الرياضيات

الصف العاشر

دليل المعلم

الوحدة الأولى

أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المطورة

عزيزي المعلِّم، يســرُّنا في هذه المقدمة أنْ نُبيِّن لك الأســس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهــج الرياضيات المطورة بطريقة مبســطة، وذلك بعرض بعض العناصــر من كتاب الطالب، وكتــاب التمارين، ودليل المعلِّم، التــي تتجلّى فيها تلك الجوانب العلميــة والتربوية بوضوح.

ونحــن إذ نعرض هذه المقدمة فإنّا نأمــل أنْ تكون مُعِينًا لك على فهم كيفية اســتعمال المناهج المطورة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل غرفة الصف، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المقدمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم، وأدواته.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. بعض استراتيجيات التعلُّم:
   - التعلُّم القائم على المشاريع.
   - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

ســنُقدِّم لك أيضًا –في نهاية هذه المقدمة– بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعِينًا لك عند التخطيط لتقديم دروسك.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم لك دليل المعلِّم خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعدك على تقديم الدرس بنجاح.

1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد مقترحات في دليل المعلِّم تُعينك على تقديم التهيئة بنجاح في فقرة (التهيئة). قد تحوي هذه الفقرة نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا قد يرصد المعلِّم في أثناء هذه المرحلة بعض الأخطاء المفاهيمية ويُصحِّحها قبل بدء الدرس.

2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك عزيزي المعلِّم في هذه المرحلة أداء دور المُيسِّر، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في فقرة (أستكشف) في كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم طرح الأسئلة المقترحة عليهم، التي ورد ذكرها في بند (الاستكشاف) من دليل المعلِّم. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة بصورة صحيحة؛ لذا اقبل إجاباتهم، ثم انظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، وتأكَّد أنَّهم سيجيبون إجابة صحيحة عنها. علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحِيل الطلبة إلى المسألة في فقرة (أستكشف)؛ لحلِّها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المتوقع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم، بحيث يتمكَّنون من تكوين خبرات مشتركة محددة تساعدهم على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا استعن بالإرشادات الواردة في فقرة (التدريس) في دليل المعلِّم، لتتمكَّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

4 التدريب

فـي هذه المرحلــة يتدرَّب الطلبــة على أنواع مختلفة من المســائل المجـرَّدة والحياتية في فقرتي (أتدرب و أحل المســائل) و(مهارات التفكيــر العليــا) داخل غرفـة الصف، وذلك لترسـيخ المفاهيم الجديدة، وزيــادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة فــي المنزل. وكذلــك التدريبات والمســائل الواردة في الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.

5 الإثراء

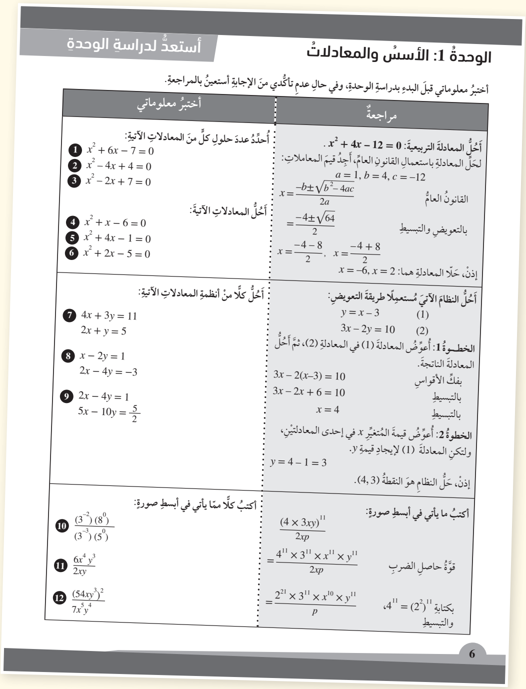
تُعَدُّ توســعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأســاس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشــراك الطلبــة في مهام تتضمَّــن مفاهيم وعمليات أوســع وأكثر عمقا. تُوفِّر لك مناهج الرياضيــات المطــورة مصــادر عِــدَّة لإثراء الطلبة ذوي المســتوى فوق المتوســط، منها الفقــرة الخاصة بالإثراء أو التوســعة في دليل المعلِّم التي تحوي مســألةً، أو نشــاطًا صفيًّا، أو حاســوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

6 الختام

هـي المرحلـة الأخيـرة مـن مراحـل تقديـم الـدرس، التـي تهـدف إلى تجميـع الأفـكار المختلفـة التـي تضمَّنهـا الـدرس، ثم عرضهـا بصورة مترابطـة، فضـلًا عـن اشـتمالها علـى مقترحـات تسـاعدك علـى تقديـم هـذه الفقـرة بنجاح.

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن اســتمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراســي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المطورة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم التشخيصي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي**.

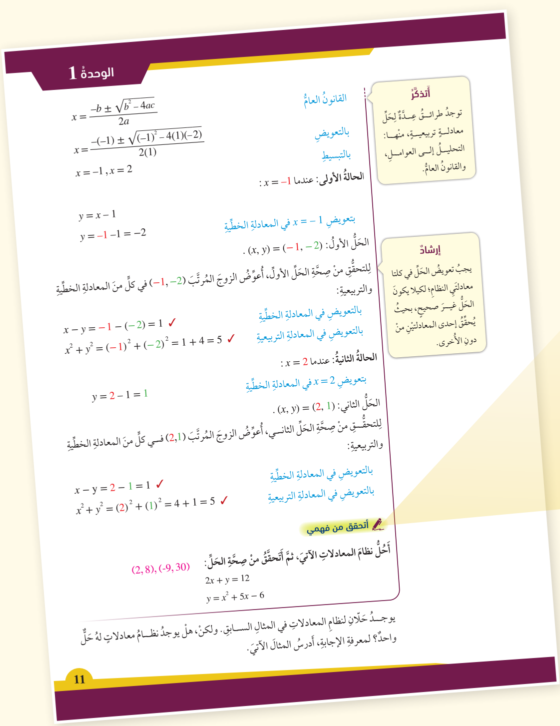

الوحدة 1: الأسس والمعادلات
أستعدُّ لدراسة الوحدة

أ التقويم التشخيصي:

يهدف هذا النــوع من التقويم إلــى تحديد مدى امتــلاك الطلبة المعرفةَ الســابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد المعلِّم على تحديد ما يلزمهم من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المطورة على أداة تقويم تشــخيصي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحـدث هـذا النـوع مـن التقويـم فـي أثنـاء عمليـة التدريـس، ويهـدف إلـى متابعـة تعلُّـم الطلبـة أولًا بـأول، والتأكُّـد أنَّ العمليـة التعليميـة التعلُّميـة تسـير فـي اتجـاه تحقيـق أهدافهـا المنشـودة، وأنَّـه لا يوجـد انحـراف عـن مسـارها؛ مـا يسـاعد المعلِّـم علـى اتخـاذ القـرارات الصحيحـة، مثـل: الاسـتمرار فـي عمليـة التدريـس، أو التعديـل عليهـا، أو النظـر فيهـا مـن جديـد. مـن أدوات التقويـم التكوينـي: الأسـئلة الشـفوية، والملاحظـات غيـر الرسـمية، والاختبارات القصيرة.


الوحدة 1

تحتــوي مناهج الرياضيات المطورة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل (أتحقَّق من فهمي) التي تلي كل مثال.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(2, 8), (-9, 30)$

$2x + y = 12$

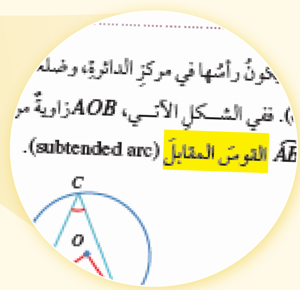
$y = x^2 + 5x - 6$

جـ التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. ويساعد المعلِّم على تحديد الطلبة الذين أتقنوا حدًّا مُعَيَّنًا من المهام المنوطة بهم في أثناء تدريس وحدة دراسية، أو فصل دراسي.

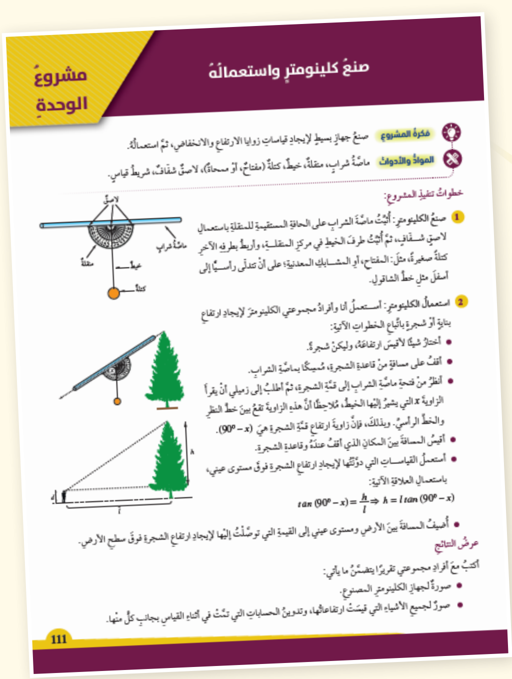
تُوفِّر المناهج المطورة للمعلِّم أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في (اختبار الوحدة) الذي يحوي مسائل متنوعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.

3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:



تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة.

ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المطورة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أول مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.



4 بعض استراتيجيات التعلُّم:

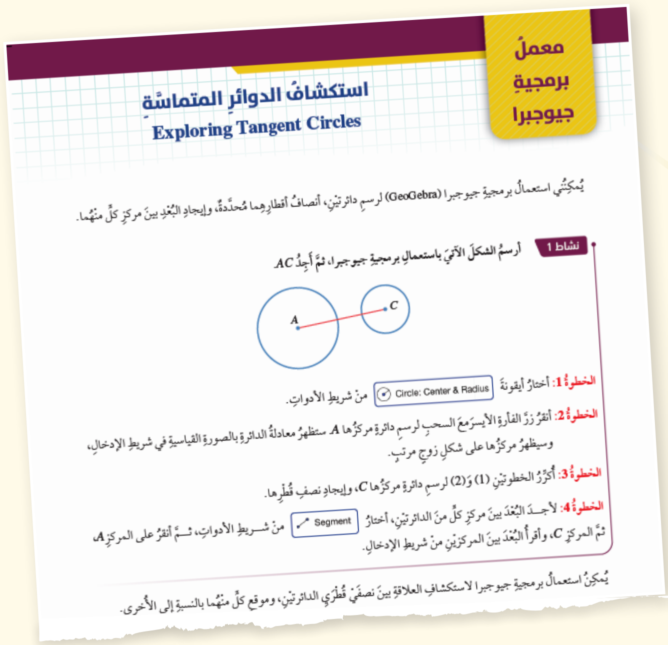
أ التعلُّم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلُّم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلُّم الحديثة التي تدمج بين المعرفة والفعل؛ إذ يدرس الطلبة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم يُطبِّقونها في حلِّ مشكلات حقيقية، وصولًا إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هــذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفــس، وتُحفِّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحمُّل المسؤولية، وتُعِدُّهم للحياة، وتحثُّهم على العمل والإنتاج.

ب التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.

تُسهِم التكنولوجيا إسهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمُّل والتحليل والتفكير بدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنح أدلة المعلمين في مناهج الرياضيات المطورة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.


معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ الدوائرِ المتماسَّةِ

Exploring Tangent Circles

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لرسمِ دائرتينِ، أنصافُ أقطارِهما مُحدَّدةٌ، وإيجادِ البُعْدِ بينَ مركزِ كلٍّ منهُما.

نشاط 1 أرسمُ الشكلَ الآتيَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أجِدُ AC.

الخطوةُ 1: أختارُ أيقونةَ Circle: Center & Radius منْ شريطِ الأدواتِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ زرَّ الفأرةِ الأيسرَ معَ السحبِ لرسمِ دائرةٍ مركزُها A ستظهرُ معادلةُ الدائرةِ بالصورةِ القياسيةِ في شريطِ الإدخالِ، وسيظهرُ مركزُها على شكلِ زوجٍ مرتبٍ.

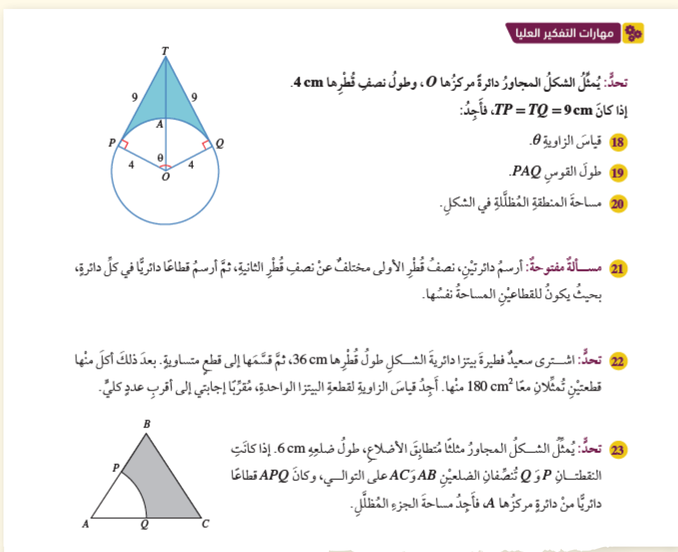
الخطوةُ 3: أُكرِّرُ الخطوتينِ (1) وَ(2) لرسمِ دائرةٍ مركزُها C، وإيجادِ نصفِ قُطرِها.

الخطوةُ 4: لأجدَ البُعْدَ بينَ مركزِ كلٍّ منَ الدائرتينِ، أختارُ Segment منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على المركزِ A ثمَّ المركزِ C، وأقرأُ البُعْدَ بينَ المركزينِ منْ شريطِ الإدخالِ.

يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ العلاقةِ بينَ نصفَيْ قُطرَيِ الدائرتينِ، وموقعِ كلٍّ منهُما بالنسبةِ إلى الأخرى.

5 مهارات التفكير العليا:

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.


مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O، وطولُ نصفِ قُطرِها 4 cm.

إذا كانَ $TP = TQ = 9$ cm، فأَجِدُ:

18 قياسَ الزاويةِ θ.

19 طولَ القوسِ PAQ.

20 مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ.

21 مسألةٌ مفتوحةٌ: أرسمُ دائرتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الأولى مختلفٌ عنْ نصفِ قُطْرِ الثانيةِ، ثمَّ أرسمُ قطاعًا دائريًّا في كلِّ دائرةٍ، بحيثُ يكونُ للقطاعيْنِ المساحةُ نفسُها.

22 تحدٍّ: اشترى سعيدٌ فطيرةَ بيتزا دائريةَ الشكلِ طولُ قُطْرِها 36 cm، ثمَّ قسَّمَها إلى قطعٍ متساويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَ منْها قطعتيْنِ تُمثِّلانِ معًا $180\ cm^2$ منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ.

23 تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ مثلثًا مُتطابِقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ 6 cm. إذا كانَتِ النقطتانِ P وَ Q تُنصِّفانِ الضلعيْنِ AB وَ AC على التوالي، وكانَ APQ قطاعًا دائريًّا منْ دائرةٍ مركزُها A، فأَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ.

تمنح مناهج الرياضيات المطورة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتاجات الدرس؛ إذ تحوي فقرة (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المطورة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل طالب (التمايز)، وتساعد كلًّا منهم على تجاوز عثراته، وتعزيز مناحي تفوُّقه. يُمكِن للمعلِّم تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

المحتوى: يُقصَد بذلك ما يحتاج الطالب إلى تعلُّمه، وكيفية حصوله على المعلومة، ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

الأنشطة: هي الأنشطة التي يشارك فيها الطالب؛ لكي يفهم المحتوى، أو يُتقِن المهارة. ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ولكنَّهم يتقدمون فيها إلى مستويات مختلفة، أو منح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

المنتَجات: المشاريع التي يتعيَّن على الطالب تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّمه في الوحدة، وتوظيفه في حياته، والتوسُّع فيه. ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في المنتجات السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار منتَجاتهم الخاصة بحسب ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف، يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط حل معادلة خطية فقط أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، في خطوة أولى، وتدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتى يتمكنوا من حل النظام المبين في النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وقراءته أمام الزملاء؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

التعلم القبلي:

- نظام المعادلات وحله.
- عدد حلول النظام.

إرشادات للمعلم

حمِّل نسخة من برمجية جيوجبرا في أجهزة الحاسوب بمختبر المدرسة، واعمل على تحديثها باستمرار، مُستعمِلًا الرابط: https://www.geogebra.org/download

1 التهيئة

- تَوجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية غير متجانسة، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب، والآخر من ذوي المستوى فوق المتوسط – ما أمكن – لتحقيق التشاركية.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا (GeoGebra).
- عرِّف الطلبة بإمكانيات برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم المجسمات والأشكال ثنائية البُعْد، وقياس الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

2 التدريس

- وضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفِّذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وتأكَّد أن كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- ناقِش الطلبة في عدد نقاط التقاطع التي تُمثِّل حلول النظام، وعلاقة عدد الحلول بعدد نقاط التقاطع، ثم اطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  » هل تتوقع أن يكون عدد الحلول أربعة دائمًا؟
  » هل يوجد نظام له ثلاثة حلول، أو حلان، أو حل واحد، أو ليس له حل؟

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانيًّا
Solving Systems of Equations Graphically

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ، وحَلِّها بيانيًّا.
أستعملُ الرابطَ www.geogebra.org /download لتثبيتِ نسخةِ GeoGebra Classic 6 منْ هذهِ البرمجيةِ على جهازِ الحاسوبِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ النسخةِ المتوافرةِ في شبكةِ الإنترنتْ منْ دونِ حاجةٍ إلى تثبيتِها في جهازِ الحاسوبِ عنْ طريقِ الرابطِ الإلكترونيِّ: www.geogebra.org /classic

نشاطٌ أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$.
أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x □² + y □² = 1 3 ↵

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 - y = 7$.
أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x □² − y = 7 ↵

ألاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في أربعِ نقاطٍ؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلاتِ.

