحل بتحديد أكبر تكرار والذي يطلق عليه التكرار المنوالي ، ثم تحدد الفئة المقابلة للتكرار المنوالي على أنها فئة المنوال . ولعل ذكاء الباحثين والدارسين لعلوم الإحصاء يجب أن ينبه أذهانهم ويلفت نظرهم إلى تحديد المساحة التي يقع خلالها المنوال وهي الفئة المنوالية . وبذلك يكون لدي الدارس توقع مسبق لقيمة المنوال التي يصل إليها في نهاية الحل بحيث لا تزيد أو تقل عن الحد الأدنى أو الحد الأعلى لفئة المنوال .

وتأتي المرحلة الثالثة للحل بتحديد الفئتين السابقة واللاحقة لفئة المنوال . وبذلك يصبح لدينا مساحة عملية للحل تتضمن ثلاث فئات : هي فئة المنوال ، والفئة السابقة ، والفئة التالية أو اللاحقة ويقابل كل فئة تكرار معين، مع ملاحظة أن أكبر تكرار هو المقابل لفئة المنوال .

وننوه في هذا الصدد إلى أننا لا نكترث ولا نهتم إطلاقا بالفئات السابقة أو الفئات التالية للفئات الثلاث التى سبق تحديدها، مهما كان عدد الفئات السابقة أو التالية .

وتكون المرحلة الرابعة هي تحديد الفروق المطلقة بين التكرارات الثلاثة، التكرار المنوالي والتكرار السابق ، والتكرار التالي . ونعني بالفروق المطلقة إهمال الإشارة

السالبة، بمعني أننا نحسب الفرق بين التكرار المنوالي (أكبر تكرار) والتكرار السابق له ، ثم نحدد الفرق بين التكرار المنوالي (أكبر تكرار) والتكرار التالي له . فإذا رمزنا للفرق الأول بالرمز (ب) والفرق التالي بالرمز (د) فإننا يمكن أن نحدد طول الفئة المنوالية ، ونعتبر أنها تساوى (أ + جـ) وتصبح المشكلة هي تحديد قيمة (أ) وهي القيمة التي يجب إضافتها للحد الأدنى لفئة المنوال للوصول إلى القيمة المنوالية أو قيمة المنوال .

وتأسيسا على ذلك تكون المعادلة على النحو التالي :

$$\boxed{\textbf{المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ}}$$

وفي ضوء تحديد الفروق السابق الإشارة إليها يمكن تحديد قيمة (أ) باستخدام التناسب التالي :

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$$

ويمكن توضيح ذلك في المثال التالي :

مثـال (٤) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات المصروفات الإدارية والعمومية (القيمة بالألف جنيه) :

فئات المصروفات	١٠٠-	١١٠-	١٢٠-	١٣٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-	١٧٠-
عدد الشركات	٤٥	٧٥	١٠٠	١٥٠	٨٠	٦٠	٣٠	٢٠

والمطلوب : إيجاد المنوال .

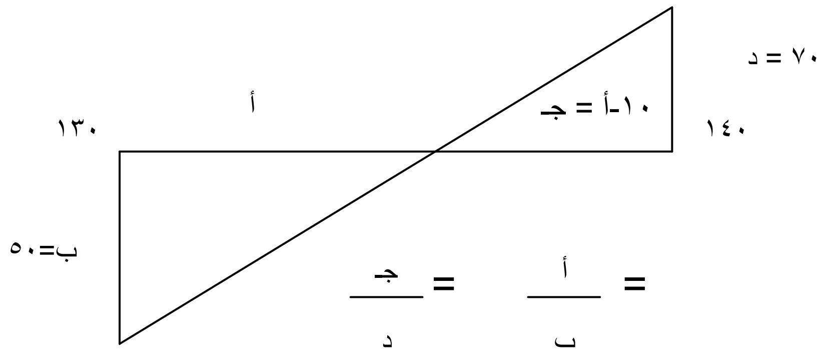
الحـــــــل

يلاحظ أن التوزيع منتظم ولذا لا يجرى أي تعديل للتكرارات

ف	ك	فروق
-١٠٠	٤٥	
-١١٠	٧٥	
-١٢٠	١٠٠	ب = ٥٠
-١٣٠	١٥٠	التكرار المنوالي
-١٤٠	٨٠	د = ٧٠
-١٥٠	٦٠	
-١٦٠	٣٠	
١٨٠-١٧٠	٢٠	

المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ

= ١٣٠ + أ



$$= \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$$

$$= \frac{أ}{٥٠} = \frac{١٠ - أ}{٧٠}$$ وبحل التناسب

أ × ٧٠ = ٥٠ (١٠ – أ)

٧٠أ = ٥٠٠ – ٥٠ أ

١٢٠أ = ٥٠٠ ومنها : أ = ٤.١٦٧

المنوال = ١٣٠ + ٤.١٦٧ = ١٣٤.١٦٧ ألف جنيه

٢- الطريقة البيانية (طريقة الرسم البياني) :

تعتمد هذه الطريقة البيانية على الأسس المشار إليها سابقا من حيث نوع التوزيع وما إذا كان منتظما أو غير منتظم ويتخذ نفس الإجراء من ناحية تعديل التكرارات إذا كان التوزيع غير منتظم أو تبدأ خطوات الحل مباشرة إذا كان التوزيع منتظما . وتكون خطوات الحل في حالة التوزيع المنتظم كما يلي :

- تحدد أكبر تكرار ويطلق عليه التكرار المنوالي .
- تحدد فئة المنوال وهي الفئة المقابلة للتكرار المنوالي .
- تحدد الفئتين السابقة والتالية ، بغض النظر عن باقي الفئات .
- نرسم المدرج التكراري في شكل أعمدة متلاصقة للتكرارات الثلاثة .
- نوصل قمة المستطيل الممثل للتكرار المنوالي بقمة المستطيل السابق والتالي بطريقة عكسية .
- يراعي تقاطع خطي التوصيل في نقطة .
- نرسم عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون هي قيمة المنوال .

<u>ثالثا</u> : <u>إيجاد المنوال في حالة التوزيعات التكرارية الغير منتظمة</u> :

إذا كان التوزيع التكراري غير منتظم ، بمعني أن الفئات غير متساوية فإنه يجب تعديل التكرارات . ويراعي أنه إذا كانت جميع الفئات متساوية غير أن فئة واحدة تختلف في طولها عن أطوال باقي الفئات فإن التوزيع يعتبر غير منتظم . وقد تكون الفئة المشار إليها تقع في أول أو آخر التوزيع أو في المنتصف . ولذلك إذا وجدت فئات مفتوحة من حدها الأدنى أو حدها الأعلى فإن اختيار طول هذه الفئة لإغلاقها يمكن أن يؤدي إلى عدم انتظام التوزيع ، الأمر الذي يجب إزاءه ضرورة تعديل التكرارات . ويستخدم لتعديل التكرارات المعادلة التالية :

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكـرار}}{\text{طول الفئـة}}$$

يترتـب علـى تعديل التكـرارات أن يكـون التكـرار المعـدل يحتـوى علـى قيم أو أعداد كسرية أو أعداد صحيحة وكسور ، ولذلك يجب التخلص من القيم الكسرية بالضرب في معامل معين ، مع مراعاة أن المعامل الذي يتم اختيـاره يضـرب فـي جميع التكرارات المعدلة وصولا إلى التكرار المعدل الصحيح . فإذا رمزنا للتكرار بـالرمز (ك) فإنـه يمكـن أن نرمـز للتكـرار المعـدل بـالرمز (ك م) وأيضـا نرمـز للتكـرار المعـدل الصـحيح بـالرمز (ك م ص)، وتبـدأ خطـوات الحـل باسـتخدام عمودي الفئات والتكرارات المعدلة الصحيحة مع إهمال عمود التكرارات وعمود التكرارات المعدلة وباتباع نفس الخطوات في حالة التوزيع المنتظم .

مثـال (٥) :

فيما يلـي توزيـع مجموعـة من الشركات بحسب فئـات الأربـاح المحققـة (القيمـة بالألف جنيه):

فئات الربح	٢٠-	٣٠-	٥٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	١١٥	١٦٠	٢١٠	١٣٥	٥٠	٣٠	٧٠٠

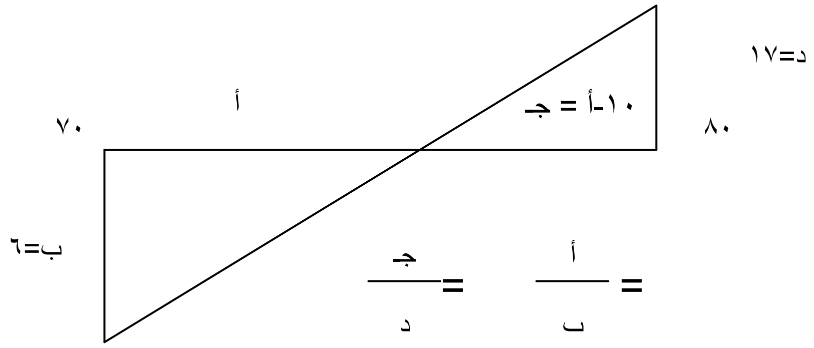
احسب المنوال .

الحـــــل

ف	ك	ك م	ك م ص	فروق
٢٠-	١١٥	١١.٥	٢٣	
٣٠-	١٦٠	٨	١٦	
٥٠-	٢١٠	١٠.٥	٢١	ب=٦
٧٠-	١٣٥	١٣.٥	٢٧	التكرار المنوالي
٨٠-	٥٠	٥	١٠	د=١٧
٩٠-١٠٠	٣٠	٣	٦	

١- الطريقة الرياضيـة :

المنوال = الحد الأدنى لفئة المنوال + أ



$$= \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$$

$$= \frac{\text{أ}}{٦} = \frac{١٠ - \text{أ}}{١٧}$$

٢٣ أ = ٦٠ ومنها : أ = ٢.٦١

المنوال = ٧٠ + ٢.٦١ = ٧٢.٦١ ألف جنيه

<u>رابعا</u> : <u>تعدد التكرار المنوالي في حالة التوزيعات التكرارية</u> :

يمكن أن يتعدد التكرار المنوالي (أكبر تكرار) سواء في حالة التوزيعات المنتظمة أو أكبر تكرار منوالي معدل صحيح في حالة التوزيعات غير المنتظمة ، وقد يكون التكراران متجاورين وقد يكونا متباعدين ، فإذا كانا متجاورين يمكن ضم الفئتين المقابلتين لهما في فئة واحدة يعتبر مجموعي طوليهما على أنه الفئة المنوالية . أما إذا كانا متباعدين فيصعب ذلك ويحل التمرين مرتين لتحديد القيم المنوالية .

مثـال (٦) :

فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الدخل الشهري بالجنيه:

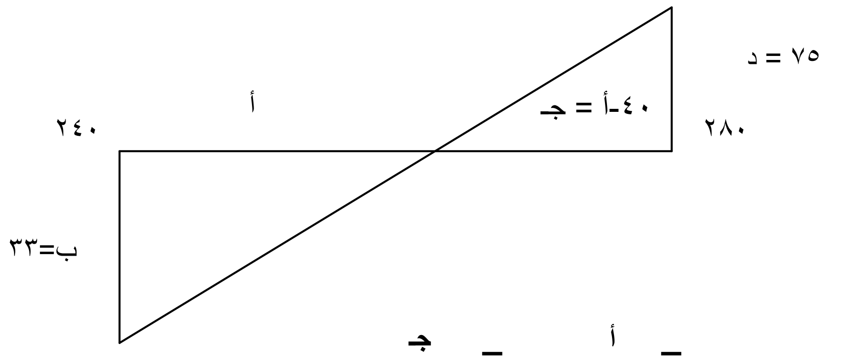
فئات الدخل	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٨٠-	٣٠٠-	٣٢٠-
عدد العاملين	٦٨	٩٢	١٢٥	١٢٥	٥٠	٣٠	١٠

المطلوب: إيجاد المنوال .

الحـــــل

ف	ك	فروق
٢٠٠-	٦٨	
٢٢٠-	٩٢	٣٣=ب
٢٤٠-	١٢٥	التكرار المنوالي
٢٦٠-	١٢٥	
٢٨٠-	٥٠	٧٥ = د
٣٠٠-	٣٠	
٣٢٠-٣٤٠	١٠	

(١) الطريقة الرياضية :



$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{٣٣}} = \frac{\text{٤٠ - أ}}{\text{٧٥}}$$

٧٥أ = ٣٢٠ - ٣٣ أ   ومنها : أ = ١٢.٢٢

المنوال = ٢٤٠ + ١٢.٢٢ = ٢٥٢.٢٢ ألف جنيه

مثال (٧) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات المبيعات اليومية (القيمة بالألف جنيه) :

فئات المبيعات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
عدد الشركات	٥٤	٧٦	٢٢٥	١٠٥	٢٣	١٠	٧

المطلوب: إيجاد المنوال .

الحـــــل

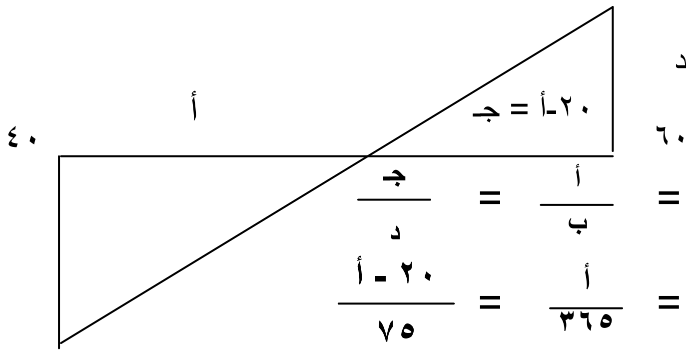
- يلاحظ أن التوزيع غير منتظم لأن طول الفئة الثالثة (٤- ٦٠) يختلف عن أطوال باقي الفئات ، ولذلك يلزم تعديل التكرارات ، وصولا إلى التكرار المعدل الصحيح .

ف	ك	ك م	ك م ص
٢٠-	٥٤	٥.٤٠	٥٤٠
٣٠-	٧٦	٧.٦٠	٧٦٠
٤٠-	٢٢٥	١١.٢٥	١١٢٥
٦٠-	١٠٥	١٠.٥٠	١٠٥٠
٧٠-	٢٣	٢.٣٠	٢٣٠
٨٠-	١٠	١.٠٠	١٠٠
٩٠-١٠٠	٧	٠.٧٠	٧٠

ب = ٣٦٥
التكرار المنوالي
د = ٧٥

* تم ضرب التكرارات المعدلة في (١٠٠) كمعامل للتخلص من الكسور

الطريقة الرياضية :



د = ٧٥

$= \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

$= \frac{أ}{٣٦٥} = \frac{٢٠ - أ}{٧٥}$

١٧٥أ = ٧٣٠٠ - ٣٦٥ أ   ومنها : أ = ١٦.٥٩

المنوال =   ٤٠ + ١٦.٥٩ = ٥٦.٥٩ ألف جنيه

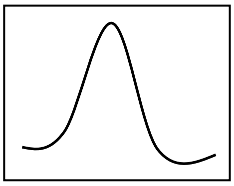
العلاقة بين المتوسطات :

يرتبط المتوسطات الثلاث : الوسط الحسابي والوسيط والمنوال بعلاقة معينة على شكل التوزيع (المنحني) ، يمكن توضيحها كما يلي :

١- التوزيع الطبيعي :

إذا كانت البيانات يمثلها توزيع طبيعي متماثل (شكل الجرس) فإن المتوسطات الثلاثة تتساوى ، بمعني أن :

الوسط الحساب = الوسيط = المنوال



٢- المنحني الملتوى ناحية اليمين :

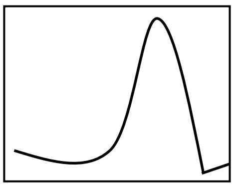
إذا كان المنحني به التواء ناحية اليمين ، فإن العلاقة بين المتوسطات تكون كما يلي :

الوسط الحساب> الوسيط >المنوال

٣- المنحني الملتوى جهة اليسار :

إذا كان المنحني به التواء ناحية اليسار ، فإن العلاقة تأخذ الشكل العكسي حيث

المنوال > الوسيط>الوسط الحسابي



تطبيقـات الفصل الثالث

١- فيما يلى توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئـات الأربـاح المحققة بالألف جنيه شهريا :

فئات الربح	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
عدد الشركات	٤٤	٦٦	٩٥	١١٠	٥٥	٢٠	٥	٥

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي للربح .

٢- إيجاد الوسيط بالرسم فقط .

٣- تحديد نسبة الشركات التي تربح أقل من ٣٣ الف ج .

٤- إيجاد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٢- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مدة عمل الشركة بالسوق (المدة بالسنوات) :

فئات المدة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
عدد الشركات	٥٤	٨٦	١٢٠	٧٠	٤٥	١٥	١٠

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي لأعمار الشركات .

٢- إيجاد الوسيط بالحساب فقط .

٣- تحديد عدد الشركات التي تعمل في السوق لمدة ١٢ سنة فأكثر .

٤- تحديد نسبة الشركات التي تبلغ مدة عملها ١٨ سنة فأكثر .

٥- تحديد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه .

فئات الأجر	٤٥٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٦٥٠-	٧٠٠-	٧٥٠-	٨٠٠-
عدد الشركات	٧٥	١٢٥	٣٥٠	٢١٠	٢٥	١٠	٥

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي.

٢- إيجاد الوسيط بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم) .

٣- تحديد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٤-فيما يلي توزيع مجموعة من الأسر بحسب فئات المنفق على التعليم بالجنيه شهريا :

فئات الإنفاق	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٧٠-	٣٠٠-	٣٢٠-	٣٤٠- ٣٥٠
عدد الأسر	٧٠	١٢٥	٣٤٥	٣٤٥	٤٥	١٥	٥

والمطلوب: تحديد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٥- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الأسبوعي بالجنيه :

فئات الأجر	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-١١٠
عدد العاملين	٣٥	٥٢	٦٠	٨٥	٤٥	١٣	١٠

والمطلوب : إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال مع رسم المنحني الذي يمثل التكرارات .

الفصـــل الرابع

متوسط الانحرافات المطلقـة

يعتمد متوسط الانحرافات المطلقة على مقاييس النزعة المركزية الوسط الحسابي والوسيط والمنوال . ويطلق عليه الانحراف المتوسط عن المؤشر الذي يرتبط به. ومع أنه يحسب للمفردات فهو يحسب أيضا للتوزيعات التكرارية البسيطة، ويرتكز أساسا على إيجاد قيمة المقياس المرغوب تحديد الانحراف عنه ثم تهمل الإشارة السالبة وصولا إلى الانحرافات المطلقة ، ثم تقسم على عدد المفردات أو مجموع التكرارات حسب البيانات المستخدمة للحصول على الانحراف المتوسط .

وتجدر الإشارة إلى أن مقاييس النزعة المركزية ونعني بها الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تهتم بتحديد مقياس لتركز القيم حول نقطة معينة، هذا في حين ان الانحراف المتوسط يهدف إلى حساب التشتت حول النقطة المشار إليها .

<u>أولا : في حالة المفردات :</u>

بفرض أن لدينا مجموعة مفردات هي :

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، .... $س_{ن}$

فإنه يمكن تحديد الانحراف المتوسط لكل مقياس من مقاييس النزعة المركزية كما يلي:

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحساب} = \frac{\text{مجـ}\,(س - \overline{س})}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ}\,(س - \text{الوسيط})}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\textbf{مجـ}\,(س - \textbf{المنوال})}{ن}$$

مثـال (١) :

فيما يلي بيان بإنتاجية مجموعة من العاملين من الوحدات :

١٥ ، ١٨ ، ١٢ ، ٢٥ ، ١٥

احسب الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

الحــل

(١) الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابي :

س	$س - \overline{س}$
١٥	٢
١٨	١
١٢	٥
٢٥	٨
١٥	٢
٨٥	١٨

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٨٥}{٥} = ١٧$$

$$\boxed{الانحراف\ المتوسط = \frac{مجـ (س - \overline{س})}{ن}}$$

$$الانحراف\ المتوسط = \frac{١٨}{٥} = ٣,٦$$

ملاحظة : تهمل الإشارة السالبة الناتجة عن طرح الوسط الحسابي من قيم المفردات .

(٢) الانحراف المتوسط عن الوسيط :

لإيجاد قيمة الوسيط يعاد ترتيب المفردات .

١٢ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢٥

عدد المفردات فرديا

الوسيط = ١٥

س	س – الوسيط
١٥	٠
١٨	٣
١٢	٣
٢٥	١٠
١٥	٠
	١٦

الانحراف المتوسط عن الوسيط = مجـ (س-الوسيط) / ن

الانحراف المتوسط عن الوسيط = ١٦ / ٥ = ٣.٢

(٣) الانحراف المتوسط عن المنوال :

المنوال = ١٥ = القيمة الشائعة (الأكثر تكرارا)

س	س – المنوال
١٥	٠
١٨	٣
١٢	٣
٢٥	١٠
١٥	٠
	١٦

الانحراف المتوسط عن المنوال = مجـ (س-المنوال) / ن

الانحراف المتوسط = ١٦ / ٥ = ٣.٢

ثانيا : <u>في حالة التوزيعات</u> :

يجب ملاحظة أننا في حالة التوزيعات نتعامل دائما مع مراكز الفئات (س) والتكرارات (ك) مع مراعاة إهمال الإشارة السالبة في جميع الأحوال .

