كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثانية الفصل الأول

ملخص

المعادلات التفاضلية (١)

٢٠١١/٢٠١٠

مكتبة روّاد الجامعة ـ الفرقان أمام باب
المدينة الجامعية الوحدة ١٦
هـ ٢٦٧٨٦٧٦

٢٧٠ ل س

«جدول التكاملات الشهيرة»

1) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3) $\int \sin x \, d(x) = -\cos x + c$

4) $\int \cos x \, d(x) = \sin x + c$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{Tg} x + c$

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{coTg}(x) + c$

7) $\int \operatorname{Tg}(x) \, dx = -\ln|\cos x| + c$

8) $\int e^x \, dx = e^x + c$

9) $\int \operatorname{coTg}(x) \, dx = \ln|\sin x| + c$

10) $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcTg} x + c$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arcTg} \frac{x}{a} + c$

13) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

20) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$

21) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{Th} x + C$

23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

ملاحظة هامة:

① $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{a} f(ax) + C$

② $\displaystyle\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$

③ $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

حالات تفريق الكسور :

1- حالة التفريق الأولى :

$$(x-a) \longrightarrow \frac{A}{x-a}$$

مثال :

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

$(x-1)(x+2)$ $\quad x(x+2)$ $\quad x(x-1)$

$\Longrightarrow$

$$2x+3 \equiv A(x^2+2x-x-2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\equiv \underline{Ax^2} + \underline{Ax} - \underline{2A} + \underline{Bx^2} + \underline{2Bx} + \underline{Cx^2} - \underline{Cx}$$

$$2x+3 \equiv (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C = 0 \\ A+2B-C = 2 \\ -2A = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{-3}{2},\ B = \frac{5}{3},\ C = -\frac{1}{6}$$

ومنه :

$$= \frac{-3}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x+2)}$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + C$$

$$= -9\ln|x| + 10\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

2- حالة التفريق الثانية :

$$(x-a)^k,\ k \geq 2 \longrightarrow \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)}$$

مثال :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{x-2}$$

$(x-2)$ $\quad (x-2)(x+1)$ $\quad (x+1)^2$

$$x^2+2 \equiv A(x-2)+B(x^2-x-2)+C(x^2+2x+1)$$

$$\equiv \underset{\sim}{Ax} - \underline{2A} + \underset{\sim}{Bx^2} - \underset{\sim}{Bx} - \underline{2B} + \underset{\sim}{Cx^2} + \underset{\sim}{2Cx} + \underline{C}$$

$$x^2+2 \equiv (B+C)x^2 + (A-B+2C)x + (-2A-2B+C)$$

$$B+C=1$$
$$A-B+2C=0$$
$$-2A-2B+C=2$$

3- حالة التفريق الثالثة:

$$x^2+px+q \longrightarrow \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

مثال:

$$\frac{1}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

4- حالة التفريق الرابعة:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{x^2+px+q}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

المعادلات التفاضلية.

العادية ——— الجزئية

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y = y(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' + 2y' + 1 = 0$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$z = z(x, y)$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

رتبة المعادلة التفاضلية:

هي رتبة أعلى مشتقة: $y'' + y' = 0$

من المرتبة الثانية.

درجة المعادلة التفاضلية:

لقوة الموجودة فوق أعلى مشتقة

$$y''' + y''^2 + \sin x = 0$$

مرتبة ثالثة ودرجة أولى.

الرتبة: عدد مرات الاشتقاق لأعلى مشتقة فيها

الدرجة: أس أعلى مشتقة فيها

مثال:

$$2y''^3 + xy' = e^x$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

والدرجة الثالثة.

ملاحظة: بعد المشتقة الثالثة:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad ; \quad n > 3 .$$

مثال:

$$x^4 y^{(4)} + x^3 y'' + x^2 y' = x$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة.
والدرجة الأولى.

حل المعادلة التفاضلية
أي $y \leftarrow y'$

$$y' - 2x = 0$$
$$y' = 2x$$
$$\int$$
$$\boxed{y = x^2 + c}$$

وهو الحل العام للمعادلة.
والحل الخاص هو بإعطاء قيم للثابت c أي

$$y = x^2 + 1$$
$$y = x^2 + 2$$
$$y = x^2 + 3$$

عدد الثوابت = المرتبة المعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية :

عام — خاص (منحني تكاملي) — شاذ (منعزل)

خاص (منحني تكاملي): كل حل ينتج عن الحل العام بإعطاء قيم عددية للثابت c مهما كانت.

$c = \mp \infty$

شاذ (منعزل): كل حل معادلة لا ينتج عن الحل العام بإعطاء أي قيمة للثابت c مهما كانت.

نقسم طرفي المعادلة على قيمة

مثال

$$x^3 - x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad ; \quad x \neq 0$$

$$x = \mp 1$$

$\boxed{x=0}$ هو حل شاذ للمعادلة.

أشكال الحل العام

حل عام ظاهري

(2)

تشكل المعادلات التفاضلية .

$$f(x, y, c) = 0$$

تمرين (1)

شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوال :

$$y^2 + c x^3 + \frac{3c}{1-c} = 0 \quad \text{--- } ①$$

الحل

ان المعادلة تحتوي على ثابت اختياري واحد . وبالتالي ،

$$2yy' + 3cx^2 = 0 \quad \text{--- } ②$$

من المعادلة ② نجد ان

$$c = \frac{-2yy'}{3x^2} \quad , \quad x \neq 0$$

نعوض في ① نجد :

$$y^2 - \frac{2yy'}{3x^2} x^3 + \frac{3\left(\frac{-2yy'}{3x^2}\right)}{1 + \frac{2yy'}{3x^2}} = 0$$

$$\frac{-2yy'(3x^2)}{x^2(3x^2 + 2yy')}$$

$$y^2 - \frac{2}{3} yy'x - \frac{18 yy'}{3x^2 + 2yy'}$$

مثال: $4xy^2y'^2 + (6x^3 - 6y^2 + 18y)y' - 9x^2y^2 = 0$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى

و الدرجة الثانية وغير خطية

تمرين ١ (دورة)

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

حيث:

c_1, c_2 ثابتين اختياريين

الحل:

$$y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2} \quad \text{---} \; (1)$$

$$y'' = +\frac{2xc_2}{x^4} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2} y'' x^3}$$

$$c_1 = y' + \frac{c_2}{x^2} \Rightarrow \boxed{c_1 = y' + \frac{1}{2} y'' x}$$

$$y = y'x + \frac{1}{2} y'' x^2 + \frac{1}{2} y'' x^2$$

$$\Rightarrow y'x + y''x^2 - y = 0$$

معادلة اول

وهي معادلة تفاضلية

من مرتبة الثانية و الدرجة الأولى وهي خطية.

تمرين (٢)

شكل المعادلة التفاضلية

$$y = c_1 \sin(3x - c_2) \quad \text{---} \; (1) \; ; \; y = y(x)$$

c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

الحل:

$$y' = 3c_1 \cos(3x - c_2) \quad \text{---} \; (2)$$

$$y'' = -9c_1 \underbrace{\sin(3x - c_2)}_{y} \quad \text{---} \; (3)$$

9

نبدل ① في ② فنجد —— $y'' = -9y$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + 9y = 0}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى.

