اختبار لطلاب الثالث الثانوي العلمي 2022 – 2023
رياضيات (بحث النهايات -2-)

الاسم :
الدرجة : 300
المدّة : ساعتان

السؤال الأوّل : جد نهاية كل من التوابع التالية عند a المُعطاة :

1) $f(x) = \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$; $a = 1 , +\infty$

2) $f(x) = \sqrt{4x^5 - x^2 + 1} - 2x^2\sqrt{x}$; $a = +\infty$

3) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; $a = 0$

السؤال الثاني :

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2E(x)}{x^3}\right)$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. حيث : $|f(x) - \pi| < \frac{x-2E(x)}{x^3}$.

2) إذا علمت أنّ : $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ أيّاً تكن $x \ge 0$. استنتج $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

السؤال الثالث :

1) ليكن f و g تابعان مُعرَّفان على R وفق : $f(x) = \frac{-5}{3-\cos 3x}$ و $g(x) = \frac{-5x^2}{3-\cos 3x}$. **المطلوب :**

a) أثبت أنّ f محدود . b) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أثبت أنّ للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلّاً وحيداً α في R ثمَّ بيّن أنّ $\alpha \in]-1 , 0[$.

السؤال الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R وفق: $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^3+2-2\cos(4x)}{x^2} & ; x \ne 0 \\ m^2 & ; x = 0 \end{cases}$.

المطلوب :

1) عيّن القيم الممكنة لـ m حتى يكون التابع f مستمرّاً على R .
2) تَحقَّق أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = -2x$ مقارب مائل للخط C.
3) ادرس الوضع النسبي بين Δ و C .

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R وفق : $f(x) = 2x + \sqrt{|4x^2 - 2|}$. **المطلوب :**

1) بيّن أنَّ C يقبل مقارباً أفقيّاً عند $-\infty$ ، جد معادلته ، وادرس وضعه النسبي مع الخط C .
2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 4x)$ ، واستنتج معادلة المقارب المائل لـ C ، وادرس وضعه النسبي مع الخط C .

السؤال السادس : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R وفق : $f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع فردي ، وفسّر النتيجة هندسيّاً .
2) علّل لماذا المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.
3) استنتج معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $-\infty$.
4) تَحقَّق أنَّ : $f'(x) = 1 + \frac{2}{(4x^2+1).\sqrt{4x^2+1}}$ ، واستنتج اطراد التابع f .
5) ادرس تغيّرات التابع f ، ونَظِّم جدولاً بها ، واستنتج صورة المجال $I = [0 , +\infty[$ وفق f .
6) في معلم متجانس ارسم C مع مقارباته على R .
7) استنتج رسم الخط C_g حيث : $g(x) = |x|.(1 + \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}})$.

-------- انتهت الأسئلة --------

إعداد : محمود المحمود 0936 838 276
@X_Math Bac _bot
@Ch X MathBac

السؤال الأول:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$; $a=1, +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{0}{0}$ ع . ت

طريقة 1:

$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{-(\sqrt{x}-1)}=-(\sqrt{x}+1)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

طريقة 2:

$f(x)=\dfrac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{1-x}=-(1+\sqrt{x})$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

$f(x)=\dfrac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}=\sqrt{x}\left(\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty(-1)=-\infty$

2) $f(x)=\sqrt{4x^5-x^2+1}-2x^2\sqrt{x}$; $a=+\infty$

$f(x)=\dfrac{4x^5-x^2+1-4x^5}{\sqrt{4x^5-x^2+1}+2x^2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{-x^2+1}{\sqrt{4x^5-x^2+1}+2x^2\sqrt{x}}$

$f(x)=\dfrac{x^2(-1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^5}\sqrt{4-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}+2x^2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x^2(-1+\frac{1}{x^2})}{x^2\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}+2\right)}$

$=\dfrac{-1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}+2\right)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\dfrac{-1}{+\infty(2+2)}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

3) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$; $a=0$

$f(x)=\dfrac{3x}{\sin(3x)}\cdot\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot\dfrac{2x}{3x}$

$=\dfrac{3x}{\sin(3x)}\cdot\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=(1)(1)\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2}{3}$

حيث:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$

السؤال الثاني:

1) $x-1 < E(x) \le x \Rightarrow$

$-2x+2 > -2E(x) \ge -2x$

$-x+2 > x-2E(x) \ge -x$

نقسم على $x^3<0$ (لأنّ: $x\to-\infty$)

$$\frac{-x+2}{x^3} < \frac{x-2E(x)}{x^3} \le \frac{-x}{x^3}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x+2}{x^3}\right)=0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x^3}\right)=0$

حسب مبرهنة الإحاطة تكون: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2E(x)}{x^3}\right)=0$

⇐ حسب مبرهنة الإحاطة تكون: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = x$

2) $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

$-x+\frac{x^3}{6} \ge -\sin x \ge -x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$

$\frac{x^3}{6} \ge x-\sin x \ge \frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$

نقسم على $x^3>0$ (لأنّ: $x\to0^+$)

$$\frac{1}{6} \ge \frac{x-\sin x}{x^3} \ge \frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}$$

$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\right)=\frac{1}{6}$

⇐ حسب مبرهنة الإحاطة تكون:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

السؤال الثالث:

1) $f(x)=\frac{-5}{3-\cos x}\ ;\ g(x)=\frac{-5x^2}{3-\cos x}$

a) $-1 \le \cos(x) \le 1 \Rightarrow$

$1 \ge -\cos x \ge -1 \Rightarrow$

$4 \ge 3-\cos x \ge 2 \Rightarrow$

$\frac{1}{4} \le \frac{1}{3-\cos x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

$-\frac{5}{4} \ge \frac{-5}{3-\cos x} \ge -\frac{5}{2} \Rightarrow$

$-\frac{5}{4} \ge f(x) \ge -\frac{5}{2}$

b) $-\frac{5}{4} \ge \frac{-5}{3-\cos x} \ge -\frac{5}{2}$

نضرب بـ $x^2>0$:

$\Leftarrow \frac{-5x^2}{4} \ge \frac{-5x^2}{3-\cos x} \ge \frac{-5x^2}{2}$

$\frac{-5x^2}{4} \ge g(x) \ge \frac{-5x^2}{2}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x^2}{4}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x^2}{2}\right)=-\infty$

حسب مبرهنة المقارنة تكون: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) نفرض التابع: $f(x)=x^3+x+1$

وندرس تغيراته: $D_f=\mathbb{R}$

f معرّف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=3x^2+1>0$$

f متزايد "تماماً"

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f معرّف ومستمر ومتزايد "تماماً" على

$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ⇐ $x\in\mathbb{R}$

$0\in\mathbb{R}$ ⇐ المعادلة

$f(x)=x^3+x+1=0$ حل وحيد

على $\mathbb{R}$

$f(-1)=-1-1+1=-1<0$

$f(0)=1>0$ ⇒

$f(-1)\cdot f(0)=-1<0$

⇐ حسب مبرهنة القيمة الوسطى فإنّ المعادلة $x^3+x+1=0$

حل وحيد هو $\alpha\in]-1,0[$

السؤال الرابع:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x^3+2-2\cos(4x)}{x^2} & ; x\neq 0\\ m^2 & ; x=0\end{cases}$$