مثال (٢) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه :

لفئات الربح	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
عدد الشركات	٢٥	٦٠	١١٥	٥٠	٣٠	١٥	٥

احسب قيمة الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات المطلقة) لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

الحــل

(١) متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي :

ف	ك	س	حس	ك حس	س - س̄	ك(س-س̄)
٣٠-	٢٥	٣٥	٣٠-	٣-	٧٥-	٢٢.١٧	٥٥٤.٢٥
٤٠-	٦٠	٤٥	٢٠-	٢-	١٢٠-	١٢.١٧	٧٣٠.٢٠
٥٠-	١١٥	٥٥	١٠-	١-	١١٥-	٢.١٧	٢٤٩.٥٥
٦٠-	٥٠	(٦٥)	٠	٠	٠	٧.٨٣	٣٩١.٥٠
٧٠-	٣٠	٧٥	١٠	١	٣٠	١٧.٨٣	٥٣٤.٩٠
٨٠-	١٥	٨٥	٢٠	٢	٣٠	٢٧.٨٣	٤١٧.٤٥
٩٠-١٠٠	٥	٩٥	٣٠	٣	١٥	٣٧.٨٣	١٨٩.١٥
مجموع	٣٠٠	-	-	-	٢٣٥-	-	٣٠٦٧.٠٠

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك حس}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}$$

$$\text{س} = \frac{-٢٣٥}{٣٠٠} \times ١٠ + ٦٥ = ٥٧,١٧$$

$$\text{متوسط الانحرافات المطلقة} = \frac{\text{مجـ [ك (س-}\overline{\text{س}}\text{)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{متوسط الانحرافات المطلقة} = \frac{٣٠٦٧}{٣٠٠} = ١٠.٢٢٣$$

(٢) الانحرافات عن الوسيط :

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

ف	ك ص
أقل من ٣٠	٠
أقل من ٤٠	٢٥
أقل من ٥٠	٨٥
أقل من ٦٠	٢٠٠
أقل من ٧٠	٢٥٠
أقل من ٨٠	٢٨٠
أقل من ٩٠	٢٩٥
أقل من ١٠٠	٣٠٠

١٥٠
ترتيب
الوسيط

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٣٠٠}{٢} = ١٥٠$$

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدني للفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الوسيط} = ٥٠ + \frac{١٥٠ - ٨٥}{٢٠٠ - ٨٥} \times ١٠ = ٥٥.٦٥$$

تحديد الانحرافات عن الوسيط:

ف	ك	س	س – الوسيط	ك (س – الوسيط)
٣٠-	٢٥	٣٥	٢٠.٦٥	٥١٦.٢٥
٤٠-	٦٠	٤٥	١٠.٦٥	٦٣٩.٠٠
٥٠-	١١٥	٥٥	٠.٦٥	٧٤.٧٥
٦٠-	٥٠	٦٥	٩.٣٥	٤٦.٧٥
٧٠-	٣٠	٧٥	١٩.٣٥	٥٨٠.٥٠
٨٠-	١٥	٨٥	٢٩.٣٥	٤٤٠.٢٥
٩٠-١٠٠	٥	٩٥	٣٩.٣٥	١٩٦.٧٥
مجموع	٣٠٠			٢٤٩٤.٢٥

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ [ك (س- الوسيط)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{٢٤٩٤.٢٥}{٣٠٠} = ٨.٣١$$

(٣) الانحراف المتوسط عن المنوال :

$ك_م$ = ١١٥ التوزيع منتظم

$ف_م$ = ١٠ (٥٠ – ٦٠)

$$= \frac{أ}{ف_م – أ} = \frac{ك_م – ك_م}{ك_م – ك_٢}$$

$$\frac{أ}{١٠ – أ} = \frac{١١٥ - ٦٠}{١١٥ - ٥٠} = \frac{٥٥}{٦٥} = \frac{١١}{١٣}$$

٢٤ أ = ١١٠ ومنها : أ = ٤.٥٨

المنوال = ٥٠ + ٤.٥٨ = ٥٤.٥٨

ف	ك	س	س – المنوال	ك (س – المنوال)
٣٠-	٢٥	٣٥	١٩.٥٨	٤٨٩.٥٠
٤٠-	٦٠	٤٥	٩.٥٨	٥٧٤.٨٠
٥٠-	١١٥	٥٥	٠.٤٢	٤٨.٣٠
٦٠-	٥٠	٦٥	١٠.٤٢	٥٢١.٠٠
٧٠-	٣٠	٧٥	٢٠.٤٢	٦١٢.٦٠
٨٠-	١٥	٨٥	٣٠.٤٢	٤٥٦.٣٠
٩٠-١٠٠	٥	٩٥	٤٠.٤٢	٢٠٢.٧٠
مجموع	٣٠٠			٢٩٠٤.٦٠

متوسط الانحرافات المطلقة = $\frac{\text{مجـ [ك (س- المنوال)]}}{\text{مجـ ك}}$

متوسط الانحرافات المطلقـة = $\frac{٢٩٠٤.٦}{٣٠٠}$ = ٩.٦٨٢

مثال (٣) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الطلاب بحسب فئات الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان أحد المقررات الدراسية :

فئات الدرجات	٠-	٧-	١٠-	١٣-	١٦-	١٨-٢٠	مجموع
عدد الطلاب	١٥	١٨	١٤٧	٩٠	٢٠	١٠	٣٠٠

احسب متوسط الانحرافات المطلقة لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

الحــل

(١) الوسط الحسابي :

ف	ك	س	$ح_{س}$	ك $ح_{س}$	س - س/	ك(س-س/)
٠-	١٥	٣.٥	-٨	-١٢٠	٨.٩٤	١٣٤.١٠
٧-	١٨	٨.٥	-٣	-٥٤	٣.٩٤	٧٠.٩٢
١٠-	١٤٧	(١١.٥)	٠	٠	٠.٩٤	١٣٨.١٨
١٣-	٩٠	١٤.٥	٣	٢٧٠	٢.٠٦	١٨٥.٤٠
١٦-	٢٠	١٧	٥.٥	١١٠	٤.٥٦	٩١.٢٠
١٨-٢٠	١٠	١٩	٧.٥	٧٥	٦.٥٦	٦٥.٦٠
مجموع	٣٠٠	-	-	٢٨١	-	٦٨٥.٤٠

$$\text{س} = \boxed{\frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{٢٨١}{٣٠٠} + ١١.٥ = 12.٤٤$$

$$\boxed{\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـ [ك (س-}\overline{\text{س}}\text{)]}}{\text{مجـ ك}}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابي} = \frac{٦٨٥.٤}{٣٠٠}$$

٢- المنـوال :

يلاحظ أن التوزيع غير منتظم ، ولابد من تعديل التكرارات.

ف	ك	ك م	ك م ص
-٠	١٥	٢.١٤	٢١٤
-٧	١٨	٦.٠٠	٦٠٠
-١٠	١٤٧	٤٩.٠٠	٤٩٠٠
-١٣	٩٠	٣٠	٣٠٠٠
-١٦	٢٠	١٠	١٠٠٠
١٨-٢٠	١٠	٥	٥٠٠

التكرار المنوالي

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ف}_{\text{م}} - \text{أ}} = \frac{\text{ك}_{\text{م}} - \text{ك}_{١}}{\text{ك}_{\text{م}} - \text{ك}_{٢}}$$

$$= \frac{\text{أ}}{٣ - \text{أ}} = \frac{٤٩٠٠ - ٦٠٠}{٤٩٠٠ - ٣٠٠٠} = \frac{٤٣٠٠}{١٩٠٠} = \frac{٤٣}{١٩}$$

١٩أ = ١٢٩ _ ٤٣ أ ومنها : أ = ٢,١

المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ

= ١٠ + ٢.١ = ١٢.١

ويتحدد الانحراف المتوسط كما يلي :

ف	ك	س	س – المنوال	ك (س – المنوال)
-٠	١٥	٣.٥	٨.٦	١٢٩.٠٠
-٧	١٨	٨.٥	٣.٦	٦٤.٨
-١٠	١٤٧	١١.٥	٠.٦	٨٨.٢
-١٣	٩٠	١٤.٥	٢.٤	٢١٦.٠
-١٦	٢٠	١٧	٤.٩	٩٨.٠
١٨-٢٠	١٠	١٩	٦.٩	٦٩.٠
مجموع	٣٠٠			٦٦٥.٠

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\text{مجـ [ك (س- المنوال)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{٦٦٥}{٣٠٠} = ٢.٢٢$$

وتتحدد الانحرافات كما يلي :

ف	ك	س	س – الوسيط	ك (س – الوسيط)
٠-	١٥	٣.٥	٨.٩	١٣٣.٥
٧-	١٨	٨.٥	٣.٩	٧٠.٢
١٠-	١٤٧	١١.٥	٠.٩	١٣٢.٣
١٣-	٩٠	١٤.٥	٢.١	١٨٩.٠٠
١٦-	٢٠	١٧	٤.٦	٩٢.٠٠
١٨-٢٠	١٠	١٩	٦.٦	٦٦.٠٠
مجموع	٣٠٠			٦٨٣.٠٠

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ [ك (س- الوسيط)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٦٨٣}{٣٠٠} = ٢,٢٨$$

تطبيقات الفصل الرابع

١- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الضرائب المدفوعة بالألف جنيه سنويا :

فئات الضرائب	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	٦٥	٩٧	١٢٣	٨٠	٤٥	٣٠	١٠	٤٥٠

والمطلوب :

إيجاد قيمة الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات المطلقة) لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٢- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه .

فئات الأجر	٢٠٠-	٢١٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٧٠-	٢٨٠-	٢٩٠-
عدد العاملين	٣٥	٧٥	١٦٨	١٦٨	٩٣	٤٧	٩	٥

والمطلوب :

تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا :

فئات الربح	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-١٠٠
عدد الشركات	٥٤	٨٦	١٢٠	٩٥	٧٥	٦٠	١٠

والمطلوب :

تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٤- فيما يلي توزيع مجموعة من الطلاب بحسب فئات الطول بالسنتيمتر:

فئات الطول	١٤٥-	١٥٠-	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-
عدد الطلاب	٦٠	٨٥	١٢٥	١٨٠	٧٥	٥٥	٢٠

والمطلوب :

تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال مع تحديد المنوال والوسيط بالرسم ، وتحديد منحني العلاقة بين المتوسطات .

الباب الثانى
مقاييس التشتت
Measures of Dispersion

الفصل الأول : الإنحراف المعيارى

الفصـــــل الأول
الانحـــــراف المعيـــاري
Standard Deviation

يعتبر الانحراف المعياري أحد أهم مقاييس التشتت، وتزداد أهميته إذا علمنا أنه يعتمد على جميع القيم من ناحية كما أنه لا يحتاج إلى إهمال الاشارات السالبة لفروق المتوسط الحسابي حيث يستخدم مربع الانحرافات، ويتصف الانحراف المعيار بالدقة لاعتماده على إيجاد الجذر التربيعي لمربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي. ويمكن أن نرمز للانحراف المعياري بالرمز (ع).

أولا : إيجاد الانحراف المعيارى في حالة المفردات :

يمكن إيجاد الانحراف المعيار (ع) لمجموعة المفردات :

$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، .... س_ن$

وذلك بعدة طرق ، كما سبق استخدامه في الوسط الحسابي.

١- الطريقة المباشرة :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^٢}$$

مثـال (١) :

فيما يلي الأرباح السنوية لمجموعة من الشركات بالألف جنيه : ٨٥٠ ، ٤٧٠ ، ٦٩٠ ، ٥٣٠ ، ٩١٠

احسب الانحراف المعياري .

الحـل

س	$س^٢$
٨٥٠	٧٢٢٥٠
٤٧٠	٢٢٠٩٠٠
٦٩٠	٤٧٦١٠٠
٥٣٠	٢٨٠٩٠٠
٩١٠	٨٢٨١٠٠
٣٤٥٠	٢٥٢٨٥٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٢٥٢٨٥٠٠}{٥} - \left(\frac{٣٤٥}{ن}\right)^{٢}}$$

= ١٧٢,٠٤٧ ألف جنيه

ويعتمد الانحراف المعياري على جميع قيم المجموعة كما هو الحال في الانحراف المتوسط ومن الواضح أننا نحصل على انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ثم نقوم بتربيع هذه الانحرافات بدون إهمال الإشارات السالبة ونحصل على متوسط مربعاتها ، وهذا ما يسمي (التباين) ونرمز له بالرمز ($ع^{٢}$) ، وبأخذ الجذر التربيعى للتباين نحصل على الانحراف المعياري، ويمكن توضيح ذلك بحل المثال السابق كما يلي :

س	س – $\overline{س}$	$(س-\overline{س})^{٢}$
٨٥٠	١٦٠	٢٥٦٠٠
٤٧٠	٢٢٠-	٤٨٤٠٠
٦٩٠	٠	٠
٥٣٠	١٦٠-	٢٥٦٠٠
٩١٠	٢٢٠	٤٨٤٠٠
٣٤٥٠		١٤٨٠٠٠

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٣٤٥٠}{٥} = ٦٩٠$$

$$ع^{٢} = \frac{مجـ (س - \overline{س})^{٢}}{ن} = \frac{١٤٨٠٠٠}{٥} = ٢٩٦٠٠$$

$$ع = \sqrt{٢٩٦٠٠} = ١٧٢.٠٤٧$$

مثال (٢) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان أحد المقررات الدراسية :

١٨ ، ١٢ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٤

احسب الانحراف المعياري .

الحــل

س	س – $\overline{س}$	$(س-\overline{س})^{٢}$
١٨	٣	٩
١٢	٣-	٩
٢٠	٥	٢٥
١١	٤-	١٦
١٤	١-	١
٧٥		٦٠

$$\overline{س} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٦٠}{٥}} = ٣.٤٦٤$$

ملاحظـات :

- يلاحظ أننا نحصل على الوسط الحسابي للمفردات ، ثم نوجد انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ، وبطبيعة الحال فإن مجموع انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يساوى الصفر، ولذلك وحتى لا نهمل الإشارات السالبة فإننا نحصل على مربع الانحرافات والذي نرمز إليه بالرمز $(س - س^{/})^{٢}$ وبذلك تتلاشى الإشارات السالبة دون الحاجة إلى إهمالها ، ثم نحصل على مجموع مربعات الانحرافات .
- التباين $(ع^{٢})$ هو متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم أو المفردات عن الوسط الحسابي = $\frac{مجـ (س - \overline{س})^{٢}}{ن}$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين (ع) .
- يلاحظ أننا نصل إلى نفس النتيجة لأن المعادلة واحدة وإن اختلفت في شكل صورتها .
- قد يفضل الباحث أو الدارس صورة على أخرى لسهولة التعامل مع الأرقام ولكن النتيجة واحدة في جميع الأحوال .

حـل آخـر

س	$س^٢$
١٨	٣٢٤
١٢	١٤٤
٢٠	٤٠٠
١١	١٢١
١٤	١٩٦
٧٥	١١٨٥

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^٢}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١١٨٥}{٥} - \left(\frac{٧٥}{٥}\right)^٢} = ٣,٤٦٤$$

مثـال (٣) :

فيما يلي أوزان مجموعة أشخاص بالكيلو جرام :

٨٢ ، ٦٥ ، ٧٨ ، ٨٤ ، ٦٩ ، ٩١ ، ٧٧ ، ٦٤

احسب الانحراف المعيار للوزن ، والوسط الحسابي .

الحـل

س	س^٢
٨٢	٦٧٢٤
٦٥	٤٢٢٥
٧٨	٦٠٨٤
٨٤	٧٠٥٦
٦٩	٤٧٦١
٩١	٨٢٨١
٧٧	٥٩٢٩
٦٤	٤٠٩٦
٦١٠	٤٧١٥٦

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٦١٠}{٨} = ٧٦.٢٥ \text{ كيلو جرام}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^٢}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^٢}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{٤٧١٥٦}{٨} - \left(\frac{٦١٠}{٨}\right)^٢} = ٨.٩٧ \text{ كجم}$$

يمكـن ملاحظـة أن المفـردات الكبيـرة القيمـة يمكـن أن يترتـب عليهـا ضـخامة الأعـداد، ولـذلك يمكـن توسـيط الطـرق السـابق الإشـارة إليهـا عنـد دراسـة الوسـط الحسابي وهي : طريقة الانحرافات البسيطة ، وطريقة الانحرافات المختزلة .

حـل آخـر

س	س – $\bar{س}$	$(س-\bar{س})^٢$
٨٢	٥.٧٥	٣٣.٠٦٢٥
٦٥	١١.٢٥-	١٢٦.٥٦٢٥
٧٨	١.٧٥	٣.٠٦٢٥
٨٤	٧.٧٥	٦٠.٠٦٢٥
٦٩	٧.٢٥-	٥٢.٠٦٢٥
٩١	١٤.٧٥	٢١٧.٥٦٢٥
٧٧	٠.٧٥	٠.٥٦٢٥
٦٤	١٢.٢٥-	١٥٠.٠٦٢٥
٦١٠		٦٤٣.٠٠٠٠

$$\bar{س} = \frac{٦١٠}{٨} = ٧٦.٢٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ(س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٦٤٣}{٨}} = ٨.٩٧ \text{ كجم}$$

ملاحظـة :

يمكن بمتابعة الخطوات التأكد من صحة الحل ، بجمع العمود الثاني والذي يعبر عن انحرافات المفردات عن الوسط الحسابي نجد أن المجموع يساوي الصفر .

٢- طريقة الانحرافات البسيطة لايجاد الانحراف المعياري :

تعتمد هذه الطريقة على اختيار مفردة تتوسط المفردات من حيث القيمة واعتبارها وسطا فرضيا (أ) وطرحها من جميع المفردات لنحصل على الانحرافات البسيطة ($ح_س$) ، وتأخذ المعادلات الشكل التالي :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ ح_س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ\ ح_س}{ن}\right)^٢}$$

مثال (٤) :

فيما يلي الأرباح السنوية لمجموعة من المحلات بالألف جنيه :

٨٥٠ ، ٦٧٥ ، ٧٢٥ ، ٧٤٤ ، ٥٥٠

احسب الانحراف المعياري .

الحــل

س	$ح_س$ = س-أ	$ح_س^٢$
٨٥٠	١٢٥	١٥٦٢٥
٦٧٥	٥٠-	٢٥٠٠
(٧٢٥)	٠	٠
٧٤٤	١٩	٣٦١
٥٥٠	١٧٥-	٣٠٦٢٥
	٨١-	٤٩١١١

أ = ٧٢٥

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ ح^٢_س}{ن} - \left(\frac{مجـ\ ح_س}{ن}\right)^٢}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٤٩١١١}{٥} - \left(\frac{٨١}{٥}\right)^٢} = ٩٧,٧٧٤ \text{ ألف جنيه}$$

مثـال (٥) :

فيما يلي الأجر الشهري لمجموعة من العاملين بالجنيه :

٣٦٥ ، ٩٤٥ ، ٧١٥ ، ٦٨٥ ، ٥٧٠

احسب الانحراف المعياري .

الحــل

س	$\text{ح}_{\text{س}}$ = س-أ	$\text{ح}^{٢}_{\text{س}}$
٣٦٥	٣٢٠-	١٠٢٤٠٠
٩٤٥	٢٦٠	٦٧٦٠٠
٧١٥	٣٠	٩٠٠
(٦٨٥)	٠	٠
٥٧٠	١١٥-	١٣٢٢٥
	١٤٥-	١٨٤١٢٥

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^{٢}_{\text{س}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ح}_{\text{س}}}{\text{ن}}\right)^{٢}}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{١٨٤١٢}{٥} - \left(\frac{١٤٥-}{٥}\right)^{٢}} = \text{٩٧,٧٧٤ ألف جنيه}$$

$$= \sqrt{٣٥٩٨٤} = ١٨٩,٦٩٤$$

حــل آخــر

س	(س – $\bar{\text{س}}$)	(س – $\bar{\text{س}}$)^{٢}
٣٦٥	٢٩١-	٨٤٦٨١
٩٤٥	٢٨٩	٨٣٥٢١
٧١٥	٥٩	٣٤٨١
٦٨٥	٢٩	٨٤١
٥٧٠	٨٦-	٧٣٩٦
٣٢٨٠	صفر	١٧٩٩٢٠

$$\bar{س} = \frac{٣٢٨٠}{٥} = ٦٥٦$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

$ع = \sqrt{\frac{١٧٩٩٢٠}{٥}} = ١٨٩.٦٩٤$ وهي نفس النتيجة .