وظيفة:

شكل المعادلة

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + c_3 \quad \text{——} ①$$

الحل

للمعادلة ثلاث ثوابت وبالتالي نشتقها ثلاث مرات

$$y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2} \quad \text{——} ②$$

$$y'' = + \frac{2x c_2}{x^4} = \frac{2 c_2}{x^3} \quad \text{——} ③$$

$$y''' = - \frac{6 x^2 c_2}{(x^3)^2} \quad \text{——} ④$$

لسؤال منز ②

نقسم ③ على ④ فنجد.

$$\frac{y''}{y'''} = \frac{\frac{2 c_2}{x^3}}{\frac{-6 x^2 c_2}{(x^3)}} = \frac{-x}{3} \rightarrow$$

$$3 y'' = -x y''' \Rightarrow x y''' + 3 y'' = 0$$

تمرين (دورة)

أوجد المعادلة التفاضلية ومكتوبة (بأبسط صورة ممكنة) لمجموعة المنحنيات الجبرية.

$$y(2x+c)+c^2=0 \quad \text{—— (1)}$$

حيث c: ثابت اختياري.

ثم استنتج مرتبة ودرجة المعادلة التفاضلية؟ وهل هذه المعادلة التفاضلية خطية ولماذا؟

الحل:

$$2xy+cy+c^2=0$$

$$y'(2x+c)+2y=0 \quad \text{—— (2)}$$

$$c=\frac{-2y}{y'}-2x$$

نبدل في (1)

$$y\left(2x-\frac{2y}{y'}-2x\right)+\frac{4y^2}{y'^2}+4x^2+8\frac{xy}{y'}$$

$$\cancel{2xy}-2\frac{y^2}{y'}-\cancel{2xy}+\frac{4y^2}{y'^2}+4x^2+8\frac{xy}{y'}=0$$

$$\cancel{\frac{2y^2}{y'}}-2y^2y'+4y^2+4x^2y'^2+8xyy'=0$$

$$-y^2y'+2y^2+2x^2y'^2+4xyy'=0$$

$$2x^2y'^2+(4xy-y^2)y'+2y^2=0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الثانية

وغير خطية لأنها تحتوي على y'^2 و yy' أي تحتوي جداء التابع ومشتقاته.

تمرين: (د.ع-ق)

شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات حيث

$$y = c\cos x$$

حيث c ثابت اختياري

$y = y(x)$ ثم استنتج رتبة ودرجة وهل هي خطية

الحل:

$$y' = -c\sin x \Rightarrow c = \frac{-y'}{\sin x}$$

$$y = \frac{-y'}{\sin x}\cos x \Rightarrow \frac{y}{y'} = -c\,Tg\,x$$

$$y' + (Tg\,x)\,y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

والدرجة الأولى وهي خطية

$$y = c_1 x + c_2 x^2 \quad — ①$$

$$y' = c_1 + 2x c_2 \quad — ②$$

$$y'' = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{y''}{2} \quad — ③$$

$$y' = c_1 + 2x\left(\frac{y''}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y' = c_1 + x y'' \rightarrow c_1 = y' - x y'' \quad — ④$$

نبدل c_1 و c_2 في ①

$$y = y'x - y''x^2 + \frac{y''}{2}x^2$$

$$-1 + \frac{1}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}y''x^2 + y'x - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y''x^2 - y'x + y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

والدرجة الأولى وهي معادلة أولى.

تمرين: (ورقة)

$$y = c\, e^{x/c} \quad \text{——} \; ①$$

$$y' = e^{x/c} \quad \text{——} \; ②$$

$$\ln y' = x/c \implies c = \frac{x}{\ln y'}$$

بالتعويض ① نحصل،

$$y = \frac{x}{\ln y'}\, e^{\ln y'} \implies$$

$$y = \frac{x}{\ln y'}\, y'$$

$$\implies$$

$$(\ln y')\, y = x y' \implies x y' - y \ln y' = 0$$

وهي:

م.ت من المرتبة الأولى والدرجة الأولى وغير خطية

لوجود $y \ln y'$.

تمرين:

شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة دوائر التي نصف قطرها ثابت

ويساوي 5

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = 25 \quad \text{——} \; ①$$

الحل:

$$2(x - c_1) + 2(y - c_2)\, y' = 0 \quad \text{——} \; ②$$

$$2 + 2(y - c_2)\, y'' + 2y'^2 = 0$$

$$1 + (y - c_2)\, y'' + y'^2 = 0 \quad \text{——} \; 3$$

$$y - c_2 = -\frac{(1+y'^2)}{y''}$$

نبدل في ③ نجد :

$$x - c_1 = y' \frac{1+y'^2}{y''}$$

نبدل $x - c_1$ و $y - c_2$ في ① نجد :

$$y'^2 \left(\frac{1+y'^2}{y''^2}\right) + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = 25$$

$$(y'^2+1)(1+y'^2)^2 = 25\, y''^2$$

$$(1+y'^2)^3 - y''^2\, 25 = 0$$

وهي م.ت من المرتبة الثانية والدرجة الثانية

وغير خطية لأنها تحتوي على y''^2

تمرين/

شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة دوائر التي مراكزها محمولة على محور السينات :

$$(x - c_1)^2 + y^2 = r^2 \quad \text{——} \ ①$$

الحل/

$$2(x - c_1) + 2yy' = 0 \quad \text{——} \ ②$$

$$2 + 2yy'^2 + 2yy'' = 0$$

$$1 + y'^2 + yy'' = 0$$

وهي م.ت من المرتبة الثانية

والدرجة الأولى وغير خطية لأنها تحتوي على جداء التابع ومشتقاته.

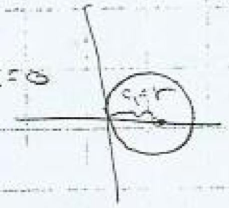
تمرين/ شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر التي تمس محور الصادات في مبدأ الاحداثيات

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2 \quad \text{——} \ (1)$$

الحل/

$$(x-c_1)^2+y^2=c_1^2$$

$c_2=0$



$$2(x-c_1)+2yy'=0$$

$$x-c_1+yy'=0 \Rightarrow c_1=x+yy'$$

$$(x-x-yy')^2+y^2=(x+yy')^2$$

$$y^2y'^2+y^2-(x+yy')^2=0$$

$$y^2y'^2+y^2-(x^2+2yy'x+y^2y'^2)=0$$

$$y^2y'^2+y^2-x^2-2yy'x-y^2y'^2=0$$

$$2xyy'+x^2-y^2=0$$

وهي م. ت من المرتبة الاولى والدرجة الاولى وغير خطية .

