الوحدة الأولى   النسب المثلثية لزاوية حادة

الدرس الأول: بعض خواص التناسب

التناسب: هو تساوي نسبتين $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

نسمي كلاً من a,b طرفي التناسب وc,d وسطي التناسب

خواص التناسب:

1- في أي تناسب جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a.d=c.b$$

$$\frac{3}{5}\overset{?}{=}\frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow 3\times 10=6\times 5$$

$$30=30$$

إذاً التناسب صحيح.

$$\frac{3}{5}\overset{?}{=}\frac{6}{8}\Rightarrow 3\times 8=6\times 5$$

$$24\neq 30$$

إذاً التناسب غير صحيح.

تُستخدم هذه الخاصة في إثبات صحة التناسب "مثلاً مبرهنة النسب الثلاث العكسية في البحث القادم".

2- إذا بادلنا طرفي التناسب حصلنا على تناسب جديد.

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$$

وأيضاً إذا بادلنا وسطي التناسب حصلنا على تناسب جديد.

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$$

3- إذا ثبتنا البسطين وأضفنا (أو طرحنا) كل بسط إلى المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

وأيضاً:

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

وبالعكس إذا ثبتنا المقامين وأضفنا (أو طرحنا) كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

وأيضاً:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

أمثلة:

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow\frac{3}{5+3}=\frac{6}{10+6}\Rightarrow\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow\frac{3-5}{5}=\frac{6-10}{10}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5}=-\frac{4}{10}$$

تُستخدم هذه الخاصة في حال كان لدينا أحد النسبتين (بسط ومقام) مجهول ولدينا مجموعهما أو فرقهما.

مثال: عددين x وy موجبين يحققان $x+y=10$

$$\frac{x}{y}=\frac{12}{18}$$

أوجد العددين.

الحل:

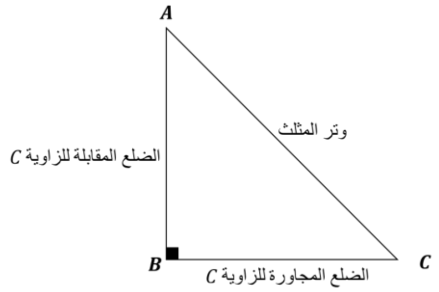
نثبت البسط ونضيفه إلى المقام $\frac{x}{y}=\frac{12}{18}$

$$\frac{x}{x+y}=\frac{12}{18+12}\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{12}{30}\Rightarrow x=\frac{12\times 10}{30}=4$$

$$x=4\Rightarrow y=6$$

الدرس الثاني: النسب المثلثية لزاوية حادة

تأمل المثلث المرسوم جانباً وتعلم:



النسب المثلثية للزاوية الحادة هي:

1- جيب الزاوية C ونرمز له بـ $\sin C$ ويعطى بالعلاقة:

$$\sin C=\frac{\text{الضلع المقابلة لـ } C}{\text{الوتر}}=\frac{AB}{AC}$$

2- تجيب الزاوية C ونرمز له بـ $\cos C$ ويعطى بالعلاقة:

$$\cos C=\frac{\text{الضلع المجاورة لـ } C}{\text{الوتر}}=\frac{BC}{AC}$$

3- ظل الزاوية C ونرمز له بـ $\tan C$ ويعطى بالعلاقة:

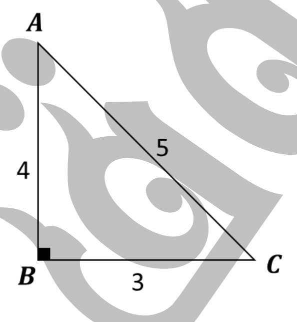
$$\tan C=\frac{\text{الضلع المقابلة لـ } C}{\text{الضلع المجاورة لـ } C}=\frac{AB}{BC}$$

من العلاقات الثلاث السابقة نستطيع حساب كل من tan, cos, sin أي زاوية **حادة** في مثلث **قائم**.

وأيضاً في حال معرفتنا لأحد النسب السابقة (tan, cos, sin) نستطيع معرفة طول أحد أضلاع المثلث.

مثال:

ليكن لدينا الشكل المرسوم جانباً أوجد كلاً من $\tan A, \cos A, \sin A$
$\tan B, \cos B, \sin B$



الحل:

$$\sin A=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}=\frac{CB}{AB}=\frac{3}{5}$$

$$\cos A=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{CB}{AC} = \frac{3}{4}$$

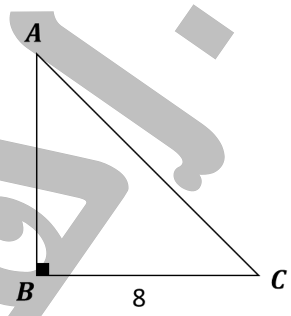
$$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$$

مثال:

ABC مثلث قائم في B و$BC = 8$ و$\sin B\hat{A}C = \frac{4}{5}$ احسب طول الوتر.