٣- طريقة الانحرافات المختزلة لإيجاد الانحراف المعياري :

أوضحت الأمثلة السابقة ان طريقة الانحرافات البسيطة بطرح وسط فرضي أدت إلى تصغير الأعداد إلى حد ما غير أنه بقسمة الانحرافات البسيطة على مقدار ثابت (ث) يمكن الوصول إلى الانحرافات المختزلة .

$$\boxed{\bar{ح}_س = ح_س \div ث}$$

وتأخذ معادلة الانحراف المعياري الشكل التالي :

$$\boxed{ع = \sqrt{\left[\frac{مجـ \bar{ح}^٢_س}{ن} - \left(\frac{مجـ \bar{ح}_س}{ن}\right)^٢\right]} \times ث}$$

مثـال (٦):

باستخدام بيانات مثال ٥ . احسب الانحراف المعياري وباستخدام طريقة الانحرافات المختزلة .

الحــل

س	$ح_س$ = س-أ	$\bar{ح}_س = ح_س \div ث$	$\bar{ح}^٢_س$
٣٦٥	-٣٢٠	-٦٤	٤٠٦٩
٩٤٥	٢٦٠	٥٢	٢٧٠٤
٧١٥	٣٠	٦	٣٦
(٦٨٥)	٠	٠	٠
٥٧٠	-١١٥	-٢٣	٥٢٩
		-٢٩	٧٣٦٥

أ = ٦٨٥ ث = ٥

$$ع = \sqrt{\left(\frac{مجـ \bar{ح}س^{٢}}{ن}\right) - \left(\frac{مجـ \bar{ح}س}{ن}\right)^{٢}} \times ث$$

$$ع = \sqrt{\left(\frac{٧٣٦٥}{٥}\right) - \left(\frac{-٢٩}{٥}\right)^{٢}} + ٥ = ١٨٩,٦٩٤ ج$$

ثانيا : <u>الانحراف المعياري من التوزيعات التكرارية البسيطة</u> :

يمكن إيجاد التباين ($ع^{٢}$) والانحراف المعياري (ع) من التوزيعات التكرارية البسيطة بغض النظر عن نوع التوزيع منتظم أو غير منتظم – وكما أن الوسط الحسابي لا يتأثر بنوع التوزيع فنجد أيضا أن التباين والانحراف المعياري لا يتأثر أي منهما بذلك. ويعتمد إيجاد التباين والانحراف المعياري على تحديد مراكز الفئات ثم استخدام إحدى الطرق المختلفة السابق دراستها .

١- الطريقة المباشرة :

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{مجـ ك س^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك س}{مجـ ك}\right)^{٢}$$

وبأخذ الجذر التربيعي نحصل على الانحراف المعياري :

$$ع = \sqrt{\left(\frac{مجـ ك س^{٢}}{مجـ ك}\right) - \left(\frac{مجـ ك س}{مجـ ك}\right)^{٢}}$$

مثـال (٧) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الإعلان (القيمة بالألف جنيه) :

ف	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-١١٠	مجموع
ك	٦٥	٩٠	١٢٥	١٥٥	٨٥	٤٥	٣٥	٦٠٠

والمطلوب :

١- إيجاد الانحراف المعياري.

٢- إيجاد التباين .

الحــل

ف	ك	س	ك س	ك $\text{س}^{٢}$
٤٠-	٦٥	٤٥	٢٩٢٥	١٣١٦٢٥
٥٠-	٩٠	٥٥	٤٩٥٠	٢٧٢٢٥٠
٦٠-	١٢٥	٦٥	٨١٢٥	٥٢٨١٢٥
٧٠-	١٥٥	٧٥	١١٦٢٥	٨٧١٨٧٥
٨٠-	٨٥	٨٥	٧٢٢٥	٦١٤١٢٥
٩٠-	٤٥	٩٥	٤٢٧٥	٤٠٦١٢٥
١٠٠-١١٠	٣٥	١٠٥	٣٦٧٥	٣٨٥٨٧٥
مجموع	٦٠٠		٤٢٨٠٠	٣٢١٠٠٠٠

$$\text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ ك س٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٣٢١٠٠٠٠}{٦٠٠} - \left(\frac{٧٢٨٠٠}{٦٠٠}\right)^{٢} = ٢٦١,٥٥٦$$

$$\text{ع}^{٢} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك س٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{٣٢١٠٠٠٠}{٦٠٠} - \left(\frac{٤٢٨٠٠}{٦٠٠}\right)^{٢}}$$

ويمكن الحصول على الإنحرافالمعيارى عن طريق التباين لهذا الجذر التربيعى للتباين

$$\text{أو ع} = \sqrt{٢٦١,٥٥٦} = ١٦,١٧٣$$

يلاحظ أنـه يمكن الحصول علـى التبـاين ، وإيجـاد الجـذر التربيعـي للنـاتج للحصول على الانحراف المعياري ، كما يمكن الوصول إلـى الانحـراف المعيـاري ثم إيجاد مربع الناتج وصولا إلى التباين .

طريقة الانحرافات البسيطة :

ف	ك	س	$ح_س$	ك $ح_س$	ك $ح_س$
٤٠-	٦٥	٤٥	٣٠-	١٩٥٠-	٥٨٥٠٠
٥٠-	٩٠	٥٥	٢٠-	١٨٠٠-	٣٦٠٠٠
٦٠-	١٢٥	٦٥	١٠-	١٢٥٠-	١٢٥٠٠
٧٠-	١٥٥	(٧٥)	٠	٠	٠
٨٠-	٨٥	٨٥	١٠	٨٥٠	٨٥٠٠
٩٠-	٤٥	٩٥	٢٠	٩٠٠	١٨٠٠٠
١٠٠-١١٠	٣٥	١٠٥	٣٠	١٠٥٠	٣١٥٠٠
مجموع	٦٠٠			٢٢٠٠-	١٦٥٠٠٠

أ = ٧٥

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{\text{مجـ ك } ح_س^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك } ح_س}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}$$

$$ع^{٢} = \frac{١٦٥٠٠٠}{٦٠٠} - \left(\frac{-٢٢٠٠}{٦٠٠}\right)^{٢} = ٢٦١,٥٥٦$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{٢٦١,٥٥٦} = ١٦,١٧٣$$

** **طريقة الانحرافات المختزلة :**

ف	ك	س	$ح_س$	$\bar{ح}_س$	ك $\bar{ح}_س$	ك $\bar{ح}^{٢}_س$
٤٠-	٦٥	٤٥	٣٠-	٣-	١٩٥-	٥٨٥
٥٠-	٩٠	٥٥	٢٠-	٢-	١٨٠-	٣٦٠
٦٠-	١٢٥	٦٥	١٠-	١-	١٢٥-	١٢٥
٧٠-	١٥٥	(٧٥)	٠	٠	٠	٠
٨٠-	٨٥	٨٥	١٠	١	٨٥	٨٥
٩٠-	٤٥	٩٥	٢٠	٢	٩٠	١٨٠
١٠٠-١١٠	٣٥	١٠٥	٣٠	٣	١٠٥	٣١٥
مجموع	٦٠٠				٢٢٠-	١٦٥٠

أ = ٧٥ ث = ١٠

$$ع = \sqrt{\left(\frac{\text{مجـ }\overline{ح}\text{س}^{٢}}{ن}\right) - \left(\frac{\text{مجـ }\overline{ح}\text{س}}{ن}\right)^{٢}} \times ث$$

$$ع = \sqrt{\left(\frac{١٦٥٠}{٦٠٠}\right) - \left(\frac{-٢٢٠}{٦٠٠}\right)^{٢}} \times ١٠ = ٢٦١,٦٩٤ج$$

<u>ثالثا</u> : <u>معامل الاختلاف المعياري</u> :

يعتبر معامل الاختلاف المعياري مقياسا للتشتت النسبي . وهو عبارة عن نسبة الانحراف المعياري إلى الوسط الحسابي وتأخذ المعادلة الصورة :

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع}{\overline{س}} \times ١٠٠$$

ويمكن الاستفادة من معامل الاختلاف المعياري عند مقارنة نتائج مجتمعين أو عينتين تختلفان في وحدات القياس ، حيث يصعب الاعتماد على المقاييس الأخرى لمقارنة الدخل لمجموعة بالوزن لمجموعة أخرى أو مقارنة الطول بمستوى الإنفاق وهكذا ... وغير خاف أن وحدات قياس أي ظاهرة تعتمد على طبيعة ونوعية وحدات القياس .

ولذلك فإن مقاييس التشتت الأخرى يصعب الاعتماد عليها عند مقارنة الظواهر ويرجع ذلك إلى اختلاف القيمة العددية المستخدمة .

مثال (٨) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان مادتين الرياضة واللغات :

درجات الرياضة	٢٠	١٦	١٧	١٥	١٤	١٦	١١	١٠
درجات اللغات	١٤	١٥	١٨	١٣	١٠	١٢	١٩	١١

والمطلوب : مقارنة نتائج الطلاب في المادتين مبينا الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف المعياري.

الحــل

١- درجات الرياضة (س) :

س	س٢
٢٠	٤٠٠
١٦	٢٥٦
١٧	٢٨٩
١٥	٢٢٥
١٤	١٩٦
١٦	٢٥٦
١١	١٢١
١٠	١٠٠
١١٩	١٨٤٣

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{١٩٦}}{\text{٨}} = \text{١٤,٨٧٥ درجة}$$

$$\text{ع س} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{١٨٤٣}}{\text{٨}} - \left(\frac{\text{١١٩}}{\text{٨}}\right)^{\text{٢}}} = \text{٣,٠١٨ درجة}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{\text{ع س}}{\overline{\text{س}}} \times \text{١٠٠} = \frac{\text{٣,٠١٨}}{\text{١٤,٨٧٥}} \times \text{١٠٠}$$

$$= \text{٢٠.٢٩\%}$$

٢- درجات اللغة (ص) :

ص	ص٢
١٤	١٩٦
١٥	٢٢٥
١٨	٣٢٤
١٣	١٦٩
١٠	١٠٠
١٢	١٤٤
١٩	٣٦١
١١	١٢١
١١٢	١٦٤٠

$$\bar{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{١١٢}{٨} = ١٤ \text{ درجة}$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ ص^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٦٤٠}{٨} - \left(\frac{١١٢}{٨}\right)^{٢}} = ٣ \text{ درجة}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع_{ص}}{\bar{ص}} \times ١٠٠ = \frac{٣}{١٤} \times ١٠٠$$

$$= ٢١.٤٣\%$$

ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي :

المقارنة / المادة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	معامل الاختلاف
الرياضة	١٤.٨٧٥	٣.٠١٨	٢٠.٢٩%
اللغة	١٤	٣	٢١.٤٣%

- يتضح سهولة المقارنة في هذا المثال لأن وحدات القياس واحدة وهي درجات الطلاب في مادتين .
- بمقارنة الوسط الحسابي نجد أن درجات الرياضة نتائجها أفضل من درجات اللغة .
- بمقارنة الانحراف المعياري نجد أن تشتت درجات الرياضة عن الوسط الحسابي أكبر منه في حالة اللغة ، الأمر الذي يستنتج منه أن تركز درجات اللغات حول الوسط الحسابي أفضل من الرياضة .
- بمقارنة الانتشار النسبي – معامل الاختلاف المعياري – نجد أن الانتشار النسبي للرياضة أفضل منه في اللغات ، وهو عكس الاستنتاج السابق .

مثال (٩) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الضريبة المدفوعة بالألف جنيه سنويا :

فئات الضريبة	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	مجموع
عدد الشركات	٦٥	١٢٥	١٥٠	٦٠	٣٠	٢٠	٤٥٠

والمطلوب :

احسب معامل الاختلاف المعياري للضرائب المدفوعة.

الحــل

ف	ك	س	$ح_{س}$	**ح**س	ك **ح**س	ك $ح^{2}$ س
٤٠-	٦٥	٤٥	-٢٠	-٢	-١٣٠	٢٦٠
٥٠-	١٢٥	٥٥	-١٠	-١	-١٢٥	١٢٥
٦٠-	١٥٠	(٦٥)	٠	٠	٠	٠
٧٠-	٦٠	٧٥	١٠	١	٦٠	٦٠
٨٠-	٣٠	٨٥	٢٠	٢	٦٠	١٢٠
٩٠-١٠٠	٢٠	٩٥	٣٠	٣	٦٠	١٨٠
مجموع	٤٥٠				-٧٥	٧٤٥

$$\boxed{\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{-٧٥}}{\text{٤٥٠}} \times \text{١٠} + \text{٦٥} = \text{٦٣.٣٣٣ ألف جنيه}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\left[\frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}^{\text{٢}}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}}\right)^{\text{٢}}\right]} \times \text{ث}$$

$$\text{ع}^{\text{٢}} = \sqrt{\left[\frac{\text{٧٤٥}}{\text{٤٥٠}} - \left(\frac{\text{-٧٥}}{\text{٤٥}}\right)^{\text{٢}}\right]} \times \text{١٠} = \text{١٢.٧٥٨}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times \text{١٠٠}$$

$$= \frac{\text{١٢.٧٥٨}}{\text{٦٣.٣٣٣}} \times \text{١٠٠} = \text{٢٠.١٤٤\%}$$

يتضح مما سبق أنه يمكن حساب معامل الاختلاف المعياري أو التشتت النسبي للبيانات سواء في صورة مفردات او توزيعات تكرارية، ويفيد في تحقيق مقارنة بين مجموعتين سواء كانت نفس وحدات القياس مستخدمة للمجموعتين أو كانت مختلفة. ونوضح ذلك في المثال التالي :

مثال (١٠) :

فيما يلي أطوال مجموعة أشخاص بالسنتيمتر (س) وأوزانهم بالكيلو جرام (ص) :

الطول بالسنتيمتر	١٧٥	١٦٣	١٧٨	١٦٩	١٦٨	١٦٦	١٧٢
الوزن كيلو جرام	٨٠	٧٥	٩٣	٨٢	٧٧	٦٨	٦٩

والمطلوب :

مقارنة الظاهرتين (الوزن والطول).

الحــل

١- الطــول (س) :

س	$س^٢$
١٧٥	٣٠٦٢٥
١٦٣	٢٦٥٦٩
١٧٨	٣١٦٨٤
١٦٩	٢٨٥٦١
١٦٨	٢٨٢٢٤
١٦٦	٢٧٥٥٦
١٧٢	٢٩٥٨٤
١١٩١	٢٠٢٨٠٣

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{١١٩١}{٧} = ١٧٠.١٤٣ \text{ سم}$$

$$ع_س = \sqrt{\frac{٢٠٢٨٠٣}{٧} - \left(\frac{١١٩١}{٧}\right)^٢} = ٤.٨٢٣ \text{ سم}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع_س}{\overline{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٤.٨٢٣}{١٧٠.١٤} \times ١٠٠ = ٢,٨٣٥\%$$

٢- الـوزن (ص) :

ص	ص٢
٨٠	٦٤٠٠
٧٥	٥٦٢٥
٩٣	٨٦٤٩
٨٢	٦٧٢٤
٧٧	٥٩٢٩
٦٨	٤٦٢٤
٦٩	٤٧٦١
٥٤٤	٤٢٧١٢

$$\bar{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{٥٤٤}{٧} = ٧٧.٧١٤ \text{ كجم}$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ ص^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٢٧١٢}{٧} - \left(\frac{٥٤٤}{٧}\right)^{٢}} = ٧.٣٨٩ \text{ كجم}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع_{ص}}{\bar{ص}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٧,٨٩}{٧٧,٧١٤} \times ١٠٠ = ١٠.١٥٣\%$$

ويمكن تلخيص النتائج السابق الحصول عليها في الجدول التالي :

المقارنة / الظاهرة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	معامل الاختلاف
الطول	١٧٠.١٤٣	٤.٨٢٣	٢.٨٣٥%
الـوزن	٧٧.٧١٤	٧.٨٩	١٠.١٥٣%

ومن الواضح أنه يصعب مقارنة الوسط الحسابي والانحراف المعياري للظاهرتين حيث أن وحدات القياس للأولى بالسنتيمتر ووحدات القياس للثانية بالكيلو جرام ، ولذلك يصعب على الباحثين اتخاذ قرار بشأن الظاهرتين سواء الطول أو الوزن . غير أنه من الواضح أن الانتشار النسبي للظاهرتين (معامل الاختلاف المعياري) يشير إلى تشتت الوزن بدرجة أكبر من تشتت الطول .

ويمكن تطبيق نفس الأسلوب إذا كانت بيانات الظاهرتين في شكل توزيعات تكرارية منتظمة أو غير منتظمة ، وبطبيعة الحال ستكون الفئات مختلفة تماما بين التوزيعين ولكن يستطيع الباحث في هذه الحالة إجراء المقارنة باستخدام التشتت النسبي مع مراعاة أنه سيتعامل مع مراكز الفئات والتكرارات في كلا التوزيعين .

وننوه في هذا المجال أن الدراسة والتحليل السابق ينصب كل اهتمامه على ظاهرة واحدة حتى لو تعددت الظواهر التي تجرى المقارنة بينها فإنه يتم قياس كل ظاهرة على حده بدون التعرض لأية علاقة تربط الظاهرتين ولذلك فإن المؤشرات الإحصائية السابق دراستها في مقاييس النزعة المركزية وغيرها سواء الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال أو الانحراف المعياري والتباين ومعامل الاختلاف المعياري جميعها تركز على قياس سلوك أو اتجاه ظاهرة واحدة مهما كانت العلاقة بين الظواهر ومهما كانت وحدات القياس المستخدمة لكل منها ، غير أننا في كثير من المجالات نحتاج إلى تحديد العلاقة بين ظاهرتين ومدى تأثير كل منهما في الأخرى ، وهو ما نتعرض له في الفصول التالية :

مثال (١١) :

إذا علمت أن س عدد ساعات التشغيل ، وأن ص عدد الوحدات المنتجة في أحد المصانع ، وقدمت إليك البيانات التالية :

مجـ س = ٧٥ ، مجـ ص = ٤٥٠ ، مجـ س ص = ٧٢٢٠

مجـ س^{٢}=١١٨٥، مجـ ص^{٢} =٤٠٥٠٠، مجـ (س-س/)^{٢}= ٦٠

مجـ (ص – $\bar{ص}$)^{٢} = ٤٠٠٠ ، ن = ٥

المطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي للمتغيرين س ، ص .

٢- تحديد معامل الاختلاف المعياري للمتغيرين .

الحــل

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{٧٥}}{\text{٥}} = \text{١٥}$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{\text{٤٥٠}}{\text{٥}} = \text{٩٠}$$

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{١١٨٥}}{\text{٥}} - \left(\frac{\text{٧٥}}{\text{٥}}\right)^{\text{٢}}} = \text{٣,٤٦٤}$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{٤٠٥٠٠}}{\text{٥}} - \left(\frac{\text{٤٥٠}}{\text{٥}}\right)^{\text{٢}}} = \text{صفر}$$

معامل الاختلاف المعياري لساعات العمل (س) :

$$= \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\bar{\text{س}}} \times \text{١٠٠} = \frac{\text{٣,٤٦٤}}{\text{١٥}} \times \text{١٠٠} = \text{٢٣,٠٩٣}\%$$

معامل الاختلاف المعياري لساعات العمل (ص) :

$$= \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\bar{\text{ص}}} \times \text{١٠٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{٩٠}} \times \text{١٠٠} = \text{صفر}\%$$

تطبيقات الفصل الأول

٥- قامت إدارة البحوث بمصانع الأذكياء بدراسة عدد العاملين (س) وعدد الوحدات المنتجة (ص) وقدمت إليك البيانات التالية :

مجـ س= ٢٠٠ مجـ س^{٢} = ٤٢٩٠ مجـ ص^{٢} = ٨١٤٩٢

مجـ (س–$\overline{س}$)= ٤٦ مجـ (س-س$^{/}$)^{٢} = ٢٩٠ مجـ ص = ٩٠٠

مجـ (ص–$\overline{ص}$)= ٥٤ مجـ (ص-ص$^{/}$)^{٢} = ٤٩٢ مجـ س ص= ١٨٣٤٦

ن = ١٠

والمطلوب :

١- تحديد معامل الاختلاف المعياري لعدد العاملين (س) وكمية الإنتاج

٢- متوسط الانحرافات المطلقة للإنتاج (ص) وعدد العاملين

٦- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الدعاية والإعلان بالألف جنيه سنويا :

فئات المصروفات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	٦٥	٩٥	١٣٠	١٨٠	٥٥	٤٠	١٠	٥٧٥

والمطلوب :

١- إيجاد الانحراف المعيارى والتباين للمصروفات.

٢- تحديد معامل الاختلاف المعياري .

٣- تحديد نسبة الشركات التي تدفع ٥٥ ألف ج فأكثر .

٤- إيجاد المنوال بالحساب والرسم .

٥- تحديد الوسيط بالرسم فقط .

٦- تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٧- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الضرائب المدفوعة بالألف جنيه سنويا :

فئات الضريبة	١٢٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-	١٧٠-	١٧٥-	١٨٠-١٨٥	مجموع
عدد الشركات	٩٠	١١٥	١٢٠	١٢٥	١٢٥	١٣	١٢	٦٠٠

والمطلوب :

(١) إيجاد معامل الاختلاف المعياري والتباين.