واجب/

شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة دوائر المستوي (xoy)

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2 \quad \text{——} \ (1)$$

الحل/

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)y'=0 \quad \text{——} \ (2)$$

$$1+y'^2+(y-c_2)y''=0 \quad \text{——} \ (3)$$

$$y'''(y-c_2) + y''y' + 2y'y'' = 0 \quad \text{--- } ④$$

$$(y-c_2) = \frac{-3y'y''}{y'''}$$

بدل ④ في ③ فنجد

$$1 + y'^2 + \frac{-3y'y''}{y'''}\, y'' = 0$$

$$y''' + y'''y'^2 - 3y'y''^2 = 0$$

وهي م.ت من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى

وهي غير خطية لأنه تحتوي على جداءات بين التابع ومشتقات التابع

تمرين

$$e^{x} \qquad + c_2 e^{2x}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{--- } ①$$

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{--- } ②$$

$$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x \quad \text{--- } ③$$

$$y'' \pm y = 0$$

تمرين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{--- } ①$$

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0 \quad \text{--- } ②$$

$$2b^2 + 2a^2(y'^2 + yy'') = 0 \quad \text{--- } ③$$

$$b^2 = -a^2(y'^2 + yy'')$$

بتعويضها في (2) نجد :

$$-a^2x(y'^2+yy'')+a^2yy'=0$$

$$-a^2xy'^2-a^2xyy''+a^2yy'=0$$

نقسم على a^2

$$-xy'^2-xyy''+yy'=0$$

$$xyy''+xy'^2+yy'=0$$

م . ت من المرتبة الثانية والدرجة الأولى
وغير خطية لأنها تحتوي على جداء التابع ومشتقاته .

الفصل الثالث .

مرتبة

حل المعادلات التفاضلية من ~~الدرجة~~ الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتقة

ان الشكل التام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى هو:

$$f(x, y, y') = 0$$

إذا أمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل

$$y' = f(x, y)$$

فإننا نسمي هذه المعادلة بمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتقة y'
وهكذا امكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

تدعى هذه المعادلة
منفصلة المتحولات إذا كان المقدار M تابع لـ x فقط وكان المقدار N تابع لـ y فقط ، وتصبح المعادلة على الشكل الآتي:

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

لحل هذه المعادلة نكامل الطرفين فنجد أن الحل التام هو :

$$M_1(x) + N_1(y) = c$$

تمرين (1) حل المعادلة التفاضلية

$$2x\sin y\,dx + (x^2+3)\cos y\,dy = 0$$

وأوجد الحل الخاص (المنحني التكاملي المار بالنقطة $(1,\frac{\pi}{2})$)

الذي يحقق

$$y(1)=\frac{\pi}{2}$$

الحل: نقسم المعادلة

$$\sin y\,(x^2+3) \neq 0$$

$$\frac{2x}{x^2+3}\,dx + \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int$$

$$\ln|x^2+3| + \ln|\sin y| = \ln|c|$$

$$\ln[(x^2+3)\sin y] = \ln|c|$$

$$(x^3+3)\sin y = c$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة

مناقشة الجذور:

$$(x^2+3)\sin y = 0$$

إما $x^2+3=0 \Leftarrow x^2=-3$ مستحيلة

أو $\sin y = 0 \Leftarrow$

$k\in\mathbb{Z}$; $y=\pi k$

وهو حل المعادلة

وهو حل خاص بإعطاء $c=0$ في الحل العام

ولا يوجد حلول شاذة، وبما أن الحل الخاص يمر من النقطة فهو يحقق المعادلة

$$(1+3)\sin\frac{\pi}{2} = c \Rightarrow c=4$$

ومنه الحل الخاص (المنحني التكاملي) هو

$$(x^2+3)\sin y = 4$$

تمرين (2): حل المعادلة التفاضلية الآتية.

$$y' = \frac{1+y^2}{(x^2+1)\,x\cdot y}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(x^2+1)\,x\cdot y} \Longrightarrow$$

$$(x^2+1)\,x\cdot y\,dy = (1+y^2)\,dx \Longrightarrow$$

$$(1+y^2)\,dx - (x^2+1)\,x\cdot y\,dy = 0$$

نقسم على

$$x(x^2+1)(1+y^2) \neq 0$$

فنجد:

$$\frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{y}{1+y^2}\,dy$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$(x^2+1) \qquad\qquad (x)$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \Longrightarrow$$

$$1 = (A+B)\,x^2 + Cx + A \Longrightarrow$$

$$A + B = 0$$

$$C = 0$$

$$A = 1 \Longrightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$\Rightarrow \ln(x \cdot c) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$$

$$\Rightarrow \ln(x \cdot c) = \ln\sqrt{1+x^2} + \ln\sqrt{1+y^2}$$

$$\ln(x \cdot c) = \ln\left[\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}\right]$$

$$x \cdot c = \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2} \Rightarrow$$

$$x^2 \cdot c^2 = (1+x^2)(1+y^2)$$

تمرين وظيفة :

$$y' = \frac{y \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

الحل :

ان هذه المعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتقة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

لكن : $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

نفرض أن :

$\sin x = t \Rightarrow$

$\cos x\,dx = dt$

نعوض

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y|_c = \frac{-1}{t} = \frac{-1}{\sin x}$$

$$y/c = e^{\frac{-1}{\sin x}} \Rightarrow \boxed{y = c\,e^{\frac{-1}{\sin x}}}$$

وهو الحل العام للمعادلة

• مناقشة الجذور

$y = 0$ نعوضه في التفاضل العام هو حل للمعادلة.

والحل الخاص نحصل عليه من الحل العام بإعطاء $\boxed{c = 0}$ وهو الحل الخاص

تمرين : وظيفة:

$$y' + e^x y = e^x y^2$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} + e^x y = e^x y^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x y^2 - e^x y = e^x y(y-1)$$

$$\frac{dy}{\cancel{y^2}\, y(y-1)} = e^x dx$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$(y-1) \qquad (y)$$

$$1 = Ay - A + By \Rightarrow$$

$$A + B = 0$$

$$-A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -1} \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

اذا:

$$-\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} = \int e^x dx$$

$$\xRightarrow{\int} -\ln y + \ln(y-1) = e^x + c$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y}\right) = e^x + c$$

$$\frac{y-1}{y} = e^{e^x + c} \Rightarrow y - 1 = y\, e^{e^x} * c_1 \; ; \; c_1 = e^c$$

$$y - y c_1 e^x = 1 \Rightarrow y(1 - c_1 e^x) = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{(1 - c_1 e^x)} = (1 - c_1 e^x)^{-1}$$

-23-

• مناقشة الجذور:

$y=0 \Rightarrow$ وهو حل للمعادلة عندما عوضناه في التكامل العام

وهو حل خاص ينتج من الحل العام بتعويض $c=\infty$

$y=1 \Rightarrow$

حل للمعادلة بتعويض $c=0$ وهو حل خاص

* المعادلات التفاضلية التي ترد إلى منفصلة المتحولات:

أولاً: المعادلة من الشكل:

$$y' = f(ax+by+c)$$

نفرض أن:

$$z = ax+by+c$$

نحصل على معادلة منفصلة المتحولات.

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y' = \sin^2(x-y)$$

ا) هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى محلولة بالنسبة للمشتقة وهي ترد إلى منفصلة المتحولات.