8

- اطلب إلى عدد من الطلبة رسم منحنيين يُمثِّلان كل حالة على اللوح، ثم اسأل الطلبة:
  » أيكم يوافقهم الرأي؟
  » مَنْ يعرض رسمًا آخرَ؟

إرشادات للمعلم

- إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فاعرض خطوات النشاط أمام الطلبة، ثم اطلب إليهم بدء تنفيذ الخطوات نفسها في أسئلة بند (أتدرب).
- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط حل معادلة خطية فقط أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، في خطوة أولى، وتدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتى يتمكنوا من حل النظام المبين في النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وقراءته أمام الزملاء؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

8

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المعلِّم، تساعدك مناهج الرياضيات المطورة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر منظمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشـــادات مناسبة للتدريس في دليل المعلِّم، علمًا بأنَّ مســـألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِنك اختيار طريقة التدريس التي تراها مناسبة داخل غرفة الصف؛ فأنتَ أكثر علمًا بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في مدرستك.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعدك على تقديم دروسك:

التعلُّم المقلوب:

نموذج تربوي يهدف إلى اســـتعمال التقنيات الحديثة وشـــبكة الإنترنت على نحوٍ يســـمح للمعلِّم بإعداد الدرس عـــن طريق مقاطع الفيديو، أو الملفـــات الصوتية، أو غير ذلك من الوســـائط؛ ليطَّلِع عليها الطلبة في منازلهم (تظلُّ متاحة لهم على مدار الوقت)، باســـتعمال حواســـيبهم، أو هواتفهـــم الذكية، أو أجهزتهم اللوحية قبل الحضـــور إلى غرفة الصف. في حين يُخصَّص وقت اللقاء الصفي فـــي اليوم التالي لتطبيق المفاهيم والمحتوى العام الذي شـــاهدوه، وذلك في صورة سلسلة من أنشطة التعلُّم النشط، والأنشطة الاستقصائية، والتجريبية، وحلِّ المسائل الرياضية، والعمل بروح الفريق، وتقييم التقدُّم في سير العمل.

بطاقة الخروج:

أسـلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسـئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، ثم يجمع المعلِّم البطاقات ليقرأ الإجابات، ثم يُعلِّق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يستند إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه يرفع المعلِّم يده، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسـريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن اسـتخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع المعلِّم يده يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة:

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل طالب في المجموعة رقم خاص، وعندما يسعى المعلِّم إلى الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، فإنَّه يختار رقمًا من دون أنْ يعرف صاحبه، فيجيب الطالب عن السؤال، وقد يساعده على الإجابة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر:

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأول: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يطرح المعلِّم سؤالًا يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأول، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة:

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يطرح المعلِّم سؤالًا يجيب عنه كل طالب بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ ليتمكَّن المعلِّم من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذه الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يُلاحِظ المعلِّم نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	خطوات تنفيذ مشروع الوحدة	عدد الحصص
تهيئة الوحدة		المعادلة التربيعية quadratic equation نظام معادلات system of equations الأسس indices	• ورقة المصادر 1 • ورقة المصادر 2	توزيع الطلبة إلى مجموعات صغيرة غير متجانسة.	1
معمل برمجية جيوجبرا: حل أنظمة المعادلات بيانيًّا.	• يستخدم برمجية جيوجبرا لحل نظام معادلات خطية وتربيعية بيانيًّا.		• برمجية جيوجبرا.	الخطوتان: الأولى، والثانية.	1
الدرس 1: حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.	• يحل نظامًا مكونًا من معادلة خطية وأخرى تربيعية. • يتعرف عدد الحلول الممكنة لحل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية. • ينمذج مسألة حياتية باستعمال نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ويحله.		• برمجية جيوجبرا، الآلة الحاسبة.	متابعة الخطوة الثانية.	3
الدرس 2: حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين.	• يحل نظامًا مكونًا من معادلتين تربيعيتين. • يتعرف عدد الحلول الممكنة لحل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين. • ينمذج مسألة حياتية باستعمال نظام مكون من معادلتين تربيعيتين، ويحله.		• برمجية جيوجبرا.	الخطوة الثالثة.	3
الدرس 3: تبسيط المقادير الأسية.	• يتعرف الأسس النسبية وخصائصها. • يكتب مقادير أسية في أبسط صورة.	الأس النسبي rational exponent.	• الآلة الحاسبة.	متابعة الخطوة الثالثة. وبدء الاستعداد لعرض النتائج.	3
الدرس 4: حل المعادلة الأسية.	• يحل معادلات أسية. • يحل أنظمة معادلات أسية.	المعادلة الأسية exponential equation.	• برمجية جيوجبرا.	استكمال التحضير لعرض النتائج.	3
عرض نتائج المشروع.				عرض النتائج.	1
اختبار الوحدة					2
مجموع الحصص					17

الوحدةُ 1

نظرة عامة على الوحدة:

تعلم الطلبة فيما سبق حل معادلات خطية وتربيعية، وحل أنظمة معادلات مكونة من معادلتين خطيتين، وسيتعلمون في هذه الوحدة حل معادلات غير خطية، مثل: المعادلة الأسية، وعدة أنواع من أنظمة المعادلات، مثل: حل نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية، أو معادلتين تربيعيتين ومعادلتين أسيتين، وتبسيط مقادير جبرية. وقد تعلم الطلبة سابقًا الربط بين الأسس والجذور، وتبسيط المقادير العددية والجبرية باستعمال الأسس النسبية، وتقدير قيم الجذور التربيعية، وسوف يبنون على ذلك في هذه الوحدة لتعلم الاقتران الأسي، واستعماله لنمذجة مسائل حياتية عن النمو والاضمحلال الأسي.


الوحدةُ 1

الأسسُ والمعادلاتُ
Exponents and Equations

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستخدَمُ أنظمةُ المعادلاتِ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ. فخبراءُ الأرصادِ الجويةِ -مثلًا- يُعبِّرونَ عنِ العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارةِ، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطلِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطيٍّ؛ ذلكَ أنَّ أيَّ تغيُّرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدّي إلى تغيُّرٍ في العواملِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِّ.
- ✓ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ تتضمَّنُ معادلتَيْنِ خطِّيتَيْنِ بمُتغيِّرَيْنِ.
- ✓ قواعدَ الأسسِ الصحيحةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ، وأُخرى تربيعيةٍ.
- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتَيْنِ تربيعيتَيْنِ.
- ◄ الأسسَ النسبيةَ، وخصائصَها.
- ◄ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

6

التـرابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- التحليل إلى العوامل.
- حل معادلة تربيعية بطرائق مختلفة (التحليل، إكمال المربع، القانون العام).
- استعمال مميز المعادلة التربيعية في تحديد عدد حلولها.

الصف الثامن

- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين جبريًّا وبيانيًّا.
- الأسس وقوانينها.

الصف العاشر

- حل أنظمة المعادلات: معادلة خطية وأخرى تربيعية، معادلتان تربيعيتان، معادلتان أسيتان.
- تعرف عدد الحلول الممكنة لنظام من المعادلات.
- حل مسائل رياضية وحياتية عن أنظمة المعادلات.
- تعرف الأسس النسبية وخصائصها.
- تبسيط مقادير أسية.
- حل معادلات أسية.
- التحقُّق من صحة الحل باستعمال البرمجيات.

لاحقًا

الصف الحادي عشر (العلمي)

- حل أنظمة المتباينات.
- تعرف الاقترانات الأسية واللوغاريتمية وخصائصها.
- حل معادلات أسية.
- حل مسائل تتضمن تطبيقات اقتصادية على الاقترانات الأسية واللوغاريتمية.

مشروعُ الوحدةِ

أنظمةُ المعادلاتِ في حياتِنا

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنْ أنظمةِ معادلاتٍ في نماذجَ حياتيةٍ.

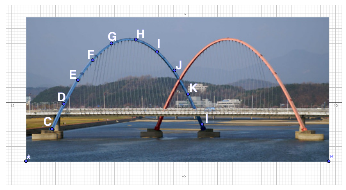
الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

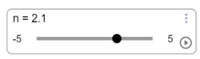
1 أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورٍ لنماذجَ حياتيةٍ تظهرُ فيها منحنياتٌ ومستقيماتٌ متقاطعةٌ (مثلُ: الجسورِ، ونوافيرِ المياهِ، وخرائطِ الطرقِ)، أوْ ألتقطُ صورًا لذلكَ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ على جهازِ الحاسوبِ.

2 أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ كلٍّ منَ المنحنياتِ المتقاطعةِ التي تظهرُ في الصورِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- أنقرُ على أيقونةِ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.
- أُعدِّلُ موقعَ الصورةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بتحريكِ النقطتيْنِ A وَ B اللتيْنِ تظهرانِ عليْها.
- أَجِدُ معادلةَ أحدِ المنحنياتِ التي تظهرُ في الصورةِ، وذلكَ بتحديدِ بعضِ النقاطِ عليْهِ باستعمالِ أيقونةِ A منْ شريطِ الأدواتِ.



- أكتبُ الصيغةَ FitPoly ({C, D, E, F, G, H, I, J, K, L},n) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ ↵ ليظهرَ منحنًى فوقَ الصورةِ، ومعادلةٌ في شريطِ الإدخالِ.
- أستعملُ المُؤشِّرَ فوقَ المعادلةِ لضبطِ المنحنى الظاهرِ، بحيثُ ينطبقُ تمامًا على المنحنى الذي في الصورةِ.



- أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ لتحديدِ معادلاتِ المنحنياتِ الأُخرى التي تظهرُ في الصورةِ.

3 أكتبُ مع أفرادِ مجموعتي نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ منحنييْنِ متقاطعيْنِ في كلِّ صورةٍ، ثمَّ نختارُ إحدى هذهِ الأنظمةِ لنحُلَّها جبريًّا، ثمَّ نتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ بإظهارِ نقاطِ تقاطعِ المنحنييْنِ في برمجيةِ جيوجبرا.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ (نستعملُ خاصيةَ طباعةِ الشاشةِ).
- بعضُ الصعوباتِ التي واجهْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومعلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ.

7

أداة تقييم المشروع

الرقم	مؤشر الأداء	1	2	3
1	نفَّذ أفراد المجموعة خطوات المشروع على النحو المطلوب.			
2	عرض أفراد المجموعة المشروع بطريقة واضحة.			
3	وثَّق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
4	عمل أفراد المجموعة بروح الفريق.			
5	استطاع أفراد المجموعة التعبير عن الصور بمعادلات جبرية.			
6	حل أفراد المجموعة النظام جبريًّا، وتحققوا من صحة الحل.			
7	حل أفراد المجموعة نظام المعادلات حلًّا صحيحًا.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: أنظمة المعادلات في حياتنا.

هـدف المشـروع: يهدف مشـروع الوحـدة إلى ربط الرياضيـات بالحيـاة، وتنمية مهارات البحـث والتمثيل والتفسـير والنمذجة، بالبحث عن صور لنمـاذج حياتية تظهر فيها منحنيات ومستقيمات متقاطعة، مثل: الشوارع، والجسور، والطرق المتقاطعة، والمنشآت المعمارية.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلـى مجموعات غير متجانسـة، يتكون كل منها مـن (7–5) طلبة، ثم اطلب إليهم أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثـل: جهـاز الحاسـوب، وبرمجية جيوجبـرا، وآلة التصويـر، فضلًا عـن بيان عناصـر المنتـج النهائي المطلـوب منهم، مُؤكِّـدًا لهم أهميـة توثيق خطوات تنفيذ المشـروع أولًا بأول، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة علـى لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب لتوثيق خطوات التنفيذ المتعلقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- وضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مسـتعينًا بسـلم التقدير.
- بيِّـن للطلبة الأوقات التي يمكـن فيها تنفيذ خطوات المشـروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوة الثانيـة بعد الانتهاء من معمل برمجية جيوجبرا (حـل أنظمة المعادلات بيانيًّا)، ويمكن البدء بتنفيذ الخطوة الثالثة بعد الانتهاء من الـدرس الأول (حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية)، أو بعـد الانتهاء من الدرس الثاني، بحسب النظام الذي يختارون حله.
- عند انتهاء الوحدة، حدِّد وقتًا مناسـبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وناقِشهم فيها.
- اطلب إليهم تسجيل تقييمهم الذاتي لمشروعهم.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

عرض النتائج

- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة اسـتعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشـروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- وضِّح للطلبة أهمية اشـتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلـب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين لتساعد طلبتك على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: حل المعادلات الخطية، وحل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًّا وجبريًّا (بالحذف، والتعويض)، وحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام والتحليل، إضافةً إلى الأسس الصحيحة والعمليات عليها.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة في عمود (أختبر معلوماتي)، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال إلى قراءة المثال المقابل له في عمود (مراجعة).
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح أحد حلول الطلبة غير الصحيحة –من دون ذكر اسم الطالب–، وأدر نقاشًا عنه.
- ذكِّر الطلبة بتحليل المعادلات التربيعية باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل، مُناقِشًا إياهم في السؤال الآتي:

أحل المعادلات الآتية:

1. $x^2 + 5x = -4$
2. $x^2 + 2x - 15 = 0$
3. $6x^2 - 5x + 1 = 0$

- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم حل السؤال باستعمال القانون العام.

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

مراجعةٌ	أختبرُ معلوماتي
أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + 4x - 12 = 0$. لحَلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 4, c = -12$ القانونُ العامُّ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالتعويضِ والتبسيطِ $= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$ $x = \frac{-4-8}{2}, \quad x = \frac{-4+8}{2}$ إذنْ، حَلّا المعادلةِ هما: $x = -6, x = 2$	**أُحدِّدُ عددَ حلولِ كلٍّ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:** 1 $x^2 + 6x - 7 = 0$ يوجد حلان حقيقيان 2 $x^2 - 4x + 4 = 0$ يوجد حل حقيقي واحد 3 $x^2 - 2x + 7 = 0$ لا يوجد حلول حقيقية **أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:** 4 $x^2 + x - 6 = 0$ $x_1 = 2 , x_2 = -3$ 5 $x^2 + 4x - 1 = 0$ $x_1 = -2-\sqrt{5}, x_2 = -2+\sqrt{5}$ 6 $x^2 + 2x - 5 = 0$ $x_1 = -1-\sqrt{6}, x_2 = -1+\sqrt{6}$
أَحُلُّ النظامَ الآتيَ مُستعمِلًا طريقةَ التعويضِ: $y = x - 3$ (1) $3x - 2y = 10$ (2) **الخطوةُ 1:** أُعوِّضُ المعادلةَ (1) في المعادلةِ (2)، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ الناتجةَ. بفكِّ الأقواسِ $3x - 2(x-3) = 10$ بالتبسيطِ $3x - 2x + 6 = 10$ بالتبسيطِ $x = 4$ **الخطوةُ 2:** أُعوِّضُ قيمةَ المُتغيِّرِ x في إحدى المعادلتيْنِ، ولتكنِ المعادلةَ (1) لإيجادِ قيمةِ y. $y = 4 - 1 = 3$ إذنْ، حَلُّ النظامِ هوَ النقطةُ (4, 3).	**أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ:** 7 $4x + 3y = 11$, $2x + y = 5$ $x = 2$, $y = 1$ 8 $x - 2y = 1$, $2x - 4y = -3$ لا يوجد حل للنظام 9 $2x - 4y = 1$, $5x - 10y = \frac{5}{2}$ عدد لا نهائي من الحلول
أكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ: $\frac{(4 \times 3xy)^{11}}{2xp}$ قوَّةُ حاصلِ الضربِ $= \frac{4^{11} \times 3^{11} \times x^{11} \times y^{11}}{2xp}$ بكتابةِ $4^{11} = (2^2)^{11}$، والتبسيطِ $= \frac{2^{21} \times 3^{11} \times x^{10} \times y^{11}}{p}$	**أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:** 10 $\frac{(3^{-2})(8^0)}{(3^{-3})(5^0)}$ 3 11 $\frac{6x^4 y^3}{2xy}$ $3x^3 y^2$ 12 $\frac{(54xy^3)^2}{7x^5 y^4}$ $\frac{2916y^2}{7x^3}$

إرشادات للمعلم

- لتحديد عدد حلول المعادلة، ذكِّر الطلبة بمميز المعادلة التربيعية وحالاته الثلاث:
  (المميز > 0: يوجد حلان حقيقيان، المميز $= 0$: يوجد حلان متماثلان (حل واحد حقيقي)، المميز < 0: لا توجد حلول حقيقية).
- لحل الأسئلة: 7، و8، و9، ذكِّر الطلبة بنظام المعادلات الخطية، وعدد حلول النظام. ذكِّرهم أيضًا بحل النظام باستعمال طريقة الحذف، وذلك بمناقشة السؤال الآتي:

1. $x + y = 5$
   $x = y + 1$
2. $2y = 4 - x$
   $5x + 10y = 20$

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

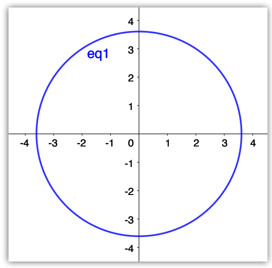
حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانيًّا
Solving Systems of Equations Graphically

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ، وحَلِّها بيانيًّا.

أستعملُ الرابطَ www.geogebra.org /download لتثبيتِ نسخةِ GeoGebra Classic 6 منْ هذهِ البرمجيةِ على جهازِ الحاسوبِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ النسخةِ المتوافرةِ في شبكةِ الإنترنتْ منْ دونِ حاجةٍ إلى تثبيتِها في جهازِ الحاسوبِ عنْ طريقِ الرابطِ الإلكترونيِّ: www.geogebra.org /classic

نشاط أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$



الخطوةُ 1: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$.

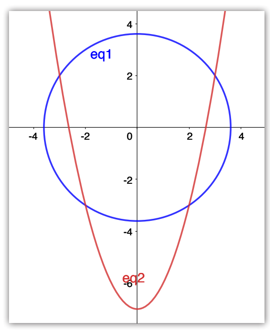
أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x | ⬚² | + | y | ⬚² | = | 1 | 3 | ↵

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 - y = 7$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x | ⬚² | − | y | = | 7 | ↵



أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في أربعِ نقاطٍ؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلاتِ.

التعلم القبلي:

- نظام المعادلات وحله.
- عدد حلول النظام.

