ورقة عمل مادة الرياضيات لطلاب البكالوريا (2020)
(النهايات والاستمرار)

السؤال الأول: ليكن f المعرف بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

1) عين a ، b ، c و d بحيث $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$

2) استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

3) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى Δ .

السؤال الثاني: f هو التابع المعرف على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحي (C) عند $+\infty$

2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و Δ .

السؤال الثالث: f هي التابع المعرف كما يلي: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$

1) عين D مجموعة تعريف التابع f واحسب نهايات التابع f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\dfrac{3}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]$.

3) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ و Δ' يطلب تعيين معادلتيهما.

4) حدّد وضعية (C)بالنسبة إلى كل من Δ و Δ' .

السؤال الرابع: أثبت أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=2$ ، $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

السؤال الخامس: ليكن التابع : $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل : $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-4}$

2) ادرس نهايات التابع f عند حدود مجالات مجموعة التعريف.

السؤال السادس: لتكن المتراجحة $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x}{x+1}\le1$

استنتج النهايتين التاليتين: أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

السؤال السابع: f هو التابع المعرفة على R بـ : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ;x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & ;x\le0 \end{cases}$ بين أن التابع f مستمر على R

ليكن f المعرف على R بـ : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ;x\neq0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$.عين قيمة العدد α حتى يكون التابع f مستمر على R.

السؤال الثامن : f هو التابع المعرف على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ ب : $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

1) بين أن التابع f فردي .

2) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف.

3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحي (C) عند $+\infty$. حدّد وضعية (C) بالنسبة لـ Δ

السؤال التاسع : لتكن التابع f حيث: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ و (C) تمثيلها البياني.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث : (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$

ومستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2x+3$ عند $+\infty$

ويمر النقطة $A(0;4)$

السؤال العاشر

ليكن لدينا (c) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]-\frac{3}{2},+\infty[$ وفق: $f(x)=\dfrac{4x-5}{2x+3}$

ⓐ أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً A يُحقق الشرط الآتي: إذا كان $x>A$ فإنّ: $f(x)\in]1.95,2.05[$.

ⓑ أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

ⓒ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها ، ثم استنتج أنّ للمعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ حلاً وحيداً في المجال I .

السؤال الحادي عشر f تابع معرف على $[0;\pi]$ بـ: $f(x)=2+\dfrac{1}{2}\sin x$

1- ادرس تغيرات التابع f على $[0;\pi]$. 2- أثبت أن المعادلة $f(x)=\frac{9}{4}$ تقبل حلين على المجال $[0;\pi]$

السؤال الثاني عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$

① ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② a . اكتب x^2-2x+3 بالشكل القانوني (بالاتمام إلى مربع كامل)

b . ادرس نهاية التابع h المعرف على R وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(x-1)^2}$ عند $+\infty$ و $-\infty$

c . استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما .

③ أثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين .

السؤال الثالث عشر : أوجد نهاية f عند 4 للتابع المعرف بـ: $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

ثم أوجد مجالا I مركزه 4 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in]2.95\ ,\ 3.05[$.

* انتهت الأسئلة *   مدرّس المادة: أ. عبد العزيز زكريا

السؤال الأول

ليكن f المعرف ب

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

1- عين d , c , b , a بحيث :

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$$

2- استنتج أن المنحني C الممثل للدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً Δ عند $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

3- حدد وضعية المنحني C بالنسبة إلى Δ

1-

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2+2x+1 & x^3+3x^2+6x+3 \\ & \underline{x^3+2x^2+x} \\ & x^2+5x+3 \\ & \underline{x^2+2x+1} \\ & 3x+2 \end{array}$$

$$f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

2- $y=x+1$ مقارب مائل لـ C لأن

$$\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=0$$

3- لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق

$$f(x)-y=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

المقام موجب دوماً

$3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

x	$-\infty$ -1 $-\frac{2}{3}$ $+\infty$
$f(x)-y$	$-$ ‖ $-$ 0 $+$
الوضع النسبي	C_f تحت y ‖ C_f تحت y C_f فوق y

السؤال الثاني

f هو التابع المعرف على $]0,+\infty[$ ب :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

1- بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

2- ادرس الوضعية النسبية لـ C و Δ

1- $f(x)-y=x+1+\sqrt{x^2+4x}-2x-3$

$=-x-2+\sqrt{x^2+4x}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=-\infty+\infty$

عدم تعيين

$f(x)-y=-x-2+\sqrt{x^2+4x}$

$=\sqrt{x^2+4x}-(x+2)$

$$=\frac{x^2+4x-x^2-4-4x}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$

$$f(x)-y=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\frac{-4}{+\infty}=0$$