نفرض

$z = z(x)$; $z = x - y \Rightarrow$

$$y = x - z$$

$$y' = 1 - z'$$

نعوض في المعادلة:

$$1 - z' = \sin^2 z \Rightarrow$$

$$z' = 1 - \sin^2 z \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \sin^2 z$$

نقسم على $1 - \sin^2 Z \neq 0$

$$\frac{dZ}{1-\sin^2 Z} = dx \Rightarrow$$

$$\frac{dZ}{\cos^2 Z} = dx$$

$$\int \Rightarrow$$

$$tg\,Z = x + c \Rightarrow tg(x-y) = x + c$$

$$x - y = \operatorname{arcTg}(x+c) \Rightarrow$$

$$y = x - \operatorname{arcTg}(x+c)$$

تمرين (2):

$$y' = (y-4x)^2$$

وهي م.ت من المرتبة الأولى والدرجة الأولى محلولة بالنسبة للمشتقة وترد إلى منفصلة متحولات بتعويض أن:

$$Z = y - 4x \Rightarrow y = Z + 4x \Rightarrow$$

$$y' = Z' + 4 \quad ; \quad Z = Z(x)$$

$$Z' + 4 = Z^2 \Rightarrow Z' = Z^2 - 4$$

$$\frac{dZ}{d(x)} = Z^2 - 4$$

نقسم على $Z^2 - 4$ فنجد:

$$\frac{dZ}{Z^2 - 4} = dx$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| = x + c$$

$$\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| = -4x - 4c$$

$$\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| = -4x + c_1 \quad ; \quad c_1 = -4c$$

$$\frac{z+2}{z-2} = e^{-4x+c_1}$$

$$\frac{z+2}{z-2} = e^{-4x} c_2 \quad ; \quad c_2 = e^{c_1}$$

$$\boxed{\frac{y-4x+2}{y-4x-2} = c_2 e^{-4x}}$$

تمرين 3) أوجد الحل العام:

$$tg^2(x+y)\,dx - dy = 0$$

نفرض أن $z = x + y$

$$\Rightarrow y = z - x \Rightarrow y' = z' - 1$$

$$\cancel{tg^2(z)\,d} \quad tg^2(x+y) = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$tg^2(z) = z' - 1 \Rightarrow z' = tg^2 z + 1$$

$$\frac{dz}{tg^2 z + 1} = dx \Rightarrow \cos^2 z\, dz = dx$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z}} = \cos^2 z$$

$$\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right) dz = dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2z\right) dz = dx$$

$$\Longrightarrow \frac{Z}{2} + \frac{1}{4}\sin 2Z = x + c$$

$$\frac{x+y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2(x+y) = x + C$$

بمكاملة:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2(x+y) = x + c \Rightarrow x + y + 2\sin 2(x+y) = 2x + 2c$$

$$y = 2x - x - 2\sin 2(x+y) + 2c \Rightarrow y = x - 2\sin 2(x+y) + c_1 \; ; \; c_1 = 2c$$

وظيفة 2

$$y'(x+y)^2 = 1$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{1}{(x+y)^2}$$

بفرض أن

$$x + y = Z \Rightarrow Z - x = y \Rightarrow y' = Z' - 1$$

$$Z' - 1 = \frac{1}{(Z)^2} \Longrightarrow Z' = \frac{1}{Z^2} + 1$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{Z^2+1}{Z^2} \Longrightarrow \frac{Z^2 dZ}{Z^2+1} = dx$$

حيث $Z^2 + 1 \neq 0$

$$\frac{Z^2+1}{Z^2+1}dZ - \frac{dZ}{Z^2+1} = dx$$

$$dZ - \frac{dZ}{Z^2+1} = dx \Longrightarrow Z - \operatorname{arcTg} Z = x + c$$

$$x + y - \operatorname{arcTg}(x+y) - x - c = 0$$

$$y - \operatorname{arcTg}(x+y) - c = 0$$

ثانياً: المعادلة من الشكل

$$y f(x\cdot y)\,dx + x f(x\cdot y)\,dy = 0$$

بفرض أن $x\cdot y = z$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$1 + 2xy - x^2y^2 + 2x^2y' = 0$$

الحل:

نفرض أن $z = xy$

$$\Rightarrow y = z/x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{xz' - z}{x^2}$$

$$1 + \cancel{2z} - z^2 + 2xz' - \cancel{2z} = 0$$

$$2xz' - z^2 + 1 = 0$$

$$2xz' = z^2 - 1 \Rightarrow 2x\frac{dz}{dx} = z^2 - 1$$

نقسم على $x(z^2-1)$ فنجد

$$\frac{2\,dz}{z^2-1} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{c}$$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x}{c} \Rightarrow \frac{x\cdot y-1}{x\cdot y+1} = \frac{x}{c}$$

$$(x\cdot y - 1)c = (x\cdot y + 1)x$$

وظيفة

$$1 + x.y \sin(x.y) + y' x^2 \sin(xy) = 0$$

الحل

نفرض أن :

$$Z = x.y$$

$$\Rightarrow y = \frac{Z}{x} \Rightarrow y' = \frac{Z'x - Z}{x^2}$$

$$1 + Z \sin(Z) + \frac{Z'x - Z}{\cancel{x^2}} \cancel{x^2} \sin Z = 0$$

$$1 + \sin Z [\cancel{Z} + Z'x - \cancel{Z}] = 0$$

$$1 + Z'x \sin Z = 0 \Rightarrow Z'x \sin Z = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} x \sin Z = -1$$

$$-\frac{dx}{x} = \sin Z \, dZ$$

نقسم على $x \neq 0$

$$-\ln x + c = -\cos Z \Rightarrow$$

$$\ln x.c = \sin x.y$$

$$\Rightarrow x.c = e^{\sin x.y}$$

المعادلات المتجانسة

نقول عن المعادلة أنها متجانسة :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

نقول عنها متجانسة
من نفس الدرجة أو إذا كانت المعادلة بالشكل

$$y' = f(x,y)$$

فتكون متجانسة إذا كان التابع $f(x,y)$ متجانس من الدرجة صفر.

تعريف التابع المتجانس :
نقول عن التابع $f(x,y)$ أنه متجانس إذا تحقق (إذا استبدلنا فيه
كل x بـ λx و كل y بـ λy)

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$$

من الدرجة k

مثال :

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

هو تابع متجانس لأنه :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 x \cdot y$$

$$= \lambda^2 (x^2 + xy) = \lambda^2 f(x,y)$$

مثال

$$f(x,y) = x \cdot y + x^2 + 1$$

غير متجانس لأنه يحوي حد ثابت .

طريقة حل المعادلة المتجانسة :

1- نجري تغيير في التابع بفرض أن :

$$Z = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$y = x \cdot Z \Rightarrow y' = Z + Z'x$$

2- نبدل في المعادلة المفروضة فتصبح (م.م) نحلها بالطرق السابقة

<u>مثال :</u>

أوجد الحل العام

$$2xyy' = x^2 + y^2$$ التابع متجانس من الدرجة الثانية

$$2y' = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{\cancel{x \cdot y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}{\cancel{x \cdot y}}$$

$$2y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

إن التابع في الطرف الأخير هو متجانس من الدرجة صفر وبالتالي المعادلة متجانسة نفرض أن :

$$Z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot Z \Rightarrow y' = Z + Z'x$$

نبدل في المعادلة :

$$2Z + 2Z'x = \frac{1}{Z} + Z$$

$$2Z'x = \frac{1-Z^2}{Z} \Rightarrow$$

$$2\frac{dZ}{dx}x = \frac{1-Z^2}{Z} \Rightarrow \cancel{\frac{2Z\,dZ}{dx} = 1-Z}$$

نقسم على $xy(1-Z^2) \neq 0$

$$\frac{2Z\,dZ}{1-Z^2} = \frac{dx}{x} \quad \int \Rightarrow$$

$$-\ln|1-Z^2| = \ln x + \ln c$$

$$x(1+Z^2) = c \Rightarrow x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

$$\Rightarrow x + \frac{y^2}{x} = c \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = cx}$$

وهو الحل العام للمعادلة .