إرشادات للمعلم

حمِّل نسخة من برمجية جيوجبرا في أجهزة الحاسوب بمختبر المدرسة، واعمل على تحديثها باستمرار، مُستعمِلًا الرابط: https://www.geogebra.org/download

1 التهيئة

- تَوجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية غير متجانسة، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب، والآخر من ذوي المستوى فوق المتوسط – ما أمكن– لتحقيق التشاركية.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا (GeoGebra).
- عرِّف الطلبة بإمكانيات برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم المجسمات والأشكال ثنائية البُعْد، وقياس الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

2 التدريس

- وضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفِّذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وتأكَّد أن كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- ناقِش الطلبة في عدد نقاط التقاطع التي تُمثِّل حلول النظام، وعلاقة عدد الحلول بعدد نقاط التقاطع، ثم اطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  - » هل تتوقع أن يكون عدد الحلول أربعة دائمًا؟
  - » هل يوجد نظام لـه ثلاثة حلول، أو حلان، أو حل واحد، أو ليس له حل؟
- اطلب إلى عدد من الطلبة رسم منحنيين يُمثِّلان كل حالة على اللوح، ثم اسأل الطلبة:
  - » أيكم يوافقهم الرأي؟
  - » مَنْ يعرض رسمًا آخرَ؟

إرشادات للمعلم

- إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فاعرض خطوات النشاط أمام الطلبة، ثم اطلب إليهم بدء تنفيذ الخطوات نفسها في أسئلة بند (أتدرب).
- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط حل معادلة خطية فقط أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، في خطوة أولى، وتدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتى يتمكنوا من حل النظام المبين في النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وقراءته أمام الزملاء؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

3 التدريب

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسـئلة (1–6) في بند (أتدرب)، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا.
- اختر بعض الأخطاء التـي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر اسماء الطلبة؛ تجنبًا لإحراجهم–، ثم ناقِش طلبة الصف فيها.

الواجب البيتي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسـئلة التي لم يتمكنوا من حلها في غرفة الصف.
- في اليوم التالي، اطَّلع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

4 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا في تحديد عدد الحلول الممكنة لأنظمة معادلات مختلفة، مثل:
  - » نظام من معادلتين خطيتين.
  - » نظام من معادلة خطية وأخرى تربيعية.
  - » نظام من معادلتين تربيعيتين.
- أو أي أنظمـة أخرى، ثـم إعداد تقريـر بالنتائج التي توصَّل إليهـا كل منهم مُوثَّقة بالصور، أو باسـتعمال خاصية طباعة الشاشة.

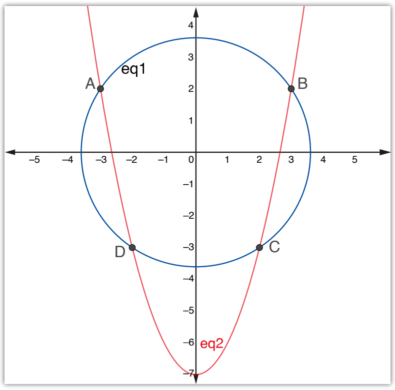
تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت عن صور لنمـاذج حياتية تظهر فيهـا منحنيات ومسـتقيمات متقاطعة (مثل: الجسـور، ونوافير الميـاه، وخرائط الطرق)، أو التقاط صـور لذلك، ثم حفظها في ملف بجهاز الحاسوب.
- اطلب إليهم استعمال برمجية جيوجيبرا لإيجاد معادلة كل من المنحنيات المتقاطعة التي تظهر في الصور المخزنة.
- ذكِّرهم بضرورة توثيق خطوات تنفيذ المشروع بالطرائق التي يرونها مناسبة، مثل خاصية طباعة الشاشة.

5 الختام

- وجِّـه كل طالب إلى كتابة نظام من معادلتين، ثم إمراره إلى زميله في المجموعة؛ لحله بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا.
- اطلب إلى كل طالب أن يتحقق من حل زميله.

الخطوةُ 3: أُحـدِّدُ إحداثياتِ نقاطِ التقاطعِ بينَ منحنيَي المعادلتيْنِ. أختارُ Intersect منْ شـريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على منحنيَي المعادلتيْنِ، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ.



إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ هيَ: (3- ,2-) ,(3- ,2) ,(3, 2) ,(3, 2-)؛ ما يعني أن حلولَ نظامَ المعادلاتِ هيَ:

الحَلُّ الأولُ: $x=-3, y=2$ الحَلُّ الثاني: $x=3, y=2$

الحَلُّ الثالثُ: $x=2, y=-3$ الحَلُّ الرابعُ: $x=-2, y=-3$

أتدرب

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:

1) $y=x-4$ ، $2x^2+3y^2=12$ لا يوجد حل.

2) $y=x^2$ ، $x^2+2y^2=34$ (-1.97, 3.881), (1.97, 3.881)

3) $x+y=16$ ، $x^2-y^2=20$ (8.625, 7.375)

4) $3x+4y=1$ ، $y=x^2+5$ لا يوجد حل.

5) $y=6x$ ، $x^2+y^2=9$ (0.493, 2.959)

6) $x=7+y$ ، $y=3x^2-2$ لا يوجد حل.

إرشادات للمعلم

يمكن إعادة توزيع الطلبة في بعض المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أتدرب)؛ تعزيزًا لتبادل الخبرات بينهم.

الدرس 1

فكرةُ الدرس

- حل نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية.
- حل مسائل رياضية وحياتية باستعمال أنظمة المعادلات.

التعلم القبلي:

- نظام المعادلات وحله.
- عدد حلول النظام.

1 التهيئة

- اكتب نظام المعادلات، الآتي على السبورة: $xy = 10$، $x + y = 7$ واسأل الطلبة:
  » بماذا يختلف هذا النظام عن ما تعرفونه؟
  » كيف يمكن حله باعتقادكم؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، واسألهم دائما: من يؤيد الإجابة؟ لماذا؟ من لديه إجابة أخرى؟ اذكرها. وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم.
- ثم وضح لهم أنهم سيتعرفون على حل مثل هذا النظام في هذا الدرس.

2 الاستكشاف

- اطلب إلى الطلبة قراءة (مسألة اليوم، ثم اسألهم:
  » لماذا عُبِّر عن الطريق المستقيم بمعادلة خطية، وعن الطريق المنحني بمعادلة تربيعية؟ لأن التمثيل البياني للمعادلة الخطية خط مستقيم، والتمثيل البياني للمعادلة التربيعية قطع مكافئ.
  » هل يمكن معرفة إذا كان الطريقان متقاطعين أم لا؟ نعم، يمكن معرفة ذلك عن طريق التمثيل البياني.
  » هل يمكن إيجاد نقاط تقاطع الطريقين من دون تمثيلهما بيانيًّا؟ نعم، يمكن إيجاد ذلك جبريًّا.
  » هل يمكن لحل النظام في هذه المسألة أن يساعد المهندسين؟ نعم، يمكن أن يساعدهم على تخطيط الطرق والجسور والدواوير المرورية وغير ذلك.

الدرس 1

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
Solving a System of Linear and Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخلَ إحدى المدنِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرَ منحنيًا داخلَ المدينةِ نفسِها. هلْ يتقاطعُ هذانِ الطريقانِ أمْ لا؟

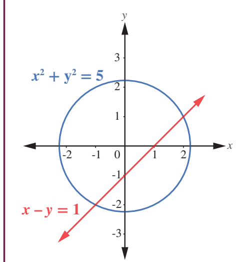
يُمكِنُني حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلكَ بكتابةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في المعادلةِ الخطِّيةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمَّ تعويضِهِ في المعادلةِ التربيعيةِ وحَلِّها.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra)، أوْ حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ كما في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ. أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في نقطتيْنِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



المعادلةُ الخطِّيةُ	$x - y = 1$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = x - 1$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (x - 1)^2 = 5$
بفكِّ القوسيْنِ	$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 2x - 4 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - x - 2 = 0$

لِحَلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = -1, c = -2$:

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

في ما يأتي بعض المصطلحات التي يمكن التركيز عليها:

المعادلة equation

المعادلة التربيعية quadratic eqation

نظام المعادلات system of equations

ملاحظات المعلم

3 التدريس

- اكتب معادلة خطية (linear equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب معادلة تربيعية (quadratic equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها بطريقتين مختلفتين (القانون العام، والتحليل).
- مثِّل المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية بيانيًا، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة الخطية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  - » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة التربيعية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  - » ما عدد نقاط التقاطع (intersection points) ؟
  - » ماذا تُمثِّل هذه النقاط للمنحنيين معًا؟
- اطلب إلى الطلبة اقتراح طريقة جبرية لإيجاد نقاط التقاطع.
- امنح الطلبة (3–2) دقائق لمحاولة حل السؤال جبريًا.

مثال 1

- ابدأ بشرح المثال الذي يتناول حل نظام معادلات له حلان مختلفان، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- بيِّن للطلبة أنه يمكن جعل x موضوعًا للقانون بدلًا من y.
- حل المعادلة التربيعة على اللوح مُستعمِلًا القانون العام، وبيِّن للطلبة أنه يمكن حلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى، مثل: **(4, 3)** الذي يُحقِّق **المعادلة الخطية** فقط، أو **(1, 2)** الذي يُحقِّق **المعادلة التربيعية**.
- أخبِر الطلبة أنه يوجد حلان للنظام، وأن ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام، ثم اكتب على اللوح الحلين في أزواج مرتبة واضحة.

إرشادات:

- في المثال 1، وجِّه الطلبة إلى استعمال الأقواس في خطوة التعويض (substitute)، وشجِّعهم على كتابة كل خطوة من خطوات الحل بوضوح.
- أرشد الطلبة إلى إيجاد المميز (discriminant) للمعادلة التربيعية؛ لتحديد عدد حلولها، ثم تحديد عدد حلول النظام.

أتذكّرُ

توجدُ طرائقُ عِدّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

القانونُ العامُّ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويضِ $x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$

بالتبسيطِ $x = -1 , x = 2$

الحالةُ الأولى: عندما $x = -1$:

$y = x - 1$

بتعويضِ $x = -1$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = -1 -1 = -2$

الحَلُّ الأولُ: $(x, y) = (-1, -2)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأولِّ، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(-1, -2)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x - y = -1 - (-2) = 1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$ ✓

إرشادٌ

يجبُ تعويضُ الحَلِّ في كلتا معادلتَيِ النظامِ؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المعادلتيْنِ منْ دونِ الأُخرى.

الحالةُ الثانيةُ: عندما $x = 2$:

بتعويضِ $x = 2$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 2 - 1 = 1$

الحَلُّ الثاني: $(x, y) = (2, 1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(2,1)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x - y = 2 - 1 = 1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$ ✓

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(2, 8), (-9, 30)$

$2x + y = 12$

$y = x^2 + 5x - 6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حَلٌّ واحدٌ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

11

التقويم التكويني:

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- اطلب إلى أفراد المجموعات حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**)؛ على أن يحل أفراد بعض المجموعات السؤال باستعمال القانون العام، ويحل أفراد بعضها الآخر السؤال نفسه باستعمال طريقة التحليل.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم المجموعة التي أخطأت في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجها.

أخطاء مفاهيمية :

- قد يخطئ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في التمييز بين المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية؛ لذا، وجِّههم باستمرار.
- قد يخطئ بعض الطلبة في إشارات الحدود عند إعادة ترتيب المعادلة الخطية؛ لذا نبِّههم إلى هذا الخطأ باستمرار، واجعلهم يعتادون التحقق.
- قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في حساب قيمة المميز (discriminant)؛ لذا ذكِّرهم بصيغته الرياضية، مؤكِّدًا أهمية كتابة المعادلة التربيعية بالصورة الآتية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ليسهل عليهم تحديد قيمة كل معامل بصورة صحيحة.

ثم ذكِّرهم بالحالات الثلاث:

المميز > 0: يوجد حلان حقيقيان.

المميز $= 0$: يوجد حلان متماثلان (حل حقيقي).

المميز < 0: لا توجد حلول حقيقية.

مثال 2

- ابدأ بشرح المثال الذي يتناول حل نظام له حل واحد، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- حــل المعادلة التربيعه مُســتعمِلًا طريقة التحليل الى العوامل، ثم اسأل الطلبة:
  » هــل يمكن حــل المعادلة بطريقة أخــرى؟ نعم، يمكن حلها باستعمال طريقة القانون العام.
- أخبِر الطلبة أنه يوجد للنظام حل واحد فقط، وأن ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام.
- اكتب على اللوح الحل في زوج مرتب واضح.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى.

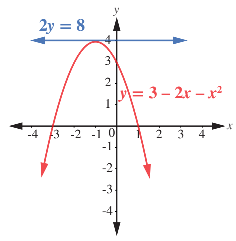
التقويم التكويني:

- وزِّع الطلبــة إلى مجموعات، ثم أعــطِ كلَّ مجموعة رقمًا.
- وجِّه أفــراد المجموعات ذوات الأرقــام الفردية إلى حــل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) باســتعمال طريقة التحليــل، ووجِّه أفــراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل التدريب نفســه باســتعمال القانون العام.
- اختر بعض الإجابات التي تحــوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم المجموعة التي أخطأت في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجها.

مثال 2

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$2y = 8$$
$$y = 3 - 2x - x^2$$



عندَ تمثيلِ معادلتَي النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ كمـا في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلًّا واحـدًا فقطْ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$2y = 8$
بالقسمةِ على 2	$y = 4$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$4 = 3 - 2x - x^2$
بالتبسيطِ	$x^2 + 2x + 1 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ باستعمالِ طريقةِ التحليلِ إلى العواملِ. هلْ توجدُ طريقةٌ أُخرى؟

بالتحليلِ	$(x + 1)(x + 1) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x + 1 = 0$
بحَلِّ المعادلةِ	$x = -1$

أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y :

المعادلةُ التربيعيةُ	$y = 3 - 2x - x^2$
بتعويضِ قيمةِ x	$y = 3 - 2(-1) - (-1)^2$
	$y = 4$

إذنْ، حَلُّ النظامِ هوَ الزوجُ المُرتَّبُ $(-1, 4)$.

للتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$4 \stackrel{?}{=} 3 - 2(-1) - (-1)^2$$
$$4 = 4 \quad ✓$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(0, -2)$

$$y = x^2 - 2$$
$$y + 2 = 0$$

12

إرشادات:

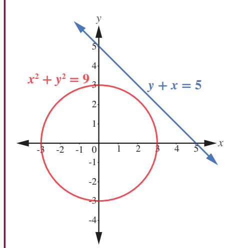
- في المثال 2، ذكِّر الطلبة بكيفية تحليل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشارة كل من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل أقواس التحليل.
- في تدريب (أتحقق من فهمي) للمثال 2، أرشِــد الطلبة إلى استعمال مميز المعادلة التربيعية للتأكُّد أن لها حلًّا وحيدًا، ونوِّه دائمًا بتأثير ذلك في عدد حلول النظام.

لاحظْتُ في المثالَيْنِ السابقَيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليسَ لها حَلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y + x = 5$$
$$x^2 + y^2 = 9$$



يَتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ أنَّ منحنيَيِ المعادلتَيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$y + x = 5$	المعادلةُ الخطِّيَّةُ
$x = 5 - y$	بكتابةِ x بدلالةِ y
$(5-y)^2 + y^2 = 9$	بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ
$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$	
$2y^2 - 10y + 16 = 0$	بالتبسيطِ

لِحَلِّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 2, b = -10, c = 16$:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانونُ العامُّ
$x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(16)}}{2(2)}$	بالتعويضِ
$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{-28}}{2}$	بالتبسيطِ

ألاحِظُ أنَّهُ عندَ تعويضِ قيمِ a، وَ b، وَ c في القانونِ العامِّ، ينتجُ جذرٌ تربيعيٌّ لعددٍ سالبٍ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتذكَّرُ

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x - y = 0$$
$$y = x^2 + 3x + 2$$

لا يوجد حل للنظام.

! أخطاء مفاهيمية:

فـي المثال 3، قد يحسـب بعـض الطلبة الجـذر التربيعي لعدد سـالب، مثل $\sqrt{-4} = -2$؛ لذا ذكِّرهم بمفهوم الجذر التربيعي للعدد، واطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه، ويكون ناتجه سالبًا؛ لإقناعهم بأن ذلك غير ممكن.

مثال 3

- وزِّع الطلبـة إلى مجموعات، ثم أعـطِ كلَّ مجموعة رقمًا.
- وجِّه أفـراد المجموعات ذوات الأرقـام الفردية إلى حل المثال بجعل x موضوعًـا للقانون، ووجِّه أفراد المجموعـات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل المثال نفسه بجعل y موضوعًا للقانون.
- تجوَّل بين أفـراد المجموعات مُرشِـدًا ومُسـاعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش الطلبة في إجاباتهم، بطرح الأسئلة الآتية:
  - » مـا عـدد حلـول المعادلـة التربيعيـة الناتجة؟ برِّر إجابتك. لا يوجد حل للمعادلة؛ لأن مميزها صفر.
  - » هـل يوجـد حـل للنظـام؟ بـرِّر إجابتـك. لا، لا يوجد حل للنظام؛ لأنه لا يوجد حل للمعادلة التربيعية الناتجة من استعمال طريقة التعويض.
  - » هـل يُؤثِّـر المتغيـر الـذي تجعلـه موضوعًـا للقانـون فـي حـل النظـام؟ بـرِّر إجابتـك. لا، لا يؤثـر؛ لأن جعـل x أو y موضوعًا للقانون يُنتِج معادلة مميزها سالب.
- اطلـب إلى الطلبـة اقتـراح حلـول وتعويضها في المعادلتين للتحقُّق من عدم وجود حل للنظام.
- أكِّد عدم وجود حل للنظام باسـتعمال التمثيل البياني الموجود.

تنويع التعليم:

- وجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$xy = 2$$
$$y = x + 1$$

إرشاد: بعد حل مثال 3، الفت انتباه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا (في البيت، أو في مختبر الحاسـوب، أو باسـتعمال الهواتف الذكية).

مثال 4: من الحياة

- لخِّص حالات حلول نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ثم ناقِش الطلبة فيها، واسألهم:
  - هل يوجد نظام من معادلتين خطية وتربيعية له ثلاثة حلول؟
  - لماذا؟
  - مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - مَنْ لديه إجابة أخرى؟

  لا، لا يوجد نظام من معادلتين خطية وتربيعية له ثلاثة حلول، ويمكن تقديم التبرير عن طريق الرسم.
- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في المثال الرابع، ثم اسألهم:
  - من لديه معلومات عن صناعة السجاد في الأردن، وفي العالَم؟
- ابدأ بشرح المثال الحياتي، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة، مُركِّزًا على كيفية تحديد المتغيرات، وتكوين المعادلات، وتدريب الطلبة على تحديد معطيات المسألة.
- اكتب على اللوح نظام المعادلات الذي يُعبِّر عن المسألة، ووجِّه الطلبة إلى حله.