ومنه $y=2x+3$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

2- لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$$x^2+4x+4 > x^2+4x$$

$$(x+2)^2 > x^2+4x$$

$$\sqrt{(x+2)^2} > \sqrt{x^2+4x}$$

$$\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{(x+2)^2}<0$$

$$\sqrt{x^2+4x}-(x+2)<0$$

$$f(x)-y<0$$

C_f دائماً تحت y

السؤال الثالث

f هي التابع المعرف كما يلي:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$$

1- عين D مجموعة تعريف التابع f واحسب نهايات التابع

عند $-\infty$ و $+\infty$

2- احسب

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$$

3- استنتج أن المنحني C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ و Δ' يطلب تعيين معادلتيهما

4- حدد وضعية C بالنسبة إلى كل من Δ و Δ'

1- $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1} & ; x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ -\frac{1}{2}x+\sqrt{-x^2+1} & ; x\in[-1,1]\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty+\infty \quad \text{عدم تعيين}$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$=x\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\left(-\frac{1}{2}+1\right)=+\infty$$

2- $f(x) + \frac{3}{2}x$

$= -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1} + \frac{3}{2}x$

$= x + \sqrt{x^2-1}$

$= \dfrac{x^2 - x^2 + 1}{x - \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{-\infty - \infty}$

$= \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right] = 0$

$f(x) - \frac{1}{2}x = \sqrt{x^2-1} - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x \right) = +\infty - \infty$

عدم تعيين

$f(x) - \frac{1}{2}x = \dfrac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = -\dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = 0$

3- بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right] = 0$

فإن $y_\Delta = -\frac{3}{2}x$ مقارب مائل

لـ C_f في جوار $-\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = 0$

فإن $y_{\Delta'} = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

4- لدراسة الوضع النسبي بين C_f و y_Δ

$f(x) + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|} + \frac{3}{2}x$

$= x + \sqrt{|x^2-1|}$

$x + \sqrt{|x^2-1|} = 0$

$\sqrt{|x^2-1|} = -x$

شرط الحل $x \leq 0$

$|x^2-1| = x^2$

إما $x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow -1 \neq 0$ مستحيلة

أو $-x^2 + 1 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مرفوض

$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ مقبول

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C_f تحت y_Δ	$\Downarrow$	C_f فوق y_Δ	

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

نقطة التقاطع

لدراسة الوضع النسبي بين C_f و y_Δ

$f(x) - y_{\Delta'} = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|} - \frac{1}{2}x$

$= -x + \sqrt{|x^2-1|}$

$-x + \sqrt{|x^2-1|} = 0$

$\sqrt{|x^2-1|} = x$

شرط الحل $x \geq 0$

$|x^2-1| = x^2$

إما $x^2 - 1 = x^2 \rightarrow -1 \neq 0$
مستحيلة

أو $-x^2 + 1 = x^2$

$2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ مرفوض

$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مقبول

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta'}$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C_f تحت $y_{\Delta'}$	$\Downarrow$	C_f فوق $y_{\Delta'}$	

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

نقطة التقاطع

لدراسة الوضع النسبي بين التابع C_f

و $y_{\Delta'}$ ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_{\Delta'} = \sqrt{x^2-1} - x$$

لدينا: $x^2 > x^2 - 1$

$$x > \sqrt{x^2-1}$$

$$-x + \sqrt{x^2-1} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y_{\Delta'} < 0$$

C_f يقع تحت $y_{\Delta'}$ دائماً

السؤال الرابع:

أثبت أن:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$$

• $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$\frac{2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{2x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times 1$$

$$= 2\sqrt{2}$$

• $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sin x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}$$

$$= \frac{\sin x}{x}(\sqrt{x+1}+1)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}(\sqrt{x+1}+1)$$

$$= 1 \times (1+1) = 2$$

• $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

نفرض متحول $t = x - \pi$

عندما $x \to \pi$ فإن $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

السؤال الخامس

ليكن التابع

$$f(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$$

1- أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c حيث من أجل

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$$

2- ادرس نهايات التابع f عند حدود مجالات مجموعة التعريف

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-3x-4 & 3x^2+2x \\ & 3x^2-9x-12 \\ \hline & 11x+12 \end{array}$$

$$f(x) = 3 + \frac{11x+12}{x^2-3x-4}$$

$$\frac{11x+12}{x^2-3x-4} = \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$$

$$11x+12 = b(x-4) + c(x+1)$$

$$11x+12 = bx - 4b + cx + c$$

$$11x+12 = (b+c)x - 4b + c$$

بالمطابقة

$$11 = b + c \quad \dots ①$$

$$12 = -4b + c \quad \dots ②$$

نطرح ② من ①

$$-1 = 5b \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{5}}$$

نعوض في ①

$$11 = -\frac{1}{5} + c$$

$$c = 11 + \frac{1}{5} = \frac{56}{5}$$

$$\boxed{c = \frac{56}{5}}$$

$$f(x) = 3 - \frac{1}{5(x+1)} + \frac{56}{5(x-4)}$$

-2

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 4[\cup]4, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3 - \frac{1}{0^-} - \frac{56}{25}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 - \frac{1}{0^+} - \frac{56}{25}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3 - \frac{1}{25} + \frac{56}{0^-}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 3 - \frac{1}{25} + \frac{56}{0^+}$$

$$= +\infty$$

السؤال السادس

لتكن المتراجحة

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$$

استنتج النهايتين التاليتين:

أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$

ب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

أ من المتراجحة

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$$

نضرب $\sqrt{x}>0$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \leqslant \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \leqslant \sqrt{x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة

ب من المتراجحة

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$$

نضرب $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

السؤال السابع

f هو التابع المعرف على R ب:

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} \quad ; \quad x>0$$

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x-2} \quad ; \quad x\leq 0$$

بين أن التابع f مستمر على R

حتى يكون التابع مستمراً على R يجب أن يكون مستمراً عند (0)

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$$

$$= \frac{1-x-1}{x(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{1+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

ومنه

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

ومنه التابع مستمر عند الصفر فهو مستمر عند R

ليكن f المعرف على R بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(x) = \alpha \end{cases}$$

عين قيمة α حتى يكون التابع f مستمر على R

حتى يكون التابع مستمر على R يجب أن يكون مستمراً عند 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}$$

$$= \frac{(x+2)^2-(4+x)^2}{x[x+2+\sqrt{4+x^2}]}$$

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4-4-x^2}{x[x+2+\sqrt{4+x^2}]}$$

$$= \frac{4x}{x[x+2+\sqrt{4+x^2}]}$$

$$= \frac{4}{x+2+\sqrt{4+x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{4}{2+2} = 1$$

ومنه

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

$$\alpha = 1$$

السؤال الثامن

f هو التابع المعرف على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

بـ:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

1- بين أن التابع f فردي

2- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف

3- بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للمنحني C عند $+\infty$ حدد وضعية C بالنسبة لـ Δ

1 أياً كانت $x \in D_f$

فإن $-x \in D_f$

$$f(-x) = -x - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right) = -f(x)$$

ومنه التابع فردي

2 $f(x) = x\left[1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right]$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty[1+0] = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty[1+0] = +\infty$$

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -2 - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

3 $f(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1$

$$= \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 1 - 1 = 0$$

ومنه $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني C في جوار $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق

$$f(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1$$

$$x^2 > x^2 - 4$$

$x > 0$

$$x > \sqrt{x^2-4}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y > 0$$

C يقع فوق y_Δ

السؤال التاسع

ليكن التابع f حيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

C تمثيلها البياني

عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث C يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $x=1$ ومستقيماً مائلاً معادلته $y=2x+3$ عند $+\infty$ ومر بالنقطة $A(0,4)$

$$\lim_{x \to 1}\left(ax+b+\frac{c}{x+d}\right)$$

حتى يقبل C مستقيماً مقارباً معادلته $x=1$ يجب أن يكون $d=-1$

$$d=-1$$

بما أن $y=2x+3$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x)-y)=0$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(ax+b+\frac{c}{x-1}-2x-3\right)=0$$

بما أن $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\frac{c}{x-1}=0$

فإن $ax+b$ هو المقارب المائل

$a=2$ $\quad$ $b=3$

بما أن النقطة A تنتمي لـ C فهي تحقق معادلته

$$f(x)=2x+3+\frac{c}{x-1}$$

نعوض من A

$$4=3-c \Rightarrow c=-1$$

$$f(x)=2x+3-\frac{1}{x-1}$$

السؤال العاشر

ليكن لدينا C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]-\frac{3}{2},+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{4x-5}{2x+3}$$

1- أوجد $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً A يحقق الشرط الآتي: إذا كان $x>A$ فإن $f(x)\in\,]1.95\,,\,2.05[$

2- أوجد $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(f(x))$

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم استنتج أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I.

1- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)=2$

$$c = \frac{1.95+2.05}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r = \frac{2.05-1.95}{2} = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left|\frac{4x-5}{2x+3} - 2\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{4x-5-4x-6}{2x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{-11}{2x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{11}{|2x+3|} < \frac{1}{20}$$

$$|2x+3| > 220$$

x في جوار $+\infty$

اما $2x+3 > 220$

$$2x > 217$$

$$x > \frac{217}{2}$$

$x > 108.5$ مقبول

أو $-2x-3 > 220$

$$-2x > 223$$

$$x < -111.5$$

مرفوض

2- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = f(2) = \frac{8-5}{4+3}$

$$= \frac{3}{7}$$

3- $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \frac{-11}{0^+} = -\infty$

$$f'(x) = \frac{4(2x+3) - 2(4x-5)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{8x+12-8x+10}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{22}{(2x+3)^2} > 0$$

x	$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2

عندما $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$$f(]-\tfrac{3}{2}, +\infty[) =]-\infty, 2[$$

$$\frac{1}{2} \in]-\infty, 2[$$

منه للمعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ حل وحيد في I .