مناقشة الجذور:

$1 - Z^2 = 0$ فإن $x \cdot y(1 - Z^2) = 0$

$y = \pm x \Leftarrow x^2 = y^2 \Leftarrow 1 = \frac{y^2}{x^2} \Leftarrow 1 = Z^2$

اما $\underline{y = x} \Leftarrow y' = 1$ نعوض في المعادلة

$$2x \cdot x \cdot \overset{y'}{1} = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2x^2$$

محققة .

أو $y = -x \Leftarrow y' = -1$ وهي حل المعادلة

وهو حل خاص $y = \pm x$ عندما نعوضه في الحل العام بإعطاء $c = 0$

$x = 0$ ليس حل المعادلة لأنه لا يحقق

$y = 0$ " " " " " " "

تمرين:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x \cdot y' = y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل:

نفترض $x \neq 0$

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$$

وهي متجانسة من الدرجة صفر

$$Z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot Z \Rightarrow y' = Z + xZ'$$

نعوض

$$Z + xZ' = Z + \cos^2 Z \Rightarrow$$

$$x\frac{dZ}{dx} = \cos^2 Z \Rightarrow$$

$$\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}$$

نقسم على $x\cos^2 z \neq 0$

$$\frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{dx}{x}$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad tg\, z + c = \ln x \Rightarrow$$

$$tg\,\frac{y}{x} + c = \ln x$$

هو الحل العام للمعادلة

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$x y' = x + y + x\cos\left(\frac{2y}{x}\right)$$

الحل:

نقسم على x

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{2y}{x}\right)$$

رغم وجود الثابت لكنه لم يتغير ومنه تابع متجانس من الدرجة صفر لذلك نفرض

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$$

نعوض في المعادلة.

$$z + xz' = 1 + z + \cos(2z)$$

$$x\frac{dz}{dx} = 1 + \cos 2z \Rightarrow \text{و ع}$$

نقسم على $(1+\cos 2z)\, x \neq 0$

$$\frac{dz}{1+\cos 2z} = \frac{dx}{x} \overset{\int}{\Rightarrow}$$

$$\frac{dz}{2\cos^2 z} = \frac{dx}{x} \overset{\int}{\Rightarrow} \frac{1}{2} tg\, z + c = \ln x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} tg\,\frac{y}{x} + c = \ln x \Rightarrow \frac{1}{2}$$

وهو الحل العام.

مثال / أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

الحل /

نقسم على dx فنجد :

$$x\cdot\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

نقسم على $x \neq 0$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}$$

$$y' = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

نفرض أن

$$Z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\cdot Z \Rightarrow y' = Z + xZ'$$

$$Z + xZ' = \sqrt{1+Z^2} + Z$$

$$x\frac{dZ}{dx} = \sqrt{1+Z^2}$$

نقسم على $x\sqrt{1+Z^2} \neq 0$

$$\frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\left[Z + \sqrt{1+Z^2}\right] = \ln x\cdot c$$

$$Z + \sqrt{1+Z^2} = x\cdot c \Longrightarrow$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = x\cdot c$$

نضرب بـ x

$$y + x\sqrt{x^2+y^2} = c\,x^2$$

وهو الحل العام المطلوب

تمرين: أوجد الحل العام:

$$(y + \sqrt{x \cdot y})\,dx - x\,dy = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص (المنحني التكاملي) المار من النقطة $M(1, 0)$

أو $y(1) = 0$

الحل: نقسم على $dx \neq 0$ & $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x \cdot y}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x \cdot y}}{x} \qquad = \sqrt{\frac{x \cdot y}{x^2}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

نفرض أن:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x z \Rightarrow y' = z + x z'$$

نعوض في المعادلة فنجد:

$$z + x z' = z + \sqrt{z}$$

$$x z' = \sqrt{z} \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = \sqrt{z}$$

نقسم على

$$x \sqrt{z} \neq 0$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow$$

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x}$$

نكامل

$$\Longrightarrow$$

$$2\sqrt{z} = \ln x/c \Longrightarrow 2\sqrt{y/x} = \ln \frac{x}{c}$$

$$\Longrightarrow x/c = e^{2\sqrt{y/x}} \Rightarrow \boxed{x = c\, e^{2\sqrt{y/x}}}$$

نعوض احداثيات النقطة $M(1,0)$ في صيغة الحل العام نجد

$$1 = c e^{0} \Rightarrow c = 1$$

ومنه الحل الخاص هو

$$x = e^{2\sqrt{y/x}}$$

مثال:

غير متجانس

أوجد الحل العام:

$$y - xy' = y \ln x/y$$

الحل:

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

نفرض أن $z = y/x \Rightarrow y = z\cdot x \Rightarrow y' = z + xz'$

$$z + x z' = -z \ln \frac{1}{z} + z$$

$$x \frac{dz}{dx} = -z \ln \frac{1}{z} = z \ln z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z \ln z} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{d(\ln z)}{\ln z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(\frac{\ln z}{c}\right) = \ln x$$

$$\ln \frac{z}{c} = x \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = c\cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = e^{c\cdot x} \Rightarrow y = x\cdot e^{c\cdot x}$$

* المعادلات التفاضلية القابلة للرد إلى متجانسة :

هناك أنواع من المعادلات التفاضلية ترد إلى معادلات متجانسة ومن هذه المعادلات المعادلات من الشكل :

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

عند إرجاع هذه المعادلة إلى متجانسة نصادف حالتين :

<u>الحالة الأولى :</u> المستقيمان :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

غير متوازيان أي متقاطعان أي أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

أو

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$ الميل

في هذه الحالة ترد المعادلة إلى متجانسة نوجد إحداثيات نقطة التقاطع (x_0, y_0) ثم ننسب المحاور الإحداثية إلى هذه النقطة
وذلك بإدخال متحولات جديدة هي X , Y مرتبطة مع المتحولات القديمة بالعلاقات

$$x = X + x_0$$
$$y = Y + y_0$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نحصل على معادلة متجانسة نحلها بفرض $Z = \frac{Y}{X}$ ونتابع كما في التمارين السابقة ~~[illegible]~~

ثم ننسب المتحولات إلى أصلها.

الحالة الثانية : المستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

متوازيان أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

أو

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow a_1 = m a_2$$
$$b_1 = m b_2$$

بالتعويض في المعادلة :

$$y' = f\left(\frac{m a_2 x + m b_2 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

$$y' = f\left(\frac{m(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

نفرض أن $Z = a_2 x + b_2 y$

نحصل ع معادلة منفصلة المتحولات

تمرين (1)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(10x - 4y + 12)\,dx - (x + 5y + 3)\,dy = 0$$

الحل : المعادلة :

$$y' = \frac{10x - 4y + 12}{x + 5y + 3} \quad (*)$$

قابلة للرد إلى متجانسة لنتحقق أولاً فيما إذا كان المستقيمان .

$$10x - 4y + 12 = 0$$
$$x + 5y + 3 = 0$$

متقاطعان أم متوازيان .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$$

ومنه المستقيمان متقاطعان

لنوجد احداثيات نقطة التقاطع وهي $\left(\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