نتيجةٌ

لأيِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ، تكونُ واحدةٌ منَ العباراتِ الآتيةِ صحيحةً:

1. وجودُ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ.
2. وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ.
3. عدمُ وجودِ حَلٍّ.

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ الأنظمةِ التي تتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

مثال 4: من الحياة

سَجّادةٌ مصنوعةٌ يدويًّا، مجموعُ بُعْدَيْها 7 m، وطولُ قُطْرِها 5 m. أَجِدُ كُلًّا منْ طولِها، وعرضِها.

قدْ تستغرقُ صناعةُ السَّجّادةِ اليدويةِ الصغيرةِ 4 أشهرٍ منَ العملِ المُتواصِلِ.

لإيجادِ بُعْدَيِ السَّجّادةِ، أَكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ المسألةَ، ثمَّ أَحُلُّهُ.

أَفترِضُ أنَّ طولَ السَّجّادةِ هوَ x، وأنَّ عرضَها هوَ y، وبما أنَّ مجموعَ بُعْدَيِ السَّجّادةِ هوَ 7 m، فإنَّ: $x + y = 7$، وبما أنَّ قُطْرَ السَّجّادةِ هوَ 5 m، فإنَّ (باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$، إذنْ، أصبحَ لديْنا نظامٌ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

$$y + x = 7$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

والآنَ، سأَحُلُّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$x + y = 7$ المعادلةُ الخطِّيةُ

$y = 7 - x$ بكتابةِ y بدلالةِ x

$x^2 + (7 - x)^2 = 25$ بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ

$2x^2 - 14x + 24 = 0$ بالتبسيطِ

$x^2 - 7x + 12 = 0$ بالقسمةِ على 2

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ إلى العواملِ:

$(x - 4)(x - 3) = 0$ بالتحليلِ

$x - 4 = 0$ او $x - 3 = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

$x = 4$ او $x = 3$ بحَلِّ كلِّ معادلةٍ

أَتذكَّرُ

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ التحليلِ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 4، يخطئ بعض الطلبة بعدم استثناء القيم السالبة من الحل؛ لذا ذكِّرهم أن قيم x، وy هنا تُمثِّل طول السجادة وعرضها.

أعوِّضُ قيمَ x في المعادلةِ الخطِّيّةِ لإيجادِ قيمِ y:

$y = 7 - 3$ بتعويضِ قيمةِ $x = 3$ في المعادلةِ الخطِّيّةِ

$y = 4$ قيمةُ y الأولى

$y = 7 - 4$ بتعويضِ قيمةِ $x = 4$ في المعادلةِ الخطِّيّةِ

$y = 3$ قيمةُ y الثانيةُ

إذن، حَلُّ النظامِ هوَ: $(4, 3)$ وَ $(3, 4)$.

بما أنَّ طولَ السَّجّادةِ أكبرُ منْ عرضِها، فإنَّ الطولَ هوَ 4 m، والعرضَ هوَ 3 m

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطرِها 50 m، ومحيطُها 140 m. أجِدُ بُعْدَيِ المزرعةِ. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 6x - 3$ ، $y = 2x - 3$ — $(0, -3), (-4, -11)$

2) $y = x^2 + 4x - 2$ ، $y + 6 = 0$ — $(-2, -6)$

3) $y = x^2 + 4$ ، $x - y = -1$ — لا يوجد حل للنظام.

4) $y = x^2 + 5x - 1$ ، $2x + 3y = 1$ — $(-5.89, 4.26), (0.226, 0.18)$

5) $y = x^2 + 4x + 7$ ، $y - 3 = 0$ — $(-2, 3)$

6) $y = x^2 - 2x + 4$ ، $y = x$ — لا يوجد حل للنظام.

7) $x^2 + y^2 = 8$ ، $2x + 3y = 7$ — $(2.788, 0.47), (-0.63, 2.756)$

8) $y = x^2 + 2x + 1$ ، $y = 0$ — $(-1, 0)$

9) $x^2 + y^2 = 4$ ، $x + y = 5$ — لا يوجد حل للنظام.

10) $x^2 + y^2 = 10$ ، $x - y = 2$ — $(-1, -3), (3, 1)$

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$ ، $x = 1$ — $(1, -3), (1, 5)$

12) $(x - 1)^2 = 4$ ، $y = 5 - x$ — $(3, 2), (-1, 6)$

13) **بركةٌ**: بركةُ ماءٍ قاعدتُها مستطيلةُ الشكلِ، ومحيطُها 16 m، والفرقُ بينَ مربَّعَيْ بُعْدَيْها $16\ m^2$. أجِدُ بُعْدَيْها. انظر الهامش

14) **أعدادٌ**: أجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24 انظر الهامش

15) **هندسةٌ**: دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما 12π cm، ومجموعُ مساحتَيْهِما $20\pi\ cm^2$. أجِدُ قُطرَ كلٍّ منْهُما. انظر الهامش

15

إجابات:

(**أتحقق من فهمي 4**): افترض أن طول المزرعة هو x، وأن عرضها هو y:

$$x^2 + y^2 = 2500$$
$$2x + 2y = 140$$
$$\Rightarrow (x, y) = (40, 30)$$

13) افترض أن الطول هو x ، وأن العرض هو y:

$$2x + 2y = 16$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

الحل: $(5, 3)$

14) افترض أن العدد الأول هو x، وأن العدد الثاني هو y:

$$x + y = 12$$
$$x^2 - y^2 = 24$$

الحل: $(7, 5)$

15) r_1 قطر الدائره الأولى ، r_2 قطر الدائره الثانية

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 12\pi$$
$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 24\pi$$
$$r_1 = 2, r_2 = 4$$

إرشاد: ذكِّر الطلبة بقانون فيثاغورس قبل البدء بحل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 1 إلى 18، وتابِعهم في هذه الأثناء.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إليهم حل مسائل مهارات التفكير العليا.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش أفراد المجموعات في حلولها.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

إرشاد: ذكِّر الطلبة بقانوني محيط الدائرة، ومساحة الدائرة قبل البدء بحل السؤال 15.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

مهارات التفكير العليا

- أشـرِك الطلبــة كافةً في حــل هذه المســائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّــر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّن الطلبــة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلــب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

5 الإثراء

- وجِّه بعض الطلبة – بعد مناقشــة المثال الرابع– إلى البحث في شــبكة الانترنت أو مكتبة المدرســة عن صناعة البسط في التراث الأردني، ثم كتابة تقرير عن ذلك، ثم قراءته في الإذاعة المدرسية.
- وجِّه بعض الطلبة إلى البحث في شــبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيق حياتي على نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية، وحله.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة توثيق مصدر المعلومة دائمًا.

التوسُّع:

- وجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$xy = 2 \qquad y = x + 1$$

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى استكمال الخطوة الثانية من المشروع، ومحاولة الانتهاء من جمع الصور، وإيجاد معادلات المنحنيات التي اختاروها من الصور التي اعتمدوها.

6 الختام

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة.
- أحضِــر صندوقين، يحوي الأول عِــدَّة بطاقات كُتِب على كل منهــا معادلة خطيــة، ويحــوي الثاني عِدَّة بطاقات كُتِب على كل منها معادلة تربيعية.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد مُمثِّل لها؛ ليختار بطاقــة من كل صنــدوق، ثم يحل أفــراد المجموعة النظام المكون من المعادلتين بأسرع وقت ممكن.
- الفت انتباه أفراد كل مجموعة إلى أنه يمكن لهم إعادة اختيار بطاقة واحدة فقط من أحد الصندوقين في حال حصلوا علــى نظام له عدد لا نهائي مــن الحلول، أو ليس له حل.

---

16 **أعمارٌ**: قالَتْ شــيماءُ: «عُمْري أكبرُ بأربعِ ســنواتٍ منْ عُمْرِ أخي ريّانَ، ومجموعُ مُربَّعَــيْ عُمْرَيْنا هوَ 346». ما عُمْرُ شيماءَ؟ انظر ملحق الإجابات.

17 **لوحــةٌ**: لوحةٌ مســتطيلةُ الشــكلِ، طولُها يســاوي مِثْلَيْ عرضِها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m ، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفةُ المترِ المربعِ الواحدِ منْهُ بالدينارِ 2.25 . أَجِدُ تكلفةَ الإطارِ. انظر ملحق الإجابات.

18 **زراعةٌ**: قسَّمَ فيصلٌ $41 m^2$ منْ مزرعتِهِ إلى منطقتيْنِ مربَّعتَيِ الشكلِ، ثمَّ زرعَهُما بمحصولَيِ الطماطمِ والبطاطا. إذا زادَ بُعْدُ المنطقةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعْدِ المنطقةِ المزروعةِ بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟ انظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا 19-24 انظر ملحق الإجابات.

19 **تبريرٌ**: صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منْها الماءُ بحسبِ العلاقةِ: $y + x^2 = 10$، إذا وُضِعَتْ وحدةُ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: $y = 12 + x$، فهلْ يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟

20 **تحدٍّ**: إذا علمْتُ أنَّ المعادلةَ الخطِّيَةَ: $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

21 **تحدٍّ**: أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $5x - 6 < 3x^2 - 7x + 2$، بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 3x^2 - 7x + 2$$

$$y = 5x - 6$$

مسألةٌ مفتوحةٌ: أَكتبُ ثلاثَ معادلاتٍ خطِّيةٍ تُكوِّنُ كلٌّ منْها معَ المعادلةِ التربيعيةِ: $y = x^2$ نظامًا يُحقِّقُ إحدى الحالاتِ الآتيةِ:

22 يوجدُ حَلّانِ للنظامِ.

23 يوجدُ حَلٌّ واحدٌ للنظامِ.

24 لا يوجدُ حَلٌّ للنظامِ.

16

إرشاد:

يمكن حل السؤال رقم 21 بيانيًّا بالاستعانة ببرمجية جيوجبرا، وتوضيح منطقة الحل بيانيًّا (المنطقة التي يقع فيها منحنى المعادلة التربيعية فوق منحنى المعادلة الخطية – الخط المستقيم).

تنبيه!

في السؤال 17 نبه الطلبة إلى وجود خطأ في السؤال واطلب إليهم اكتشافه. الخطأ هو كتابة كلمة (المربع) بدل (الطولي). اطلب الى الطلبة تعديلها على كتبهم.

الدرس

2

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ

Solving a System of Two Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.

مسألةُ اليومِ استعملَ خبيرُ تسـويقِ المعادلتيْنِ التربيعيتيْنِ الآتيتيْنِ لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسـلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتسـاوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السـوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سـعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عـددَ الوحداتِ المبيعةِ. هـلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

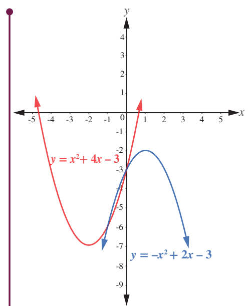
$$y = x^2 + 6x$$
$$y = -x^2 + 24x$$

لِحَـلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، تُسـاوى أولًا المعادلتـانِ بعضُهُما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$\boldsymbol{y = x^2 + 4x - 3}$$
$$\boldsymbol{y = -x^2 + 2x - 3}$$



عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المسـتوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ منحنييْهما يتقاطعانِ في نقطتيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$2x^2 + 2x = 0$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

$2x(x + 1) = 0$ بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ

$x = -1$ وَ $x = 0$ حَلّا المعادلةِ

لإيجادِ قيمةِ y، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

17

الدرس 2

فكرة الدرس

- حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين بمتغيرين.
- تعرف عدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين.
- حل مسائل رياضية وحياتية على أنظمة المعادلات.

التعلم القبلي:

- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين.
- حل معادلة تربيعية بالقانون العام والتحليل.
- حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بمفهوم كل من: نظام المعادلات (system of equations)، وحـل النظـام، ثـم ذكرهم بعدد الحلول التي يمكـن إيجادها عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًّا، وارتباطها بوضع المستقيمين في المستوى الإحداثي (حل واحد في حالة التقاطع، وعدم وجود حلول في حالة التوازي، وعدد لا نهائي من الحلول في حالة تطابق المسـتقيمين). ثم ذكرهم بعدد الحلـول الممكنة في حالة النظـام المكون من معادلـة تربيعية وأخرى خطية (عـدم وجود حل، أو وجـود حل واحـد، أو وجود حلين)، وارسـم على اللوح تمثيلات تقريبية تُوضِّح الحالات الثلاث.
- اطلب إلى أحـد الطلبة كتابـة معادلـة تربيعية على السبورة، ثم اكتب المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ ووضح لهم أنه تكون لدينا نظام من معادلتين، واسألهم:
  - » ما اسـم نظـام المعـادلات الـذي أمامكم على السبورة؟
  - » كيف يمكن حله باعتقادكم؟
- اسـتمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، واسـألهم دائما: من يؤيد الإجابة؟ لماذا؟ من لديه إجابة أخرى؟ اذكرها. وذلـك لتعزيز مهارات التواصل واحتـرام الرأي والرأي الآخر لديهم. ثم وضح لهم أنهم سيتعرفون على حل مثل هذا النظام في هذا الدرس، واكتب عنوانه على السبورة.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة (مسألة اليوم) الواردة في بداية الدرس (امنحهم دقيقة أو دقيقتين لذلك).
- اكتب على اللوح المعادلتين الواردتين في المسألة.
- اسأل الطلبة: ما نوع المعادلات في هذا النظام؟
- ثم اسألهم: كيف يمكن حل هذا النظام؟
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجع الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

- اطرح السؤال الآتي على الطلبة:
  » عندما يتكون نظام المعادلات المراد حلّه من معادلتين تربيعيتين two quadratic equations – مثل الحالة التي في مسألة اليوم – ما عدد الحلول التي يمكنك الحصول عليها؟ لماذا؟
- امنح الطلبة بعض الوقت لتقديم إجاباتهم وتبريرها. وإذا أجاب أحدهم إجابة معينة ولتكن (حلّين) اطلب إليه توضيح إجابته بتمثيل بياني تقريبي.
- وضح للطلبة أن إيجاد إحداثيي نقاط التقاطع -إن وجدت- بالطرق الجبرية هو ما ستتعلمونه في هذا الدرس، وأن إحداثيات نقاط التقاطع intersection points هي (الحلول الممكنة للنظام).

مثال 1

- ناقش حل المثال الذي يوضح طريقة حل نظام من معادلتين تربيعيتين لهما حلان مختلفان على السبورة مراعيا تبرير كل خطوة.
- نبّه الطلبة بعد خطوة مساواة المعادلتين معًا إلى أهمية جعل الطرف الأيمن من المعادلة يساوي صفرًا وتجميع الحدود المتشابهة في الطرف الأيسر منها (أو العكس) ليتمكن من حل المعادلة التربيعية، أكّد أنه لا فرق بين جعل الطرف الأيمن أو الأيسر من المعادلة يساوي صفرًا.
- ذكّر الطلبة بإخراج العامل المشترك common factor كطريقة لتحليل المقادير الجبرية algebraic expressions .
- أكد أنه يوجد للنظام حلّين من خلال التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب وأشّر إلى الحلول على التمثيل البياني (يمكن رسم شكل تقريبي على السبورة).

ملاحظات المعلم

الحالةُ الأولى: إذا كانَتْ $x = 0$:

بتعويضِ $x = 0$ في إحدى المعادلتيْنِ $\quad y = -(0)^2 + 2(0) - 3$

بالتبسيطِ $\quad y = -3$

إذنْ، الحَلُّ الأولُ للمعادلةِ هوَ: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالةُ الثانيةُ: إذا كانَتْ $x = -1$:

بتعويضِ $x = -1$ في إحدى المعادلتيْنِ $\quad y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$

بالتبسيطِ $\quad y = -6$

إذنْ، الحَلُّ الثاني للمعادلةِ هوَ: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ: $(0, -3)$, $(-1, -6)$.

إرشادٌ

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x وَ y في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(1, 0), (-3, 0)$

$y = -x^2 - 2x + 3$

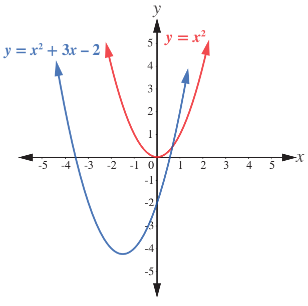
$y = x^2 + 2x - 3$

قدْ يتقاطعُ منحنيا معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وعندئذٍ يكونُ لنظامِ المعادلاتِ الذي تُكوِّنُهُ هاتانِ المعادلتانِ حَلٌّ واحِدٌ.

مثال 2: من الحياة

سباقاتٌ: في أحدِ سباقاتِ المراحلِ، سلكَ مُتسابِقٌ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ التربيعيةُ: $y = x^2$ في حينِ سلكَ مُتسابِقٌ آخرُ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ: $y = x^2 + 3x - 2$. أَجِدُ نقطةَ التقاطعِ بينَ مسارَيِ المُتسابِقيْنِ.

تُجرى سباقاتُ المراحلِ على مدارِ أيامٍ، وهيَ تقامُ على مساراتٍ متنوعةٍ منْ حيثُ التضاريسُ، مثلُ: الطرقِ المُنبسِطةِ، والطرقِ الجبليةِ.



عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني أنَّ لنظامِ المعادلاتِ حَلًّا واحدًا. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

18

إرشاد: قد يتساءل بعض الطلبة عن سبب وجود مسارين مختلفين في مسألة السباقات؛ لذا أخبرهم أن ذلك لا يعني بالضرورة اختلاف المسافة التي يقطعها كل متسابق.

التقويم التكويني:

- اطلب إلى الطلبة حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات غير متجانسة).
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

في تدريب (أتحقق من فهمي) قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في جعل أحد طرفي المعادلة يساوي صفرًا، فيحذفون -مثلًا- x^2 و $-x^2$؛ لذا أكِّد باستمرار وجوب إضافة النظير الجمعي إلى الحدود في طرفي المعادلة.