(٢) إيجاد المنوال بطريقتين مختلفتين .

(٣) تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٨- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا :

ف	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-
ك	١٢٥	١٨٥	٦٠	٢٠	١٠

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الاختلاف المعياري للأرباح .

٢- تحديد متوسط الانحرافات المطلقة .

٣- إيجاد المنوال بطريقتين مختلفتين (الرسم والحساب) .

٤- إيجاد الوسيط بطريقتين (الرسم والحساب) .

الباب الثالث

الارتباط والانحدار

الفصل الأول : معامل الارتباط

الفصل الثانى : الانحدار الخطى

الفصـــل الأول

معامــل الارتبــــاط

Correlation Coefficient

تتفاعل المتغيرات وتتداخل وتتشابك بحيث يصبح التأثير بينها متبادلا. وقد يكون التأثير المتداخل في اتجاه واحد الأمر الذي تعارف عليه الكتاب بأنه اتجاه طردي، كما قد يأخذ التأثير اتجاهات عكسية بحيث يتزايد أحد المتغيرات ويتناقص الآخر فتعرف العلاقة بينهما بأنها اتجاهات عكسية .

يفهم من ذلك أن الاتجاه الطردي يكون موجبا ، والاتجاه العكسي يكون سالبا. وقد يكون أحد الاتجاهين الطردي والعكسي ناتجا عن تأثير متبادل بين المتغيرات وقد ينتج عن تأثير قوى خارجية لا دخل لأحد المتغيرين في تأثيرها أو تفاعلها .

وتحدد العلاقة بين المتغيرين مدى الارتباط بينهما أو ما يمكن أن نطلق عليه الارتباط البسيط Simple Correlation فإذا زاد عدد المتغيرات يطلق على العلاقة بينها الارتباط المتعدد Multi correlation وسوف تقتصر الدراسة في هذا المجال على الارتباط البسيط .

وتهتم الدراسات في جميع فروع العلوم والمعرفة بتحديد العلاقة بين متغيرين أو أكثر ، ولا تقتصر على العلوم الإنسانية أو العلوم التطبيقية ، ولكن تحتاج جميع الدراسات إلى تحديد طبيعة ونوعية هذه العلاقة ومدى تأثيرها، ومن ثم تنبني عليها القرارات الإدارية . فقد يحتاج الباحث في العلوم العسكرية إلى تحديد العلاقة بين مدى الرصاص وشدة الإصابة أو العلاقة بين شدة الانفجار والتأثير النفسي ، كما يحتاج الباحث في العلوم الاقتصادية إلى تحديد العلاقة بين الطلب والسعر أو ما يسعي إليه الباحث في العلوم التجارية لتحديد العلاقة بين عدد العاملين وكمية الإنتاج أو تحديد العلاقة بين نفقات الإعلان والمبيعات وقد يحتاج الباحث في العلوم الزراعية إلي تحديد العلاقة بين كمية الأسمدة وكمية المحصول ، ويحتاج الباحث في العلوم الطبية إلى تحديد كمية الدواء والأثر الطبي الناتج عن العلاج. وهكذا في جميع مجالات العلوم نحتاج دائما إلى تحديد طبيعة ونوعية العلاقة بين متغيرين أو ما يطلق عليه الارتباط .

وتهتم دراسة الارتباط بتحديد العلاقة بين متغيرين دون التطرق إلى معرفة التأثير المتبادل بينهما سلبا أو إيجابا وسواء كان التأثير ناتجا عن قوى داخلية أو خارجية . وتسعى الدراسة إلى تحديد العلاقة واتجاهها سلبا أو إيجابا .

فإذا كانت العلاقة بين المتغيرين تأخذ اتجاها متزايدا يطلق عليها ارتباط طردي موجب . وتنتج عن أن تزايد أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الآخر، وتتوقف العلاقة الطردية على مقدار معدل التزايد ، أما إذا كان تزايد أحد المتغيرين يصاحبه تناقص المتغير الآخر فإن العلاقة يطلق عليها ارتباط عكسي وتتوقف درجة الارتباط أيضا على معدل زيادة أحد المتغيرين ومعدل تناقص المتغير الآخر .

فإذا تطابق معدل الزيادة في الاتجاه الموجب يقال أنها علاقة **ارتباط طردي تام** ، والعكس صحيح إذا تطابق معدل الزيادة ومعدل التناقص يطلق على العلاقة **ارتباط عكسي تام** ، ويمكن أن نصادف انعدام العلاقة بين المتغيرين وفي هذه الحالة ينعدم الارتباط بين المتغيرين .

ونظرا لأن الدراسة في هذا المجال تهتم بتحديد العلاقة بين متغيرين فإنه يمكن أن نرمز لمفردات أحد المتغيرين بالرمز (س) بحيث تصبح المفردات $س_{١}$، $س_{٢}$، $س_{٣}$ ، ....، .... ، $س_{ن}$ كما نرمز لمفردات المتغير الآخر بالرمز (ص) بحيث تصبح المفردات $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، ... ، ... ، $ص_{ن}$.

ونرمز للعلاقة بين المتغيرين أو ما يسمي بالارتباط بالرمز (ر) ويمكن تحديد العلاقة المشار إليها من المفردات للمتغيرين أو من التوزيعات التكرارية . وننوه في هذا الصدد أن التوزيعات تتم وفق متغيرين وليس متغيراً واحداً ومن ثم يطلق عليها التوزيعات التكرارية المزدوجة .

أولا : تحديد الارتباط من المفردات :

معامل ارتباط بيرسون : **Correlation CoefficientPearson**

إذا توافر لدينا معلومات عن مفردات متغيرين (س ، ص) بحيث يكون عدد المفردات متساويا من الناحية العددية ونرمز له بالرمز (ن) فإن معادلة الارتباط تأخذ الشكل التالي :

$$\boxed{\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{[\,\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}\,]\;[\,\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}\,]}}}$$

وتسمى العلاقة " معامل ارتباط بيروسون" إشارة إلى الشخص الذي اكتشف هذه العلاقة وتوصل إلى المعادلة ، ويمكن الوصول إلى عدة أشكال للمعادلة السابقة بالقسمة على معامل معين أو نحو ذلك غير أن النتيجة تكون واحدة ولذا سوف نكتفي بالشكل المشار إليه .

ويجب أن يتنبه الباحثون والدارسون إلى أن العلاقة المشار إليها رغم أنها تعرف (بالارتباط الخطي) غير أن العلاقة الخطية ناشئة عن توفيق شكل الانتشار ، ويصعب أن تكون العلاقات خطية تماما لأنها تعتمد على موضع نقاط العلاقة لكل قيمتين متناظرتين من قيم المتغيرين . ونظرا لأن كل نقطة تحدد بقيمة المتغيرين س ، ص فإن وضع جميع النقاط على رسم بياني يحدد شكل واتجاه الانتشار ، ويتم توفيق خط مستقيم يترك مجموعة نقاط أعلاه ومجموعة أخرى أسفله وبطبيعة الحال قد تقع بعض النقاط على الخط.

مثال (١) :

فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان مادتي الرياضة (س) واللغات (ص) :

س	١٨	١٢	٢٠	١٥	١٧	٣	١٤	١٩
ص	١٠	١٥	١٢	٧	١٦	١١	١٥	١٣

احسب معامل الارتباط الخطي بين الدرجات .

الحــل

س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
١٨	١٠	١٨٠	٣٢٤	١٠٠
١٢	١٥	١٨٠	١٤٤	٢٢٥
٢٠	١٢	٢٤٠	٤٠٠	١٤٤
١٥	٧	١٠٥	٢٢٥	٠٤٩
١٧	١٦	٢٧٢	٢٨٩	٢٥٦
٣	١١	٣٣	٠٠٩	١٢١
١٤	١٥	٢١٠	١٩٦	٢٢٥
١٩	١٣	٢٤٧	٣٦١	١٦٩
١١٨	٩٩	١٤٦٧	١٩٤٨	١٢٨٩

ن = عدد المفردات = ٨

$$ر = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}]\,[\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٨ \times ١٤٦٧ - ١١٨ \times ٩٩}{\sqrt{[٨ \times ١٩٤٨ - (١١٨)^{٢}]\,[٨ \times ١٢٨٩ - (٩٩)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٥٤}{٩٢١.٠١} = ٠.٠٥٩$$

مثـال (٢) :

فيما يلي بيان بعدد العاملين (س) وكمية الإنتاج بالوحدة (ص) :

عدد العاملين	١٠	١٢	١٥	١٧	٢١	٢٥	٣٠
كمية الإنتاج	١٠٠	١١٠	١٢٥	١٣٠	١٣٥	١٤٥	١٦٠

والمطلوب : تحديد معامل الارتباط بين عدد العاملين وكمية الإنتاج .

الحــل

س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠٠٠٠
١٢	١١٠	١٣٢٠	١٤٤	١٢١٠٠
١٥	١٢٥	١٨٧٥	٢٢٥	١٥٦٢٥
١٧	١٣٠	٢٢١٠	٢٨٩	١٦٩٠٠
٢١	١٣٥٤	٢٨٣٥	٤٤١	١٨٢٢٥
٢٥	١٤٥	٣٦٢٥	٦٢٥	٢١٠٢٥
٣٠	١٦٠	٤٨٠٠	٩٠٠	٢٥٦٠٠
١٣٠	٩٠٥	١٧٦٦٥	٢٧٢٤	١١٩٤٧٥

ن = ٧

$$ر = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}]\,[\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٧ \times ١٧٦٦٥ - ١٣٠ \times ٩٠٥}{\sqrt{[٧ \times ٢٧٢٤ - (١٣٠)^{٢}][٧ \times ١١٩٤٧٥ - (٩٠٥)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٦٠٠٥}{٦١٢٤.٢٥} = ٠.٩٨١$$

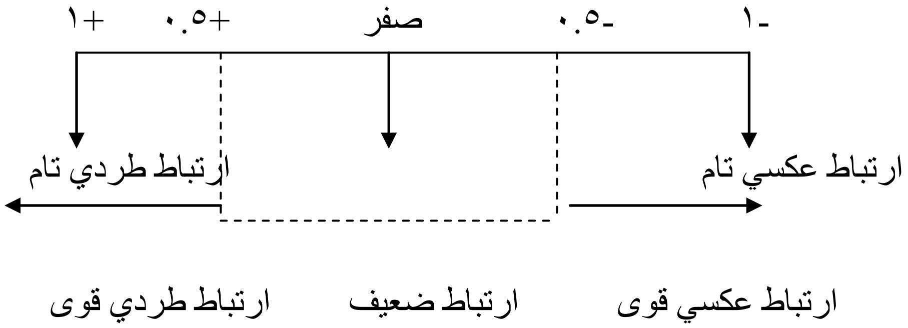
ملاحظـات :

- يلاحظ من النتائج السابق الحصول عليها في مثال ١ ، ٢ أن قيمة الارتباط كسر
- كمـا يلاحـظ أن قيمـة الارتبـاط فـي المثـال الأول = ٠.٠٥٩ وقيمـة الارتبـاط فـي المثـال الثاني = ٠.٩٨١ .

ولعـل هـذه النتـائج تقودنـا إلـى توضـيح بعـض الحقـائق والصـفات المتعلقـة بالارتبـاط نوجزها فيما يلي :

- معامل الارتباط كسر حقيقي يتراوح بين الصفر ، ± ١ .
- يمكن أن يصل معامل الارتباط إلى الواحد الصحيح الموجب وهنا يطلق علي العلاقة بين المتغيرين أنها علاقة ارتباط طردي تام.
- يمكن أن يصـل معامـل الارتبـاط إلـى الواحـد الصـحيح بإشـارة سـالبة وهنـا يطلـق علـى العلاقة ارتباط عكسي تام .
- يمكن أن يصل معامل الارتباط إلى الصفر وفي هذه الحالة يقال أنـه لا توجد علاقـة بـين المتغيرين .
- يمكن أن تكون قيمة معامل الارتبـاط كسر حقيقـي موجب أو سـالب وتقترب هذه القيمـة من الصفر فيقال أنه ارتباط ضعيف .
- يمكن أن تكون قيمـة معامـل الارتبـاط كسر حقيقـي موجب أو سـالب ولكنهـا تقترب من الواحد فيقال إنه ارتباط قوى .

ويمكن توضيح ما سبق كما يلي :



ثانيا : إيجاد معامل الارتباط من البيانات المبوبة (التوزيع المزدوج):

يمكن تحديد معامل الارتباط من البيانات المبوبة في صورة توزيعات تكرارية مزدوجة بحسب فئات متغيرين ، وتستخدم المعادلة :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك حس حص} - \dfrac{\text{مجـ ك حس} \times \text{مجـ ك حص}}{\text{مجـ ك}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ ك ح}^{2}\text{س} - \dfrac{(\text{مجـ ك حس})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right]\left[\text{مجـ ك ح}^{2}\text{ص} - \dfrac{(\text{مجـ ك حص})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right]}}$$

مثال (٣) :

فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات مدة الخدمة (س) وفئات الأجر الشهري بالجنيه (ص) :

ف س / ف ص	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-٣٥	مجموع
١٥٠-	٤	٣	١	١	٠	٠	٩
١٧٠-	٣	٣	٢	١	١	٠	١٠
١٩٠-	٢	٣	٤	٣	١	١	١٤
٢١٠-	٠	١	٣	٥	٤	١	١٤
٢٣٠-	٠	٠	٢	٣	٦	٢	١٣
٢٥٠-٢٧٠	٠	٠	١	٤	٦	٥	١٦
مجموع	٩	١٠	١٣	١٧	١٨	٩	٧٦

والمطلوب :

تحديد معامل الارتباط بين مدة الخدمة والأجر .

الحـــل

خطوات الحل :

- إعداد جدول توزيع تكراري بسيط للمتغير س .
- إعداد جدول توزيع تكراري بسيط للمتغير ص .
- إعداد جدول مزدوج بحسب الانحرافات المختزلة .

جدول هامشى للمتغير س

$\text{ف}_{\text{س}}$	ك	س	$\text{ح}_{\text{س}}$	حس	ك حس	ك ح^{2}س
٥-	٩	٧.٥	-١٠	-٢	-١٨	٣٦
١٠-	١٠	١٢.٥	-٥	-١	-١٠	١٠
١٥-	١٣	(١٧.٥)	٠	٠	٠	٠
٢٠-	١٧	٢٢.٥	٥	١	١٧	١٧
٢٥-	١٨	٢٧.٥	١٠	٢	٣٦	٧٢
٣٠-٣٥	٩	٣٢.٥	١٥	٣	٢٧	٨١
مجموع	٧٦				٥٢	٢١٦

جدول هامشى للمتغير ص

$\text{ف}_{\text{ص}}$	ك	س	$\text{ح}_{\text{ص}}$	$\text{ح}_{\text{ص}}$	ك $\text{ح}_{\text{ص}}$	ك $\text{ح}^{2}_{\text{ص}}$
١٥٠-	٩	١٦٠	-٤٠	-٢	-١٨	٣٦
١٧٠-	١٠	١٨٠	-٢٠	-١	-١٠	١٠
١٩٠-	١٤	(٢٠٠)	٠	٠	٠	٠
٢١٠-	١٤	٢٢٠	٢٠	١	١٤	١٤
٢٣٠-	١٣	٢٤٠	٤٠	٢	٢٦	٥٢
٢٥٠-٢٧٠	١٦	٢٦٠	٦٠	٣	٤٨	١٤٤
مجموع	٧٦				٦٠	٢٥٦

الجدول المزدوج

حس / حص	-٢	-١	٠	١	٢	٣	مجموع
-٢	٤ (١٦)	٣ (٦)	١ (٠)	١ (-٢)	٠ (٠)	٠ (٠)	٩ (٢٠)
-١	٣ (٦)	٣ (٣)	٢ (٠)	١ (-١)	١ (-٢)	٠ (٠)	١٠ (٦)
٠	٢ (٠)	٣ (٠)	٤ (٠)	٣ (٠)	١ (٠)	١ (٠)	١٤ (٠)
١	٠ (٠)	١ (-١)	٣ (٠)	٥ (٥)	٤ (٨)	١ (٣)	١٤ (١٥)
٢	٠ (٠)	٠ (٠)	٢ (٠)	٣ (٦)	٦ (٢٤)	٢ (١٢)	١٣ (٤٢)
٣	٠ (٠)	٠ (٠)	١ (٠)	٤ (١٢)	٦ (٣٦)	٥ (٤٥)	١٦ (٩٣)
المجموع	٩ (٢٢)	١٠ (٨)	١٣ (٠)	١٧ (٢٠)	١٨ (٦٦)	٩ (٦٠)	٧٦ (١٧٦)

$$ر = \frac{\text{مجـ ك حس حص} - \dfrac{\text{مجـ ك حس} \times \text{مجـ ك حص}}{\text{مجـ ك}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ ك ح}^{2}\text{س} - \dfrac{(\text{مجـ ك حس})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right]\left[\text{مجـ ك ح}^{2}\text{ص} - \dfrac{(\text{مجـ ك حص})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right]}}$$

$$ر = \frac{٧١٧٦ - \dfrac{٥٢ \times ٦٠}{٧٦}}{\sqrt{\left[٢١٦ - \dfrac{(٥٢)^{٢}}{٧٦}\right]\left[٢٥٦ - \dfrac{(٦٠)^{٢}}{٧٦}\right]}} = ٠,٦٩٦$$

معامل ارتباط الرتب

(معامل ارتباط سبيرمان)

Coefficient Spearman Correlation

تهدف دراسة معامل ارتباط الرتب أو ما يسمي بمعامل ارتباط سبيرمان إلى إمكانية تحديد العلاقة بين متغيرين سواء كانت البيانات في صورة كمية أو في صورة وصفية أو نوعية .

ويختلف معامل ارتباط سبيرمان في ذلك عن معامل ارتباط بيرسون السابق دراسته والذي يعتمد أساسا على أن تكون البيانات في صورة كمية فقط. وتأسيسا على ذلك لا يمكن استخدام معامل ارتباط بيرسون إذا كانت البيانات لها قياسات غير كمية مثل درجة التعليم والتي يطلق عليها تعليم أعلى من الجامعة، ماجستير أو دكتوراه ، تعليم جامعي تعليم متوسط (الثانوية العامة وما في مستواها)، تعليم أقل من المتوسط .

وقد تكون البيانات عن درجة إجادة لغة من اللغات أو القراءة والكتابة كأن يقال يقرأ فقط ، يقرأ او يكتب ، أمي وهكذا .. وقد تكون البيانات عن تقديرات الطلاب : ممتاز ، جيد جدا ، جيد ، مقبول ، ضعيف ، ضعيف جدا.

وقد حاول معامل سبيرمان حل هذه المشكلة سواء كانت البيانات كمية أو نوعية (وصفية). فإذا كان لدينا مجموعة مشاهدات أو بيانات لمتغيرين وعدد المشاهدات (ن) للمتغيرين يتم اتخاذ مجموعة خطوات كما يلي :

١- ترتيب مفردات المتغير الأول تصاعديا أو تنازليا .
٢- ترتب مفردات المتغير الثاني تصاعديا أو تنازليا كما تم أساسا في المتغير الأول .
٣- توضع درجة الترتيب لكل متغير ١، ٢، ٣، ...، ... ، ن
٤- تحسب الفروق بين رتب المتغيرين ونرمز لها بالرمز (ف).
٥- تحسب مربعات الفروق (ف^{٢}) ونوجد مجموعها .
٦- إذا تصادف وحصلت مفردتين على نفس الدرجة يؤخذ متوسط الرتب وهكذا .
٧- تطبق معادلة معامل سبيرمان كما يلي :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}{}_{ر}}{ن (ن^{٢}-١)}$$

مثـال (٤) :

فيما يلي تقديرات مجموعة من الطلاب في امتحان مادتي الرياضة واللغات :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
تقدير الرياضة	ممتاز	ضعيف	جيد جدا	مقبول	ضعيف جدا	ممتاز	جيد	مقبول
تقدير اللغة	جيد	مقبول	ممتاز	ضعيف	جيد	جيد جدا	مقبول	مقبول

والمطلوب : حساب معامل ارتباط سبيرمان لتقديرات المادتين .