الحل:

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = \frac{8 \times 5}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

الدرس الثالث: علاقتان مهمتان في النسب المثلثية

علاقات مهمة:

$$1)\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$2)\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

لاحظ أن θ هي زاوية حادة.

$$3)\ \sin\theta = \cos(90 - \theta)$$

هام: اختر الإجابة الصحيحة.

في العلاقة التالية نستنتج أن sin أي زاوية حادة يساوي cos الزاوية المتممة لها (مجموعهما 90).

مثال:

$$\sin 40 = \cos 50$$

لأن $40 + 50 = 90$ أي أنهما زاويتان متتامتان.

$$\sin 30 = \cos 60$$

لأن $30 + 60 = 90$ أي أنهما زاويتان متتامتان.

نستخدم العلاقة الثانية في حال معرفتنا لـ $\sin\theta$ و$\cos\theta$ والمطلوب $\tan\theta$ وليس لدينا أطوال أضلاع المثلث لنطبق القانون السابق.

نستخدم العلاقة الأولى في حال معرفتنا لـ $\sin\theta$ والمطلوب حساب $\cos\theta$ وبالعكس دون معرفتنا بأطوال أضلاع المثلث لنطبق القانون السابق.

مثال:

بفرض $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أوجد $\cos\theta$ و$\tan\theta$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta + \frac{3}{4} = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

خواص مهمة:

♦ $0 < \sin\theta < 1$ و$0 < \cos\theta < 1$

لا يمكن أن تكون النسبتان أكبر من واحد أو عدد سالب (هي أعداد **موجبة**) وذلك بفرض θ زاوية **حادة**.

♦ وتر المثلث القائم هو أطول ضلع في المثلث القائم والمقابل للزاوية القائمة.

الدرس الرابع: نسب زوايا شهيرة

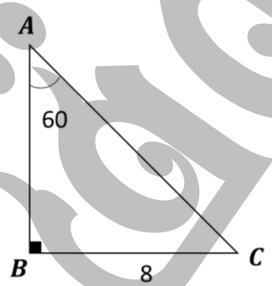
سأنظم الجدول التالي لزوايا شهيرة ويجب حفظه:

θ	30	45	60
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

يساعدنا الجدول السابق بمعرفة أضلاع مثلث قائم تبعاً للمعطيات.

مثال:

ABC مثلث قائم في B، $BC = 8$، $B\hat{A}C = 60$ والمطلوب حساب طول AC.



طريقة التفكير: لدينا زاوية 60 زاوية شهيرة ولدينا الضلع BC مقابل لها والمطلوب حسابه هو AC وتر هذا المثلث إذاً يجب استخدام $\sin 60$.

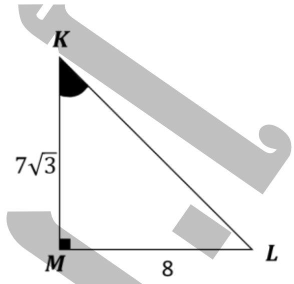
الحل:

$$\sin 60 = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = \frac{8 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

مثال (2):

KLM مثلث قائم في M، $KM = 7\sqrt{3}$ و$M\widehat{K}L = 30^o$ احسب طول ML.



طريقة التفكير: لدينا الزاوية $K = 30^o$ زاوية شهيرة وأيضاً الضلع KM المجاور لـ K والمطلوب ML المقابل لـ K، إذاً سوف نستخدم $\tan K$.

الحل:

$$\tan 30 = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{ML}{7\sqrt{3}} \Rightarrow ML = \frac{7\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{3} = \frac{7 \times 3}{3} = 7$$

معلومات سابقة

في المثلث القائم:

1- مبرهنة فيثاغورث:

$(\text{ضلع قائمة})^2 + (\text{ضلع قائمة})^2 = (\text{الوتر})^2$ وتكتب بالعكس.

2- الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر

3- المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر.

علماً أن المتوسط: هو المستقيم النازل من الرأس ويقسم الضلع المقابل إلى قسمين متساويين.

في المثلث المتساوي الأضلاع:

المساحة:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$$

حيث a طول ضلع المثلث

الارتفاع:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a$$

ملاحظة: قطر المربع = طول الضلع × $\sqrt{2}$

مبرهنات تفيد في إثبات التوازي:

مبرهنة (1):

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها.