مثال 2: من الحياة

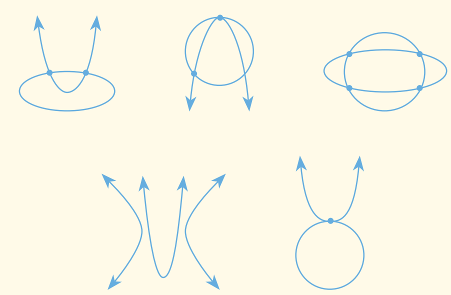
- اسأل الطلبة:
  - » أيكم يركب درّاجة؟
  - » ماذا تعرفون عن سباقات المراحل؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، وشجِّعهم على الحديث عن تجاربهم الشخصية؛ لتعزيز مهارات التواصل.
- ناقِش الطلبة في مسألة السباقات الواردة في المثال، مُؤكِّدًا أن تطبيقات أنظمة المعادلات التربيعية متعددة في حياتنا.
- ناقِش الطلبة في حل المثال الذي يعرض حل نظام من معادلتين تربيعيتين له حل واحد.
- نبِّه الطلبة – بعد خطوة مساواة المعادلتين معًا- إلى إمكانية التخلُّص من الحد x^2 من الطرفين (بإضافة النظير الجمعي)، ثم تجميع الحدود التي تحوي x في الطرف الأيسر، ثم اسألهم:
  - » كم عدد حلول النظام؟ لماذا؟ عدد حلول النظام هو حل واحد؛ لأنه ينتج من المعادلة الخطية حل واحد فقط.
- استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب للتحقُّق من صحة الحل، وتأكيد وجود حل واحد للنظام، ثم اكتب الحل في صورة زوج مرتب عند نقطة التقاطع (يمكنك رسم منحنيي المعادلتين بصورة تقريبية على اللوح).

إرشادات عامة:

- أكِّد دائمًا أهمية التحقُّق من صحة الحل.
- أكِّد علــى عدد حلول النظام الناتجة في كل مرة، واربط ذلك بالخطوة المناسبة من خطوات الحل الجبري.

مثال 3

- بيِّن للطلبة عدد الحلول التي نوقشــت في المثالين 1، 2 واســألهم هل تتوقعون وجود حالات أخرى لعدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين؟
- اســتمع لإجابات الطلبة ووضح لهم مع الرسم على الســبورة الحالات الخمس التــي تُمثِّل عدد الحلول الممكنة (possible solutions)، وهي تتراوح بين 0 (لا تقاطع)، و 4 (أربع نقاط تقاطع)، مثل الحالات في الشكل الآتي:



- اطلب إلى الطلبة رسم تمثيلات تقريبية غير تلك التي عُرِضت عليهــم للحالات المختلفة لعــدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين.
- ناقِش الطلبة في حل المثال الثالث الذي يعرض نظامًا من معادلتين تربيعيتين ليس له حل حقيقي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أهميــة اختبار المميز للمعادلة التربيعية الناتجة، وذكِّرهم أنه إذا كان المميز أقل من صفر، فإنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة التربيعية؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات التربيعية.
- للتحقُّق من صحة الحل، استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب.
(يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح).

$x^2 + 3x - 2 = x^2$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$ بطرحِ x^2 منْ كلا الطرفيْنِ

$3x - 2 = 0$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

$x = \frac{2}{3}$

بعدَ ذلكَ أَجدُ قيمةَ y، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ في أيٍّ منْ معادلتَي النظامِ:

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$

$y = \frac{4}{9}$ بالتبسيطِ

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$، ونقطةُ تقاطعِ المنحنييْنِ هيَ: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

رياضةُ التزلُّجِ هيَ إحدى أسرعِ الرِّياضاتِ غيرِ الآليةِ؛ فقدْ تصلُ سرعةُ المُتزلِّجِ إلى 200 km/h

أتحقق من فهمي

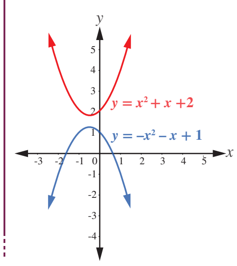
تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 + 2x$ مسارَ مُتزلِّجٍ على الجليدِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أَبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ. $\left(\frac{5}{3}, \frac{55}{9}\right)$

عرضْنا في المثاليْنِ السابقيْنِ أنظمةَ معادلاتٍ تربيعيةٍ لها حَلّانِ أَوْ حَلٌّ واحدٌ. ولكنْ، هلْ يوجدُ دائمًا حَلٌّ للنظامِ المُكوَّنِ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y = x^2 + x + 2$$
$$y = -x^2 - x + 1$$



عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ عدمُ وجودِ نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَي النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ لإيجادِ قيمةِ x:

$x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$2x^2 + 2x + 1 = 0$ بالتبسيطِ

أَتذكَّرُ

يعتمدُ عددُ جذورِ المعادلةِ وأنواعُها علــى قيمةِ المُميِّزِ الذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (Δ)، حيثُ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا.

قيمُ المعاملاتِ هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويضِ في المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمةُ المُميَّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: لا يوجد حل للنظام.

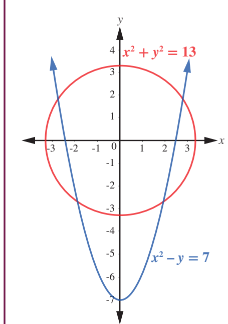
$$y = x^2 + 4$$
$$y = -x^2 + 2$$

عرضْنا في الأمثلةِ الســابقةِ أنظمةً لها حَلّانِ، أوْ حَلٌّ واحدٌ، أوْ ليسَ لها حَلٌّ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامٌ مُكوَّنٌ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، لهُ ثلاثةُ حلولٍ، أوْ أربعةٌ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$



عنــدَ تمثيــلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشــكلِ المجــاورِ، يُلاحَظُ وجودُ 4 نقــاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلتيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

يظهرُ المُتغيِّرُ x في كلتا المعادلتيْنِ بالقوَّةِ نفســها؛ لذا يُمكِنُني استعمالُ الحذفِ للتخلُّصِ منْ هذا المُتغيِّرِ، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ التي تحوي مُتغيِّرًا واحدًا هوَ y:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$(-) \quad x^2 - y = 7$$
$$y^2 + y = 6 \qquad \text{بالطرحِ}$$
$$y^2 + y - 6 = 0 \qquad \text{بطرحِ 6 منْ كلا الطرفيْنِ}$$

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أوِ التحليلِ:

$$(y + 3)(y - 2) = 0 \qquad \text{بالتحليلِ}$$

إذنْ: $y = -3 , y = 2$

أُعوِّضُ قيمتَيْ y في إحدى معادلتَيِ النظامِ لإيجادِ قيمِ x:

$$x^2 = -3 + 7 \qquad \text{بتعويضِ قيمةِ } y = -3$$

20

إرشاد:

في المثال 4، ذكِّر الطلبة بكيفية تحليل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشارة كل من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل قوسي التحليل.

أخطاء شائعة:

في المثال 4، قــد يخطئ بعض الطلبة عند كتابة الحلول في صورة أزواج مرتبة بقلب مواضع الإحداثيين؛ نظرًا إلى اختلاف هذا المثال عن الأمثلة السابقة؛ إذ يجــب إيجاد قيمة y أولاً؛ لذا أكِّد لهم طريقــة الكتابة الصحيحة في صورة (x, y)، ثم وجِّههم إلى إمكانية استعمال أقلام ملونة عند كتابة الأزواج المرتبة كما هو مُبيَّن في كتاب الطالب.

إرشاد:

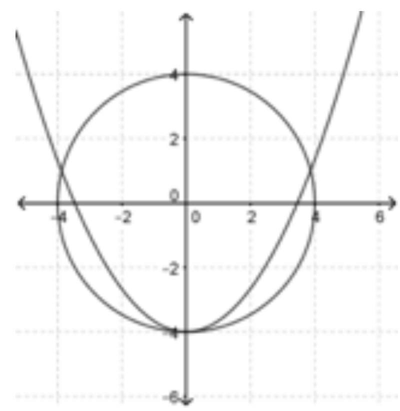
- في المثال 3، أكِّد ضرورة إيجاد قيمة المميز كلما نتج من مساواة معادلتي النظام معادلة تربيعية في الصورة الآتية: $ax^2 + bx + c = 0$ ؛ للتأكُّد أن المعادلة التربيعية ليس لها حلول حقيقية.
- للتحقُّق من صحة الحل، اطلب إلى الطلبة تمثيل منحنيي معادلتي النظام بيانيًّا باســتخدام برمجية جيوجبرا.

مثال 4

- يحتوي نظام المعادلات في المثال الرابع على معادلتين تربيعيتيــن: الأولى تُمثِّــل معادلة دائــرة (circle)، والثانية تُمثِّــل معادلة قطع مكافئ (Parabola)، وله أربعة حلول مختلفة.
- أخبِر الطلبــة أنه يمكن حل النظام باســتعمال طريقة الحذف(elimination) ، ثم اسألهم:
  - » أيهما أفضل: حذف المتغير x أم المتغير y؟ لماذا؟
  - » لماذا لا يمكن التخلُّص من المتغير y ؟
- ناقِــش الطلبة في حل المثال على اللوح، وشــجِّعهم على تبرير كل خطوة تقوم بها.
- حُلَّ المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل، ثم اسأل الطلبة:
  - » كيف يمكــن التحقُّق من قابلية المعادلة للتحليل؟ ذكِّر الطلبة بالمميز.
- حُلَّ المعادلــة التربيعية باســتعمال القانون العام في الهامش، ثم اسأل الطلبة:
  - » أي الطريقتين تفضلــون: التحليل إلى العوامل أم القانون العام؟ لماذا؟
- أخبِــر الطلبة أنــه يمكن التعويض عــن y في أي من معادلتي النظام للحصول على قيم x المقابلة.
- اكتب جميع الحلول في صورة أزواج مرتبة واضحة.
- للتحقُّق من صحــة الحل، اســتعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب، وعيِّن الحلول عليه.
- (يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح).

إرشادات:

- في المثال 4، نبِّه الطلبة إلى ضرورة إعادة ترتيب الحدود المتشابهة أسفل بعضها عند استعمال طريقة الحذف؛ ليسهل عليهم تحديد المتغير الذي سيحذفونه.
- للتحقُّق من صحة الحل، وجِّه الطلبة إلى تعويض كل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم اعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.
- وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا –إن أمكن ذلك– للتحقُّق من صحة الحل، حيث سيظهر الشكل الآتي:



- ذكِّر الطلبة بإمكانية تنزيل برمجية جيوجبرا من متجر الهاتف، وتحميله في هواتفهم الذكية.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم ناقِشهم في حل الأسئلة (4, 6, 8, 10, 12, 14) على اللوح، ثم اطلب إليهم حل بعض الأسئلة ضمن مجموعات ثنائية.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

بحَلِّ المعادلةِ $x=\pm 2$

إذنْ، $x=2\,, x=-2$

بتعويضِ قيمةِ $y=2$ $x^2=2+7=9$

بحَلِّ المعادلةِ $x=\pm 3$

إذنْ، توجدُ أربعةُ حلولٍ للنظامِ، هيَ: $(-3\,,-2)$ ، وَ$(-3\,,2)$، وَ $(3\,,2)$ ، وَ$(3\,,-2)$.

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ هذهِ الحلولِ بتعويضِها في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: انظر الملحق

$$x^2+y^2=16$$
$$3y-x^2=-12$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y=2x^2+x-5$
$y=-x^2-2x-5$
$(-1,-4), (0,-5)$

2) $y=x^2-4x+1$
$y=-2x^2-4$
لا يوجد حل للنظام.

3) $y=x^2+1$
$y=2x^2-3$
$(-2,5), (2,5)$

4) $y=x^2+x+1$
$y=-x^2+x-2$
لا يوجد حل للنظام.

5) $y=-x^2+5x$
$y=x^2-5x$
$(0,0)\,,(5,0)$

6) $y=x^2$
$y=x^2+x+6$
$(-6,36)$

7) $y=-x^2+6x+8$
$y=-x^2-6x+8$
$(0,8)$

8) $x^2+y^2=16$
$y=x^2-5$
انظر الملحق

9) $5x^2-2y^2=18$
$3x^2+5y^2=17$
$(2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,-1)$

10) أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ: انظر الملحق

$$x^2+(y-2)^2=4$$
$$x^2+y^2=9$$

11) عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟ انظر الهامش

إرشاد: وجِّه الطلبة إلى استعمال القانون العام والآلة الحاسبة في حل السؤالين: 8، و10.

إجابات:

11) افترض أن العدد الأول هو x ، وأن العدد الثاني هو y:

$$x^2+y^2=89$$
$$x^2-y^2=39$$

بحل نظام المعادلات التربيعية، ينتج:

$(8,5), (-8,5), (8,-5), (-8,-5)$

12 **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسيًّا في الوقتِ نفسِهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+12t+10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+4t+42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ. $t=4\ sec, y=25m$

13 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ. انظر الملحق

14 **أراضٍ:** قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ. انظر الملحق

مهارات التفكير العليا

15 **تبريرٌ:** قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2+y^2=4$$
$$x^2+y^2=9$$

لا يمكن إيجاد عددين مجموع مربعيهما يساوي 4، ويساوي 9 في آنٍ معًا.

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ. توجد إجابات متعددة، منها: $x^2+y^2=9\ , x^2+y=10$

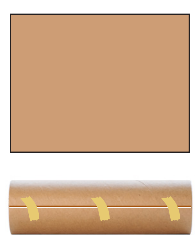
17 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: انظر الملحق

$$x^2-3xy+2y^2=0$$
$$x^2+xy=6$$

18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.

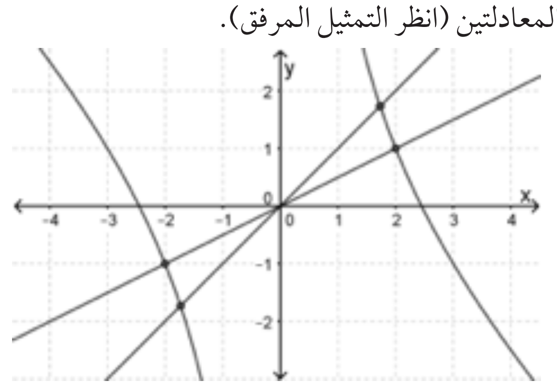
توجد إجابات متعددة، منها: $(x-5)^2+(y-1)^2=4,\ x^2-10x+y=-22$

19 **تحدٍّ:** قطعةٌ منْ ورقٍ مُقوًّى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ cm^2$، ثُنِيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ. انظر الملحق



إرشادات:

- بعد حل المسألة 17، اطلب إلى الطلبة تفسير عدد الحلول، ومحاولة رسم شكل تقريبي لوضع منحنيي المعادلتين، ثم وجِّههم إلى استعمال برمجية جيوجبرا (في مختبر الحاسوب، أو في البيت، أو باستعمال هواتفهم الذكية) لتمثيل المعادلتين (انظر التمثيل المرفق).



- لحل المعادلة في السؤال 19، وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا –إن أمكن ذلك–، ثم ناقِشهم في الحل الذي استُبعِد، وسبب استبعاده.

مهارات التفكير العليا

- اطلب إلى الطلبة حل المسائل 15, 16, 17, 18, 19 ضمن مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد بعضها توضيح كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.

5 الإثراء

- وجه الطلبة إلى حل النظام الآتي:

$$xy=6\ ,\ x^2+y^2=16$$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة تنفيذ الإجراءات المكتوبة في الخطوة الثالثة؛ وذلك بكتابة نظام معادلات يُمثِّل منحنيين متقاطعين في كل صورة، ثم اختيار أحد هذه الأنظمة، وحلها جبريًّا، ثم التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا.
- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم اختيار نظامين، وإيجاد حل كل منهما: أحدهما نظام يحوي معادلة خطية ومعادلة تربيعية، والآخر نظام يحوي معادلتين تربيعيتين.
- ذكِّرهم بضرورة توثيق خطوات تنفيذ المشروع بالطريقة التي يرونها مناسبة، مثل استعمال خاصية طباعة الشاشة.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني النظام المكون من معادلتين تربيعيتين؟
  - » ماذا يُقصَد بحل النظام؟
  - » كم عدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين؟
- استمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم اسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.

الدرس 3

فكرةُ الدرسِ

- تعرف الأسس النسبية وخصائصها.
- كتابة مقادير أسية في أبسط صورة.

التعلم القبلي:

- حل مسائل على قوانين الأسس.
- تبسيط الأسس في حدود جبرية.
- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد النسبية.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح تعريف الأس (القوة)، وذكِّر الطلبة بعناصرها.
- اكتب قوانين الأسس الصحيحة (integer exponents)، ووضِّحها بأمثلة.
- بيِّن كيفية تبسيط الحدود الجبرية (algebraic terms) باستعمال قوانين الأسس (exponential laws)، مُعزِّزًا ذلك بأمثلة.
- خصِّص وقتًا للإجابة عن أسئلة الطلبة.
- اكتب على اللوح عِدَّة جذور، ثم اطلب إلى الطلبة كتابتها في صورة أسس، مستعملين قوانين الأسس.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » أيكم شاهد حديقة مربعة؟
  - » أين شاهد ذلك؟
  - » ما قانون مساحة المربع؟ $A = L^2$
  - » ما مساحة الحديقة؟ $A = (4x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{1}{3}}\, z^4)^2$
  - » هل يمكن كتابة هذا الحد الجبري بصورة أخرى؟ نعم.
  - » اذكرها. يمكن تبسيط هذا الحد، وكتابته في صورة: $A = 16x^{\frac{4}{5}}\, y^{\frac{2}{3}}\, z^8$

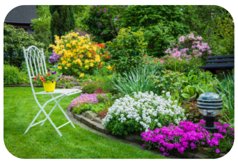
الدرس 3

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الأسسِ النسبيةِ وتبسيطُها.

المصطلحاتُ الأُسُّ النسبيُّ.