1) حتى يكون f مستمر على $\mathbb{R}$

يجب أن يكون مستمر عند $x=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0) \quad --- *$$

$$f(x)=\frac{-2x^3}{x^2}+\frac{2(1-\cos(4x))}{x^2}$$

$$=-2x+2\cdot\frac{2\sin^2(2x)\times4}{x^2\times4}$$

$$=-2x+16\cdot\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=0+16(1)^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=16 \quad --- ①$$

$$f(0)=m^2 \quad --- ②$$

نعوّض ① و ② في *

$16=m^2 \Rightarrow \boxed{m=-4}$

$\boxed{m=4}$

C2) $\Delta : y = -2x$

$$f(x) = -2x + \frac{2-2\cos(4x)}{x^2}$$

$$f(x) - y_\Delta = -2x + \frac{2-2\cos(4x)}{x^2} + 2x$$

$$= \frac{2-2\cos(4x)}{x^2}$$

$$-1 \leq \cos(4x) \leq 1$$

$$2 \geq -2\cos(4x) \geq -2$$

$$4 \geq 2-2\cos(4x) \geq 0$$

نقسم على $x^2 > 0$

$$\frac{4}{x^2} \geq f(x) - y_\Delta \geq 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right) = 0 \; ; \; \lim_{x\to\mp\infty}(0) = 0$$

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة الإحاطة نكون:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0 \Rightarrow$$

$\Delta : y = -2x$ مقارب مائل لـ C في الجوارين $-\infty$ و $+\infty$

ملاحظة: يمكن الاعتماد على الشكل: $f(x) = -2x + 4\frac{\sin^2 2x}{x^2}$ في حل هذا الطلب (2).

3) لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = 4 \cdot \frac{\sin^2(2x)}{x^2} \geq 0$$

$\Leftarrow$ C فوق Δ

و C يقطع Δ في:

$$\left(\frac{\pi}{2}k , -\pi k\right) ; k \in \mathbb{Z}^*$$

السؤال الخامس:

$$f(x) = 2x + \sqrt{|4x^2-2|} \; ; \; D_f = \mathbb{R}$$

$$|4x^2-2| = 4x^2-2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \infty$$ ع.ت

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x^2 + 2}{2x - \sqrt{4x^2-2}}$$

$$= \frac{2}{2x - \sqrt{4x^2+2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$y = 0$ مقارب أفقي لـ C في جوار $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي، ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = 2x + \sqrt{|4x^2-2|}$$

نعدم: $\sqrt{|4x^2-2|} = -2x \; ; \; x \leq 0$

$$|4x^2-2| = 4x^2$$

إما $4x^2 - 2 = 4x^2 \Rightarrow -2 = 0$

متبقية الحل:

أو $4x^2-2=-4x^2 \Rightarrow$

$8x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}<0$ مقبول

$x=\frac{1}{2}>0$ مرفوض

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	$(-2+\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	$(\sqrt{2})$	$+$	
وضع نسبي		C تحت المقارب				C فوق المقارب			

نقطة تقاطع $(-\frac{1}{2},0)$

2) $f(x)-4x=\sqrt{|4x^2-2|}-2x$

$$=\frac{4x^2-2-4x^2}{\sqrt{4x^2-2}+2x}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4x^2-2}+2x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=0 \Rightarrow$

$y_2=4x$ مقارب مائل لـ C

في جوار $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة

الفرق: $f(x)-y_2=\sqrt{|4x^2-2|}-2x$

نعلم: $\sqrt{|4x^2-2|}=2x$; $x\geq 0$

$\Rightarrow |4x^2-2|=4x^2$

إما $4x^2-2=4x^2 \Rightarrow -2=0$

مستحيلة الحل.

أو $4x^2-2=-4x^2 \Rightarrow$

$8x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}<0$ مرفوض

$x=\frac{1}{2}>0$ مقبول

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-y_2$		$+$	$(\sqrt{2})$	$+$	0	$-$	$(\sqrt{2}-2)$	$-$	
وضع نسبي		C فوق المقارب				C تحت المقارب			

نقطة تقاطع $(\frac{1}{2},2)$

السؤال السادس:

$f(x)=x+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-x+\frac{-2x}{\sqrt{4x^2+1}}=-\left(x+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

$=-f(x) \Rightarrow$

f فردي، وهو متناظر بالنسبة للمبدأ O

2) $f(x)-y_0=x+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}-x-1$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}-1$$

$$=\frac{2x}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}-1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{2}{2}-1=0$$

$\Leftarrow$ $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$.