مبرهنة (2):

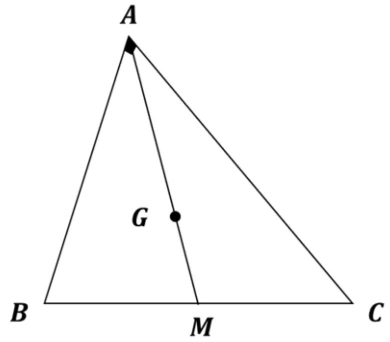
العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

مبرهنة:

مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات) تقسم المتوسط إلى قسمين القسم المتعلق بالرأس يساوي ضعف القسم الآخر.

توضيح:

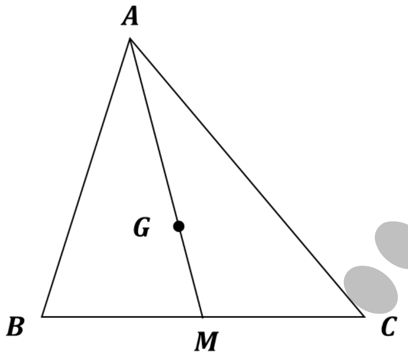
ABC مثلث، AM متوسط، G مركز ثقل المثلث، إذاً $AG = 2GM$



يمكن كتابة ذلك عن طريق التناسب:

$$\boxed{\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}}$$

أمثلة توضيحية لما سبق



ABC **مثلث قائم** في A فيه $AB = 3$ و$AC = 4$

1- احسب طول BC

2- بفرض M منتصف BC احسب طول AM

3- لتكن G مركز ثقل المثلث احسب كلاً من AG وGM

الحل:

1- حسب مبرهنة فيثاغورث:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$= (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$
$$BC = \sqrt{25} = 5$$

2- بما أن AM متوسط متعلق بالوتر إذاً طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر.

$$\Rightarrow AM = \frac{5}{2} = 2.5$$

3- G مركز ثقل مثلث إذاً:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$$

نثبت البسط ونضيفه إلى المقام

$$\frac{AG}{GM + AG} = \frac{2}{1+2} \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{2.5} = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow AG = \frac{2 \times 2.5}{3} = 1.66$$
$$GM = 2.5 - 1.6 = 0.9$$

الوحدة الثانية   مبرهنة النسب الثلاث

الدرس الأول: مبرهنة النسب الثلاث

نص مبرهنة النسب الثلاث:

d و d' مستقيمان متقاطعان في A

النقطتان M, B من d مختلفان عن A

النقطتان N, C من d' مختلفان عن A

إذا كان MN, BC متوازيين كان:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

شرح المبرهنة:

في البداية يجب الانتباه أننا لا نستطيع استخدام هذه المبرهنة دون تحقق **توازي مستقيمين**.

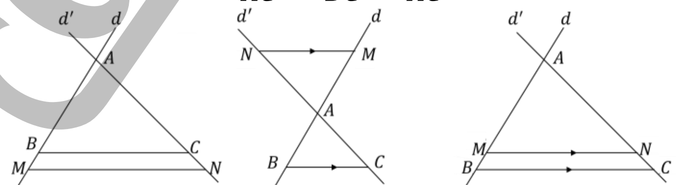
سيكون لدينا مستقيمين متوازيين ومستقيمين قاطعين لهما كما في الأشكال الموضحة.

عند تحقق التوازي نستطيع وضع النسب وذلك بترتيب الأحرف مع مراعاة النقاط التي تنتمي إلى مستقيم واحد في عمود واحد.

$$\begin{matrix} A & M & N \\ A & B & C \end{matrix}$$

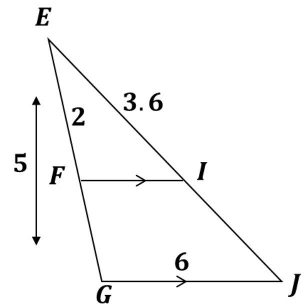
ثم نأخذ أول حرفين من السطر الأول ونضعهم في البسط وأول حرفين من السطر الثاني ونضعهم في المقام وهكذا نستنتج:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$$



مثال توضيحي:

في الشكل المرافق $FI \parallel GJ$ احسب كلاً من EJ, FI



الحل:

لدينا فرضاً $FI \parallel GJ$ إذاً حسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\begin{matrix} E & I & F \\ E & J & G \end{matrix} \Rightarrow \frac{EI}{EJ} = \frac{EF}{EG} = \frac{IF}{JG}$$

$$\frac{3.6}{EJ} = \frac{2}{5} = \frac{IF}{6}$$

$$\Rightarrow EJ = \frac{5 \times 3.6}{2} = 9$$

$$IF = \frac{6 \times 2}{5} = 2.4$$

الدرس الثاني: عكس مبرهنة النسب الثلاث

نص عكس مبرهنة النسب الثلاث:

d و d' مستقيمان متقاطعان في A

M, B نقطتان من d مختلفان عن A

N, C نقطتان من d' مختلفان عن A

إذا كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ وكان ترتيب M, B, A على d مماثلاً لترتيب النقاط N, C, A على d' كان المستقيمان MN, BC متوازيان.