لنفرض أن

$$x = X - \frac{4}{3} \implies X = x + \frac{4}{3}$$

$$y = Y - \frac{1}{3} \implies Y = y + \frac{1}{3} \implies y' = Y'$$

نبدل في * نجد:

$$y' = \frac{10\left(X - \frac{4}{3}\right) - 4\left(Y - \frac{1}{3}\right) + 12}{X - \frac{4}{3} + 5\left(Y - \frac{1}{3}\right) + 3}$$

$$= \frac{10X - 4Y}{X + 5Y}$$

وهي معادلة متجانسة لأن دالة الطرف الأيمن متجانسة من الدرجة صفر

$$y' = \frac{10 - 4\frac{Y}{X}}{1 + 5\frac{Y}{X}}$$

نفرض أن

$$y' = Z + XZ' \Leftarrow Z = \frac{Y}{X}$$

$$Z + XZ' = \frac{10 - 4Z}{1 + 5Z}$$

$$XZ' = \frac{10 - 4Z}{1 + 5Z} - Z$$

$$\implies XZ' = \frac{-5(Z^2 + Z - 2)}{5Z + 1}$$

$$\frac{(5Z+1)\,dZ}{-5(Z^2+Z-2)} = \frac{dX}{X}$$

$(5Z+1)\,dZ$

$(5Z+1+1-1)\,dZ$

$(3Z+2Z+1+1-1)\,dZ$

$$\frac{(3Z+1+2Z+2)\,dZ}{-5(Z-1)(Z+2)}$$

$$\frac{(5Z+1)\,dZ}{-5(Z-1)(Z+2)} = \frac{dX}{X}$$

$$\frac{-3}{5}\,\frac{dZ}{Z+2} - \frac{2}{5}\,\frac{dZ}{Z-1} = \frac{dX}{X}$$

$\Rightarrow \int \; +3\,dZ \quad 2\,dZ \quad -5\,\frac{dx}{x}$

$$3\ln\left|\frac{1}{Z+2}\right| + 2\ln\left|\frac{1}{Z-1}\right| = -5\ln X + \ln C$$

$$\ln\frac{1}{(Z+2)^3(Z-1)^2} = -\ln X^5 \cdot C$$

$$X^5(Z+2)^3(Z-1)^2 = C_1 \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{C}$$

$$X^5\left(\frac{Y}{X}+2\right)^3\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2 = C_1$$

$$(Y+2X)^3(Y-X)^2 = C_1 \Longrightarrow$$

$$\left(y+\frac{1}{3}+2x+\frac{2}{3}\right)^3\left(y+\frac{1}{3}-x-\frac{4}{3}\right)^2 = C_1$$

$$(y+2x+3)^3(y-x-1)^2 = C_1$$

وهو الحل العام المطلوب.

تمرين (2): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(x+2y)dx+(10x+20y+5)dy=0$$

الحل:

$$y' = -\frac{(x+2y)}{(10x+20y+5)}$$

لنرى فيما إذا كانت المستقيمات

$$-x-2y=0$$

$$10x+20y+5=0$$

متقاطعة أم متوازية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = -20+20=0$$

فالمستقيمات متوازية.

نفرض أن $x+2y=Z$

$$\Longrightarrow y=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}x \Rightarrow y'=\frac{1}{2}Z'-\frac{1}{2} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(Z'-1)$$

نبدل.

$$\frac{1}{2}(Z'-1)=\frac{-Z}{10Z+5}$$

$$Z'=\frac{-2Z+10Z+5}{10Z+5}=\frac{8Z+5}{10Z+5}$$

$$\frac{5\div(10Z+5)\,dZ}{5\div\ 8Z+5}=dx \Longrightarrow$$

نقسم البسط على المقام فنجد.

$$\begin{array}{r|l} & \frac{5}{4} \\ \hline 8Z+5 & 2Z+1 \\ & 2Z+\frac{5}{4} \\ \hline & 0-\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\frac{5}{4}\, dZ - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{8}{3}Z+1}\, dZ = dx$$

$$dZ - \frac{dZ}{8Z+5} - \frac{4}{5}\, dx = 0$$

$$Z - \frac{1}{8}\ln(8Z+5) - \frac{4}{5}x = c$$

$$40Z - 5\ln(8Z+5) - 32x = 40c$$

$$40x + 80y - \ln(8x+16y+5)^5 - 32x = 40c$$

$$8x + 80y - \ln(8x+16y+5)^5 = 40c$$

المعادلات ذات التجانس العام:

أوجد درجة تجانس المعادلة ثم أوجد حلها العام

① نوجد درجة تجانس المعادلة ولتكن k

② نفرض أن

$$Z = \frac{y}{x^k}$$

③ نحصل على معادلة منفصلة المتغيرات

لإيجاد درجة التجانس نبدل كل:

$$x \longrightarrow \lambda x$$

$$y \longrightarrow \lambda^k y$$

$$y' \longrightarrow \lambda^{k-1} y'$$

ثم نطابق بين الأسس

* تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

أنها ذات تجانس عام من الدرجة k إذا استبدلنا المقادير

$$dx \longrightarrow \lambda dx \quad \& \quad x \longrightarrow \lambda x$$

$$dy \longrightarrow \lambda^{k} dy \quad \& \quad y \longrightarrow \lambda^{k} y$$

$$y' = \lambda^{k-1} y'$$

ونستنتج ما يلي:

$$M(\lambda x, \lambda^{k} y)\lambda dx + N(\lambda x, \lambda^{k} y)\lambda^{k} dy = 0$$

$$\lambda^{k}\left[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\right] = 0$$

ملاحظة:

للحصول على درجة التجانس k نبدل الفرضيات السابقة ثم نطابق بين الأسس ونحسب قيمة k وسنوضح ذلك من خلال الأمثلة:

طريقة حل المعادلة ذات التجانس العام:

1) نوجد درجة تجانس المعادلة.

2) نفرض أن

$$Z = \frac{y}{x^{k}}$$

3) نبدل في المعادلة فنحصل على معادلة (م. م) نحلها بالطرق السابقة.

4) نعود إلى المتحولات الأصلية.

مثال: أوجد درجة تجانس المعادلة الآتية ثم أوجد حلها العام.

$$(x^3 - 6xy)y' + 12y^2 = 0$$

الحل:

لإيجاد درجة تجانس المعادلة نستبدل الـ

$$x = \lambda x$$

$$y = \lambda^k y \Longrightarrow y' = \lambda^{k-1} y'$$

$$(\lambda^3 x^3 - 6\lambda^{k+1} x.y)\lambda^{k-1} y' + 12\lambda^{2k} y^2 = 0$$

$$(\lambda^{k+2} x^3 - 6\lambda^{2k} x.y) y' + 12\lambda^{2k} y^2 = 0$$

$$k+2 = 2k = 2k \Longrightarrow k+2 = 2k \Longrightarrow$$

$\boxed{k = 2}$ وهي درجة تجانس المعادلة.