مسألةُ اليومِ حديقةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ نصفِ ضلعِها مُعطًى بالحدِّ الجبريِّ $2x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{1}{3}}\, z^4$، ما مساحتُها بالوحداتِ المربَّعةِ؟



مراجعةُ المفاهيمِ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n وَ m عدديْنِ صحيحيْنِ موجبيْنِ $(n > 1)$، فإنَّ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$، إلّا إذا كانَتْ $a < 0$، وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ يكونُ عددًا غيرَ حقيقيٍّ.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{27})^1$ بكتابةِ المقدارَ في صورةِ الجذرِ الثالثِ

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}$ بتحليلِ العددِ 27 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= 3$

2 $4^{\frac{3}{2}}$

$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3$ بكتابةِ المقدارِ في صورةِ الجذرِ التربيعي مرفوعًا للأُسِّ 3

$= (\sqrt{2\times2})^3$ بتحليلِ العددِ 4 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (2)^3$

$= (2 \times 2 \times 2)$ تعريفُ الأسسِ

$= 8$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ: $a^n = \underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$، ويُسمّى a الأساسَ، وَ n الأُسَّ.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

3 $(81)^{-\frac{5}{4}}$

$(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$ الصورةُ الجذريةُ

$= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5}$ بتحليلِ العددِ 81 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (3)^{-5}$

$= \frac{1}{(3)^5}$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$ تعريفُ الأسسِ

$= \frac{1}{243}$

4 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

$(-8)^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^7$ الصورةُ الجذريةُ

$= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^7$ بتحليلِ العددِ 8– إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (-2)^7$

$= -128$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عـددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $32^{\frac{1}{5}}$ 2   b) $9^{\frac{5}{2}}$ 243   c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$ $\frac{1}{32}$

مراجعةُ المفاهيمِ

خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ a وَ b وعددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n، فإنَّ:

1. ضربُ القوى: $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. قوَّةُ القوى: $(a^n)^m = a^{n \times m}$
3. قوَّةُ ناتجِ الضربِ: $(ab)^n = a^n \times b^n$
4. قسمةُ القوى: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
5. قوَّةُ ناتجِ القسمةِ: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$

24

أخطاء شائعة:

- في المثـال 1، قد يخطئ بعض الطلبة في دليـل الجذر، فيكتبون $a^{\frac{m}{n}}$ في صورة $\sqrt[m]{a^n}$؛ لذا نبِّههم إلى خطئهم، مُبيِّنًا لهم الفرق بين a^3 ، و $a^{\frac{1}{3}}$ مثلًا.
- قد يخطئ بعـض الطلبة، فيجـدون الجذر التربيعـي (أو أي جذر دليله زوجي) لعدد سـالب؛ لذا بيِّن لهم دائمًا أنه عـدد غير حقيقي، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسـه مرتان أو أربع مرات، ويكون الناتج 16– مثلًا؛ لإقناعهم بأن ذلك غير ممكن.

3 التدريس

مثال 1

- اكتـب تعريـف الأس النسـبي (rational exponential)، ثم وضِّحه للطلبة مُعزِّزًا بأمثلة.
- اسأل الطلبة:
  - » مـا معنـى تبسـيط الأسـس (simplifying exponents)؟ كتابتها في أبسط صورة.
  - » كيف تُبسِّـط حدًّا جبريًّا مُعطًى؟ بتطبيق قوانين الأسس.
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- وذلك لتعزيز مهارات التواصل لـدى الطلبة (التعبير عن الرأي، واحترام الرأي الآخر).
- ناقِش الطلبة فـي حل المثال، مُركِّـزًا على تبرير كل خطوة.

إرشاد: فـي المثال 1، ذكِّر الطلبـة أن $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$، وأن n يُسمّى دليل الجذر.

التقويم التكويني:

- وجِّـه الطلبة إلى حـل التدريب في بنـد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

إرشـاد: في المثال 1، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المسـتوى دون المتوسط صعوبة في استعمال قوانين الأسـس؛ لذا امنحهم بعض الوقت، وزوِّدهم بأمثلة سهلة، مُنوِّهًا إياهم بضرورة تبرير كل خطوة في الحل؛ ما يساعدهم على حفظ قوانين الأسس.

تنطبقُ خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها التي درسْتُها سابقًا للأسسِ الصحيحةِ على **الأسسِ النسبيةِ** (rational exponents) أيضًا.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}}$

$y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ — ضربُ القوى

$= y^{-1}$ — بجمعِ الأسسِ

$= \frac{1}{y}$ — تعريفُ الأُسِّ السالبِ

2 $(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}}$ — بالتبسيطِ

$= x^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{x^2}$ — الصورةُ الجذريةُ

3 $(a \times b^2)^{\frac{3}{2}}$

$(a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2\times\frac{3}{2}}$ — قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$= \sqrt{a^3} \times b^3$ — الصورةُ الجذريةُ

4 $\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}}$

$\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$ — قسمةُ القوى

$= z^{\frac{6}{8}}$ — بالتبسيطِ

$= z^{\frac{3}{4}}$ — بالتبسيطِ

$= \sqrt[4]{z^3}$ — الصورةُ الجذريةُ

أَتعلَّمُ

تنقسمُ الجذورُ بحسبِ دليلِ الجذرِ إلى نوعيْنِ، هما: الجذورُ الفرديةُ، والجذورُ الزوجيةُ.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في بند (مراجعة المفاهيم: خصائص ضرب القوى وقسمتها)، مُركِّزًا على تسمية كل قانون من قوانين الأسس؛ ليسهل عليهم حفظها.
- ابدأ حل المثال بكتابة التفاصيل جميعها، واسم القانون في الهامش عند استعماله.
- أكِّد للطلبة أنه يمكن استعمال أكثر من قانون في حل المسألة نفسها.

إرشاد: في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إجراء العمليات على الأعداد النسبية؛ لذا ذكِّرهم بكيفية جمع الأعداد النسبية (rational numbers) وطرحها، وضربها، وقسمتها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط حل السؤال الآتي:

أثبِت صحة ما يأتي:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\,(1 + x^2)$$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} &= x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\\ &= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)\\ &= x^{-\frac{1}{2}}\,(1 + x^2)\end{aligned}$$

5 $\left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \dfrac{x^{4\times\frac{3}{4}}}{y^{2\times\frac{3}{4}}}$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

$= \dfrac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$ قوَّةُ القوى

$= \left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$ الصورةُ الجذريةُ

6 $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ تعريفُ الأُسِّ النسبيِّ

$= x^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$ قسمةُ القوى

$= x^{\frac{2}{15}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[15]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$ $\sqrt[21]{a^5}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{x^7}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$ $y^{\frac{5}{4}} \times z^{\frac{5}{4}}$

d) $\dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$ $\sqrt[10]{x^{29}}$

e) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\dfrac{y^3}{\sqrt{x^3}}$

f) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[35]{x}}$

مفهومٌ أساسيٌّ

تكونُ العبارةُ الأُسِّيَّةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

1. ظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً، وكانَتِ الأسسُ جميعُها موجبةً.
2. لمْ تتضمَّنِ العبارةُ قوَّةَ القوى.
3. كانَتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

أخطاء مفاهيمية:

فـي المثال 2، قـد يخطئ بعض الطلبة في تبسـيط الأسس السالبة، فيبسطون $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}}$ إلى $x^{-\frac{3}{2}}$؛ لذا، أكِّد لهم ضرورة تغيير إشارة الأس عند نقل التعبير الأسي من المقام إلى البسـط أو العكـس، ثم تطبيق قوانين الأسس المناسبة لحالة التبسيط.

إرشادات:

- فـي المثـال 2، وضِّـح للطلبـة خاصية الأس الصفري، ثم أثبِته على اللوح.
- نوِّه لهم بأن: $\dfrac{x^n}{x^n} = 1$

مثال 3

- اشــرح ما تعنيه كتابة العبارة الأسية في أبسط صورة، مُوضِّحًا كل شرط بمثال.
- ناقِش الطلبة في حل المثـال الثالث علــى اللوح، مُستعمِلًا قوانين الأسس النسبية، ثم اطلب إليهم تبرير كل خطوة (لماذا؟).

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجــه بعــض الطلبة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- ناقِش الطلبة في حل الأسئلة 16,18, 20 على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إليهم حل المســائل (22–28) ضمن مجموعات.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مســائل الــدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكــن أيضا إضافة المســائل التي لــم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

مثال 3

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\dfrac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$

$\dfrac{6x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)\times\left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right)\times\left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$ قسمةُ القوى

$= 3x^4y^{-1}$ بالتبسيطِ

$= \dfrac{3x^4}{y}$ الأُسُّ السالبُ

2 $\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$

$\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \dfrac{3\times6}{9}\times\dfrac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}}\times\dfrac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ ضربُ القوى

$= 2\times\dfrac{x}{x^1}\times\dfrac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ بالتبسيطِ

$= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$ بقسمةِ القوى

$= 2x^0y^{\frac{3}{2}}$ تعريفُ الأُسِّ الصفريِّ

$= 2\sqrt{y^3}$ الصورةُ الجذريةُ

3 $\sqrt[3]{64x^{12}y^3}$

$\sqrt[3]{64x^{12}y^3} = (64x^{12}y^3)^{\frac{1}{3}}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}}$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$= 4x^4y$ بالتبسيطِ

أَفهمُ

إذا كانَتْ $m = n$ فإنَّ:

$1=\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-n}=a^0$

إذنْ، $a^0=1$.

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\dfrac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$ $\dfrac{3\sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[4]{x^{17}}}$

b) $\dfrac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$ $\dfrac{250}{\sqrt{x^3}\times\sqrt[42]{y^{73}}}$

c) $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$ $2\sqrt{x^9\times y^{11}}$

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 3، قــد يخطئ بعض الطلبة في تبســيط العبارات الأســية ذات الاقواس، مثل: $\dfrac{(16p^4)^{\frac{3}{2}}}{(4p^2)^{\frac{1}{2}}}$، فلا يُطبِّقون قواعد الأســس تطبيقًا صحيحًا، ويطرحــون القوى على الرغم من عدم تســاوي الحــد الجبري في كل من البسط والمقام، أو يختصرون البسط والمقام من دون مراعاة تساوي القوى؛ لذا ذكِّرهم بقوانين الأسس، وشروط تطبيق كل منها.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $512^{\frac{1}{9}}$ 2

2) $125^{\frac{2}{3}}$ 25

3) $36^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{6}$

4) $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 729

5) $(-25)^{\frac{3}{2}}$ عدد غير حقيقي.

6) $(-8)^{\frac{7}{3}}$ -128

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7) $z^{-\frac{4}{2}} \times z$ $\frac{1}{z}$

8) $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$ $\sqrt[7]{x^3}$

9) $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$ $a^2\sqrt[3]{b^2}$

10) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$ $\frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

11) $\frac{\sqrt[2]{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$ 1

12) $\frac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$ 1

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

13) $\left(\frac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$ $\frac{1}{4\sqrt{x^3y^2}}$

14) $\frac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$ $\frac{3\sqrt{y}\,z^2}{\sqrt[3]{x}}$

15) $\frac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$ $\frac{1}{a^2b^4}$

16) $\frac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$ $\frac{12q^{\frac{7}{3}}}{p^3}$

17) $\frac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ $x^{\frac{2}{3}}y$

18) $\frac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{8}{y}$

مهارات التفكير العليا

19) **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمةَ العبارةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$ -1

20) **تبريرٌ:** تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبحُ فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الملحق

تحدٍّ: أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

21) $\frac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^2 + r^3}$ انظر الملحق

22) $\frac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$ انظر الملحق

23) $\frac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$ انظر الملحق

24) **تبريرٌ:** أُقارِنُ بينَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. أُبرِّرُ إجابتي.

$5^{75} < 2^{175}$

5 الإثراء

- وجِّــه كل طالب إلى البحث في شــبكة الإنترنت عن ورقة عمل تتضمَّن تبســيط المقادير الأسية، ثم حلها وعرضها عليه؛ لتقديــم التغذية الراجعة له، ثم اطلب إليه حفظها في ملف أعمال الطالب.
- أكِّد للطلبة ضرورة توثيق مصدر ورقة العمل.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اســتكمال الخطــوة الثالثة والنتهاء منها، وبدء العمــل بخطوة عرض نتائج المشــروع، وإضافة كل العناصر المطلوبة فيه.
- في حال واجه الطلبة صعوبة في إعداد العرض، اطلب إليهم استعمال شــبكة الإنترنت، أو الاستعانة بمعلِّم الحاسوب.

إرشاد: ذكِّر الطلبة أنه لا يجوز الاختصار بين البسط والمقام في حالة وجود جمع أو طرح في أحدهما في الاسئلة 21, 22, 23 .

6 الختام

نشاط (مسابقة بين المجموعات):

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة.
- اكتب على اللوح تعبيرًا أســيًّا (يمكن الاستعانة بأحد الســؤالين الآتيين، أو ما تراه مناســبًا)، ثم اطلب إلى الطلبة كتابته في أبسط صورة.

1) $(8a^6)^{\frac{1}{3}} \times (\frac{27}{a^3})^{\frac{1}{3}}$

2) $\frac{9(3a^4)^{-2}}{\sqrt{(36a^4)}}$

- المجموعة الفائزة هي التي تكتب المقدار الأســي في أبسط صورة في أسرع وقت.

فكرةُ الدرس

- حل معادلة أسية.
- حل نظام معادلات أسية.

التعلم القبلي:

- حل المعادلة الخطية.
- حل المعادلة التربيعية.
- حل نظام من معادلتين.
- تبسيط حدود ومقادير جبرية باستعمال قوانين الأسس.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح معادلة خطية (linear equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب المعادلة الخطية في صورة أس أساسه العدد 5 مثلًا، ثم اكتب الطرف الآخر؛ على أن يساوي العدد 5
- اطلب الى الطلبة اقتراح اسم المعادلة الناتجة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » هل يمكن التعبير عن نمو الزهر بمعادلة؟ نعم، $y = 2^x$
  » هل تزداد قيمة y مع ازدياد قيمة x أم تنقص؟ تزداد.
  » ما نوع المعادلة في المسألة؟ معادلة أسية.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

الدرس 4

حَلُّ المعادلةِ الأسِّيَّة

Solving Exponential Equation

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ، حَلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ الأُسِّيَّةُ.

مسألةُ اليومِ تستغرقُ الزنبقةُ المائيةُ 26 يومًا لتنموَ بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمْتُ أنَّ الزهرةَ تنمو يوميًّا بمقدارِ الضِّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمْ يومًا يَلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ (exponential equation) هيَ معادلةٌ تتضمَّنُ قوًى أُسسُها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حَلُّها كتابةَ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسَّيِ الطرفيْنِ، وَفقَ القاعدةِ التي نصُّها: "إذا تساوَتْ قوَّتانِ لهُما الأساسُ نفسُهُ، فإنَّ أُسَّيْهِما متساويانِ."

مثال 1

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1 $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$	$5^2 = 25$
$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$	الأساسانِ متساويانِ
$3x + 2 = 2x - 2$	بمساواةِ الأسسِ
$x = -4$	بحَلِّ المعادلةِ

2 $8^x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$	
$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$	قوَّةُ القوى
$2^{3x} = 2^{-x+1}$	ضربُ القوى
$3x = -x + 1$	بمساواةِ الأسسِ
$x = \frac{1}{4}$	بحَلِّ المعادلةِ

أَبحثُ: قوَّةُ العددِ 2 أوْ 2^x مهمةٌ جدًّا في علمِ الحاسوبِ، لماذا؟

29

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

3 $49^{x+1} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

$(7^2)^{x+1} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$7^{2x+2} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$ قوّةُ القوى

$7^{2x+2} = 7^{\frac{1}{2}-1}$ قسمةُ القوى

$7^{2x+2} = 7^{-\frac{1}{2}}$ الأساسانِ متساويانِ

$2x + 2 = -\frac{1}{2}$ بمساواةِ الأسسِ

$x = -\frac{5}{4}$ بحَلِّ المعادلةِ

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$ $-\frac{15}{8}$ b) $9^x = 3 \times (\frac{1}{3})^x$ $\frac{1}{3}$ c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$ $-\frac{7}{16}$

مفهومٌ أساسيٌّ

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسِّيِّ هيَ: $y = a(b)^x$، حيثُ a وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$

مثال 2: من الحياة

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها في مختبرِ العلومِ باستعمالِ 5000 خليةٍ بكتيريةٍ. وبعدَ مرورِ 3 ساعاتٍ لاحظَتْ أنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ قدْ أصبحَ 11000 خليةً، وأنَّ عددَها كانَ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ ساعةٍ. أَكتبُ اقترانًا أُسِّيًّا يُمثِّلُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ، ثمَّ أستعملُهُ لإيجادِ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً.

قدْ يحتوي الغِرامُ الواحدُ منَ التربةِ على نحوِ 10^{10} خلايا بكتيريةٍ مختلفةِ الأنواعِ.

أولًا: أَجِدُ الاقترانَ الأُسِّيَّ الذي يُمثِّلُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ. في الصيغةِ العامةِ للاقترانِ الأُسِّيِّ، يوجدُ مُتغيِّرانِ x, y، وهما يُمثِّلانِ الزمنَ وعددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةِ دعاءَ. أَفترضُ أنَّ الزمنَ هوَ x، وأنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ هوَ y.

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها عندَ الزمنِ $x = 0$، مُستعمِلةً 5000 خليةٍ بكتيريةٍ؛ أيْ:

3 التدريس

مثال 1

- ابدأ بشــرح مفهوم المعادلة الأسية (exponential equation)، ثم اسأل الطلبة:
  - » مــاذا يُقصَد بحــل المعادلة الأســية؟ إيجاد قيمة المتغير الذي يجعل المعادلة عبارة صحيحة.
  - » مَنِ اقترح طريقة لحل المعادلة الأسية؟
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم قدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِــش الطلبة في حــل المثال، مُؤكِّــدًا لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل بالتعويض في طرفي المعادلة.

إرشاد: في المثال 1، وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحة الحل.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المســتوى دون المتوسط صعوبة في توحيد الأساس؛ فذكِّرهم بنواتج القوة (الأسس) لأعداد، مثل: 2, 3, 4, 5, 10، وشــجِّعهم علــى كتابتها وحفظها؛ لكي تساعدهم في أثناء الحل.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 1، يخطــئ بعض الطلبة في تطبيق قوانين الأســس عند محاولة إيجاد أساس مشترك في طرفي المعادلة. فمثلًا:

قــد يكتبــون $3^{4y} = 9^{y+1}$ في صــورة $3^{4y} = 3^{2y+1}$ أو يكتبــون $2^x = 16^{2x}$ فــي صــورة $2^x = 2^{4x}$؛ لذا اطلب إليهم استعمال الأقواس في الخطوات الأولى من الحل، وتجزئة الحل إلى خطوات، أو اســتعمال أي طريقة يجدونها مناسبة.