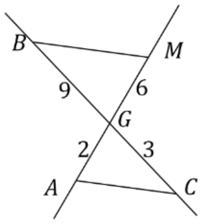
شرح عكس مبرهنة النسب الثلاث:

في هذه المبرهنة سنضع النسب كما وضعناها في مبرهنة النسب الثلاث ونتحقق من صحتها.

إذا كان التناسب صحيح يكون المستقيمان متوازيان وفي حال العكس يكون المستقيمان غير متوازيان.

أمثلة توضيحية:

في الشكل المرافق هل المستقيمان AC وBM متوازيان؟



نضع الأحرف:

$$\begin{matrix} G & M & B \\ G & A & C \end{matrix}$$

$$\frac{GM}{GA} \stackrel{?}{=} \frac{GB}{GC}$$

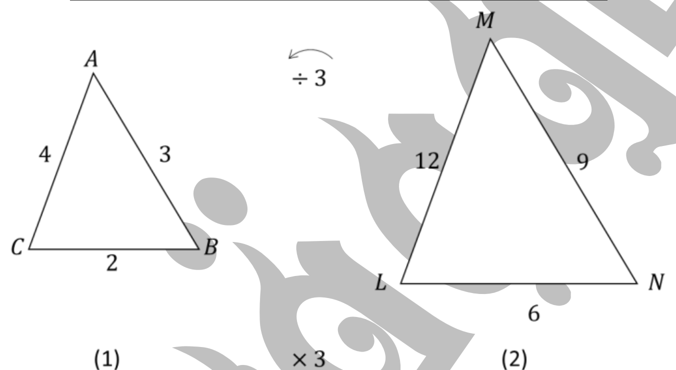
$$\frac{6}{2} \stackrel{?}{=} \frac{9}{3}$$

$$6 \times 3 \stackrel{?}{=} 9 \times 2$$

$$18 = 18$$

وبالتالي حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث المستقيمان متوازيان.

الدرس الثالث: التشابه



لنتأمل المثلثين السابقين ونلاحظ أن أحدهما هو تكبير للمثلث الآخر حيث تنتج أطوال أضلاع المثلث (2) بضرب أطوال أضلاع المثلث (1) بالرقم 3

سنسمي العدد 3 معامل تكبير ونرمز له بالرمز K

حيث إن:

$$\frac{LM}{AC} = 3, \qquad \frac{NM}{AB} = 3, \qquad \frac{LN}{CB} = 3$$

إذاً المثلثان متشابهان ونسبة التشابه $K = 3$

إذا انتقلنا من الشكل 2 إلى الشكل 1:

سيصبح العدد $K = \frac{1}{3}$ وهو معامل تصغير حيث إن:

$$\frac{AC}{ML} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{AB}{MN} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{CB}{LN} = \frac{1}{3}$$

إذاً K نسبه تشابه تُحقق:

$K > 1$ هي معامل تكبير

$K < 1$ فهي معامل تصغير

من المثال السابق نلاحظ أن أطوال أضلاع المثلثان المتشابهان متناسبة أي أن:

$$\frac{LM}{AC} = \frac{NM}{AB} = \frac{LN}{CB}$$

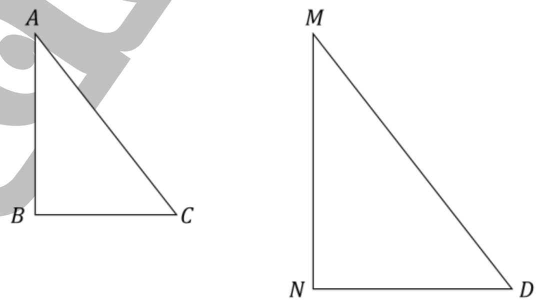
مع ملاحظة أن قياسات الزوايا لا تتغير بل تبقى نفسها في كلا المثلثين.

نتيجة:

إذا كان لدينا مثلثان ABC وMND متشابهان نستطيع أن نضع نسب التشابه وذلك بترتيب الأحرف بحيث يحتوي العمود الواحد الزوايا المتساوية.

$$\begin{matrix} A & B & C \\ M & N & D \end{matrix}$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{ND} = \frac{AC}{MD}$$



ومن النسب نستطيع إيجاد أطوال أضلاع المثلثين.