لذلك نفرض أن:

$$Z = \frac{y}{x^2}$$

$$y = x^2 . Z \Longrightarrow y' = 2xZ + x^2 Z'$$

نبدل في المعادلة المفروضة نجد:

$$(x^3 - 6x^3 Z)(2xZ + x^2 Z') + 12x^4 Z^2 = 0$$

نقسم على x^4

$$(1 - 6Z)(2Z + xZ') + 12Z^2 = 0$$

$$2Z - 12\cancel{Z^2} + \underline{xZ'} - \underline{6xZZ'} + 12\cancel{Z^2} = 0$$

$$xZ'(1 - 6Z) + 2Z = 0$$

$$(1-6z)z' = \frac{-2z}{x} \longrightarrow \frac{dz(1-6z)}{-2z} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{6z-1}{2z}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\left(3-\frac{1}{2z}\right)dz = \frac{dx}{x}$$

$$3z - \frac{1}{2}\ln z = \ln c.x$$

$$6z = \ln c.x^2 + \ln z \Rightarrow$$

$$\ln(x^2 . c . z) = 6z \Rightarrow x^2 c\, z = e^{6z}$$

$$\Rightarrow c.y = e^{6\frac{y}{x^2}}$$

تمرين (١)

أوجد درجة تجانس المعادلة ثم أوجد حلها العام .

$$(x + x^2 y)y' + 2y = 0$$

تمرين (٢) : أوجد الحل العام للمعادلات التالية

1) $y' = \dfrac{3x-y+5}{x+y-1}$

2) $y' = \dfrac{2x+y-2}{6x+3y+1}$

3) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

تمرين (1): أوجد درجة تجانس المعادلة الآتية ثم أوجد حلها العام؟

معادلة من الدرجة الأولى

$$(x + x^2 y) y' + 2y = 0$$ ومن المرتبة الأولى وغير منفصلة ولا تردإلى منفصلة

الحل:

نبدل الحل:

$$x = \lambda x$$
$$y = \lambda^k y$$
$$y' = \lambda^{k-1} y'$$

$$(\lambda x + \lambda^2 x^2 \lambda^k y) \lambda^{k-1} y' + 2\lambda^k y = 0$$

$$\lambda^k x y' + \lambda^{2k+1} x^2 y y' + 2\lambda^k y = 0$$

$$k = k = 2k+1 \Rightarrow 2k+1 = k \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

وهي درجة تجانس المعادلة المفروضة

$$Z = \frac{y}{x^{-1}} \Rightarrow Z = y \cdot x \Rightarrow$$

$$y = \frac{Z}{x} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{xZ' - Z}{x^2}$$

نبدل في المعادلة المفروضة:

$$\left(x + x^2 \frac{Z}{x}\right)\left(\frac{xZ' - Z}{x^2}\right) + 2\frac{Z}{x} = 0$$

نضرب الطرفين ب x^3

$$x(1 + Z)(xZ' - Z) + 2xZ = 0$$

$$x \neq 0$$

$$xZ' - Z + xZ \cdot Z' - Z^2 + 2Z = 0$$

$$(x + xZ) Z' + Z - Z^2 = 0$$

$$x(1+Z)\frac{dZ}{dx} = Z^2 - Z$$

$$\Longrightarrow \frac{(Z+1)}{(Z-1)Z}dZ = \frac{dx}{x} \qquad \left\{ \begin{array}{l} Z(Z-1) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right.$$ نفرض

نفرق الكسر :

$$\frac{Z+1}{Z(Z-1)} = \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z-1}$$

$$\quad (Z-1) \qquad (Z)$$

$$Z+1 = A(Z-1) + BZ \Longrightarrow$$

$$Z+1 = (A+B)Z - A \Longrightarrow$$

بالمطابقة :

$$A+B = 1 \Longrightarrow B = 2$$
$$-A = +1 \Longrightarrow A = -1$$

$$\int -\frac{dZ}{Z} + 2\int \frac{dZ}{Z-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\frac{1}{Z} + \ln(Z-1)^2 = \ln\frac{x}{c}$$

$$\ln\frac{(Z-1)^2}{Z} = \ln\frac{x}{c}$$

$$(Z-1)^2 = c\,x\,Z \Longrightarrow$$

$$(x\cdot y - 1)^2 = c\cdot x^2 y$$

وهو الحل العام المطلوب

تمرين (2) : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$

الحل :

ان هذه المعادلة قابلة للرد إلى متجانسة ولذلك فيما إذا كان المستقيمان :

$$y+2=0$$

$$x+y-1=0$$

متوازيان أم متقاطعان :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

فالمستقيمان متقاطعان

لنوجد إحداثيات النقطة (x_0, y_0)

$$y=-2 \Rightarrow x=3$$

وبالتالي إحداثيات نقطة التقاطع هي $(3, -2)$

لنوجد نقل للمحاور .

$$x = X+3 \Rightarrow X = x-3$$

$$y = Y-2 \Rightarrow Y = y+2$$

$$\Downarrow \quad y' = Y'$$

نبدل في المعادلة

$$Y' = 2\left(\frac{Y-2+2}{X+3+Y-2-1}\right)^2$$

$$Y' = 2\left(\frac{Y}{X+Y}\right)^2$$

$$Y' = 2\left(\frac{\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}\right)^2$$

والمعادلة متجانسة

نفرض أن

$$Z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot Z \longrightarrow$$

$$y' = x \cdot Z' + Z$$

نبدل في المعادلة:

$$x Z' + Z = 2\left(\frac{Z}{1+Z}\right)^2$$

$$x Z' = 2\frac{Z^2}{(1+Z)^2} - Z \Longrightarrow$$

$$x Z' = \frac{2Z^2 - Z(1+Z)^2}{(1+Z)^2}$$

$$x \frac{dZ}{dx} = \frac{\cancel{2Z^2} - Z - \cancel{2Z^2} - Z^3}{(Z+1)^2}$$

$$x \frac{dZ}{dx} = \frac{-Z(Z^2+1)}{(Z+1)^2}$$

نقسم على

$$x Z(Z^2+1) \neq 0$$

$$\frac{(Z^2+2Z+1)}{-Z(Z^2+1)} dZ = \frac{dx}{x} \Longrightarrow$$

نفرق الكسر:

$$\frac{(Z^2+2Z+1)}{-Z(Z^2+1)} = \frac{A}{-Z} + \frac{BZ+C}{Z^2+1}$$

$$Z^2 + 2Z + 1 = A(Z^2+1) + (BZ+C)(-Z)$$

$$= AZ^2 + A - BZ^2 - CZ$$

Subject :

$$Z^2 + 2Z + 1 \equiv (A - B) Z^2 + A - Z c$$

بالمطابقة نجد :

$$A - B = 1 \Longrightarrow B = 0$$

$$-C = 2 \Longrightarrow C = -2$$

$$A = 1$$

نجد :

$$\int \frac{dZ}{Z} - 2 \int \frac{dZ}{Z^2 + 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln Z - 2 \operatorname{arcTg} Z = \ln \frac{x}{c}$$

$$\ln \frac{Z\, x}{c} = -2 \operatorname{arcTg} Z$$

$$Z\, x = c\, e^{-2 \operatorname{arcTg} Z}$$

$$\frac{y}{\cancel{x}} \cancel{x} = c\, e^{-2 \operatorname{arcTg} \frac{y}{x}}$$

$$y \quad 2 = c\, e^{-2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y+2}{x-3}\right)}$$

الفصل الرابع :

المعادلات التفاضلية التامة وعوامل التكميل :

تعريف :

نسمي كل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتقة

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

بمعادلة تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

لحل المعادلة التامة يوجد طريقتين :

1- طريقة تجميع الحدود :

وهي الطريقة الأسهل وننصح باستخدامها إذا أمكن ذلك

وسنوضح هذه الطريقة من خلال التمارين .

