الاسم :
الرقم:
المدة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمئة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠٢١

الرياضيات:

(الفرع العلمي – دورة ثانية)

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: عيّن قيمة n التي تحقق المعادلة $P^{3}_{n+1} = 16\binom{n+2}{2}$.

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P : 2x + y - 2z - 4 = 0$. المطلوب:

1) احسب بعد A عن المستوي P .

2) اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

السؤال الثالث: احسب التكامل الآتي: $I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

السؤال الرابع: تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ خطه البياني C . والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to 0} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

3) دلّ على القيمة المحلية وبيّن نوعها.

4) جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 0[$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$. المطلوب:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

السؤال السادس:

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.
المطلوب:

1) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة، ما احتمال أن تكون بيضاء اللون.

2) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة، نعرّف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة. اكتب مجموعة قيم X وجدول القانون الاحتمالي.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكلٍّ من التمرينين الأول والثاني – (60 درجة للتمرين الثالث)

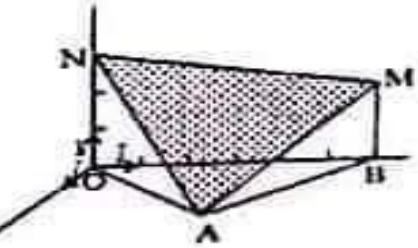
التمرين الأول :

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_0 = \frac{5}{2}$ وأياً كان العدد الطبيعي n: $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$. المطلوب:

1) أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

3) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.



التمرين الثاني: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,3,0)$ ، $B(0,6,0)$ ، $N(0,0,3)$ ، $M(0,6,2)$.

المطلوب:

1) اكتب معادلة للمستوي (AMN) .

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN) .

3) أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$.

يتبع في الصفحة الثانية

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام ٢٠٢١

(الفرع العلمي – دورة ثانية)

الرياضيات:

الصفحة الثانية

التمرين الثالث:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=(ax+b)e^{-x}$. المطلوب:

أولاً: احسب قيمة كل من a , b إذا علمت أن $f(-1)=e$ قيمة حدية للتابع.

ثانياً: لتكن المعادلة التفاضلية $y'+y=\lambda e^{-x}$ ، عيّن قيمة λ إذا علمت أن $f(x)=(x+2)e^{-x}$ حلاً لها.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

المطلوب:

1) احسب العدد α لكي يكون $z=2$ حلاً للمعادلة $P(z)=0$.

2) بفرض $\alpha=1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق: $P(z)=(z-2)Q(z)$،
ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$.

ثانياً: لتكن A و B و C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب:
$a=2$, $b=1+i\sqrt{3}$, $c=-1+i\sqrt{3}$. المطلوب:

a) أثبت أن: $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل، عيّن a' و b' و c' التي تمثلها نقاط المستوي A', B', C' على الترتيب.

المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=e^{-x}(1+\ln x)$ ، والتابع g المعرف على I وفق: $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$. المطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع g ونظّم جدولاً بها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α، ثم تحقق أنّ $\alpha=1$.

3) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4) أثبت أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$.

5) مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6) في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

– انتهت الأسئلة –

ملاحظة : يمنع استعمال الآلات الحاسبة.

حل امتحان الرياضيات الدورة الثانية

عام 2021

أولاً :

السؤال الأول :

شرط الحل : $n+3 \geq 3 \Rightarrow n \geq 0$ ، $n+2 \geq 2 \Rightarrow n \geq 0$ $\Rightarrow$ ومنه $n \geq 0$

$(n+3)(n+2)(n+1) = 16\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

مقبول $\Rightarrow n+3 = 16\frac{1}{2} \Rightarrow n+3 = 8 \Rightarrow n = 5$

السؤال الثاني : 1)

$$dist(A,p) = \frac{|2(2)+1-2(2)-4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \frac{|4+1-4-4|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

2) بما أن الكرة تمس المستوي فإن $R = dist(A,p)$

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(Z-Z_A)^2 = R^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(Z-2)^2 = 1$$

السؤال الثالث : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x . \sin x \, dx$

$U = x \Rightarrow U' = 1$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$$I = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[-x\cos x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = -1$$

السؤال الرابع :

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$y = 0$ مقارب أفقي ،، منطبق مع محور الفواصل ،، في جوار $+\infty$.

2/ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $]0,1[$ $\alpha \in]0,1[$

3/ $f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى محلياً .

4/ $f'(x) > 0$ ومنه $x \in]0,1[$

السؤال الخامس :

$$f(x) = 2x + \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

لدينا $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ أياً كانت x

نقسم على $x < 0$ لأن x في جوار $-\infty$.