إثبات تشابه مثلثين:

1- نضع النسب الثلاث السابقة ونتحقق من صحة التناسب.

2- إذا وجد ضلع في المثلث الأول يوازي ضلع في المثلث الثاني تكون النسب محققة وبالتالي المثلثان متشابهان.

قواعد هامة:

بفرض K نسبة تشابه إذاً:

طول ضلع المثلث (2) $\times K =$ طول ضلع المثلث (1)

مساحة الشكل (2) $\times K^2 =$ مساحة الشكل (1)

حجم الشكل (2) $\times K^3 =$ حجم الشكل (1)

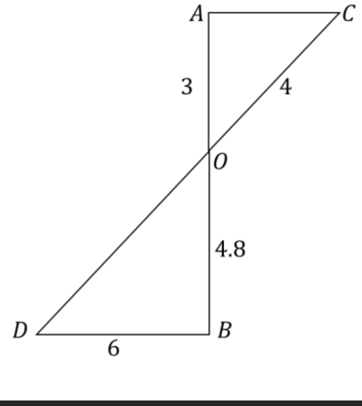
محيط الشكل (2) $\times K =$ محيط الشكل (1)

مثال:

المستقيمان CD, AB متقاطعان في O والمستقيمان BD, AC متوازيان.

1- احسب الطول OD

2- احسب الطول AC



الحل:

بما أن المستقيمان DB, AC متوازيان

إذاً المثلثان ODB, OAC متشابهان.

لنضع النسب:

$$\begin{matrix} O & A & C \\ O & B & D \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$

نعوض:

$$\frac{3}{4.8} = \frac{4}{OD} = \frac{AC}{6}$$

$$\Rightarrow OD = \frac{4 \times 4.8}{3} = 6.4$$

$$AC = \frac{6 \times 3}{4.8} = 3.75$$

مثال (2):

اقترح مهندس معماري بناء صومعة حبوب بحجم $900\ m^3$ نصمم نموذجاً مصغراً لها بمقياس $\frac{1}{20}$ احسب حجم النموذج.

الحل:

$$K = \frac{1}{2}$$

حجم الصومعة $\times K^3 =$ حجم النموذج

$$= \left(\frac{1}{20}\right)^3 \times 900$$

$$= \frac{1}{8000} \times 900 = \frac{9}{80} = 0.1125$$

الوحدة الثالثة   الزوايا والمضلعات في الدائرة

الدرس الأول: زوايا محيطية وزوايا مركزية

الزاوية المركزية: رأسها مركز الدائرة

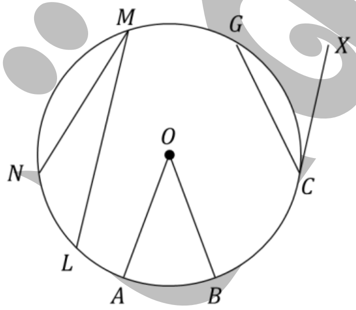
الزاوية المحيطية: رأسها يقع على محيط الدائرة

الزاوية المماسية: رأسها يقع على محيط الدائرة وأحد أضلاعها مماس للدائرة

الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية تقابل القوس $\widehat{AB}$

الزاوية $N\hat{M}L$ محيطية تقابل القوس $\widehat{NL}$

الزاوية $G\hat{C}X$ مماسية تقابل القوس $\widehat{GC}$



قواعد هامة في البحث:

1- تقاس الزاوية المركزية بقياس القوس المقابل لها

2- تقاس الزاوية المحيطية بنصف قياس القوس المقابل لها

3- تقاس الزاوية المماسية بنصف قياس القوس المقابل لها

لاحظ عزيزي الطالب في الرسم السابق بفرض: $\widehat{NL}=$ و$\widehat{AB}=45$ 25 و$\widehat{GC}=20$ احسب قياس الزوايا $\hat{C},\hat{M},\hat{O}$

$$\hat{C}=\frac{1}{2}\left(\widehat{GC}\right)=10$$

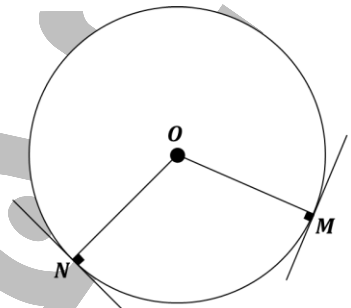
$$\hat{M}=\frac{1}{2}\left(\widehat{NL}\right)=12.5$$

$$\hat{O}=\left(\widehat{AB}\right)=30$$

ملاحظة: عندما يكون الطلب قياس زاوية ابحث عن قياس القوس المقابل وبالعكس.