3) بما أنّ التابع فردي:

كل (x,y) تصبح $(-x,-y)$ $\Leftarrow$

$\Delta': y=x-1$ مقارب مائل لـ (C) في جوار $-\infty$

4) f اشتقاقي على IR:

$$f'(x)=1+\frac{2\sqrt{4x^2+1}-\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot(2x)}{4x^2+1}$$

$$=1+\frac{2(4x^2+1)-8x^2}{(4x^2+1)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)}$$

$$=1+\frac{8x^2+2-8x^2}{(4x^2+1)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2}{(4x^2+1)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)}+1>0$$

$\Leftarrow$ f متزايد تماماً.

5) f معرّف ومستمر واشتقاقي على IR

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\right)\right]$$

$$=-\infty(1+0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\right)\right]$$

$$=+\infty(1+0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا $f(0)=0$ $\Leftarrow$ f مستمر ومتزايد تماماً على IR $\Leftarrow$

$$f([0,+\infty[)=[0,+\infty[$$

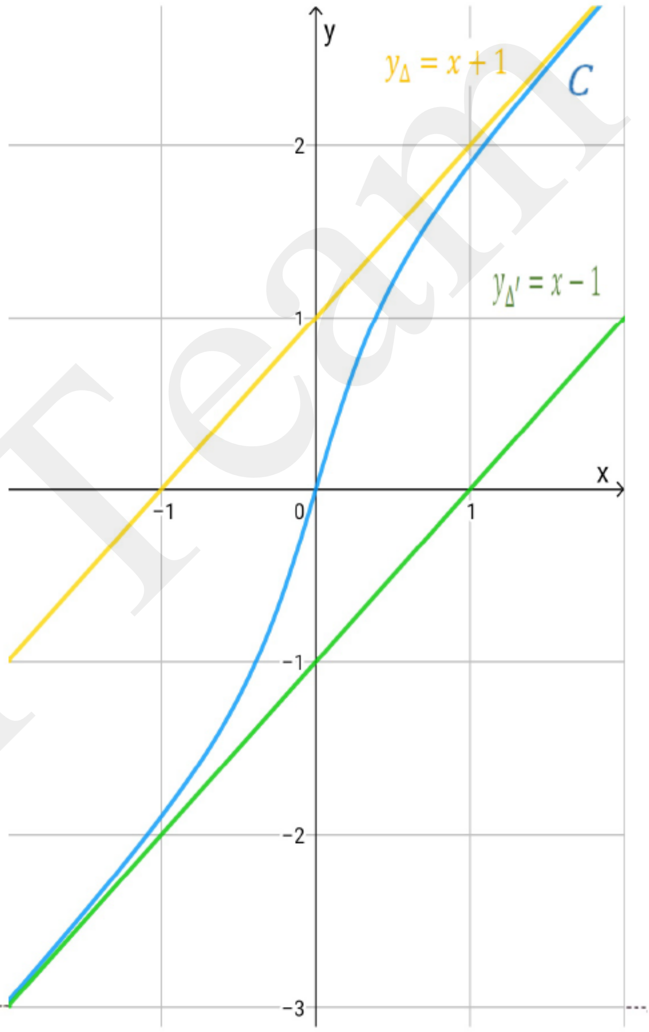
6)

$y_\Delta = x+1 \to x=0 \Rightarrow y=1$

$x=1 \Rightarrow y=2$

$y_{\Delta'} = x-1 \to x=0 \Rightarrow y=-1$

$x=1 \Rightarrow y=0$



7)

$$g(x) = \left| x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} \right|$$

$$= |f(x)| \Rightarrow$$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

عندما: $x \in]-\infty, 0[$

C_g ينطبق على C_f عندما $x \in [0, +\infty[$

#MeEnMathTeam

X_ math πac

تدقيق : إيناس دللي

X-Math πac