الحــل

تقدير الرياضة	تقدير اللغة	رتب الرياضة	رتب اللغة	ف	$ف^{٢}$
ممتاز	جيد	١.٥	٣.٥	-٢	٤.٠٠
ضعيف	مقبول	٧.٠	٦.٠	١.٠	١.٠٠
جيد جدا	ممتاز	٣.٠	١.٠	٢.٠	٤.٠٠
مقبول	ضعيف	٥.٥	٨.٠	-٢.٥	٦.٢٥
ضعيف جدا	جيد	٨.٠	٣.٥	٤.٥	٢٠.٢٥
ممتاز	جيد جدا	١.٥	٢.٠	-٠.٥	٠.٢٥
جيد	مقبول	٤.٠	٦.٠	-٢	٤.٠٠
مقبول	مقبول	٥.٥	٦.٠	-٠.٥	٠.٢٥
				صفر	٤٠.٠٠

$$\text{ر} = ١ - \frac{\text{٦ مجـ ف}^{٢}}{\text{ن (ن}^{٢} - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٤٠}{٨ (٦٤ - ١)} = ١ - \frac{٢٤٠}{٥٠٤} = ٠.٥٢٤$$

ملاحظـات :

* عند تكرار التقدير لأكثر من طالب تحسب الترتيبات الخاصة بهم ويؤخذ المتوسط ، ولتوضيح ذلك نجد أن في مادة اللغة الطلاب رقم ٢، ٧، ٨ حصلوا على تقدير مقبول وعند ترتيب تقديرات اللغة نجد أنهم في ترتيب ٥، ٦، ٧ ولذلك يكون ترتيبهم = $\frac{٥+٦+٧}{٣}$

$$= \frac{١٨}{٣} = ٦$$

* نجد أيضا في تقديرات مادة اللغة الطالبين رقمي ١، ٥ حصلا على تقدير جيد وترتيبهم ٣، ٤ ولذلك يكون متوسط التقدير :

$$= \frac{٣+٤}{٢} = \frac{٧}{٢} = ٣.٥$$

* وعند ترتيب تقديرات الرياضة نجد أن طالبين حصلا على تقدير ممتاز وهما الطالب رقم (١) والطالب رقم (٦) . وعند الترتيب يكون ترتيبهما ١، ٢ وبذلك يكون المتوسط = $\frac{١+٢}{٢}$ = ١.٥ ويأتي بعدهما الطالب رقم ٣ ويكون ترتيبه الثالث . وهكذا .

* يلاحظ أن مجـ ف = صفر .

مثـال (٥) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة من الطلاب في امتحان مادتي المحاسبة (س) والإدارة (ص) :

محاسبة (س)	١١	١٦	١٠	١٥	١٤	١٥	١٨
إدارة (ص)	١٢	١٣	١٥	١٣	١١	١٢	١٤

والمطلوب : حساب معامل ارتباط سبيرمان (معامل ارتباط الرتب)

الحــل

محاسبة س	إدارة ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
١١	١٢	٦	٥.٥	٠.٥	٠.٢٥
١٦	١٣	٢	٣.٥	١.٥-	٢.٢٥
١٠	١٥	٧	١	٦	٣٦.٠٠
١٥	١٣	٣.٥	٣.٥	٠	٠
١٤	١١	٥	٧	٢-	٤.٠٠
١٥	١٢	٣.٥	٥.٥	٢-	٤.٠٠
١٨	١٤	١	٢	١-	١.٠٠
				صفر	٤٧.٥٠

$$\boxed{ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}^{٢}}{ن\,(ن^{٢} - ١)}}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٤٧.٥}{٧\,(٤٩ - ١)} = ٠.٨٤٨.$$

أوضحت الدراسة السابقة أن معامل ارتباط سبيرمان يمكن الاعتماد عليه لتحديد العلاقة بين متغيرين سواء كانت البيانات في صورة وصفية او في صورة كمية . وننوه في هذا الصدد إلى عدم المقارنة بين نتائج معامل سبيرمان ومعامل ارتباط بيرسون في حالة البيانات الكمية ، حتى لو أدت الصدفة إلى تقارب النتائج أو تعادلها فإن ذلك لا يمكن الاستنتاج منه أن هناك أي تشابه بين المعاملين . ولتأكيد ذلك يمكن إيجاد معامل ارتباط بيرسون في المثال (٦) كما يلي :

س	ص	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
١١	١٢	١٣٢	١٢١	١٤٤
١٦	١٣	٢٠٨	٢٥٦	١٦٩
١٠	١٥	١٥٠	١٠٠	٢٢٥
١٥	١٣	١٩٥	٢٢٥	١٦٩
١٤	١١	١٥٤	١٩٦	١٢١
١٥	١٢	١٨٠	٢٢٥	١٤٤
١٨	١٤	٢٥٢	٣٢٤	١٩٦
٩٩	٩	١٢٧١	١٤٤٧	١١٦٨

ن = ٧

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص – مجـ س × مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ (ن مجـ س}^{٢}\text{– (مجـ س)}^{٢}\text{] [ن مجـ ص}^{٢}\text{– (مجـ ص)}^{٢}\text{]}}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{١ × ١٢٧١ - ٩٩ × ٩٠}}{\sqrt{[\text{(٧ × ١٤٤٧ – (٩٩)}^{٢}\text{] [٧ × ١١٦٨ –(٩٠)}^{٢}\text{]}}}$$

ر = ٠,٠٨٢٤

مثـال (٧)

فيما يلي التقديرات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان مـادة الإحصـاء (س) ومادة اللغة (ص) :

إحصاء	حـ	م	أ	ض حـ	أ	م	حـ حـ	ض
لغة	م	حـ	حـ حـ	حـ	حـ حـ	ض	ض حـ	حـ

والمطلوب :

إيجاد معامل ارتباط الرتب (معامل ارتباط سبيرمان) بين الدرجات .

الحـل

احصاء س	لغة ص	رتب س	رتب س	$ف_ر$	$ف^٢_ر$
حـ	م	٤	٦	ـ ٢	٤
م	حـ حـ	٥.٥	١.٥	٤	١٦
أ	حـ	١.٥	٤	ـ ٢٠٥	٦.٢٥
ض حـ	حـ	٨	٤	٤	١٦
أ	حـ حـ	١.٥	١.٥	صفر	٠
م	ض	٥.٥	٧	ـ ١.٥	٢.٢٥
حـ حـ	ض حـ	٣	٨	ـ ٥	٢٥
ض	حـ	٧	٤	٣	٩
-	-	-	-	-	٧٨.٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢_ر}{ن\ (ن^٢ - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٧٨.٥}{٨\ (٦٤-١)} = ٠.٠٦٥$$

تطبيقـات الفصل الأول

١- فيما يلي بيـان بالـدرجات التـي حصـل عليهـا مجموعـة مـن الطـلاب فـي امتحـان مـادة الإدارة (س) ومادة الرياضة (ص) :

درجة الإدارة	١٢	٩	١٥	١٠	٦	١٤	١١
درجة الرياضة	١٨	٢٠	١٦	١٧	١٢	١٥	١٣

احسب معامل الارتباط الخطي (بيرسون) بين درجات الإدارة ودرجات الرياضة .

٢- فيمـا يلـي توزيـع مجموعـة مـن الشـركات بحسـب فئـات الأربـاح (س) وفئـات المبيعات (ص) القيمة بالألف جنيه :

ف س / ف ص	٢٠٠-	٢١٠-	٢٢٠-	٢٣٠-	٢٤٠-	٢٥٠-	٢٦٠-
٢٠-	٢	٣	٥	٢	١	٠	٠
٣٠-	١	٢	٤	٣	٢	٢	٠
٤٠-	١	٢	٣	٤	٢	١	١
٥٠-	١	١	٢	٥	٤	٣	٢
٦٠-	٠	١	١	٥	٦	٢	٢
٧٠-	٠	١	١	٢	٨	٢	٢
٨٠-	٠	٠	١	١	٣	٢	١

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط البسيط (بيرسون) بين الأرباح والمبيعات .

٢- إيجاد معامل الاختلاف المعياري للمبيعات .

٣- إيجاد المنوال للأرباح بالحساب والرسم .

٤- تحديد قيمة الانحراف المتوسط للوسط الحسابي والمنوال .

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه (ص) وفئات مدة الخدمة بالسنة (س) :

ف س / ف ص	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
٢٠٠-	٤	٥	٣	٢	١	٠	٠
٢٢٠-	٣	٤	٥	٥	٢	١	٠
٢٤٠-	٢	٣	٥	٧	٣	٢	١
٢٦٠-	١	٤	٧	٨	٥	٢	١
٢٨٠-	٠	٢	٥	٩	٩	٣	٢
٣٠٠-	٠	٠	١	٧	١٥	٥	٢

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط بين الأجر ومدة الخدمة .

٢- تحديد الوسيط للأجر بالحساب والرسم .

٣- تحديد المنوال لمدة الخدمة بالحساب والرسم .

٤- إيجاد قيمة الانحراف المتوسط للأجور لكل من الوسط الحسابي والوسيط.

٥- إيجاد معامل الاختلاف المعياري والتباين للأجور .

٥- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات المبيعات (س) وفئات الأرباح المحققة (ص) ، القيمة بالألف جنيه :

ف س / ف ص	١٠٠-	١١٠-	١٢٠-	١٣٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-
١٠-	٢	٢	١	١	٠	٠	٠
٢٠-	٢	٣	٤	١	١	١	٠
٣٠-	١	٢	٣	٤	٥	٢	١
٤٠-	٠	٠	٢	٣	٤	٥	٦

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط بين المبيعات والأرباح .

٢- تحديد معامل الاختلاف المعياري للأرباح والتباين .

٣- تحديد قيمة الانحراف المتوسط للأرباح لكل من الوسط الحسابي والمنوال

٤- إيجاد الوسيط للمبيعات .

٥- تحديد نسبة الشركات إلى تحقق مبيعات ١٣٨ ألف جنيه فأكثر .

٥- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات مدة الخدمة (ص) وفئات الأجر الشهري (س) :

ف س / ف ص	١٥٠-	١٦٠-	١٧٠-	١٨٠-	١٩٠-	٢٠٠-	المجموع
٤-	٢	١	١	١	٠	٠	٥
٨-	١	٢	٢	١	١	٠	٧
١٢-	٠	٢	٢	٣	١	٠	٨
١٦-	٠	١	٢	٣	٣	١	١٠
٢٠-	٠	٠	٢	٣	٣	٢	١٠
٢٥-٣٠	٠	٠	١	٣	٤	٣	١١
المجموع	٣	٦	١٠	١٤	١٢	٦	٥١

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط بين الأجر ومدة الخدمة .

٢- إيجاد المنوال لمدة الخدمة بالحساب والرسم .

٣- تحديد نسبة العمال الذين يحصلون على أجر ١٧٥ ج فأكثر .

٤- تحديد معامل الاختلاف المعياري لمدة الخدمة .

الفصـــــــل الثانى

الانحـدار الخطــى

Regression

تهدف دراسة الانحدار الخطي إلى تحديد العلاقة السببية بين متغيرين، بمعنـي أن أحد المتغيرين يطلق عليه المتغير المستقل ونرمز لـه بـالرمز (س) والمتغيـر الآخـر يطلـق عليـه المتغيـر التـابع ونرمـز لـه بـالرمز (ص) . ويقصـد بـذلك أن المتغير المستقل يكون خارج إطار السيطرة ولكن تغيره يمكن أن يحدث تغيرا أو يترك أثرا في المتغير الآخر ويتضح ذلك في دراسة العلاقة بين السن والـوزن أو السن والطول أو العلاقة بين مدة الخدمة والأجر الشهري ...

وتتحـدد العلاقـة بـين المتغيـرين فـي صـورة خطيـة يطلـق عليهـا معادلـة الخـط المسـتقيم ، وهـذه المعادلـة مـن أكثـر المؤشـرات الرياضـية والإحصـائية اسـتخداما نظـرا لإمكانيـة تطويعهـا للتنبـؤ باتجـاه الظـاهرة موضـع الدراسـة بجانـب سـهولة تطبيقها .

ويمكن تطبيق المعادلة المشار إليها إذا توافرت لدينا مجموعة بيانـات تاريخيـة عن المتغيرين، كما يمكن تطبيقها في دراسـة ظـاهرة معينـة خـلال سلسـلة زمنيـة مقومة بالسنوات أو الشهور أو الأسابيع أو الأيام، وفي هذه الحالـة تعتبـر السلسـلة الزمنيـة هـي المتغيـر المسـتقل (س) علـى أن تكـون الظـاهرة محـل الدراسـة هـي المتغير التابع (ص) . .

ولتحديد العلاقة بين المتغيرين في حالـة السلاسل الزمنيـة تؤخـذ إحـدى فتـرات السلسـلة وتعتبـر فتـرة الأسـاس أو الفتـرة القياسـية وترتـب بـاقي الفتـرات سـلبا أو إيجابا بالنسبة لها ، ويجب أن يتنبه الباحثون والدارسون في هذا المجال إلى كيفية اختيـار فتـرة الأسـاس حتـى لـو كانـت السلسـلة الزمنيـة بالسـنوات ومـن الخطـأ أن يؤخذ التاريخ السنوى على أنه رقما كميا ولكننا نعتبره بيانا وصفيا ويجب تحويله إلى متغير كمي عن طريق الترتيب المقارن المشار إليه . وعمومـا تأخـذ المعادلـة الصورة التالية :

$$\boxed{ص = م س + حـ}$$

حيث :

ص متغير تابع يرمز للظاهرة موضع الدراسة .

س متغير مستقل يعبر عن الزمن .

م هي معامل (س) وتعبر عن ميل الخط المستقيم أو ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع المحور الأفقي .

حـ هي ثابت المعادلة وتمثل الجزء المقطوع من المحور الرأسي

وتصبح المشكلة هي تحديد قيمة الثوابت (م ، حـ) ويمكن تحديدهما كما يلي :

$$\boxed{م = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^{2} - (مجـ\ س)^{2}}}$$

$$\boxed{حـ = \bar{ص} - م\ \bar{س}}$$

وغير خاف أن تحديد قيمة (حـ) يتوقف على إيجاد قيمة (م) أولا ، كما أن ($\bar{ص}$)هي الوسط الحسابي للمتغير (ص) وايضا ($\bar{س}$) هي الوسط الحسابي للمتغير ($\bar{س}$) .

مثال (١) :

فيما يلي بيان بالمبيعات (س) لأحد محلات التجزئة ، والأرباح المحققة (ص) ، القيمة بالألف جنيه :

المبيعات (س)	١٢٠	١٣٠	١٥٠	١٦٠	١٩٠	٢٠٠	٢٣٠
الأرباح (ص)	١٥	١٧	٢٢	٢٨	٤٠	٥٢	٧٠

وبفرض أن العلاقة بين المبيعات والأرباح هي علاقة خطية (معادلة خط مستقيم)،المطلوب :

١- تحديد معادلة الخط المستقيم
٢- تحديد الأرباح (ص) عندما تصل المبيعات ٢٥٠ ألف جنيه.
٣- تقدير الأرباح عندما يكون حجم المبيعات ١٧٠ ألف جنيه .
٤- بفرض أن إدارة المحل تهدف إلى تحقيق ربحا ٨٠ ألف جنيه فما هي قيمة المبيعات التي يجب الوصول إليها لتحقيق هذا الربح؟

الحـــل

س	ص	س ص	$س^٢$
١٢٠	١٥	١٨٠٠	١٤٤٠٠
١٣٠	١٧	٢٢١٠	١٦٩٠٠
١٥٠	٢٢	٣٣٠٠	٢٢٥٠٠
١٦٠	٢٨	٤٤٨٠	٢٥٦٠٠
١٩٠	٤٠	٧٦٠٠	٣٦١٠٠
٢٠٠	٥٢	١٠٤٠٠	٤٠٠٠٠
٢٣٠	٧٠	١٦١٠٠	٥٢٩٠٠
١١٨٠	٢٤٤	٤٥٨٩٠	٢٠٨٤٠٠

١- تحديد المعادلـة : ن = ٧

$$\boxed{م = \frac{\text{ن مجـ س ص – مجـ س × مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^٢\text{– (مجـ س)}^٢}}$$

$$م = \frac{٧ × ٤٥٨٩٠ – ١١٨٠ × ٢٤٤}{٧ × ٢٠٨٤٠٠ – (١١٨٠)^٢} = ٠.٥٠٢$$

$$حـ = \bar{ص} - م\,\bar{س}$$

$$حـ = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} - م \times \frac{\text{مجـ س}}{ن}$$

جـ = $\frac{٢٤٤}{٧}$ - ٠.٥٠٢ × $\frac{١١٨٠}{٧}$ =٤٩.٧٦٦

$$\boxed{\text{ص = ٠.٥٠٢ س - ٤٩.٧٦٦}}$$

٢- تقدير الأرباح عندما س = ٢٥٠ بالتعويض في المعادلة :

ص = ٠.٥٠٢ × ٢٥٠ – ٤٩.٧٦٦ = ٧٥.٧٣٤ ألف جنيه

٣- تقدير الأرباح (ص) عندما س = ١٧٠ :

ص = ٠.٥٠٢ × ١٧٠ – ٤٩.٧٦٦ = ٣٥.٥٧٤ ألف جنيه

٤- رقم المبيعات (س) المطلوب لتحقيق ربحا (ص) = ٨٠ ألف ج

٨٠ = ٠.٥٠٢ س – ٤٩.٧٦٦

٠.٥٠٢ س = ٨٠ + ٤٩.٧٦٦ = ١٢٩.٧٦٦

حجم المبيعات (س) = ١٢٩٧٦٦ جنيه .

استنتاجات هامة :

يجب أن يتنبه الباحثون والدارسون إلى أن الظواهر عموما يصعب أن تأخذ شكل خط مستقيم بمعني أن أزواج النقط من الضروري أن تقع على نفس الخط الذي يمثل المعادلة ولكنها تأخذ شكل انتشار ، وبتوفيق خط مستقيم يتوسط شكل الانتشار يكون هو الخط الذي يمثل المعادلة المشار إليها.

وبطبيعة الحال فإن توفيق خط مستقيم يتوسط شكل الانتشار من الضروري أن تقع بعض النقاط أعلي الخط المستقيم ويقع البعض الآخر أسفل الخط المستقيم كما يمكن أن نجد أن بعض النقاط قد يمر بها الخط المستقيم.

ونخلص من ذلك أن المعادلة تكون تقريبية وتستخدم للتقدير أو التوقع وليست تحديدية . ومثال ذلك لاحظنا أن جميع القيم المعطاة (وهي قيم فعلية) ليس بها كسور بينما النتائج التي حصلنا عليها بها كسور. كما أننا إذا أردنا اختيار قيمة من الأرقام الفعلية الواردة بالجدول من قيم س أو ص وأردنا تطبيق المعادلة وصولا إلى القيمة المناظرة فقد نجد قيمة تختلف عنها إيجابا أو سلبا بمعني أن القيمة التي نصل إليها بتطبيق المعادلة قد تزيد أو تنقص عن القيمة الفعلية كما يمكن أن نحصل على نفس القيمة المناظرة ، ويفسر ذلك بأن النقطة للقيمة المقدرة قد تقع اعلي الخط المستقيم وقد تقع أسفله كما قد تنطبق على الخط المستقيم .

وبتطبيق المعادلة السابق الحصول عليها لتقدير الأرباح عندما يصل حجم المبيعات ١٦٠ ألف جنيه (وهو رقم فعلي) نجد أن :

ص = ٠.٥٠٢ × ١٦٠ – ٤٩.٧٦٦ = ٣٠.٥٥٤ ألف جنيه .

وهي قيمة أعلي من الرقم الفعلي المناظر للمبيعات (٢٨) ويفسر ذلك على انه كان يجب على إدارة المشروع تحقيق أرباحا تصل على ٣٠٥٥٤ جنيها ولكنها حققت أقل من المستهدف .

فإذا حاولنا تطبيق المعادلة لتقدير الأرباح المتوقعة عند رقم مبيعات ٢٠٠ ألف جم نجد أن :

ص = ٠.٥٠٢ × ٢٠٠ – ٤٩.٧٦٦ = ٥٠.٦٣٤ ألف جنيه

وهي قيمة اقل مما تحقق فعلا مما يعني أن الإدارة حققت رقما أكبر من المستهدف طبقا للمعادلة .

مثـال (٢) :

فيما يلي بيان بالأرباح التي حققتها إحدى الشركات خلال الفترة الموضحة بالجدول عام ٢٠١٨ م (القيمة بالألف جنيه):

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو
الأرباح	٨	١٠	١١	١٥	١٧	٢٠	٢٥

وبفرض أن الأرباح تتبع معادلة اتجاه عام (معادلة انحدار – معادلة خطية)

المطلوب :

١- تحديد المعادلة .

٢- تقدير أرباح الشركة عن شهور أكتوبر ، مارس من نفس العام.