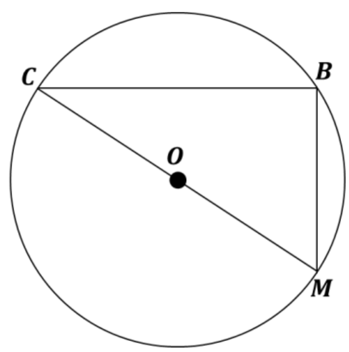
4- المماس عامود على نصف القطر في نقطة المماس.

الغاية من هذه الخاصة أن تدرك عزيزي الطالب ذكر كلمة مماس في فرضيات المسألة يدل على وجود زاوية قائمة بين المماس ونصف القطر.



5- الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف الدائرة هي زاوية قائمة دوماً كما هو موضح في الشكل:

الزاوية B قائمة لأنها محيطية تحصر القوس CM وبالتالي المثلث CBM قائم في B.



6- إذا حصرت زاويتان محيطيتان نفس القوس فهما متساويتان.

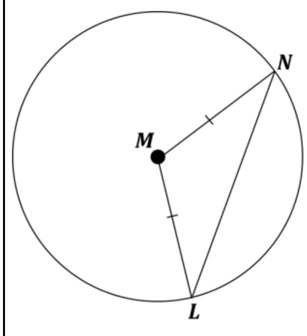
7- إذا حصرت زاوية محيطية وزاوية مركزية نفس القوس فإن قياس الزاوية المحيطية نصف المركزية.

8- إذا حصرت زاوية مماسية وزاوية مركزية نفس القوس فإن قياس الزاوية المماسية نصف قياس المركزية.

9- إذا حصرت زاوية محيطية وزاوية مماسية نفس القوس فهما متساويتان.

10- المثلث الذي أضلاعه أنصاف أقطار في الدائرة هو مثلث متساوي الساقين وإذا أثبت أحد زواياه 60 فهو متساوي الأضلاع.

في الشكل المجاور MNL متساوي الساقين $ML=MN$.



الدرس الثاني: الرباعي الدائري

الرباعي الدائري: نسمي أي مضلع مؤلف من أربعة أضلاع وتمر من رؤوسه دائرة رباعي دائري.

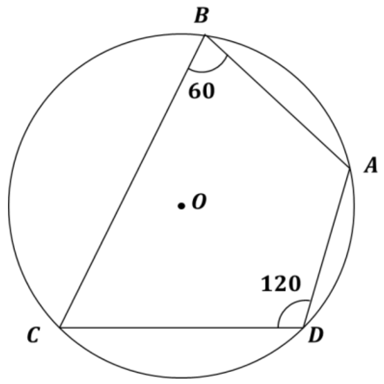
إثبات أن الرباعي دائري:

1- إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي كان دائري.

في الشكل المرافق:

$$B+D=60+120=180$$

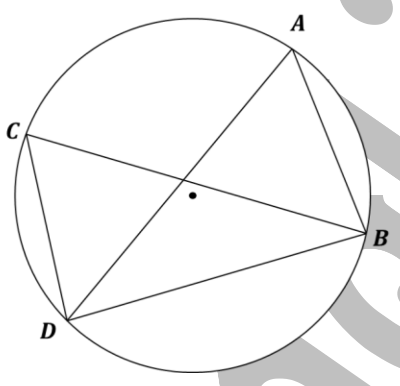
إذاً زاويتان متقابلتان متكاملتان وبالتالي رباعي دائري كما هو موضح في الشكل.



في هذه الحالة إذا كانت الزاويتان المتقابلتان كل منهما 90 يكون مركز الدائرة منتصف المستقيم المار بالزاويتين الآخرتين.

2- إذا تساوت الزاويتان $B\hat{D}C,\ B\hat{A}C$ وكانت النقطتان C,A في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم BD كان الرباعي $ABCD$ دائرياً.

في هذه الحالة إذا كان كلاً من $\hat{A}$ و$\hat{C}$ تساوي 90 يكون مركز الدائرة منتصف BD.

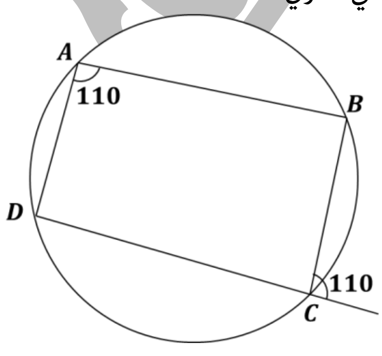


3- الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها

لاحظ أنه في الشكل المرافق:

$\hat{C}$ الخارجية $=\hat{A}=110$

إذاً $ABCD$ رباعي دائري.



