حساب النهايات عندما تؤول قيمة x إلى عدد أو إلى ∞ أو إلى $-\infty$

أولا :

عندما x تقترب من عدد C

1) اذا كانت الدالة كثيرة حدود فنستخدم التعويض المباشر

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

مثال :

$$\lim_{x \to 4} (x^2 + 3x - 4) = ?$$

Solution: $(4)^2 + 3(4) - 4 = 24$

2) اذا كانت الدالة كسرية فنستخدم التعويض المباشر بشرط أن العدد لا يجعل المقام صفر

مثال :

$$\lim_{x \to 4} \frac{(x^2 + 3x - 4)}{(x + 4)} = ??$$

Solution: $\frac{(4)^2 + 3(4) - 4}{4+4} = \frac{24}{8} = 3$

3) اذا كانت الدالة كسرية والعدد الذي يقترب منه x يجعل المقام صفرا ، في هذه الحالة نحلل البسط والمقام وإذا لم نجد لها تحليل فإن النهاية غير موجودة does not exist

مثال1 :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = ??$$

Solution: $\frac{(x-4)(x-4)}{(x-4)} = (x - 4) = 0$

مثال2 :

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} = ??$ Solution: the limit does not exist

4) إذا كان ناتج التعويض بالعدد في الدالة الكسرية $= \frac{0}{0}$ في هذه الحالة نضرب في المرافق .

مثال1 :

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = ?$$

$$\text{Solution: } \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{32}$$

مثال2 :

يمكن أن نحل بطريقة أخرى :

evaluate $\lim_{x\to9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$:

$$\text{Solution: } \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x})^2-(3)^2} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{6}$$

كما يمكن الحل أيضا بواسطة الاشتقاق Differentiation (SHIFT+$\int_{\square}^{\square}$ ■) *

وقانون مشتقة القوة هو: مشتقة $f(x) = x^n = nx^{n-1}$ ومشتقة العدد الثابت C = 0

مثال :

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{x^2-16} = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-0}{2x-0} = \frac{(\frac{1}{4})}{8} = \frac{1}{32}$$

* هذه الطريقة ليست الزامية

ثانيا :

عندما x تقترب من $-\infty$ أو ∞

1) اذا كانت الدالة كثيرة حدود فنستخدم التعويض المباشر في أكبر حد (يرجى الانتباه لاشارة الحد الأكبر)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty)$$

مثال1 :

$$\lim_{x\to\infty}(-x^2+3x-4) = ??$$

الحل : نأخذ أكبر درجة في كثيرة الحدود فإذا كانت درجته فردية فإن الناتج يكون نفس اشارة المالانهاية أما إذا كان الأس زوجي فيكون الناتج دائما $+\infty$ سواء كانت قيمة x تقترب من $\pm\infty$...فمثلا في هذا المثال الحد الأكبر هو x^2 . فإذا عوضنا بجميع القيم الموجبة فسيكون الناتج $+\infty$ لكنه سبقته اشارة سالب لذا الناتج $-\infty$

أمثلة :

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^4+3x-4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x-4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4+3x-4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^7+3x-4) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)^4+3x-4) = \infty$$

2) اذا كانت الدالة كسرية ولها 3 حالات

1) درجة البسط = درجة المقام فإن الناتج = $\frac{\text{معامل درجة البسط}}{\text{معامل درجة المقام}}$

أمثلة :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x-16} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-2}{2x^2+4} = \frac{4}{2} = 2$$

2) درجة البسط أصغر من درجة المقام فإن الناتج =0

أمثلة :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x^2-16}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-2}{2x^3+4}=0$$

3) درجة البسط أكبر من درجة المقام فإن الناتج $\pm\infty$ بحسب اشارة $\frac{\text{معامل درجة البسط}}{\text{معامل درجة المقام}}$ فإذا كانت كلها موجبة أو كلها سالبة فإن الناتج سيكون ∞ بنفس الاشارة . أما إذا كانت مختلفة فإن الناتج سيكون ∞ لكن بعكس الاشارة .

أمثلة :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+6}{x-16}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-2}{-2x^3+4}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+6}{x-16}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-3}{16-x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^8+5x-3}{-x-5}=-\infty$$

ثالثا :

ايجاد النهاية في الدالة المتعددة التعريف :

إذا كان الناتج متساوي في طرفين الدالة فإن النهاية موجودة وإذا كان ناتج التعويض مختلف فإن الناهية ليست موجودة

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 2 \\ 5x \quad , & x \geq 2 \end{cases}$$

Find $\lim_{x \to 2} f(x)$

الحل : أوجد قيمة الدالة عندما x تقترب من 2 من جهة اليمين (2^+) و من جهة اليسار (2^-)

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 5x = 5(2) = 10$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 1 = 3(2) - 1 = 5$$

لاحظ أن الناتجين مختلفين لذا :

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) \ does\ NOT\ exist$$

مثال آخر :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x < 3 \\ x^2 - 3x + 3 & , x \geq 3 \end{cases} \qquad \text{Find } \lim_{x \to 3} f(x)??$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 3x + 3) = (3)^2 - 3(3) + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 3$$

طريقة الكتاب

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^3-x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2+\frac{1}{x^3})}{x^3(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})}=\frac{2+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}$$