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$0 \leq f(x) - y_\Delta \leq \frac{1}{x}$$

وبما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ وحسب مبرهنة الإحاطة نجد أن

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

ومنه المستقيم $\Delta : y = 2x$ مقارب مائل للخط (C)

في جوار $-\infty$.

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x} \leq 0$$

ومنه الخط C تحت Δ ودوماً

ويتقاطعان في $(\frac{\pi}{2} + \pi k , \pi + 2\pi k)$ حيث $k \in Z$

السؤال السادس:

1) نفرض عدد الكرات البيضاء x فيكون عدد الكرات الحمراء $3x$
ويكون العدد الكلي للكرات $4x$ ومنه

$$p(\omega) = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

2)

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$p(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$p(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

$$p(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

$$p(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$E(n) : 2 \leq U_n \leq 3$$

• نبرهن صحة العلاقة $E(0)$ أي لنبرهن

$$2 \leq U_0 \leq 3$$

$$2 \leq \frac{5}{2} \leq 3 \quad \text{محققة}$$

• نفرض $E(n)$ محققة من أجل عدد طبيعي n

• نبرهن أن $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن أن $2 \leq U_{n+1} \leq 3$

لدينا من الفرض $2 \leq U_n \leq 3$

$$0 \leq (U_n - 2)^2 \leq 1$$

$$2 \leq (U_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

أي $2 \leq U_{n+1} \leq 3$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ وبالتالي $E(n)$ محققة

أياً كان العدد الطبيعي n

2) لإثبات أن U_n متناقصة نثبت أن $U_{n+1} \leq U_n$ ⊛

. نبرهن أن العلاقة محققة من أجل $n=0$ أي لنبرهن أن

$$U_1 \leq U_0$$

$$\frac{9}{4} \leq \frac{5}{2}$$ محققة

. نفرض ⊛ محققة من أجل العدد الطبيعي n

. نبرهن أن ⊛ محققة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أن

$$U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

لدينا من الفرض $U_{n+1} \leq U_n$

$$(U_{n+1}-2)^2 \leq (U_n-2)^2$$

$$(U_{n+1}-2)^2+2 \leq (U_n-2)^2+2$$

$$U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

فالعلاقة محققة من أجل $n+1$ وبالتالي U_n متناقصة

أياً كان العدد الطبيعي n

3)

بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

ونهايتها هي الحل المقبول للمعادلة $f(x)=x$ حيث

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

$$(x-2)^2+2 = x$$

$$x^2-4x+4+2-x=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$$

$$(x-3)(x-2)=0$$

إما $x=3$ مرفوض أو $x=2$ مقبول

وبما أن u_n متناقصة بـ ... $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

التمرين الثاني :

1) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمي للمستوي AMN ومنه

$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \Rightarrow (a,b,c) \cdot (-1,3,2) = 0$

$\Rightarrow -a + 3b + 2c = 0 \quad \dots (1)$

$\vec{n} \cdot \vec{AN} = 0 \Rightarrow (a,b,c) \cdot (-1,-3,3) = 0$

$\Rightarrow -a - 3b + 3c = 0 \quad \dots (2)$

نفرض $c = 2$ نجد $-a + 3b + 4 = 0 \quad \dots (3)$

$-a - 3b + 6 = 0 \quad \dots (4)$

بالجمع

$-2a + 10 = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$

نعوض في (3) $-5 + 3b + 4 = 0 \Rightarrow 3b = 1$

أي $b = \frac{1}{3}$ ومنه $\vec{n}(5, \frac{1}{3}, 2)$ أي

$\vec{n}(15, 1, 6)$

$15(x-0) + (y-0) + 6(z-3) = 0$

$(AMN): 15x + y + 6z - 18 = 0$

2) بما أن Δ يعامد المستوي (AMN) فإن

$\vec{u}_\Delta = \vec{n}(15, 1, 6)$

$$\Delta : \begin{cases} x = 15t \\ y = t \\ z = 6t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

3) لدينا $\vec{BM}(0,0,2)$ ناظمي للمستوي المحوري للقطعة $[BM]$

ونفرض $I(0,0,1)$ منتصف $[BM]$ فإن معادلة المستوي المحوري تعطى بالشكل $2(z-1) = 0$ أي

$z - 1 = 0$

التمرين الثالث:

أولاً:

$f(-1) = e \Rightarrow (-a+b)e = e \Rightarrow -a+b = 1 \quad ...(1)$

f اشتقاقي ع R

$$f'(x) = a e^{-x} - e^{-x}(ax+b)$$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow ae - e(-a+b) = 0$