الدرس الثالث: المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم: هو شكل رباعي تساوت أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

خاصة (1): كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (تمر من رؤوسه دائرة) ويكون مركز الدائرة هو مركز المضلع المنتظم.

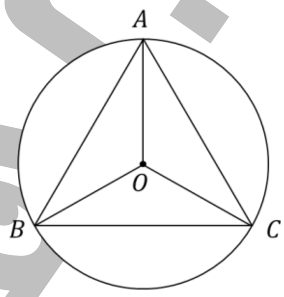
خاصة (2) (هامة): إذا كان AB ضلع في المضلع المنتظم مركزه O وعدد أضلاعه n كان:

$$A\hat{O}B = \frac{360}{n}$$

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع (منتظم) إذاً:

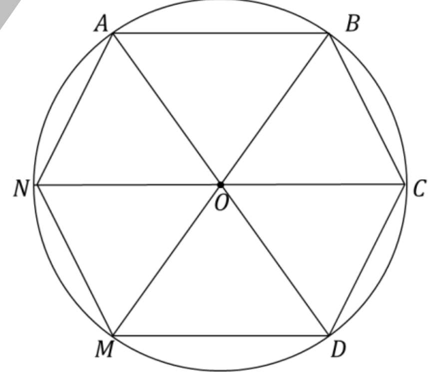
$$A\hat{O}B = \frac{360}{3} = 120$$

$$B\hat{O}C = \frac{360}{3} = 120$$



مثال:

لدينا في الشكل المرافق $ABCDMN$ مسدس منتظم والمطلوب احسب قياس ABC.



الحل:

$$B\hat{O}C = \frac{360}{6} = 60$$

ولدينا المثلث BOC متساوي الساقين أضلاعه أنصاف أقطار وبالتالي:

$$O\hat{B}C = \frac{180-60}{2} = 60$$

وأيضاً في المثلث ABO لدينا:

$$A\hat{O}B = \frac{120}{2} = 60$$

وبنفس الطريقة $A\hat{B}O = 60$

إذاً: $A\hat{B}C = 60 + 60 = 120^o$

الوحدة الرابعة مجسمات ومقاطع

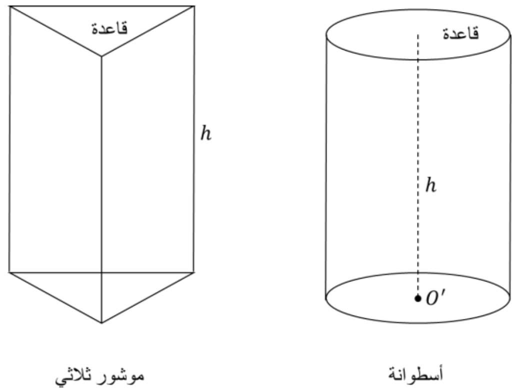
الدرس الأول: مجسمات

بدايةً لنحفظ الرموز التالية:

S_T مساحة كلية، S_L مساحة جانبية، S_b مساحة قاعدة

V الحجم، P المحيط، h الارتفاع، L المولد في الهرم

الموشور والاسطوانة:



المساحة الجانبية لموشور (أو أسطوانة) = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية لموشور (أو أسطوانة) = المساحة الجانبية + (2 × مساحة القاعدة)

حجم الموشور (أو الأسطوانة) = مساحة القاعدة × الارتفاع

انتبه عزيزي الطالب أن مساحة ومحيط القاعدة تكون تبعاً لشكل القاعدة.

المكعب:

هو موشور رباعي أوجهه مربعات طبوقة

مساحته الجانبية $= 4a^2$

مساحته الكلية $= 6a^2$

الحجم $= a^3$

حيث a طول حرف المكعب.

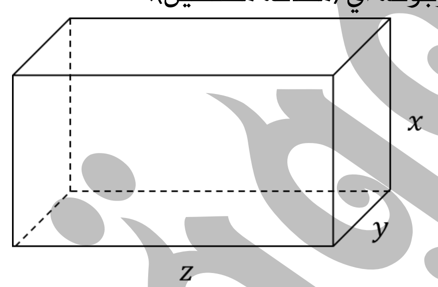
عزيزي الطالب إذا طلب مساحة سطح مكعب أي مساحة أحد وجوهه (مساحة مربع).

متوازي المستطيلات:

الارتفاع × العرض × الطول = الحجم

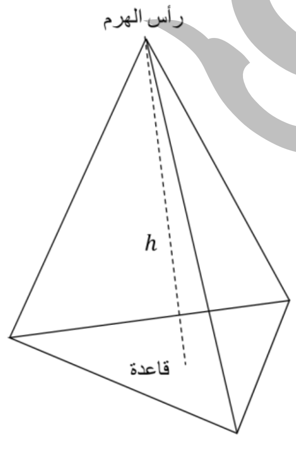
$$V = x \times y \times z$$

عزيزي الطالب إذا طُلب حساب مساحة سطح متوازي المستطيلات أي مساحة أحد وجوهه أي (مساحة مستطيل).