هذه الطريقة تستلزم اخراج عامل مشترك اجباري (أو بلفظ آخر لابد أن نقسم كل حد على أكبر درجة) وثم إيجاد النهاية لكل حد ..حيث أن :

* نهاية دالة المقلوب = 0

* نهاية العدد الثابت = نفس العدد الثابت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to k} C = \mathrm{C}$$

مثال:

Find : $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x-2}\right)=(-\infty\times -1)=\ \infty$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x-2}\right)=(+\infty\times -1)=\ -\infty$$

Since the function approaches ∞ from the left but −∞ from the right, the limit does NOT exist. (go to example 2 *pg1* and give me your opinion)

✍.good luck✍

ما الفائدة من طريقة الكتاب (الطريقة العلمية)؟؟

ميزة الطريقة العلمية (الجبرية) أنها طريقة عامة بإمكانها أن تحل جميع مسائل النهايات حيث تنقطع السبل الأخرى .

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$$

هذا السؤال من الصعب حله بالطرائق السابقة بسبب الجذر ولكن يمكن حله بالطريقة الجبرية بسهولة !! وذلك بأخذ عامل مشترك من البسط ومن المقام

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}=\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{6}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\frac{x\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{(3+0)}}{(0-2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحل بالحاسبة

س / هل يمكن حل السؤال السابق بالحاسبة ؟؟!!

ج/ نعم ! وبكل سهولة فالآلة الحاسبة يمكنها حل أي سؤال يتعلق بالنهايات وذلك بطريقتين :

1) اذا كانت x تقترب من عدد فالأفضل استخدام ($\blacksquare$ SHIFT+$\int_{\square}^{\square}$) لأننا نعوض بالعدد نفسه بدون تقريب فتعطي ناتجا دقيقا ويمكن أن نستخدم هذه الطريقة حتى في المالانهاية بالتعويض بعدد كبير مثل (9999999) إذا كانت النهاية موجبة أو التعويض بالعدد (999999−) إذا كانت النهاية سالبة

2) الطريقة الثانيـــة (هي الطريقة الأســـهل والأقل دقة في نفس الوقت) وفكرتها الرئـــيسية هي حساب (CALC) قيمة الدالة عند التعويض بقيمة معينة لــ x والقيمة التي نعوض بها تكون قريبة جدا من قيمة x التي تقترب منها الدالة .

حل الأسئلة التالية بالحاسبة:

مثال 1 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$$

ج / اضغط أولا $\left(\frac{\blacksquare}{\square}\right)$ ثم ضع الدالة كما هي ⇪ ثم اضغط CALC 999999 ثم اكتب الناتج الذي يخرج معك على ورقة * وسيكون -0.8660254038 ثم قارنه بالكسر السابق $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ستجد أن القيمة نفسها

مثال 2 :

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^2}$$

ج / اضغط أولا $\left(\frac{\blacksquare}{\square}\right)$ ثم ضع الدالة كما هي ⇪ ثم اضغط CALC 3.999 و 4.0001 سيكون الناتج عدد كبير أي أن النهاية $+\infty$ ولكنه للأسف الجواب خطأ!!!! فالنهاية غير موجودة

استخدم الآن الطريقة الأخرى $\blacksquare$ SHIFT+$\int_{\square}^{\square}$:

/ اضغط أولا $\left(\frac{\blacksquare}{\square}\right)$ ثم $\blacksquare$ SHIFT+$\int_{\square}^{\square}$ ثم ضع البسط كما هو ⇪ وانزل للمقام وضع $\blacksquare$ SHIFT+$\int_{\square}^{\square}$ وضع المقام كما هو ثم ضع قيمة x في الخانة المحددة والتي هي 4 سيظهر لك

Math ERROR

مما يعني أن النهاية غير موجودة *the limit does NOT exist*

(بغض النظر عن الطريقتين ارجع إلى ص 1 واستنتج الاجابة المباشرة !!)

---

* (ملاحظة : في الغالب تكون اجوبة المسائل الرياضية كسور أو جذور وليست اعداد بصورة عشرية)

مثال 3 :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

اضغط أولا $\left(\frac{\blacksquare}{\square}\right)$ ثم ■ $\text{SHIFT}+\int_{\square}^{\square}$ ثم ضع البسط كما هو ⇪وانزل للمقام وضع ■ $\text{SHIFT}+\int_{\square}^{\square}$
وضع المقام كما هو ثم ضع قيمة x في الخانة المحددة والتي هي 3 ستظهر لك الاجابة = 6 (صحيحة)

وفي الختام : لا توجد طريقة تتميز بالدقة التامة إلا الطريقة العلمية (الجبرية)

إرشاد تقني

حساب النهايات لا يُعدُّ استعمال الحاسبة البيانية كافيًا لإيجاد $\lim_{x \to c} f(x)$ أو $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ وإنما يمكن استعمالها فقط لحساب قيم $f(x)$ لبعض قيم x القريبة من c أو الكبيرة ، إذ من الممكن أن يُظهر التمثيل البياني لمنحنى الدالة سلوكًا غير متوقع عندما تقترب x من c ، أو عندما تزداد قيم x ، أو تنقص بشكل غير محدود؛ لذا يجب أن تستعمل الطرائق الجبرية في حساب النهايات.

"وفقني الله واياكم وسدد خطاي وخطاكم وزادني واياكم علما ننتفع به وعملا نرتفع به"