$\Rightarrow e(a+a-b) = 0 \Rightarrow 2a-b = 0 \quad ...(2)$

نجمع (1) مع (2) نجد $a=1$ نعوض في (2) نجد $b=2$

ثانياً:

$$y' = f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2)$$
$$= e^{-x}(-x-1)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$(-x-1)e^{-x} + (x+2)e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$e^{-x}(-x-1+x+2) = \lambda e^{-x}$$

$\boxed{\lambda = 1}$ نقسم الطرفين ع $e^{-x} \neq 0$

ثالثاً: المسألة الأولى:

أولاً: 1)

$p(2) = 0$

$$\Rightarrow (2)^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})(2)^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})(2) + 8 = 0$$
$$8 - 8(\alpha + i\sqrt{3}) - 8(\alpha - i\sqrt{3}) + 8 = 0$$
$$8 - 8\alpha - \cancel{8i\sqrt{3}} - 8\alpha + \cancel{8i\sqrt{3}} + 8 = 0$$
$$-16\alpha = -16 \Rightarrow \alpha = 1$$

2) $P(Z) = Z^3 - 2(1+i\sqrt{3})Z^2 - 4(1-i\sqrt{3})Z + 8$

بقسمة كثير الحدود $P(Z)$ على $Z-2$ نجد:

$$P(Z) = (Z-2)(Z^2 - 2i\sqrt{3}\,Z - 4)$$

$P(Z) = 0 \Rightarrow$ إما $Z - 2 = 0 \Rightarrow Z = 2$

أو $Z^2 - 2i\sqrt{3}\,Z - 4 = 0$

$$\Delta = -12 + 16 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$

$$Z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

ثانياً: a)

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نكتبه بالشكل الأسي

$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

أي أن

$$\frac{a-b}{c-b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ومنه فالمثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

b) نوجد صور النقاط A و B و C وفق تناظر محوري محوره ox

$a' = \bar{a} = 2$

$b' = \bar{b} = 1 - i\sqrt{3}$

$c' = \bar{c} = -1 - i\sqrt{3}$

المسألة الثانية :

1) g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[= I$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب منطبق على yy' ذات (C) على يمين

المقارب نحو oy^+

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$$

g متناقص تماما على I

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$g(I) = \mathbb{R}$

2) لدينا g مستمر ومطرد على المجال I و $g(I) = \mathbb{R}$

وبما أن $0 \in \mathbb{R}$ اذاً المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد $\alpha \in I$

ولدينا $g(1) = 0$ اذاً $\alpha = 1$

3)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0(+\infty)$$

$$f(x) = e^{-x} + \frac{\ln x}{e^x} = e^{-x} + \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}}$$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

4) f اشتقاقي على I

$$f'(x) = -e^{-x}(1+\ln x) + \frac{1}{x}e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left(-1-\ln x+\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\cdot g(x)$$

أي أن

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x}}$$

5) f معرف ومستمر واشتقاقي على I ولدينا

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x}}$$

بما أن المقام موجب تماماً فإشارة المشتق من إشارة $g(x)$

ومن جدول تغيرات g وجدنا أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد

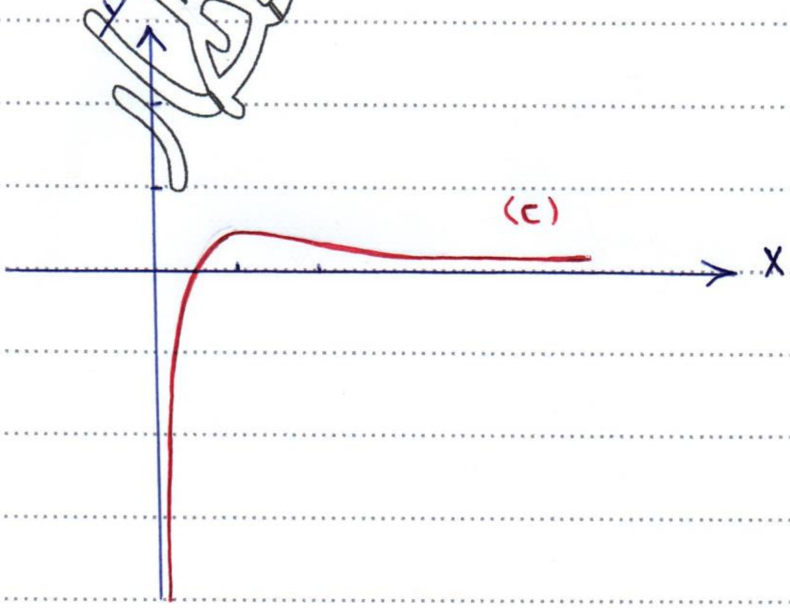
هو $x=1$ ومنه

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى محلياً

6)



نهاية الحل

٢٠٢١/٨/١