الهرم:

الارتفاع × مساحة القاعدة × $\frac{1}{3}$ = الحجم

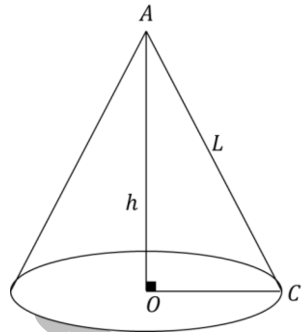


يكون الهرم منتظم إذا كان:

1- قاعدته مضلع منتظم

2- ارتفاعه قطعة مستقيمة واصلة في رأس الهرم **ومركز القاعدة.**

مخروط دوراني:



الارتفاع × مساحة القاعدة × $\frac{1}{3}$ = الحجم

$\pi \times R \times L$ = المساحة الجانبية

L المولد يمكن حسـابه عن طريق مبرهنة فيثاغورث في المثلث AOC

R نصف قطر القاعدة (الدائرة) OC

الكرة:

سطح كروي: ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$.

مجسم كروي: ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \leq R$.

القوانين:

بدلالة d قطر الكرة:

πr^3 = مساحة سطح كرة

$\frac{1}{6}\pi d^3$ = حجم الكرة

بدلالة R نصف القطر:

$4\pi R^2$ = مساحة سطح كرة

$\frac{4}{3}\pi R^3$ = حجم الكرة

خطوط مميزة:

لاحظ عزيزي الطالب أن الكرة تحتوي العديد من الدوائر، سـنسـمي الدائرة الكبرى: هي دائرة داخل الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة.

حيث قطر الكرة: هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة وطرفاها نقطتان من الكرة علماً أن أقطار الدائرة متساوية.

الدرس الثاني: مقاطع مجسمات

أي مجسم من المجسمات السابقة يمكن أن نقطعها بمستو.

نسـمي النقاط المشـتركة بين المجسـم والمسـتوي **مقطع** مجسـم بمستوي.

مقطع متوازي المستطيلات بمستو:

يوازي أحد أوجهه: مستطيل يطابق ذلك الوجه

يوازي أحد أطرافه: مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف.

مقطع أسطوانة دورانية بمستو:

يوازي قاعدتها أو يعامد محورها: هو دائرة تطابق القاعدة.

يوازي محورها: مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة.

مقطع مخروط دوراني بمستو:

يوازي قاعدته: هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة.

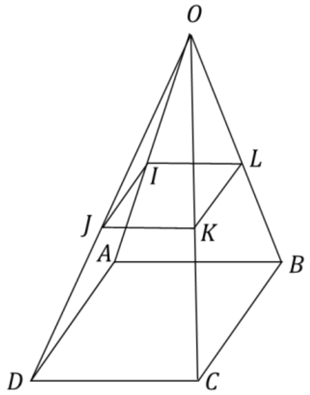
وهنا يصبح لدينا موشـور صـغير يشـابه الموشـور الكبير ونسـتطيع إيجاد نسب تشابه ومن ثم الحصول على أطوال الأضلاع.

مقطع هرم بمستو:

يوازي قاعدته: هو مضـلع مصـغر عن القاعدة ونسـمي $ABCDJKLI$ جذع الهرم.

يعطى قانون حساب جذع الهرم بالعلاقة:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{S \times S'}\right)$$



حيث h ارتفاع الجذع

S مساحة القاعدة الأولى

S' مساحة القاعدة الثانية

مقطع كرة بمستو:

مقطع كرة بمستو: هو دائرة

مقطع مجسم كروي بمستو: هو قرص دائري

عندما يمر المستوي القاطع بمركز الدائرة فالمقطع هو: دائرة كبرى.

عندما يمس المستوي القاطع الكرة فالمقطع هو: نقطة التماس.

تذكر:

مساحة المربع = (طول الضلع)^2

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المثلث = $\frac{\text{القاعدة×الارتفاع}}{2}$

مساحة مثلث قائم = $\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}$

مساحة مثلث متساوي الأضلاع = (طول الضلع)^2 × $\frac{\sqrt{3}}{4}$

مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع

مساحة معين = $\frac{\text{جداء القطرين}}{2}$

مساحة شبه المنحرف = $\left(\frac{\text{القاعدة الصغرى+القاعدة الكبرى}}{2}\right)$ × الارتفاع.

انتهى