السؤال الحادي عشر

f تابع معرف على $[0,\pi]$ بـ :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$$

أ- ادرس تغيرات التابع f على $[0,\pi]$

2- أثبت أن المعادلة $f(x)=\frac{9}{4}$ تقبل حلين على المجال $[0,\pi]$

1- $f(0)=2+0=2$

$f(\pi)=2+0=2$

$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x$

$f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2

2- عندما $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

و $\frac{9}{4}\in f([0,\frac{\pi}{2}])=[2,\frac{5}{2}]$

ومنه للمعادلة $f(x)=\frac{9}{4}$ حل وحيد على هذا المجال

عندما $x\in]\frac{\pi}{2},\pi]$ التابع مستمر ومتناقص تماماً

و $f(]\frac{\pi}{2},\pi])=[2,\frac{5}{2}[$

$\frac{9}{4}\in[2,\frac{5}{2}[$

ومنه للمعادلة $f(x)=\frac{9}{4}$ حل وحيد على هذا المجال

ومنه للمعادلة $f(x)=\frac{9}{4}$ حلين على المجال $[0,\pi]$

السؤال الثاني عشر

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$

1- ادرس نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2- a. اكتب x^2-2x+3 بالشكل القانوني (بالإتمام إلى مربع كامل)

b. ادرس نهاية التابع h المعرف على R وفق

$h(x)=f(x)-\sqrt{(x-1)^2}$

عند $+\infty$ و $-\infty$

c. استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما

3- أثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين.

1- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2 - a. $x^2 - 2x + 3$

$= x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + 3$

$= (x-1)^2 - 1 + 3$

$= (x-1)^2 + 2$

b. $h(x) = f(x) - \sqrt{(x-1)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{(x-1)^2}$

$= \sqrt{(x-1)^2 + 2} - \sqrt{(x-1)^2}$

$= \dfrac{(x-1)^2 + 2 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{(x-1)^2}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{(x-1)^2}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

c. بما أن

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \sqrt{(x-1)^2}\right) = 0$

فإن $y_\Delta = -x + 1$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $-\infty$

و $y_{\Delta'} = x - 1$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

3 - لإيجاد الوضع النسبي بين C_f و y_Δ ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - (-x+1)$

$= \sqrt{(x-1)^2 + 2} + (x-1)$

$= \dfrac{(x-1)^2 + 2 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+2} - (x-1)}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{(x-1)^2+2} - (x-1)}$

لدينا:

$(x-1)^2 + 2 > (x-1)^2$

$\sqrt{(x-1)^2+2} > x - 1$

$\sqrt{(x-1)^2+2} - (x-1) > 0$

$\Rightarrow f(x) - y_\Delta > 0$

لإيجاد الوضع النسبي بين C_f و $y_{\Delta'}$ ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_{\Delta'} = \sqrt{(x-1)^2+2} - (x-1)$

من الطلب السابق وجدنا

$\sqrt{(x-1)^2+2} - (x-1) > 0$

$\Rightarrow f(x) - y_{\Delta'} > 0$

السؤال الثالث عشر

أوجد نهاية f عند 4 للتابع المعرف ب:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

ثم أوجد مجالاً مركزه 4 بحيث اذا كان $x \in I$ فإن

$$f(x) \in \left]2.95 , 3.05\right[$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) = \frac{4+2}{4-2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

$$c = \frac{2.95+3.05}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$r = \frac{3.05-2.95}{2} = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left|\frac{x+2}{x-2} - 3\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{x+2-3x+6}{x-2}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{-2x+8}{x-2}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{-2(x-4)}{x-2}\right| < \frac{1}{20}$$

$$2\left|\frac{x-4}{x-2}\right| < \frac{1}{20}$$

$$|x-2| > 40|x-4|$$

$$|x-4| < \frac{|x-2|}{40}$$

$$|x-4| < \frac{1}{40}$$

نفرض $x = 3$ لتسهيل الحساب

المجال مركزه 4 ونصف قطره $r = \frac{1}{40}$

$$r = 0.25 \times 10^{-1}$$
$$= 0.025$$

$$x \in \left]c-r , c+r\right[$$

$$x \in \left]4-0.025 , 4+0.025\right[$$

$$x \in \left]3.975 , 4.025\right[$$