الحـــل

شهور	أرباح (ص)	س	س ص	$س^{٢}$
يناير	٨	٣-	٢٤-	٩
فبراير	١٠	٢-	٢٠-	٤
مارس	١١	١-	١١-	١
أبريل	١٥	٠	٠	٠
مايو	١٧	١	١٧	١
يونيه	٢٠	٢	٤٠	٤
يوليه	٢٥	٣	٧٥	٩
مجموع	١٠٦	صفر	٧٧	٢٨

ن = ٧

ص = م س + حـ

$$م = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$م = \frac{٧ \times ٧٧ - \text{صفر} \times ١٠٦}{٧ \times ٢٨ - (\text{صفر})^{٢}} = ٢.٧٥$$

$$\boxed{حـ = ص - م س}$$

$$حـ = \frac{١٠٦}{٧} - ٢.٧٥ \times \frac{\text{صفر}}{٧} = ١٥.١٤٣$$

١- المعادلـــة :

$$\boxed{ص = ٢.٧٥ س + ١٥.١٤٣}$$

٢- تقدير الأربـــاح :

في شهر أكتوبر من نفس العام يكون ترتيب س = ٦

ص = ٢.٧٥ × ٦ + ١٥.١٤٣ = ٣١.٦٤٣ ألف جنيه

في شهر مارس من نفس العام ترتيب س = -١

ص = ٢.٧٥ (-١) + ١٥.١٤٣ = ١٢.٣٩٣ ألف جنيه

ملاحظـات :

- يلاحظ عند ترتيب الشهور اتخذنا شهر أبريل على أنه شهر الأساس بقيمة تساوي صفر ، وبذلك تكون الشهور السابقة ترتيبا -١ ، -٢، -٣ أما الشهور التالية فيكون ترتيبها ١، ٢، ٣ . وقد ساعد على ذلك أن عدد شهور الفترة الزمنية عدد فردي = ٧ .

- أدي استخدام شهر الأساس يتوسط السلسلة الزمنية أن أصبح مجموع (س) = صفر ويترتب على ذلك :

$$م = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^{٢}}$$

كما ترتب على ذلك أيضا أن :

$$حـ = ص$$

- يمكن اختيار أي شهر من السلسلة المذكورة واعتباره فترة الأساس، ولا يؤثر ذلك على النتيجة النهائية.

حـل أخـر

شهور	أرباح (ص)	س	س ص	$س^{٢}$
يناير	٨	٠	٠	٠
فبراير	١٠	١	١٠	١
مارس	١١	٢	٢٢	٤
أبريل	١٥	٣	٤٥	٩
مايو	١٧	٤	٦٨	١٦
يونيه	٢٠	٥	١٠٠	٢٥
يوليه	٢٥	٦	١٥٠	٣٦
مجموع	١٠٦	٢١	٣٩٥	٩١

ن = ٧

$$ص = م س + حـ$$

$$م = \frac{ن مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

$$م = \frac{٧ \times ٣٩٥ - ٢١ \times ١٠٦}{٧ \times ٩١ - (٢١)^٢} = ٢.٧٥$$

$$\boxed{حـ = \bar{ص} - م\bar{س}}$$

$$حـ = \frac{١٠٦}{٧} - ٢.٧٥ \times \frac{٢١}{٧} = ٦.٨٩٣$$

$$\boxed{ص = ٢.٧٥ س + ٦.٨٩٣}$$

تقدير الأرباح في شهر أكتوبر من نفس العام :

س = ٩

ص = ٢.٧٥ × ٩ + ٦.٨٩٣ = ٣١.٦٤٣ الف جنيه

تقدير الأرباح في شهر مارس من نفس العام :

س = ٢

ص = ٢.٧٥ × ٢ + ٦.٨٩٣ = ١٢.٣٩٣ ألف جنيه

- يلاحظ أننا حصلنا على نفس النتائج السابق الحصول عليها مع اختلاف فترة الأساس .
- يلاحظ أن قيمة م ثابتة لم تتغير وهي عبارة عن ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة أو ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع المحور الأفقي .

- أدي اختلاف الترتيب نتيجة اختلاف فترة الأساس إلى اختلاف قيمة (حـ) الأمر الذي يترتب عليه الحفاظ على نفس النتيجة النهائية.
- إن اختيار فترة الأساس تتوسط السلسلة الزمنية كما في الحل الأول يؤدي إلى سهولة العمليات الرياضية .

مثـال (٣) :

فيما يلي بيان بعدد الوحدات المباعة من سلعة معينة خلال الفترة الموضحة بالجدول من عام ٢٠١٨ (عدد الوحدات بالألف) :

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو	اغسطس
عدد الوحدات	١٠	١٣	١٥	١٦	١٨	٢٢	٢٥	٣٠

وبفرض أن عدد الوحدات المباعة تتبع دالة خطية (معادلة خط مستقيم)

المطلوب :

١- تحديد الدالــة .

٢- تقدير عدد الوحدات المباعة خلال شهرى أبريل وأكتوبر من نفس العام

الحـــل

شهور	مبيعات (ص)	س	س ص	$س^٢$
يناير	١٠	-٧	-٧٠	٤٩
فبراير	١٣	-٥	-٦٥	٢٥
مارس	١٥	-٣	-٤٥	٩
أبريل	١٦	-١	-١٦	١
مايو	١٨	١	١٨	١
يونيه	٢٢	٣	٦٦	٩
يوليه	٢٥	٥	١٢٥	٢٥
أغسطس	٣٠	٧	٢١٠	٤٩
مجموع	١٤٩	صفر	٢٢٣	١٦٨

ن = ٨

$$\boxed{\text{ص} = \text{م}\,\text{س} + \text{حـ}}$$

$$\boxed{\text{م} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}}$$

$$\text{م} = \frac{٨ \times ٢٢٣ - \text{صفر} \times ١٤٩}{٨ \times ١٦٨ - (\text{صفر})^{٢}} = ١٫٣٢٧٤$$

$$\boxed{\text{حـ} = \bar{\text{ص}} - \text{م}\,\bar{\text{س}}}$$

$$\text{حـ} = \frac{١٤٩}{٨} - ١٫٣٢٧٤ \times \text{صفر} = ١٨٫٦٢٥$$

١- المعادلـــة :

$$\boxed{\text{ص} = ١٫٣٢٧٤\text{س} + ١٨٫٦٢٥}$$

٢- تقدير المبيعات في شهر أبريل :

س = -١

ص =١٫٣٢٧٤ × (-١) + ١٨٫٦٢٥ = ١٧٫٢٩٨ألف وحدة

٣- تقدير المبيعات في شهر أكتوبر :

س = ١١

ص = ١٫٣٢٧٤ × ١١ + ١٨٫٦٢٥ = ٣٣٫٢٢٦٤ ألف وحدة

ملاحظـــات :

- عدد مفردات السلسلة عددا زوجيا (٨) ، تم اتخاذ نقطة القياس أي نقطة الأساس في منتصف السلسلة ولذلك أصبح كل شهر كأنه ممثلا بوحدتين قياسيتين، وعلى هذا الأساس كانت الفترات السابقة -١ ، -٣، -٥ ، -٧ أما الفترات التالية فأخذت الترتيب ١، ٣، ٥، ٧ .
- نتج عن ذلك أن مجـ س= صفر،أيضا $(\text{مجـ س})^{٢}$ = صفر.
- يمكن حل المثال مرة أخرى باتخاذ أي فترة على أنها فترة الأساس ثم نقارن النتائج .

حـل آخـر

شهور	مبيعات (ص)	س	س ص	$\text{س}^{٢}$
يناير	١٠	٠	٠	٠
فبراير	١٣	١	١٣	١
مارس	١٥	٢	٣٠	٤
أبريل	١٦	٣	٤٨	٩
مايو	١٨	٤	٧٢	١٦
يونيه	٢٢	٥	١١٠	٢٥
يوليه	٢٥	٦	١٥٠	٣٦
أغسطس	٣٠	٧	٢١٠	٤٩
مجموع	١٤٩	٢٨	٦٣٣	١٤٠

ن = ٨

$$\boxed{\text{ص} = \text{م س} + \text{حـ}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$م = \frac{٨ \times ٦٣٣ - ٢٨ \times ١٤٩}{٨ \times ١٤٠ - (٢٨)^٢} = ٢.٦٥٤٨$$

$$\boxed{حـ = \overline{ص} - م\overline{س}}$$

$$حـ = \frac{١٤٩}{٨} - ٢.٦٥٤٨ \times \frac{٢٨}{٨} = ٩.٣٣٣٢$$

١- المعادلــة :

$$\boxed{ص = ٢.٦٥٤٨س + ٩.٣٣٣٢}$$

٢- تقدير المبيعات في شهر أبريل :

س = ٣

ص= ٢.٦٥٤٨ × ٣ + ٩.٣٣٣٢ = ١٧.٢٩٧٦ ألف وحدة

٣- تقدير المبيعات في شهر أكتوبر :

س = ٩

ص = ٢.٦٥٤٨ × ٩ + ٩.٣٣٣٢ = ٣٣.٢٢٦٤ ألف وحدة

وهي نفس النتائج السابق الحصول عليها .

مثـال (٤) :

قامت شركة ملك بدراسة المبيعات (س) والأرباح التي حققتها (ص) خلال فترة زمنية معينة، وتم استخراج البيانات التالية من سجلات الشركة (القيمة بالألف جنيه) :

المبيعات (س)	١٠٠	١٢٠	١٢٥	١٤٠	١٥٠	١٦٠	٢٠٠
الأرباح (ص)	١٢	١٥	١٦	٢٠	٢٥	٣٠	٥٠

وبفرض أن العلاقة خطية بين المبيعات والأرباح .

المطلوب :

١- تحديد معادلة الاتجاه العام.

٢- تقدير الأرباح عندما يصل حجم المبيعات ١٤٠ ألف جنيه. علل سبب اختلاف النتيجة إن وجد.

وتقدير الأرباح عندما تصل المبيعات ٢٢٥ ألف جنيه.

٣- بفرض أن طموح الإدارة تحقيق ربح ٨٥ ألف ج فما هو حجم المبيعات اللازم تحقيقه للوصول إلى الربح .

الحـل

ص	س	س ص	$س^٢$
١٢	١٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠٠
١٥	١٢٠	١٨٠٠	١٤٤٠٠
١٦	١٢٥	٢٠٠٠	١٥٦٢٥
٢٠	١٤٠	٢٨٠٠	١٩٦٠٠
٢٥	١٥٠	٣٧٥٠	٢٢٥٠٠
٣٠	١٦٠	٤٨٠٠	٢٥٦٠٠
٥٠	٢٠٠	١٠٠٠٠	٤٠٠٠٠
١٦٨	٩٩٥	٢٦٣٥٠	١٤٧٧٢٥

معادلة الاتجـاه العـام :

$\boxed{\text{ص = م س + حـ}}$

$$\text{م} = \frac{\text{م مجـ س ص – مجـ س × مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢}\text{– (مجـ س)}^{٢}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{٧ × ٢٦٣٥٠ – ٩٩٥ × ١٦٨}}{\text{٧ × ١٤٧٧٢٥ – (٩٩٥)}^{٢}} = \text{٠.٣٩٢٥}$$

$$\boxed{\text{حـ} = \bar{\text{ص}} - \text{م}\,\bar{\text{س}}}$$

$$\text{حـ} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$\text{حـ} = \frac{\text{١٦٨}}{\text{٧}} - \text{٠.٣٩٢٥} \times \frac{\text{٩٩٥}}{\text{٧}} = \text{-٣١,٧٩١}$$

أولا : المعادلـــة :

$$\boxed{\text{ص = ٠.٣٩٢٥ س – ٣١.٩٧١}}$$

ثانيا : تقدير الأرباح عند حجم مبيعات ١٤٠ ألف ج :

ص = ٠.٣٩٢٥ × ١٤٠ – ٣١.٧٩١ = ٢٣.١٥٩ ألف ج .

يرجع سبب اختلاف النتيجة إلى قصور في الإدارة حتى لم تحقق المستهدف منها وحققت ٢٠ ألف ج فقط .

تقدير الأرباح عند حجم مبيعات ٢٢٥ ألف ج :

ص = ٠.٣٩٢٥ × ٢٢٥ – ٣١.٧٩١ = ٥٦.٥٢٢ ألف ج

ثالثا : حجم المبيعات اللازم لتحقيق ربح ٨٥ ألف ج :

٨٥ = ٠.٣٩٢٥ س – ٣١.٧٩١

٠.٣٩٢٥ س = ١١٦.٧٩١

س = ١١٦.٧٩١ ÷ ٠.٣٩٢٥ = ٢٩٧.٥٦ الف جنيه

تطبيقات الفصل الثانى

١- فيما يلي بيان بأعداد الطلاب في أحد أقسام الكلية خلال الفترة الموضحة بالجدول :

سنوات	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤	٢٠١٥	٢٠١٦	٢٠١٧
عدد الطلاب (ص)	١٢٠	١٥٠	١٦٠	١٨٠	٢٠٥	٢١٥	٢٤٠

وبفرض أن أعداد الطلاب تتبع معادلة اتجاه عام ، المطلوب:

١- تحديد معادلة الاتجاه العام .
٢- تقدير أعداد الطلاب المتوقع قبولهم بالقسم عام ٢٠١٩
٣- تطبيق المعادلة لتقدير أعداد الطلاب عام ٢٠١٠.

٢- فيما يلي بيان بعدد الوحدات المباعة من سلعة معينة خلال الفترة الموضحة بالجدول عام ٢٠١٨ بالألف وحدة :

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو
عدد الوحدات	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢١	٢٥	٣٠

والمطلوب :

١- تحديد معادلة الاتجاه العام .
٢- تقدير عدد الوحدات المباعة خلال شهر مارس وشهر أكتوبر.

١- فيما يلي بيان بالأرباح الشهرية لإحدى الشركات خلال الفترة الموضحة عام ٢٠١٨ (القيمة بالألف جنيه)

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو
الأرباح	٨	١٠	١٥	١٨	٢٠	٢٥

والمطلوب :

١- تحديد معادلة الاتجاه العام

٢- تقدير الأرباح في شهر مايو وشهر ديسمبر من نفس العام .

الباب الرابع
التوزيعات الإحتمالية
Probability Distributions

الفصل الأول : التوزيعات الاحتمالية المنفصلة : توزيع بواسون.

Discrete Prob. Distributions: poission Dis.

الفصل الثانى: التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى.

Continuous Prob. Distributions: Normal Distribution.

الأهداف السلوكية:

بعد دراسة مواضيع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على:

١- التعرف على أكثر التوزيعات الاحتمالية المنفصلة شيوعاً (توزيع بواسون وكيفية حسابه.

٢- التعرف على التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى والتوزيع الطبيعى المعيارى.

٣- كيفية استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

العناصر:

[١] الفصل الأول : التوزيعات الاحتمالية المنفصلة: – توزيع بواسون.

١- توزيع بواسون.

[٢] الفصل الثانى: التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى.

١- التوزيع الطبيعى.

٢- التوزيع المعيارى.

٣- استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين .

الفصل الأول

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

Discrete Probability Distributions

Poisson dis. - توزيع بواسون

تتعدد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة بتعدد الدوال الاحتمالية التى تأخذها المتغيرات المنفصلة إلا أن أكثرها شيوعاً توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون.

توزيع بواسون : Poission Distribution

يستخدم هذا التوزيع فى حالة المتغيرات المنفصلة التى تتصف بالندرة، أىالتى يكون احتمال تحققها صغيراً جداً ويعتبر حالة خاصة من توزيع ذو الحدين، وخاصة إذا كان عدد المحاولات (ن) كبيراً جداً، بالإضافة إلى أن احتمال الحدوث (ل) ضئيلاً جداً (أقل من ١٠%).

ومن ثم فإن الأسس التى يقوم عليها توزيع بواسونهى:

١- أن عدد المحاولات الكلية (حجم التجربة أو العينة) كبيراً جداً (ن ≤ ٣٠).

٢- أن المحاولات مستقلة عن بعضها.

٣- أن احتمال النجاح (ل) ثابت فى أى محاولة وقيمته صغيرة جداً (ل < ٠.١).

والدالة الاحتمالية لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية:

$$ح_{(س)} = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}{\underline{|س}}$$

حيث: هـ أساس اللوغاريتم الطبيعى هـ = ٢.٧١٨٣

μ الوسط الحسابى أو القيمة المتوقعة لعدد مرات النجاح.

س عدد مرات النجاح س = ٠، ١، ٢، .....، ∞

$\underline{|س}$ مضروب س = س(س – ١) (س -٢) ... ٣ × ٢ × ١

علما بأن: $\lfloor\underline{٠}$ = ١، (أى مقدار)$^{\text{صفر}}$ = ١

الخصائص الإحصائية لتوزيع بواسون:

القيمة المتوقعة μ = ن × ل

التباين $\delta^{٢}$ = ن × ل

أى أن القيمة المتوقعة = التباين لتوزيع بواسون

ومن الناحية العملية فإن توزيع بواسون يستخدم فى مجالات كثيرة وخاصة فى المجال الصناعى الذى يتسم بالإنتاج الكبير لأن احتمالات الأخطاء تكون ضئيلة جداً مثل صناعة السيارات، وقطع الغيار، وصناعة المسامير كما يستخدم بشكل كبير فى مجال الطباعة، واحتمالات الوفاة للمؤمنين لدى شركات التأمين.

مثال (٤):

إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب فى أحد المصانع ١% سحبت عينة من إنتاج هذا المصنع حجمها ٥٠ وحدة، احسب ما يلى:

١- احتمال ألا نجد بالعينة أى وحدة معيبة.

٢- احتمال أن نجد بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة.

٣- احتمال أن نجد بالعينة ٤ وحدات على الأقل معيبة.

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة.

الحـل

ن = ٥٠ ل = ٠.٠١ μ = ن × ل = ٥٠ × ٠.٠١ = ٠.٥

١- احتمال ألا نجد بالعينة أى وحدة معيبة:

$$\text{ح}_{(٠)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{٠}}{\lfloor\underline{٠}} = ٠.٦٠٦٥$$

٢- احتمال أن نجد بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة = ح(٢) + ح(١) + ح(٠)

$$ح_{(١)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{١}}{\underline{|١}} = ٠.٣٠٣٣$$

$$ح_{(٢)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{٢}}{\underline{|٢}} = ٠.٠٧٥٨$$

∴ الاحتمال المطلوب = ٠.٦٠٦٥ + ٠.٣٠٣٣ + ٠.٠٧٥٨ = ٠.٩٨٥٦

٣- احتمال أن نجد ٤ وحدات على الأقل معيبة = ٤ معيبة أو ٥ معيبة أو .. أو ٥٠ معيبة.

= ١ – الاحتمال العكسى

= ١ – [٣ معيبة أو ٢ معيبة أو ١ معيبة أو صفر معيبة]

= ١ – [ح(٣) + ح(٢) + ح(١) + ح(٠)]

$$ح_{(٣)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{٣}}{\underline{|٣}} = ٠.٠١٢٦$$

∴ الاحتمال المطلوب = ١ – [٠.٠١٢٦ + ٠.٩٨٥٦]

= ١ – ٠.٩٩٨٢ = ٠.٠٠١٨

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة:

بالنسبة لتوزيع بواسون فإن $\mu = \delta^{٢}$ = ن × ل = ٥٠ × ٠.٠١

= ٠.٥ وحدة

أى أننا لو سحبنا عدداً كبيراً جداً من العينات من إنتاج هذا المصنع وحجم كل عينة ٥٠ وحدة فإننا سنجد فى كل عينة فى المتوسط ٠.٥ وحدة معيبة.

هام جداً:

على الرغم من الصعوبة التى قد تبدو فى حساب الاحتمالات من خلال دالة توزيع بواسون إلا أن هناك علاقة تربط الاحتمالات بعضها ببعض وهذه العلاقة تعتمد على حساب $\text{ح}_{(٠)}$وبالتالى يمكن حساب الاحتمالات التالية كما يلى:

$$\text{ح}_{(٠)} = ٠.٦٠٦٥$$

$$\text{ح}_{(١)} = \text{ح}_{(٠)} \times \frac{\mu}{١} = ٠.٦٠٦٥ \times \frac{٠.٥}{١} = ٠.٣٠٣٣$$

$$\text{ح}_{(٢)} = \text{ح}_{(١)} \times \frac{\mu}{٢} = ٠.٣٠٣٣ \times \frac{٠.٥}{٢} = ٠.٠٧٥٨$$

$$\text{ح}_{(٣)} = \text{ح}_{(٢)} \times \frac{\mu}{٣} = ٠.٠٧٥٨ \times \frac{٠.٥}{٣} = ٠.٠١٢٦$$

⋮

وهكذا

⋮

$$\text{ح}_{(١٠)} = \text{ح}_{(٩)} \times \frac{\mu}{١٠}$$

$$\text{ح}_{(\text{س})} = \text{ح}_{(\text{س}-١)} \times \frac{\mu}{\text{س}}$$

٢- هناك جداول معدة لحساب الاحتمالات المختلفة إلا أن وجود العلاقة السابقة يقلل من أهمية استخدام تلك الجداول.

٣- ليس من الضرورى أن يأتى الاحتمال معلوماً حتى نحسب المتوسط μ فقد تأتى البيانات فى صورة نقوم من خلالها بحساب المتوسط الفعلىأى:

متوسط العينة $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ أو $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

حسب نوع البيانات غير مبوبة أو مبوبة كما سبق وأشرنا.