مثال 2: من الحياة

- اكتب على اللوح الصيغة العامة للاقتران الأسي (exponential function)، ثم بيِّن للطلبة عناصرها.
- اطلب إلى الطلبة تحديد المعطيات والمطلوب في المثال؛ لفهم المسألة قبل حلها.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسِّيِّ	$y = a\,(b)^x$
بتعويضِ قيمةِ $x = 0$، وقيمةِ $y = 5000$	$5000 = a(b)^0$
$b^0 = 1$	$a = 5000$
بتعويضِ قيمةِ a	$y = 5000\,(b)^x$

عندَ الزمنِ $x = 3$ أصبحَ العددُ 11000 خليةً بكتيريةً؛ أيْ:

بالتعويضِ	$11000 = 5000\,(b)^3$
بقسمةِ كلا الطرفيْنِ على 5000	$\frac{11000}{5000} = b^3$
الجذرُ التكعيبيُّ للطرفيْنِ	$b = \sqrt[3]{\frac{11000}{5000}}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$b \approx 1.3$

إذنْ، يُمكِنُني التعبيرُ عنْ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ x منَ الساعاتِ بالاقترانِ الأُسِّيِّ:

$$y = 5000\,(1.3)^x$$

ثانيًا: أَجِدُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً:

أُعوِّضُ $x = 12$ في الاقترانِ	$y = 5000\,(1.3)^{12}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$y \approx 116490$

أَتعلَّمُ

لإيجادِ قيمةِ $(1.3)^{12}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أضغطُ على الأزرارِ:

1 . 3 ^ 1 2 =

أتحقق من فهمي

بلغَ عددُ الزائرينَ لموقعٍ تعلُّميٍّ على شبكةِ الإنترنتْ 579 زائرًا في اليومِ الأولِ منْ إنشاءِ الموقعِ، وفي اليومِ التالي زادَ العددُ ليصلَ إلى 1386 زائرًا. إذا كانَ عددُ الزُّوّارِ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ يومٍ، فأكتبُ المعادلةَ الأُسِّيَّةَ التي تُمثِّلُ عددَ زائري الموقعِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الأيامِ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ عددِهِمْ بعدَ 10 أيامٍ.

$y = 579\,(2.4)^{x-1}$

بعد 10 أيام يصبح العدد 1494310 زائرًا.

نما عددُ مُستخدِمي المواقعِ التعليميةِ بما نسبتُهُ 900% منذُ عامِ 2000م.

يُستعمَلُ القانونُ $A = p(1+r)^n$ لحسابِ جملةِ المبلغِ (المبلغُ بعدَ استثمارِهِ) في حالةِ الربحِ المُركَّبِ، حيثُ يُمثِّلُ A جملةَ المبلغِ، وَ p المبلغَ الحاليَّ (المبلغُ المرادُ استثمارُهُ)، وَ r نسبةَ الربحِ، وَ n الزمنَ بالسنواتِ.

إرشادات:

- في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في تكوين المعادلة؛ لذا ساعدهم على تحديد القيم المعطاة في المسألة، وما تُمثِّله من متغيرات في الصيغة العامة للاقتران الأسي.
- وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة؛ لمساعدتهم في أثناء الحل، ودرِّبهم على استعمالها بصورة صحيحة.

مثال 3: من الحياة

استثمرَ سليمانُ 6000 دينارٍ في شركةٍ صناعيةٍ، بنسبةِ ربحٍ مقدارُها 20%، وقدْ أصبحَ المبلغُ بعدَ n منَ السنينَ 10368 دينارًا. أَجِدُ الزمنَ n.

قانونُ جملةِ المبلغِ	$A = p(1+r)^n$
بالتعويضِ	$10368 = 6000\,(1+0.2)^n$
بالقسمةِ على 6000	$\frac{216}{125} = (1.2)^n$
بالتبسيطِ	$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = (1.2)^n$
الأساسانِ متساويانِ	$(1.2)^3 = (1.2)^n$
بمساواةِ الأسسِ	$n = 3$

إذنْ، استثمرَ سليمانُ المبلغَ مدَّةَ 3 سنواتٍ.

أَتذكَّرُ

لتحويلِ 20% إلى كسرٍ عشريٍّ، أَقسِمُ على 100،

$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$

أتحقق من فهمي

اشترتْ غيداءُ أسهمًا بمبلغِ 50000 دينارٍ، بنسبةِ ربحٍ بلغَتْ 10%، وقدْ أصبحَ المبلغُ 60500 دينارٍ بعدَ n منَ السنواتِ. أَجِدُ الزمنَ n.

$60500 = 50000(1.1)^x$

$x = 2$

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ أُسِّيَّتيْنِ بكتابةِ طرفَيِ المعادلةِ الأولى في صورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثُمَّ مساواةِ أُسَّيِ الطرفيْنِ، ثُمَّ تكرارِ ذلكَ في المعادلةِ الثانيةِ، فيتكوَّنُ نظامٌ منْ معادلتيْنِ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$
$$9^x \times 3^y = 81$$

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ الأولى	$4^{2x} \times 2^y = 64$
بتحليلِ العددَيْنِ 4 وَ64 إلى عواملِهِما الأوليةِ	$(2^2)^{2x} \times 2^y = 2^6$
قوَّةُ القوى	$2^{4x} \times 2^y = 2^6$
ضربُ القوى	$2^{4x+y} = 2^6$
بمساواةِ الأسسِ	$4x + y = 6$

32

مثال 3: من الحياة

- وضِّح للطلبة مفهوم جملة المبلغ في حالة الربح المُركَّب، مُبيِّنًا لهم أنه من التطبيقات المهمة للمعادلة الأسية.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أكِّد لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلة.

مثال 4

- وضِّح للطلبة مفهوم نظام المعادلات الأسية، وكيفية حله بطرح الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني لك اسم (نظام من معادلتين أسيتين)؟
  - » كم متغيرًا فيه؟
  - » ما معنى حل نظام المعادلات الأسية؟
  - » اقترح طريقة لحل النظام.
  - » مَنْ لديه طريقة أخرى؟
- استمع لإجابات الطلبة، وقدِّم لهم التغذية الراجعة، ثم وضِّح مفهوم نظام المعادلتين الأسيتين، وكيفية حله.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أكِّد لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلتين.

إرشاد:

- في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل نظام المعادلات باستعمال طريقة الحذف (elimination)، أو التعويض (substitute)؛ لذا ذكِّرهم بهاتين الطريقتين بذكر مثال بسيط.

4 التدريب

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجـه بعـض الطلبة صعوبة في حل أي مسـألة، فاختر طالبًا تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسـائل الـدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكـن أيضا إضافة المسـائل التي لـم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

مهارات التفكير العليا

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسـة، ثم وجِّههم إلى حل المسائل.
- ناقِش أفراد كل مجموعة في إجاباتها.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة تبرير حلهم في كل مسألة (يمكن توجيه أفراد كل مجموعـة إلى تقييم حل أفراد مجموعة أخرى).
- استمع لإجابات أفراد المجموعات، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

بتطبيقِ الخطواتِ نفسِها على المعادلةِ الثانيةِ تنتجُ المعادلةُ الخطِّيةُ $2x + y = 4$

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطِّيِّ الناتجَ بالحذفِ:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 6 \\ (-)\quad 2x + y &= 4 \\ \hline 2x &= 2 \end{aligned}$$

بطرحِ المعادلتيْن

$x = 1$ بالقسمةِ على 2

$4(1) + y = 6$ بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ الثانيةِ

$4 + y = 6$

$y = 2$ بحَلِّ المعادلةِ

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = 1 , y = 2$

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطِّيِّ بالحذفِ، أوِ التعويضِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: $\left(\frac{13}{5}, -\frac{1}{10}\right)$

$\frac{4^x}{256^y} = 64$

$3^{2x} \times 9^y = 243$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1) $64 = (32)^{3-x}$ $\frac{9}{5}$

2) $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$ $-\frac{13}{8}$

3) $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ $\frac{71}{14}$

4) $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$ $\frac{7}{58}$

5) $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = (11)^{x+7}$ 3.75

6) $(\sqrt{7})^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$ $\frac{7}{11}$

7) $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 243$ $x = \pm 1$

8) $5^{2x} \times 25^x = 125$ $\frac{3}{4}$

9) $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$ $-1 , -5$

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

10) $5^y = 25^{x-3}$, $125^y = 25^{x-1}$ $x = 4, y = 2$

11) $3^y = 3^{2x+y}$, $27^y = 27^{x+3}$ $x = 0, y = 3$

12) $5^{2x} \times 25^y = 125$, $\frac{8^x}{2^y} = 16$ $x = \frac{11}{8}, y = \frac{1}{8}$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$ $\quad$ $x = -\frac{16}{3}, y = \frac{7}{26}$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$ $\quad$ $8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$ $\quad$ $(0, -1), (\frac{7}{9}, -\frac{103}{54})$

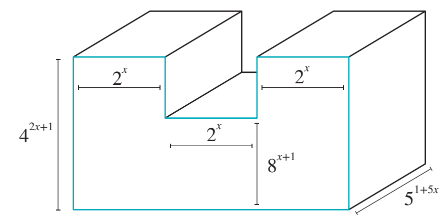
15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$ $\quad$ $2^{m^2} \times 2^n = 64$ $\quad$ $(m, n) = (-3,3), (3, -3)$

16 **ثقافةٌ ماليةٌ:** يتضاعفُ مبلغٌ يستثمرُهُ عليٌّ 3 أضعافٍ كلَّ شهرٍ. إذا أصبحَ المبلغُ بعدَ 4 شهور 1701 دينارًا، فكمْ دينارًا كانَ رأسُ المالِ؟ انظر الملحق

17 **سيارةٌ:** اشترى سعيدٌ سيارةً بمبلغِ 15000 دينارٍ. إذا قَلَّتْ قيمةُ السيارةِ بنسبةِ 20% سنويًّا، فبعدَ كمْ سنةٍ تصبحُ قيمتُها 6144 دينارًا؟ بعد 4 سنوات

18 **بكتيريا:** يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الخلايا البكتيريةِ 2187 خليةً؟ انظر الملحق

19 **هندسةٌ:** أكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ الآتي. انظر الملحق



مهارات التفكير العليا 20 - 23 انظر الملحق

20 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $2 + 2^x = 1$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

21 **تبريرٌ:** أَحُلُّ المعادلةَ الآتيةَ، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

$$x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$$

22 **تحدٍّ:** ما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y في المعادلةِ الآتيةِ:

$$\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$$

23 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيَ:

$$2^x + 3^y = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

34

5 الإثراء

- حُلَّ المعادلة الأسية: $2^{2x} - 2^{x+4} + 64 = 0$
- حُلَّ نظام المعادلات الآتي:

$$\frac{16^{4x-1}}{64^{y-2}} = 4^{y+x}$$

$$\frac{(625^{-\frac{x}{2}})^{4-y}}{64^{y-2}} = 5^{2x+4y}$$

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بقرب موعد عرض نتائج المشروع، ووجوب الانتهاء من تجهيزه، والتحقُّق من توافر العناصر المطلوبة جميعها؛ استعدادًا لعرضه.
- ذكِّر الطلبة بأداة تقييم المشروع الواردة في بداية الوحدة.

6 الختام

مسابقة (التحديات الثلاثة):

- أحضِر ثلاثة صناديق، ثم اكتب على الأول عبارة: (التحدي 1)، واكتب على الثاني عبارة: (التحدي 2)، واكتب على الثالث عبارة: (التحدي 3).
- ضع مجموعة من الأوراق في كل صندوق، كُتِب في كل منها سؤال مناسب (استعن بالجدول الآتي).

» حل المعادلة: ....

التحدي 1	a) $x^{-\frac{2}{3}}$ $\quad$ b) $x^{-\frac{1}{2}} = 25x^{\frac{3}{2}}$ c) $x^{2x-1} = 3^{x+1}$ $\quad$ d) $2^{2y} \times 2^{2-y} = 2^{-y}$
التحدي 2	a) $25^{2x} = 5^{1-x}$ $\quad$ b) $81^{-\frac{y}{2}} = 27^{2y+1}$ c) $(\frac{1}{4096})^{-\frac{y}{z}} = 16^{2z-1}$
التحدي 3	a) $2^{\frac{1}{2-x}} \times 3^{2x} = 108$ b) $1875 = 3^{2x-1} \times 5^{3+x}$ c) $2^{3x+1} \times 5^{5+2x} = 800$

- قسِّم مجموعة من طلبة الصف إلى فريقين (كل فريق يتألَّف من 5 طلبة).
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة ترشيح متسابق من فريقهم لسحب ورقة من صندوق (التحدي 1)، ثم حل السؤال المكتوب في الورقة خلال دقيقتين.
- يحصل الفريق الذي إجابته صحيحة على نقطة.
- كرِّر الخطوة السابقة للصندوق الثاني، ثم الثالث مع متابعة تسجيل النقاط.
- الفريق الفائز هو الذي يجمع نقاطًا أكثرَ.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

1) $y = 4x$، $y = 5 - x^2$ — $(1, 4), (-5, -20)$

2) $y - x = 15$، $x^2 + y^2 = 64$ — لا يوجد حل للنظام.

3) $y = x^2 - 4x + 5$، $y = -x^2 + 5$ — $(2, 1), (0, 5)$

4) $y = -x^2 - x + 12$، $y = x^2 + 7x + 12$ — $(-4, 0), (0, 12)$

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي، فأَجِدُ:

$$3x - 2y = 7$$
$$x^2 - y^2 = c$$

5) حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$ — $(3, 1), (5.4, 4.6)$

6) جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي لا تجعلُ للنظامِ أيَّ حَلٍّ. — $c \geq 10$

7) أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $3 - 7y < 6x^2$ بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي: انظر الملحق

$$y = 3 - 7x$$
$$y = 6x^2$$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

8) $\dfrac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$ — 4

9) $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ — $\dfrac{16}{9}$

10) $\dfrac{(16p^4q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$ — $\dfrac{\sqrt[2]{q^5}}{8p^5}$

11) $\dfrac{(27a^{\frac{3}{2}}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^4b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$ — $3\sqrt{a^3}b$

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

12) $3^a x^b = \dfrac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ — $a = 3, b = \dfrac{11}{6}$

13) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2} = x^a$ — $a = -0.5$

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

14) $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$ — $t = \dfrac{2}{3}$

15) $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{c - \frac{5}{2}}$ — $c = -\dfrac{1}{2}, 3$

16) $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$ — $x = 2$

17) $500 = \dfrac{2^{\frac{1}{2} - x}}{5^{2x}}$ — $x = -1.5$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

18) $36^{x+4} = 6^y$، $36^y = 36^{x+6}$ — $(-2, 4)$

19) $5^{2x+4} = 5^{y-3}$، $7^{y-x} = 49$ — $(-5, -3)$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

20) أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ تُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ: — c

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$3x + y = 6$$

a) $(1, 3)$ b) $(0, 2)$
c) $(2, 0)$ d) $(-2, -2)$

21) العبارةُ الجبريةُ التي يجبُ وضعُها في المربَّعِ الفارغِ للمعادلةِ $\dfrac{8x^2y^3}{\square} = \left(\dfrac{2y}{x}\right)^2$ هيَ: — a

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$
c) $2xy$ d) x^2y^2

22) أَجِدُ جميعَ قيمِ p التي تجعلُ منحنى المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 2x + p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةِ $y = x^2 + 3x - 1$. — $p \leq -2$

35

التقويم الختامي:

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم وزِّع على كل منها الأسئلة (18-1).
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة مناقشة إجابات الأسئلة الخاصة بهم.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش أفراد المجموعات في حل بعض المسائل على اللوح.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

عرِّف الطلبة بالاختبارات الدولية، مُبيِّنًا لهم أهميتها مستعينًا بالمعلومة أدناه، ثم وجِّههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) بصورة فردية، ثم ناقِشهم في إجاباتها على اللوح.

يتقدم طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلب(PISA) في مجالات القراءة والرياضيات والعلوم، وفيما يخص الرياضيات فإن المعرفة الرياضية وفق هذا البرنامج يُعبّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة، وتوظيف، وتفسير الرياضيات في أوضاع مختلفة، إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي واستخدام المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر والتنبؤ بها. و تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتعينهم في تقييم النجاحات أو الإخفاقات، وهذه الدراسات والبرامج يشارك الأردن في دوراتها بانتظام منذ أوائل تسعينات القرن العشرين. عليك عزيزي المعلم تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل مثل هذه الأسئلة والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج القييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

كتاب التمارين

الدرس 1 حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = 7x + 15$, $y = 3x^2 + 5x - 2$ — $(-2.07, 0.5)$

2) $y - x = 1$, $y = 2x^2 - 11x + 16$ — $(1.77, 2.775), (4.22, 5.22)$

3) $y - x = 10$, $x^2 + y^2 = 50$ — $(-5, 5)$

4) $x + y = 20$, $x^2 - y^2 = 16$ — $(10.4, 9.6)$

5) $y - x = 0$, $y = x^2 + 3x + 2$ — لا يوجد حل للنظام.

6) $y = 2x - 5$, $y = x^2 - 2x$ — لا يوجد حل للنظام.

7) $y = x - 1$, $y = x^2 - 3x + 2$ — $(1, 0), (3, 2)$

8) $y - 2x = 1$, $y = 5x^2 + 4y - 1$ — $(-0.86, -0.73), (0.46, 1.93)$

9) $y - x + 1 = 0$, $y = x^2 + 3x$ — لا يوجد حل للنظام.

10) $y = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ — $(0, 2)$

11) $y - x = 1$, $y = x^2 + 6x + 8$ — لا يوجد حل للنظام.

12) $y = 2 - 3x$, $y = x^2 - 4x + 3$ — لا يوجد حل للنظام.