وهنا نعتبر أن $\overline{\text{س}}$ تمثل متوسط المجتمع أى $\overline{\text{س}} = \mu$ ثم نتابع الحل من خلال دالة التوزيع، كما يتضح من المثال التالى:

مثال (٥):

قام أحد المؤلفين بحصر عدد الصفحات التى بها أخطاء وفقاً لعدد الأخطاء فى كل صفحة فكان توزيع صفحات الكتاب كما يلى:

عدد الأخطاء	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الصفحات	٢٥٥	١٥٠	٥٠	١٥	١٠	٨	٥	٣	٢	١	١

فإذا أراد هذا المؤلف طباعة كتاب آخر فى نفس المطبعة على ألا يزيد عدد الأخطاء فى الصفحة الواحدة عن خطأين، فما هو احتمال أن تتحقق هذه الرغبة، على فرض أن الأخطاء المطبعية تتبع توزيع بواسون.

الحـل

نحسب μ من خلال بيانات العينة على أساس أن $\mu = \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

عدد الأخطاء (س)	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
عدد الصفحات (ك)	٢٥٥	١٥٠	٥٠	١٥	١٠	٨	٥	٣	٢	١	١	٥٠٠
س ك	صفر	١٥٠	١٠٠	٤٥	٤٠	٤٠	٣٠	٢١	١٦	٩	١٠	٤٦١

$$\mu = \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٦١}{٥٠٠} = ٠.٩٢٢$$

احتمال ألا يزيد عدد الأخطاء عن خطأين = $\text{ح}_{(٠)} + \text{ح}_{(١)} + \text{ح}_{(٢)}$

$$ح_{(٠)} = \frac{(٢.١٧٨٣)^{-٠.٩٢٢} \times (٠.٩٢٢)^{٠}}{\lfloor ٠} = ٠.٣٩٧٧$$

$$ح_{(١)} = ح_{(٠)} \times \frac{٠.٩٢٢}{١} = ٠.٣٦٦٧$$

$$ح_{(٢)} = ح_{(١)} \times \frac{٠.٩٢٢}{٢} = ٠.١٦٩٠$$

الاحتمال المطلوب ٠.٩٣٣٤

الفصل الثانى
التوزيعات الاحتمالية المتصلة
Continuous Probability Distributions

التوزيع الطبيعى
Normal Distribution

تتعدد التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات المتصلة أو المستمرة وسوف نكتفى بتناول التوزيع الطبيعى وسنرجئ تناول باقى التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يتم تناولها عند حديثنا عن استخدامات الدوال الاحتمالية لتلك التوزيعات.

التوزيع الطبيعى Normal Distribution :

وهو من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استخداماً فى علم الإحصاء، ومنحنى هذا التوزيع منحنى متماثل أو متعادل أى أننا لو أسقطنا من قمة المنحنى عمود على المحور الأفقى فإنه يقسم المنحنى إلى نصفين متطابقين تماماً ومساحة كل نصف منهما (مجموع الاحتمالات) = ٠.٥.

وترجع أهمية التوزيع الطبيعى إلى أسباب عديدة من أهمها:

١- أن معظم الظواهر الطبيعية تتبع فى توزيعها التوزيع الطبيعى أو تكون قريبة جداً منه، حيث تتركز قياساتها عند قيمتها الوسطى ثم تبتعد عن هذه القيمة فى الاتجاهين (التزايد والتناقص) بشكل يكاد يكون متعادلاً.

٢- أن معظم القياسات التى تتم من خلال عينة، كالوسط الحسابى ($\overline{س}$) والانحراف المعيارى (ع) والنسبة ($\hat{ل}$) لها توزيع احتمالى يقترب من التوزيع الطبيعى مهما كان التوزيع الاحتمالى للمجتمع الأصلى المسحوب منه العينة، ويزداد اقترابها من التوزيع الطبيعى بزيادة حجم العينة، لذلك يستخدم التوزيع الطبيعىفى المعالجة الإحصائية لهذه المقاييس، فلو أننا سحبنا عدداً من العينات قدره (ن) وحسبنا الوسط الحسابى لكل عينة أى $\overline{س}_١$، $\overline{س}_٢$، $\overline{س}_٣$، ...، $\overline{س}_ن$ فإن توزيع هذه المتوسطات يأخذ شكل منحنى قريباً جداً من شكل المنحنى الطبيعى حتى ولو كان توزيع المجتمع الأصلى الذى سحبت منه العينة ليس توزيعاً طبيعياً.

٣- بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات المنفصلة مثل توزيع ذو الحدين أو توزيع بواسون يمكن تحويلها إلى التوزيع الطبيعى ولكن وفقاً لشروط معينة تتعلق بحجم العينة وقيمة الاحتمال وطبيعة التوزيع الاحتمالىفى المجتمع.

٤- هناك جدول لحساب المساحات (الاحتمالات) أسفل المنحنى الطبيعى وهو بذلك يعتبر من أهم المزايا التى يتمتع بها التوزيع الطبيعى نظراً لصعوبة أو استحالة حساب الاحتمالات المختلفة من الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى إلى جانب سهولة استخدام الجدول.

دالة كثافة الاحتمال Probability Denisty Function:

الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى تأخذ الصورة التالية:

$$ح_{(س)} = \frac{١}{\delta\sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢}\left(\frac{س - \mu}{\delta}\right)^{٢}}$$

حيث:

μ = الوسط الحسابى للتوزيع (التوقع) هـ = ٢.٧١٨٣

δ = الانحراف المعيارى للتوزيع ط = $\frac{٢٢}{٧}$

س = قيمة المتغير العشوائى، حيث - $\infty \geq$ س $\geq$ + ∞

خصائص التوزيع الطبيعى.Characteristics of Normal Dis:

هناك خصائص عديدة لمنحنى التوزيع الطبيعى وهى تعتبر الأساس الذى يقوم عليه الاستنتاج الإحصائىStatistical Inference ومن أهم تلك الخصائص:

١- تصل قمة المنحنى الممثل للتوزيع إلى نهايتها العظمى عندما تصبح قيمة المتغير العشوائى مساوية للوسط الحسابى (س = μ).

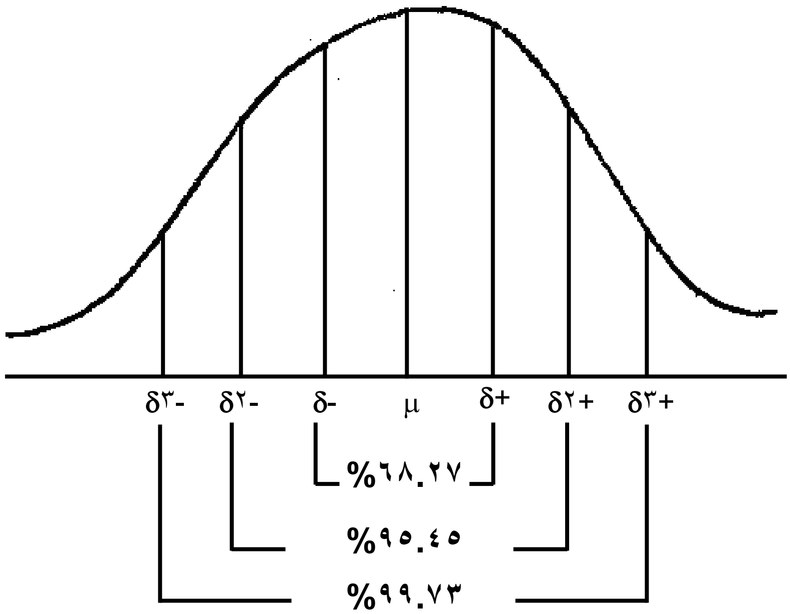
٢- تتساوى مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) فى التوزيع الطبيعى.

٣- يمتد طرفا المنحنى إلى الاتجاهين الموجب والسالب إلى مالا نهاية ($\pm\infty$) دون أن يلتقيا مع المحور الأفقى.
٤- إجمالى المساحة أسفل المنحنى الطبيعى (مجموع الاحتمالات) = ١.
٥- هناك بعض المساحات أسفل المنحنى الطبيعى لها أهمية خاصة فى التحليل الإحصائى وهى:

١/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى$\pm$ انحراف معيارى تعادل ٦٨.٢٧% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.

٢/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى$\pm$٢ انحراف معيارى تعادل ٩٥.٤٥% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.

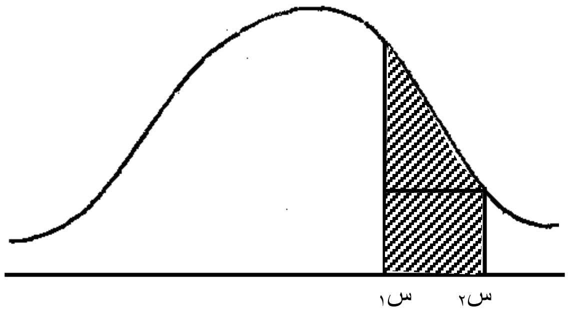
٣/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى$\pm$٣ انحراف معيارى تعادل ٩٩.٧٣% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.



التوزيع الطبيعى المعيارى .Standard Normal Dis :

إذا أردنا حساب المساحة أسفل المنحنى الطبيعىالتى تقع بين القيمة $س_١$، $س_٢$ مثلاً فإنه من الضرورى إجراء التكامل على دالة التوزيع الطبيعى السابق الإشارة إليها أى :

$$\int_{س_1}^{س_2} \frac{1}{\delta\sqrt{2ط}} \times هـ^{-\frac{1}{2}\left(\frac{س - \mu}{\delta}\right)^2}$$



وعلى ذلك فإننا لكى نحسب قيمة التكامل لابد من معرفة $س_1$، $س_2$، μ، δ، ولو تصورنا أننا تسهيلاً لذلك سنقوم بإعداد جدول لحساب الاحتمالات المختلفة لكان ذلك أمراً مستحيلاً لأن قيم أى متغير متصل لا نهائية، هذا إلى جانب اختلاف قيم (μ، δ) من ظاهرة لأخرى وقد تكون معالم المجتمع (μ، δ) مجهولة لبعض الظواهر مما يستحيل معه حساب الاحتمالات الخاصة بها، إلا أنه جرت العادة على اعتبار أن مؤشرات العينة ($\overline{س}$، ع) تعتبر تقديرات غير متحيزة لمعالم المجتمع المجهولة أى اعتبار أن $\mu = \overline{س}$، وأن δ = ع مع ملاحظة أنه عند حساب الانحراف المعيارى للعينة (ع) نقوم بالقسمة على (ن-١) بدلاً من (ن) كما يلى:

$$ع = \sqrt{\frac{1}{ن - 1}\left(مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}\right)}$$

وقد أمكن التغلب على هذه المشاكل وذلك بتحويل قيم المتغير العشوائى (س) أى $س_1$، $س_2$، $س_3$، ...، $س_ن$ إلى قيم معيارية (ى) Standard value كما سبق وأشرنا عند حساب القيمة المعيارية فى مقاييس التشتت:

$$ى = \frac{س - \mu}{\delta}$$

والقيمة المعيارية (ى) عبارة عن متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى وسطه الحسابىμ = صفر وانحرافه المعيارىδ = ١ وعلى ذلك تتحول دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى بالقيم العادية (س) إلى دالة كثافة الاحتمال بالقيم المعيارية (ى):

$$ح(ى) = \frac{١}{\sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢} ى^{٢}}$$

وعلى ذلك فإنه لحساب الاحتمالات الخاصة بالمتغير العشوائى والذى يتبع توزيعاً طبيعياً معالمه (μ، δ) نقوم بتحويل قيم (س) إلى قيم معيارية (ى) ثم نقوم بالكشف فى الجدول رقم (١) بالملاحق عن المساحة الإجمالية المناظرة.

وهذا الجدول يحتوى على قيم (ى) المعيارية من ى = صفر، ويقابلها احتمال ح(ى) = ٠.٥ إلى ى = ٤ ويقابلها احتمال ح(ى) = ٠.٩٩٩٩٧، فإذا زادت قيمة (ى) عن ٤ فإننا نأخذ نفس قيمة الاحتمال الأخير المقابل للقيمة ٤ أى (٠.٩٩٩٩٧).

ومعنى ذلك أنه لكى نحصل على قيمة الاحتمال بصورة مباشرة من الجدول فإنه لابد أن يكون فى صورة:

ح (ى $\geq$ رقم موجب)

أى لابد من توافر شرطين :

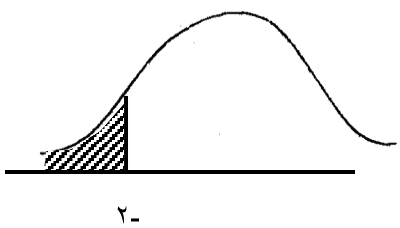
١- أن يكون المطلوب حساب احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة أو أقل منها.
٢- أن تكون القيمة المعيارية (ى) المقابلة لقيمة (س) المطلوبة موجبة.

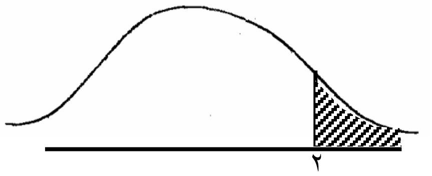
فمثلاً ح (ى $\geq$ ٢) نحصل عليها مباشرة من الجدول لتوافر الشرطين،

ح (ى $\geq$ ٢) = ٠.٩٧٧٢٥

لكن ما هو التصرف فى حالة عدم توافر شرط منهما أى يكون المطلوب ح (ى $\geq$ -) أو ح (ى $\leq$ +).

لاحظ أن التعامل مع هاتين الحالتين يكون واحداً لأن المساحة (الاحتمال) المطلوبة فى الحالتين واحدة كما يتضح من الشكلين المقابلين.



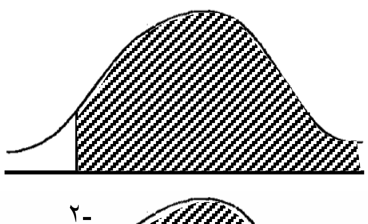


أى أن ح (ى ≥ -) = ح (ى ≤ +) = ١ – ح (ى ≥ +)

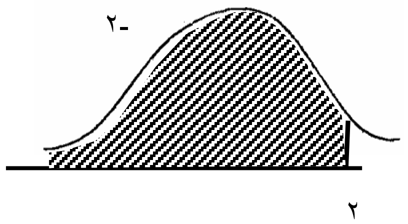
ح (ى ≥ -٢) = ١ – ح (ى ≥ ٢) = ١ – ٠.٩٧٧٢٥ = ٠.٠٢٢٧٥

ح (ى ≤ ٢) = ١ – ح (ى ≥ ٢) = ١ – ٠.٩٧٧٢٥ = ٠.٠٢٢٧٥

ثم نأتى إلى تساؤل آخر، ما هو التصرف فى حالة عدم توافر الشرطين الخاصين بالكشف مباشرة فى الجدول أى عندما يكون المطلوب = ح(ى ≤).



لاحظ أن الشكلين المقابلين متطابقين بمعنى أن:



ح (ى ≤ -) = ح (ى ≥ +)

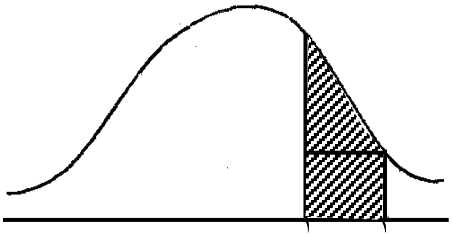
ح (ى ≤ -٢) = ح (ى ≥ ٢) = ٠.٩٧٧٢٥ مباشرة من الجدول

لاحظ أن ح (ى ≥ صفر) = ح (ى ≤ صفر) = ٠.٥

وذلك دون الكشف فى الجداول (خصائص التوزيع الطبيعىالمعيارى)

وقبل أن نتناول هذا الموضوع بالأمثلة نود أن نوضح بعض الأمور التى قد تواجهنا عند حساب بعض الاحتمالات:

حساب المساحة المحصورة بين قيمتين موجبتين:



ح = (١ ≥ ى ≥ ٢)

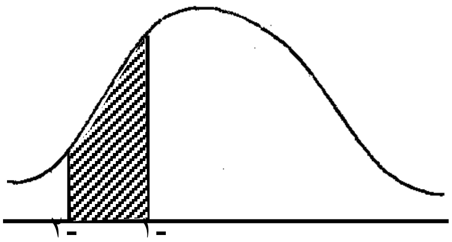
= ح (ى ≥ ٢) – ح (ى ≥ ١)

= ٠.٩٧٧٢٥ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٣٥٩١

حساب المساحة المحصورة بين قيمتين سالبتين:

ح (-٢ ≥ ى ≥ -١) = ح (١ ≥ ى ≥ ٢)



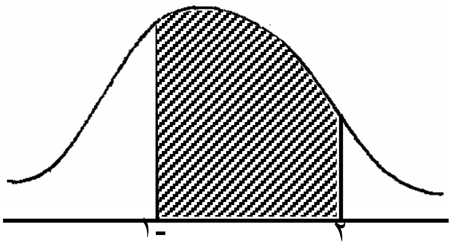
= ح (ى ≥ ٢) – ح(ى ≥ ١)

= ٠.١٣٥٩١

نفس المساحة المطلوبة سابقاً.

حساب المساحة المحصورة بين قيمة موجبة وأخرى سالبة:

ح (-١ ≥ ى ≥ ٢) = ح (ى ≥ ٢) – (ى ≥ -١)



=٠.٩٧٧٢٥ – [١ – ح(ى≥١)]

= ٠.٩٧٧٢٥ – [١-٠.٨٤١٣٤]

= ٠.٩٧٧٢٥ – ٠.١٥٨٦٦

= ٠.٨١٨٥٩

وسوف تتضح طريقة استخدام الجداول فى حساب الاحتمالات المختلفة من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (١) :

إذا كان متوسط عمر الطالب فى الكلية ٢٠ سنة بانحراف معيارى ٥ سنوات وعلى فرض أن العمر يتبع التوزيع الطبيعى، احسب الاحتمالات التالية:

١- احتمال أن يتراوح عمر أحد الطلاب بين ٢٢، ٢٥ سنة:

ح (٢٢ ≤ س ≤ ٢٥) تحول إلى قيمة معيارية (ى) وفقاً للعلاقة:

$$\text{ى} = \frac{\text{س} - \mu}{\delta} \qquad \text{حيث } \mu = \text{٢٠} \text{ ، } \delta = \text{٥}$$

$$\text{ح}\left(\frac{\text{٢٢} - \text{٢٠}}{\text{٥}} \le \text{ى} \le \frac{\text{٢٥} - \text{٢٠}}{\text{٥}}\right) = \textbf{ح (٠.٤} \le \textbf{ى} \le \textbf{١)}$$

ح (٠.٤ ≤ ى ≤ ١) = ح (ى ≤ ١) – ح (ى ≤ ٠.٤)

= ٠.٨٤١٣٤ – ٠.٦٥٥٤٢

= ٠.١٨٥٩٢

٢- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أكبر من ٢٥ سنة:

$$\text{ح (س} > \text{٢٥)} = \text{ح}\left(\text{ى} > \frac{\text{٢٥} - \text{٢٠}}{\text{٥}}\right) = \text{ح (ى} > \text{١)}$$

= ١ – ح (ى ≤ ١)

= ١ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٥٨٦٦

٣- احتمال أن يكون عمر الطالب أكبر من ١٨ سنة:

$$\text{ح (س} > \text{١٨)} = \text{ح}\left(\text{ى} > \frac{\text{١٨} - \text{٢٠}}{\text{٥}}\right) = \text{ح (ى} > \text{-٠.٤)}$$

ح (ى > -٠.٤) = ح (س ≤ ٠.٤) = ٠.٦٥٥٤٢.

٤- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أقل من ١٦ سنة:

ح (س < ١٦) = ح (ى < (١٦ – ٢٠) / ٥) = ح (ى < -٠.٨)

= ١ – ح (ى < ٠.٨)

= ١- ٠.٧٨٨١٤ = ٠.٢١١٨٦

٥- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أقل من ٢٦ سنة:

ح (س < ٢٦) = ح (ى < (٢٦ – ٢٠) / ٥) = ح (ى < ١.٢)

= ٠.٨٨٤٩٣

٦- احتمال أن يبلغ عمر أحد الطلاب ٢٤ سنة:

سبق أن أشرنا أن القيم التى يمكن أن نحصل على احتمالاتها مباشرة من الجدول تكون فى صورة ح (ى ≤ +)، ثم تعرفنا على كيفية حساب الاحتمالات فى حالة اختلاف شرط (الإشارة أو الاتجاه) أو فى حالة اختلاف الشرطين (الإشارة والاتجاه) وهذا يعنى أن ح (ى = رقم معين) = صفر.

إلا أننا يمكن ان نعتبر أن القيمة المطلوبة للمتغير كأنها مركز لفئة حديها القيمة المطلوبة ±٠.٥ أى أننا نضع المطلوب السابق فى الصورة التالية:

ح (س = ٢٤) = ح (٢٣.٥ ≤ س ≤ ٢٤.٥)

= ح ((٢٣.٥ – ٢٠) / ٥ ≤ ى ≤ (٢٤.٥ – ٢٠) / ٥)

= ح (٠.٧ ≤ ى ≤ ٠.٩)

= ح (ى ≤ ٠.٩) – ح (ى ≤ ٠.٧)

= ٠.٨١٥٩٤ – ٠.٧٥٨٠٤ = ٠.٠٥٧٩٠

حساب القيمة إذا علم الاحتمال :

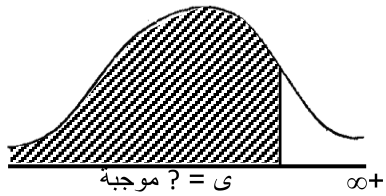
سبق أن أشرنا إلى أن أول قيمة معيارية هى ى = ٠ يقابلها احتمال ح(ى) = ٠.٥ ومعنى ذلك أن أول احتمال معلوم بالجدول = ٠.٥ وبالتالى لا يمكن الكشف عن قيمة (ى) إذا علم احتمالها إلا إذا كان الاحتمال ح(ى) ≥ ٠.٥، ولكى نصل إلى أسلوب مبسط لحساب القيمة إذا علم الاحتمال سنتناول الأمر كحالتين:

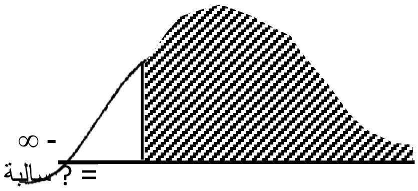
الحالة الأولى: إذا كان الاحتمال > ٠.٥

ولنأخذ مثلاً أن الاحتمال المعلوم ٠.٧٥

ونكون أمام حالتين إما:

ح (ى ?≥) = ٠.٧٥





هنا يتم الكشف مباشرة فى الجدول أمام القيمة ٠.٧٥ من عمود ح(ى) لنحدد من العمود المقابل لها قيمة ى = ٠.٦٧

أو ح (ى ?≤) = ٠.٧٥

لاحظ أن قيمة ى فى هذه الحالة تساوى قيمتها فى الحالة السابقة مع اختلاف الإشارة فهى موجبة فى الحالة الأولى وسالبة فى هذه الحالة.

∴ ى = -٠.٦٧

الحالة الثانية: إذا كان الاحتمال < ٠.٥

فى هذه الحالة وكما سبق وأشرنا لن نتمكن من استخدام الجدول وبالتالى لابد أن نوجد الاحتمال المكمل حيث:

ح (ى ?≥) = ٠.٣٥ = ح (ى ?≤) = ٠.٦٥

ح (ى ?≤) = ٠.٤٥ = ح (ى ?≥) = ٠.٥٥

ثم نكشف بالجدول عن الاحتمال المكمل مع تطبيق نفس ما توصلنا إليه فى الحالة الأولى.

أى أن ح (ى ?≤) = ٠.٦٥ ى = -٠.٣٩ سالبة لأنها ≤

ح (ى ?≥) = ٠.٥٥ ى = ٠.١٣ موجبة لأنها ≥

مثال (٢): قامت شركة النصر لصناعة اللمبات الكهربائية باختبار ١٠٠٠٠ لمبة من إنتاجها فتبين أن متوسط عمر اللمبة (مدة الإضاءة) ١٢٠٠ ساعة بانحراف معيارى ٣٠٠ ساعة، وعلى فرض أن عمر اللمبة الكهربائية متغير عشوائى يتبع توزيعاً طبيعياً، احسب ما يلى:

١- احتمال أن توجد لمبة عمرها أكبر من ١٥٠٠ ساعة:

$$ح\ (س > ١٥٠٠) = ح\left(ى > \frac{١٥٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠}\right)$$

= ح (ى > ١) = ١ – ح (ى ≤ ١)

= ١ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٥٨٦٦

٢- احتمال أن توجد لمبة عمرها أقل من ٩٠٠ ساعة:

$$ح\ (س < ٩٠٠) = ح\left(ى < \frac{٩٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠}\right)$$

= ح (ى < -١) = ١ – ح (ى < ١)

= ١ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٥٨٦٦

٣- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ١٢٠٠، ١٦٠٠ ساعة:

ح (١٢٠٠ ≤ س ≤ ١٦٠٠)

$$= ح\left(\frac{١٢٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} \le ى \le \frac{١٦٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠}\right)$$

= ح (صفر ≤ ى ≤ ١.٣٣)

= ح (ى ≤ ١.٣٣) – ح (ى ≤ صفر)

= ٠.٩٠٨٢٤ – ٠.٥

= ٠.٤٠٨٢٤

٤- عدد اللمبات التى يتراوح عمرها بين ١١٠٠ ساعة، ١٥٠٠ ساعة:

نحسب الاحتمال أولاً:

ح (١١٠٠ ≤ س ≤ ١٥٠٠)

= ح ((١١٠٠ – ١٢٠٠) / ٣٠٠ ≤ ى ≤ (١٥٠٠ - ١٢٠٠) / ٣٠٠)

= ح (-٠.٣٣ ≤ ى ≤ ١)

= ح (ى ≤ ١) – ح (ى ≤ -٠.٣٣)

= ٠.٨٤١٣٤ – [١ – ح (ى ≤ ٠.٣٣)]

= ٠.٨٤١٣٤ – [١ – ٠.٦٢٩٣٠]

= ٠.٨٤١٣٤ – ٠.٣٧٠٧٠

= ٠.٤٧٠٦٤

∴ عدد اللمبات التى يتراوح عمرها بين ١١٠٠، ١٥٠٠ ساعة

= ١٠٠٠٠ × ٠.٤٧٠٦٤ = ٤٧٠٦ لمبة

٥- العمر الذى يقل عنه عمر ٧٠% من عدد اللمبات:

ح (ى <?) = ٠.٧٠   من الجدول مباشرة ى = ٠.٥٣

وحيث أن: ى = $\frac{س - \mu}{\delta}$

$$٠.٥٣ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س – ١٢٠٠ = ١٥٩ ∴ س = ١٣٥٩ ساعة

ومعنى ذلك أن ٧٠% من عدد اللمبات (٧٠٠٠ لمبة) يبلغ عمر كل منها أقل من ١٣٥٩ ساعة.

٦- العمر الذى يقل عنه عمر ٢٥% من عدد اللمبات:

ح (ى <?) = ٠.٢٥ = ح (ى >?) = ٠.٧٥ لأنه أقل من ٠.٥، ثم نكشف بالجدول أمام ح(ى) = ٠.٧٥ فنحصل على قيمة ى نضع لها إشارة سالبة لأن الاتجاه ≤

ى = -٠.٦٨

$$-٠.٦٨ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س – ١٢٠٠ = -٢٠٤ ∴ س = ٩٩٦ ساعة

أى أن ٢٥% من عدد اللمبات (٢٥٠٠ لمبة) يبلغ عمر كل منها أقل من ٩٩٦ ساعة.

٧- العمر الذى يزيد عنه عمر ٨٠% من عدد اللمبات

ح (ى >?) = ٠.٨٠

من الجدول مباشرة (أكبر من ٠.٥) مع وضع إشارة سالبة لأنها (>).

ى = -٠.٨٤

س – ١٢٠٠ = -٢٥٢ ∴ س = ٩٤٨ ساعة

أى أن ٨٠% من عدد اللمبات (٨٠٠٠ لمبة) يزيد عمر كل منها على ٩٤٨ ساعة.

٨- العمر الذى يزيد عنه عمر ٤٥% من عدد اللمبات:

ح (ى >?) = ٠.٤٥ نوجد الاحتمال المكمل لأنه أقل من ٠.٥

ح (ى >?) = ٠.٤٥ = ح (ى <?) = ٠.٥٥ من الجدول مباشرة.

ى = ٠.١٣

$$٠.١٣ = \frac{\text{س - ١٢٠٠}}{٣٠٠}$$

س – ١٢٠٠ = ٣٩ ∴ س = ١٢٣٩ ساعة

ومعنى ذلك أن ٤٥% من عدد اللمبات (٤٥٠٠ لمبة) يزيد عمر كل منها على ١٢٣٩ ساعة.

استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون:

Normal Dis. as an Approximation to the poisson Dis.

كما سبق وأشرنا فى استخدام دالة التوزيع الطبيعى كتقريب لدالة توزيع ذو الحدين نظراً لصعوبة أو استحالة استخدام دالة توزيع ذو الحدين عندما تكون (ن) كبيرة جداً، وبالمثل فإنه من الصعوبة بمكان استخدام دالة توزيع بواسونفى حساب الاحتمالات عندما تكون (ن) كبيرة، وإن كانت الاحتمالات بعد حد معين تتضاءل قيمتها جداً حتى لتكاد أن تتلاشى، إلا أننا نظل فى حاجة إلى حسابها.

ولذلك يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعىفى حساب الاحتمالات الخاصة بهذا التوزيع.

ولما كانت القيمة المتوقعة = التباين لهذا التوزيع فإن:

- الانحراف المعيارى $\delta = \sqrt{\delta^{٢}} = \sqrt{\mu} = \sqrt{\text{ن × ل}}$

حيث أن μ= ن × ل

وبالتالى تحسب القيمة المعيارية (ى) كما يلى:

$$ى = \frac{س - ن \times ل}{\sqrt{ن \times ل}}$$

مثـال (١): إذا كانـت نسـبة الإنتـاج المعيـب فـى أحـد المصـانع ٢% سـحبت عينـة عشوائية من ٤٠ وحدة، احسب احتمال أن يكون ربع حجم العينـة علـى الأكثـر مـن الوحدات المعيبة وبفرض أن توزيع الإنتاج المعيب يتبع توزيع بواسون.

الحــل

ن = ٤٠ ل = ٠.٠٢ μ = ن × ل = ٤٠ × ٠.٠٢ = ٠.٨

المطلوب: أن $\frac{١}{٤}$ حجم العينة على الأكثر وحدات معيبة ح (س ≤ ١٠)

لاحظ أننا لو استخدمنا دالة توزيع بواسون كان علينا أن نحسب:

$ح_{(١٠)} + ح_{(٩)} + ح_{(٨)} + ... + ح_{(٠)}$

أما باستخدام دالة التوزيع الطبيعى فإن:

$$ح (س \leq ١٠) = ح \left(ى \leq \frac{١٠ - ٤٠ \times ٠.٠٢}{\sqrt{٤٠ \times ٠.٠٢}} \right)$$

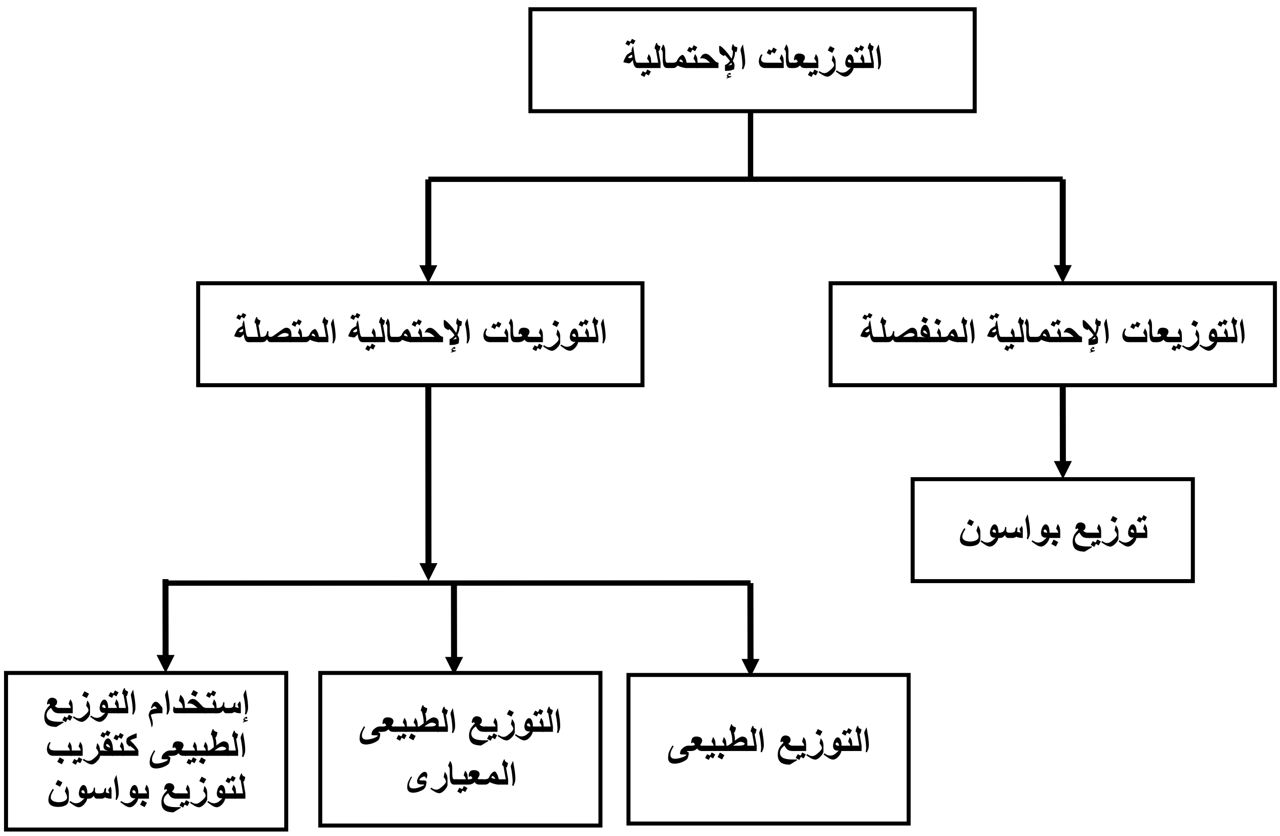
$$= ح (ى \leq ١٠.٢٩)$$

$$= ٠.٩٩٩٩٧$$

تدريب:

علـى الطالـب إيجـاد المطلـوب باسـتخدام دالـة توزيـع بواسـون وسـيجد أن الفرق بين الاحتمالين تقريباً (٠.٠٠٠٠٢) وهذا يؤكد علـى أهميـة اسـتخدام التوزيـع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

الخلاصة


التوزيعات الإحتمالية
التوزيعات الإحتمالية المنفصلة
التوزيعات الإحتمالية المتصلة
توزيع بواسون
التوزيع الطبيعى
التوزيع الطبيعى المعيارى
إستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون

تمارين على التوزيعات الاحتمالية

(١) فى دراسة عن دخل الفرد فى إحدى المدن تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠٠ فرد تبين منها أن متوسط الدخل الشهرى للفرد ٤٠٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه. فإذا علمت أن الدخل يتبع التوزيع الطبيعى، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يبلغ الدخل الشهرى لأحد الأفراد ٦٠٠ جنيه على الأقل.

٢- احتمال أن يتراوح الدخل الشهرى لأحد الأفراد بين ٤٠٠ جنيه، ٦٠٠جنيه.

٣- عدد الأفراد الذين يبلغ دخلهم ٥٥٠ جنيه على الأكثر من بين أفراد العينة.

٤- عدد الأفراد الذين يتراوح دخلهم بين ٣٠٠ جنيه، ٣٥٠ جنيه.

٥- الدخل الشهرى الذى يبلغه أو يقل عنه دخل ٧٠% من عدد الأفراد بالعينة.

٦- الدخل الذى يزيد عنه دخل ٤٠% من عدد الأفراد بالعينة.

(٢) فى دراسة عن رأس المال العامل فى الشركات الصناعية بمدينة العاشر من رمضان تبين أن متوسط رأس المال ٥٠٠ مليون جنيه بانحراف معيارى ٢٠٠ مليون جنيه، فإذا علمت أن توزيع رأس المال العامل قريب جداً من التوزيع الطبيعى احسب ما يلى:

١- احتمال أن يبلغ رأس مال إحدى الشركات ٧٥٠ مليون جنيه على الأقل.

٢- احتمال أن يتراوح رأس مال إحدى الشركات بين ٦٠٠ مليون، ٨٠٠مليون جنيه.

٣- إذا اخترنا ١٠٠ شركة من بين هذه الشركات فما هو عدد الشركات التى يبلغ رأس مالها ٦٥٠ مليون جنيه على الأكثر من بين هذه الشركات.

٤- إذا اخترنا ١٠ شركات من هذه الشركات فما هو احتمال أن يتراوح إجمالى رأس مالها بين ٤٠٠٠ مليون، ٥٥٠٠ مليون جنيه.

٥- حدد قيمة رأس المال الذى يزيد عنه رأس مال ٧٥% من عدد الشركات.

٦- حدد قيمة رأس المال الذى يقل عنه رأس مال ٣٥% من عدد الشركات.

(٣) إذا علمت أن نسبة الإنتاج التالف فى أحد المصانع تبلغ ٣% فإذا سحبنا عينة من ١٠ وحدات من إنتاج المصنع وكان الإنتاج التالف يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأكثر تالفة.

٢- احتمال أن يكون بالعينة ٤ وحدات على الأقل تالفة.

(٤) سحبت ٥٠٠ عينة من إنتاج أحد المصانع وكل عينة مكونة من ٥ وحدات وتم اختبار هذه العينات فوجد أن توزيعها وفقاً لعدد الوحدات المعيبة فى كل عينة كما يلى:

عدد الوحدات المعيبة	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد العينات	٣٥٠	١٠٠	٣٠	١٠	٧	٣	٥٠٠

والمطلوب:

١- حساب إجمالى عدد الوحدات المعيبة فى كل العينات.

٢- حساب متوسط عدد الوحدات المعيبة والانحراف المعيارى لعدد الوحدات المعيبة بالعينة.

٣- حساب احتمال إنتاج وحدة معيبة فى هذا المصنع.

٤- إذا اخترنا عينة من إنتاج المصنع وكان توزيع الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١/٤ احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة.

٢/٤ احتمال أن يكون بالعينة وحدة على الأقل معيبة.

٣/٤ التوقع الرياضى والتباين لعدد الوحدات المعيبة بالعينة.

(٥) إذا علمت أنه من واقع سجلات الكلية تبين أن احتمال أن يحصل الطالب على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات يبلغ ٠.٨٥، فإذا اخترنا عينة من ١٠٠ طالب من الملتحقين بالكلية هذا العام وكان توزيع الطلاب يتبع توزيع ذو الحدين، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يحصل ٧٠ طالب على الأكثر على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات.

٢- احتمال أن يحصل ٤٥ طالب على الأقل على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات.

٣- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الطلاب الذين يحصلون على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات فى هذه العينة.

٤- احتمال أن يتراوح عدد الذين يحصلون على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات فى هذه العينة بين ٦٥، ٨٥ طالب.

٥- هل الاحتمالات السابقة حقيقية أم تقريبية ولماذا؟ وما هو الإجراء اللازم لتصحيحها إن كانت تقريبية؟

(٦) إذا كان احتمال وجود أخطاء فى إحدى صفحات كتاب الإحصاء ٤% فإذا علمت أن كتاب الإحصاء يحتوى على ٥٠٠ صفحة وأن توزيع الأخطاء يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١- احتمال وجود أخطاء فى ٣٠٠ صفحة على الأقل.

٢- احتمال وجود أخطاء فى ٢٥٠ صفحة على الأكثر.

٣- احتمال أن تتراوح عدد الصفحات التى بها أخطاء بين ٣٥٠، ٤٥٠صفحة.

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الصفحات التى بها أخطاء بالكتاب.

الباب الخامس
نظرية التقديرات واختبارات الفروض الإحصائية
Estimation Theory & Tests of Statistical Hypothesis

الفصل الأول: نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع
Estimation Theory

الفصل الثانى: إختبارات الفروض الإحصائية
Tests of Statistical Hypothesis

الأهداف السلوكية:

بعد دراسة موضوع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على:

١- تحديد حجم العينة ومعرفة المعايير التى تحكم عملية تحديد حجم العينة.

٢- معرفة نظرية النهاية المركزية.

٣- تقدير معالم المجتمع إما بنقطة أو بفترة ثقة.

٤- أن يتعرف على توزيع (ت).

٥- يتعرف على الفرض الإحصائى وتطبيق خطوات الاختبار الإحصائى.

٦- يتعرف على الاختبارات التى تعتمد على عينة واحدة والاختبارات التى تعتمد على عينتين مستقلتين والاختبارات التى تعتمد على عينتين غير مستقلتين.

العناصر:

[١] الفصل الأول : نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع.

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\overline{س}$)

١/١ تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (σ).

٢/١ تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع).

٣/١ حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ).

٢- تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$)

١/٢ إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال.

٢/٢ إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال.

٣/٢ حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل)

٣- تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_١$ - $\mu_٢$).

١/٣ التباين للمجتمعين $\sigma_١^٢$ ، $\sigma_٢^٢$ معلومين.

٢/٣ التباين للمجتمعين مجهولين.

٤- تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($ل_١$ – $ل_٢$).

[٢] الفصل الثانى : إختبارات الفروض الإحصائية :

١- الاختبارات التى تعتمد على عينة واحدة.

١/١ اختبار أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة.

٢/١ اختبار أن نسبة حدث ما فى المجتمع (ل) تساوى قيمة معينة.

٢- الاختبارات التى تعتمد على عينتين مستقلتين.

١/٢ اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين.

٢/٢ اختبار الفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين.

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين على الباب الخامس .