13) **حدائقُ**: حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها 30 m، ومحيطُها 84 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = 900$
$2x + 2y = 84$
$\Rightarrow (x, y) = (24, 18)$

14) **سَجّادٌ**: اشترَتْ ليلي سَجّادةً مستطيلةَ الشكلِ، طولُ قُطْرِها $\frac{1}{2}\sqrt{34}$ m، ومحيطُها 8 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $2x + 2y = 8$, $(x, y) = (2.5, 1.5)$

15) **ادِّخارٌ**: إذا كانَ الفرقُ بينَ المبلغِ الذي ادَّخرَتْهُ رزانُ والمبلغُ الذي ادَّخرَتْهُ أختُها هديلُ هوَ دينارَيْنِ، وكانَ مجموعُ مربَّعَيْ ما معَهُما 74 دينارًا، فكمْ دينارًا ادَّخرَتْ كلٌّ منْهُما؟
$x - y = 2$, $x^2 + y^2 = 74$, $(x, y) = (7, 5)$

16) **نقـودٌ**: قالَ مازنٌ إنَّ مجموعَ ماليَ ولدى أخي منْ نقودٍ هوَ 7 دنانيرَ، وإنَّ الفرقَ بينَ مربَّعَيْ ما معَنا هوَ 7 دنانيرَ. كمْ دينارًا معَ مازنٍ وأخيهِ؟ $(4, 3)$

17) إذا كانَ المستقيمُ $y = 3x - 4$ يقطعُ المنحنى $y = x^2 - px + 4$ في نقطتَيْنِ، فما قيمةُ P؟ انظر ملحق الإجابات

الدرس 2 حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 - 3x$ — $(3, 0)$

2) $y - 3x^2 = x + 2$, $y = -6x^2 + 7x$ — لا يوجد حل

3) $y = 0.5x^2 + 0.5x + 1$, $y = -x^2 + 2x + 4$ — $(2, 4), (-1, 1)$

4) $y = 2x^2 + 8x + 4$, $y = x^2 + 2x + 4$ — $(0, 4), (-6, 28)$

5) $y - x^2 = 0$, $y + x^2 = 0$ — $(0, 0)$

6) $y = x^2 + x - 1$, $y = 5 - x^2$ — $(1.5, 2.75), (-2, 1)$

7) $y = x^2 + x + 2$, $y + x^2 + 2 = 0$ — لا يوجد حل

8) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2), (-2, 2)$

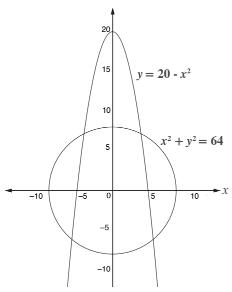
9) $y = -x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2)$

10) $y^2 = -x^2 + 4$, $y = 0.5x^2 - 2$ — $(0, -2), (-2, 0), (2, 0)$

11) $4y + 9x^2 = 25$, $y - x^2 = 3x - 4$ — $(1.3, 1.57), (0.46, -2.4)$

12) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = (x - 3)^2$ — $(3.91, 0.83), (1.03, 3.86)$

13) **كرةُ طائرةٍ**: في أثناءِ لعبِ ســاميةَ وهندَ كرةَ الطائرةِ، رمَتْ ساميةُ الكرةَ على شكلِ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 3$، ثمَّ رمَتْ هندُ الكرةَ على شكلِ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 2x$. أَجِدُ إحداثياتِ نقطةِ التقاءِ الكرتيْنِ.
$(1.5, 0.75)$



14) **أبراجٌ**: أرادَ مركزُ حراسةٍ إيجادَ نقاطِ التقاطعِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ لتركيبِ أبراجِ مراقبةٍ عندها. أَجِدُ إحداثياتِ هذِهِ النقاطِ.
$(3.58, 7.15), (-3.58, 7.15),$
$(5.11, -6,15), (-5.11, -6.15)$

إرشاد: لحل المسائل 11 ، 12 ، 13 ، 14، استعمل القانون العام والآلة الحاسبة.

الدرس 3 تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $16^{\frac{1}{4}}$ — 2

2) $36^{\frac{3}{2}}$ — 216

3) $32^{-\frac{3}{5}}$ — $\frac{1}{8}$

4) $(81)^{\frac{1}{4}}$ — 3

5) $(-27)^{\frac{2}{3}}$ — 9

6) $(-64)^{\frac{2}{3}}$ — 16

7) $1^{-\frac{4}{9}}$ — 1

8) $25^{-\frac{3}{2}}$ — $\frac{1}{125}$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

9) $y^{\frac{4}{3}} \times y^{-\frac{5}{2}}$ — $\frac{1}{y^{\frac{7}{6}}}$

10) $z^{\frac{7}{2}} \times z^{-\frac{3}{4}}$ — $z^{\frac{11}{4}}$

11) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{5}{2}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$

12) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{7}{3}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}$

13) $\frac{x^{\frac{2}{7}}}{x^{-\frac{3}{5}}}$ — $x^{\frac{31}{35}}$

14) $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}}$ — x

15) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{7}}$ — $\frac{y^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{3}{7}}}$

16) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{7}{15}}}$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

17) $\frac{8x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{5}{2}}y}$ — $\frac{4}{x^6 y^{\frac{2}{3}}}$

18) $\frac{10xy^{-\frac{3}{4}}}{5x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}$ — $\frac{2x^{\frac{8}{3}}}{y^{\frac{25}{12}}}$

19) $\frac{\left(4y^{-\frac{7}{3}}\right) \times \left(24xy^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(2x^{\frac{5}{3}}y\right)\left(y^{-\frac{5}{2}}\right)}$ — $\frac{48y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$

20) $\frac{\left(125y^{-\frac{2}{5}}\right) \times \left(10x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(5xy^{-\frac{5}{2}}\right)\left(y^{-\frac{7}{5}}\right)}$ — $\frac{250y^{\frac{37}{10}}}{x^{\frac{5}{7}}}$

21) $\sqrt[3]{2x^{27}y^9}$ — $\sqrt[3]{2}x^9y^3$

22) $\sqrt{9x^8y^4}$ — $3x^4y^2$

23) **بكتيريا**: تتضاعفُ عيِّنةُ بكتيريا مخبريةٍ 4 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا كانَ في العيِّنةِ 3500 خليةٍ بكتيريةٍ اليومَ، فكمْ يصبحُ عددُها بعدَ مرورِ 7 أسابيعَ؟ 57344000

24) **تجـارةٌ**: يتضاعفُ ثمنُ قطعةِ أرضٍ ســنويًّا بمقدارِ الضعفِ. كمْ ســيصبحُ ثمنُها بعدَ 3 ســنواتٍ، علمًا بــأنَّ ثمنَها اليومَ 5000 دينارٍ؟ 40000

الدرس 4 حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1) $64 = (16)^{5x+7}$ — $-\frac{11}{10}$

2) $49 = (343)^{7x+1}$ — $-\frac{1}{21}$

3) $16^{2x+3} = 4^{x+1}$ — $-\frac{5}{3}$

4) $36^{3x-1} = 6^{x-2}$ — 0

5) $125^x = 5 \times \left(\frac{1}{25}\right)^x$ — $\frac{1}{5}$

6) $81^x = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^x$ — $\frac{1}{6}$

7) $128^{5x-4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ — $\frac{57}{70}$

8) $2^x = \frac{16^{2x}}{32^{x+1}}$ — $-\frac{5}{2}$

9) $\frac{3^{x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{2-x}}{3^{1-x}}$ — $\frac{5}{8}$

10) $\frac{25^{\frac{x}{2}}}{125^{-x}} = \frac{5^{3x+1}}{25^x}$ — $\frac{1}{3}$

11) $\frac{8^{x-\frac{1}{3}}}{64^{\frac{2x}{3}}} = \frac{4^{\frac{x}{2}}}{32^{-x}}$ — $-\frac{1}{5}$

12) $\frac{100^{2-\frac{x}{2}}}{1000^{\frac{x}{3}}} = \frac{1000^{\frac{x}{3}-1}}{100^{\frac{5x}{2}}}$ — $-\frac{7}{2}$

13) **كهرباءُ**: تقاسُ شِـــدَّةُ التيـــارِ الكهربائيِّ بوحدةِ الأمبيـــرِ A. إذا كانَتِ العلاقةُ بينَ شِـــدَّةِ التيارِ I والزمـــنِ بالثواني t هيَ: $I = 2^{-t}$، فبعدَ كمْ ثانيةً تصبحُ شِدَّةُ التيارِ $0.125\ A$؟ $t = 3$

14) **لعبةُ شطرنجَ**: حصلَ مُخترِعُ لعبةِ الشطرنجِ على مكافأةٍ منَ المَلكِ، هيَ حبوبٌ منَ القمحِ: حبَّةُ قمحٍ عنِ المربَّعِ الأولِ في لوحةِ الشطرنجِ، وحبَّتانِ عنِ المربَّعِ الثاني، وأربعُ حبّاتٍ عنِ المربَّعِ الثالثِ، وثماني حبّاتٍ عنِ المربَّعِ الرابعِ، وهكذا. إذا كانَ عددُ حبّاتِ القمحِ التي حصلَ عليْها في المربَّعِ x هوَ 4096، فما قيمةُ x؟ المربع 12

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةِ:

15) $125^x \times 25^{-y} = 625$, $4^x \times 2^y = 8$ — $(1.428571, 0.142857)$

16) $16^x \times 2^{3y} = 2048$, $49^x \times 7^y = 16807$ — لا يوجد للنظام حل.

17) $25^x \times 5^y = 125$, $4^{2x} \times 2^{2y} = 64$ — عدد لانهائي من الحلول.

18) $27^x \times 9^{2y} = 81$, $2^{5x} \times 32^y = 128$ — $(1.6, -0.2)$

إجابات صفحة 16:

16) افترض أن عمر شيماء هو x، وأن عمر ريان هو y:

$$x = y + 4$$
$$x^2 + y^2 = 346$$
$$\Rightarrow (15, 11)$$

أي إن عمر شيماء 15 عامًا، وعمر ريان 11 عامًا.

17) افترض أن الطول هو x، وأن العرض هو y:

$$x = 2y$$
$$x^2 + y^2 = 1.25$$
$$\Rightarrow (1, 0.5)$$

التكلفة = طول المحيط × سعر المتر الواحد= 6.75 دنانير.

18) افترض أن طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو x.

إذن: يكون طول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو: $x + 1$

$$(x + 1)^2 + x^2 = 41$$
$$x^2 + x - 20 = 0$$
$$x = 4$$

أي إن طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو 4 أمتار، وطول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو 5 أمتار.

19) بحل المعادلتين، يتبيَّن عدم وجود حل للنظام؛ ما يعني عدم وصول المياه إلى وحدة الإنارة.

20) عوِّض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$
$$3x + p = 2x^2 + 3x - 5$$
$$2x^2 - (5 + p) = 0$$

المميز يساوي صفرًا؛ لأنه يوجد حل واحد فقط.

إذن:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (0)^2 + 4(2)(5+p) = 0$$
$$40 + 8p = 0$$
$$p = -5$$

21) أولًا: حل نظام المعادلات بتعويض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

الحل: $(0.85, -1.77), (3.15, 9.77)$.

ثانيًا: اختر ثلاث نقاط عشوائيًّا، بحيث تكون النقاط مُوزَّعة كالآتي:

نقطة بين حلي النظام مثل: $(2, 2)$، ونقطة على يسار الحل الأصغر مثل: $(0, 4)$، ونقطة على يمين الحل الأكبر مثل: $(4, 12)$.

ثالثًا: عوِّض كل نقطة من النقاط الثلاث في المتباينة؛ لتحصل على عبارة صحيحة، فيكون حل النظام هو:

$x < 0.85$ ، أو $x > 3.15$

22)

- مثِّل للطلبة المعادلة $y = x^2$ بيانيًّا، وليكن الرأس: $(0, 0)$.
- اقبل كل المعادلات الخطية، ومثِّلها بيانيًّا، مُحدِّدًا الحالة التي تُحقِّقها، ثم اطلب إلى الطالب حلها جبريًّا.

إرشاد: استعمل برمجية جيوجبرا في حل هذا السؤال.

إجابات صفحة 21:

(أتحقق من فهمي 4):

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

	$x^2 + y^2 = 16$
بإعادة الترتيب	$-x^2 + 3y = -12$
بجمع المعادلتين	$y^2 + 3y = 4$
بإعادة الترتيب	$y^2 + 3y - 4 = 0$
بالتحليل	$(y + 4)(y - 1) = 0$
خاصية حاصل الضرب الصفري	$y = -4, y = 1$
بتعويض $y = 4$ في المعادلة الأولى	$x^2 - (-4)^2 = 16$
بالتبسيط	$x^2 = 0$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$x = 0$
بتعويض $y = 1$ في المعادلة الأولى	$x^2 + (1)^2 = 16$
بالتبسيط	$x^2 = 15$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$x = \pm\sqrt{15}$
الحلول الثلاثة، هي:	$(0, -4), (\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1)$

للتحقُّق من صحة الحل، وجِّه الطلبة إلى تعويض كل حل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم اعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.

8) بجمع المعادلتين

$$\begin{array}{rl} & x^2 + y^2 = 16 \\ + & -x^2 + y = -5 \\ \hline \end{array}$$

$$y^2 + y = 11$$
$$y^2 + y - 11 = 0$$
$$y \approx 2.85, y \approx -3.85$$
$$x^2 = 2.85 + 5 = 7.85$$
$$x \approx 2.80, x \approx -2.80$$
$$x^2 = -3.85 + 5 = 1.15$$
$$x \approx 1.07, x \approx -1.07$$
$$(2.80, 2.85), (-2.80, 2.85), (1.07, -3.85), (-1.07, -3.85)$$

10) بطرح المعادلة (1) من (2)

$$-\quad\begin{array}{l} x^2+(y-2)^2=4 \to (1)\\ x^2+y^2=9 \to (2) \end{array}$$

$$y^2-(y-2)^2=5$$
$$y^2-y^2+4y-4=5$$
$$4y=9$$
$$y=\frac{9}{4}=2.25$$
$$x^2+(\frac{9}{4})^2=9$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{63}}{4}$$
$$x\approx\pm1.98$$
$$(1.98, 2.25), (-1.98, 2.25)$$

إجابات صفحة 22:

13)

$$x^2+6x=-x^2+24x$$
$$\Rightarrow 2x^2-18x=0$$
$$\Rightarrow x^2-9x=0$$
$$\Rightarrow x(x-9)=0$$ تهمل $x=0$
$$\Rightarrow x=0, x=9$$
$$\Rightarrow (9.135)$$

14) افترض أن طول القاعدة هو $2x$، وأن الارتفاع هو y:

$$x^2+y^2=2500 \Rightarrow y=\sqrt{2500-x^2}$$
$$\frac{1}{2}(2x)(y)=1200 \Rightarrow xy=1200 \Rightarrow x\sqrt{2500-x^2}=1200$$
$$\Rightarrow x^2(2500-x^2)=1440000$$
$$\Rightarrow x^4-2500x^2+1440000=0$$
$$u=x^2 \Rightarrow u^2-2500u+1440000=0$$
$$\mathrm{u}=\frac{2500\pm\sqrt{490000}}{2} \Rightarrow u=1600, u=900$$
$$x^2=1600 \Rightarrow x=40, y=30$$
$$x^2=900 \Rightarrow x=30, y=40$$

أي إن طول القاعدة = 80 m، والارتفاع= 30 m

أو:

طول القاعدة = 60 m، والارتفاع = 40 m

17)

$$x^2-3xy+2y^2=0 \Rightarrow (x-2y)(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x=2y, \text{ or } x=y$$
$$x=y \Rightarrow x^2+xy=x^2+x^2=2x^2=6$$
$$\Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}, y=\pm\sqrt{3}$$
$$x=2y \Rightarrow y=\frac{1}{2}x \Rightarrow x^2+xy=x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2=6$$
$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2, y=\pm1$$

الحلول هي: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (2,1), (-2,-1)$

19)

$$x^2+y^2=500$$
$$y=2\pi r \Rightarrow r=\frac{y}{2\pi}$$
$$V=\pi r^2x=\pi(\frac{y}{2\pi})^2(x)=\frac{y^2x}{4\pi}=\frac{250}{\pi}$$
$$\Rightarrow y^2=\frac{1000}{x}$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{1000}{x}=500$$
$$\Rightarrow x^3-500x+1000=0$$

بحل المعادلة $x\approx21.28$ cm , $y\approx6.85$ cm ,

or $x\approx2.02$ cm , $y\approx22.25$ cm ,

or $x\approx-23.30$ (مرفوض)

إجابات صفحة 28:

20) افترض أن الزمن= x.

إذن:

عدد الخلايا البكتيرية هو 7300 عند الزمن $x=0$.

$$y=7300(3)^x$$
$$y=1773900$$

21)

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}(r+r^2)}{r(r+r^2)}=r^{\frac{1}{2}-1}=r^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{r}}$$

22)

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-2y^{-1})}{y^{\frac{1}{2}}(1-2y^{-1})}=y^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=y^{-1}=\frac{1}{y}$$

23)

$$\frac{1+x+2x}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+3x}{2\sqrt{x}}$$

إجابات صفحة 34:

16)

$$y = a(3)^x$$
$$1701 = a(3)^4 \Rightarrow a = 21$$
$$y = 21(x)^x$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 21$$

18)

$$y = 3^{t-2}$$
$$2187 = 3^{t-2}$$
$$2187 = \frac{3^t}{3^2}$$
$$\frac{9}{9} \times 2187 = \frac{3^t}{3^2}$$
$$\frac{19683}{9} = \frac{3^t}{9}$$
$$19683 = 3^t$$
$$3^9 = 3^t$$
$$t = 9$$

19) حجم متوازي المستطيلات هو V، والطول $\imath$، والعرض w، والارتفاع h:

$$V = \imath \times w \times h$$

قسِّم الشكل إلى ثلاثة متوازي مستطيلات:

$$\text{المساحة} = 4^{2x-1} \times 2x \times 5^{1+5x} + 8^{x+1} \times 2x \times 5^{1+5x} + 4^{2x+1} \times 2x \times 5^{1+5x}$$

20) لا يوجد حل للمعادلة الأسية؛ لأنه لا يوجد حل للمعادلة:

$$2x = -1$$

21) اضرب طرفي المعادلة في $x^{\frac{1}{2}}$، فتصبح المعادلة:

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

وبحلها بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال القانون العام، ينتج:

$$x = 3.1$$

22) بالتحليل إلى العوامل، ينتج:

$$\frac{(2\times2\times3\times3)^{x-y+1}}{(2\times3\times3\times3)^{x+y-1}} = (2\times2\times2\times2\times3)^{x+y}$$
$$2 \rightarrow 2x - 2y + 2 - x - y + 1 = 4x + 4y$$
$$\Rightarrow 3x + 7y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$3 \rightarrow 2x - 2y + 2 - 3x - 3y + 3 = x + y$$
$$\Rightarrow 2x + 6y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بحل النظام الخطي، ينتج:

$$(x, y) = (-4.25, 2.25)$$

23)

$$2^x + 3^y = 2^0 + 3^2$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 2^1 + 3^3$$
$$\Rightarrow x = 0, y = 2$$

إجابات (اختبار نهاية الوحدة) صفحة 35:

7) الحل:

$$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{3}{2}, 13.5)$$

اختيار ثلاث نقاط عشوائية؛ على أن تقع الأولى بين الحلين، وتكون الثانية أقل من الحل الأول، وتكون الثالثة أكبر من الحل الثاني، فينتج:

$$x > \frac{1}{3}, x < -\frac{2}{3}$$

إجابات (كتاب التمارين) صفحة 7:

17) الحل:

$$x^2 - (p+3)x + 8 = 0$$
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$(p-3)^2 - 4(1)(8) > 0$$
$$p^2 - 6p - 23 > 0$$
$$(-\infty, 3 - 4\sqrt{2}), (3 - 4\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2}), (3 + 4\sqrt{2}, \infty)$$
$$p = (3 - 4\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2})$$