2- الطريقة العامة

وتتلخص هذه الطريقة في البحث عن التابع $u(x,y)$

الذي تفاضله التام هو الطرف الأيسر للمعادلة

أي يصبح الطرف الأيسر هو :

$$du(x,y) = 0$$

وبالتالي يصبح لدينا (حسب تعريف التفاضل الكلي)

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

وبالمطابقة مع المعادلة الأصلية نجد أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N$$

من هاتين المعادلتين نحصل على التابع $u(x,y)$

* ملاحظة:

لا يوجد للمعادلة التامة حلول شاذة.

تمرين:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ معادلة تفاضلية

الحل:

لنتحقق فيما إذا كانت هذه المعادلة تامة:

$M=2x-y+1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=-1$ x ثابت & y متغير

$N=2y-x-1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=-1$ y ثابت & x متغير

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

والمعادلة تامة:

* الطريقة العامة:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=2x-y+1 \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=2y-x-1 \quad ②$$

بمكاملة ① بالنسبة لـ x على اعتبار y ثابت نجد

$$u=x^2-xy+x+c(y)$$

باشتقاق المعادلة الأخيرة لـ y على اعتبار x ثابت نجد

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x+c'(y) \Longrightarrow$$

$$c'(y) = 2y - 1 \xrightarrow{\int}$$

$$c(y) = y^2 - y$$

ومنه :

$$u = x^2 + y^2 - xy + x - y$$

اذاً الحل العام :

$$x^2 + y^2 - xy + x - y = c$$

★ طريقة تجميع الحدود :

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

$$2x\,dx - y\,dx + dx + 2y\,dy - x\,dy - dy = 0$$

$$d(x^2) + dx + d(y^2) - dy - (y\,dx + x\,dy) = 0$$

$$d(x^2 + x + y^2 - y) - d(x \cdot y) = 0$$

بتكاملة الطرفين نجد :

$$x^2 + y^2 + x - y - x \cdot y = c$$

وهو المطلوب :

مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{y}{x}\,dx + (y^2 + \ln|x|)\,dy = 0$$

متجانس

غير متجانس

الحل :

$$M = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$N = y^2 + \ln|x| \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial M}{y} = \frac{\partial N}{x} = \frac{1}{x}$$

والمعادلة تامة : المتعادل y dr

تكامل بالنسبة x

$$\frac{y}{x}\,dx + y^2\,dy + \ln|x|\,dy = 0$$

$$\int \frac{y}{x}\,dx = y\int\frac{dx}{x} = y\cdot\ln x$$

$$d\left(\frac{y^3}{3}\right) + d(y\ln|x|) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} + y\ln|x| = c$$

$$\int \ln|x|\,dy = \ln|x|\int dy = \ln|x|\cdot y.$$

وهو المطلوب

مثال (3)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$3x^2(1+\ln y)\,dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0$$

الحل

$$M = 3x^2(1+\ln y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3x^2}{y}$$

$$N = \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$$

والمعادلة تامة

$$3x^2\,dx + 3x^2\ln y\,dx + \frac{x^3}{y}\,dy - 2y\,dy = 0$$

$$d(x^3) - d(y^2) + d(x^3\ln y) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - y^2 + x^3\ln y = c$$

تمرين : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$$

الحل :

$$M = 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

والمعادلة تامة .

★ طريقة تجميع الحدود : تكامل لـ y باعتبار x ثابت or

تكامل لـ x باعتبار y ثابت

$$2xy\,dx + x^2\,dy - y^2\,dy = 0$$

$$d\left(-\frac{y^3}{3}\right) + d(x^2 y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y - \frac{y^3}{3} = c \Rightarrow 3x^2 y - y^3 = c_1$$

★ الطريقة العامة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \quad ---- (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2 \quad --- (2)$$

نكامل (1) لـ x باعتبار y ثابت

$$u = x^2 y + c(y)$$

بالاشتقاق لـ y باعتبار x ثابت نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + c'(y)$$

نبدل (2) في المعادلة الأخيرة فنجد أن :

$$x^2 - y^2 = x^2 + c'(y) \Rightarrow c'y = -y^2$$

$$\Rightarrow c(y) = \frac{-y^3}{3}$$

ومنه :

$$u = x^2y - \frac{y^3}{3}$$

إذن الحل العام هو :

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = c$$

$$\Rightarrow 3x^2y - y^3 = c_1$$

تمرين 1

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2\sin x\cos x + tg\, y)\,dx + \frac{x}{\cos^2 y}\,dy = 0$$

الحل

$$M = 2\sin x\cos x + tg\, y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)' = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$N = \frac{x}{\cos^2 y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

والمعادلة تامة .

$$\underbrace{\overbrace{\sin 2x}^{2\sin x\cos x}\,dx}_{\downarrow} + tg\, y\,dx + \frac{x}{\cos^2 y}\,dy = 0$$

$$d\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + d\big((tg\, y)\cdot x\big) = 0$$

$$\Rightarrow x\,tg\, y - \frac{1}{2}\cos 2x = c$$

$$\Rightarrow \boxed{2x\,Tg\, y - \cos 2x = c_1}$$

المعادلات غير التامة:

نقول عن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

أنها غير تامة إذا كان:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة غير التامة

نبحث عن تابع μ إذا ضربنا طرفي المعادلة به أصبحت تامة

ويسمى هذا التابع بعامل التكميل.

وهو إما تابع لـ x أو تابع لـ y أو تابع لـ x و y معاً

- يكون عامل التكميل تابع لـ x أي:

$$\mu(x)$$

إذا كان:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

وفي هذه الحالة هو:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

- يكون عامل التكميل تابع لـ y أي

$$\mu(y)$$

إذا كان:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = f(y)$$

وفي هذه الحالة عامل التكميل هو:

$$\mu(y) = e^{\int f(y)\,dy}$$

- 57 -

- إذا لم يكن عامل التكميل تابع لـ x أو y فإننا نحاول إيجاد عامل التكميل :

$$\mu = \mu[z(x,y)]$$

وذلك إذا كان :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x}-M\frac{\partial z}{\partial y}} = f(z)$$

ويكون عامل التكميل هو :

$$\mu(z) = e^{\int f(z)\,dz}$$

حيث $z = x+y$

$z = x\cdot y$

تمرين :

أوجد عامل التكميل للمعادلة :

$$(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$$

ثم أوجد حلها العام :

الحل :

$$\left.\begin{array}{l} M = x^2+y^2+x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ N = xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$$

والمعادلة غير تامة :

ولنرى فيما إذا كانت تقبل عامل تكميل بالنسبة لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-y}{x\cdot y} = \frac{y}{x\cdot y} = \frac{1}{x} = f(x)$$

~~أوجد الحل العام للمعادلة~~

إذاً المعادلة تقبل عامل تكميل يتبع لـ x وهو

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} \Longrightarrow$$

$$\mu(x) = x$$

بضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة

$$(x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2 y\,dy = 0$$

طريقة تجميع الحدود:

$$x^3 dx + xy^2 dx + x^2 dx + x^2 y\,dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

$$\Longrightarrow \boxed{3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

تمرين:

أوجد عامل التكميل للمعادلة.

$$(2y + 3xy^3)\,dx + (x + 3x^2y^2)\,dy = 0$$

ثم أوجد حلها العام.

الحل:

$$\left.\begin{aligned} M &= 2y + 3xy^3 \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 9xy^2 \\ N &= x + 3x^2y^2 \Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 6xy^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

والمعادلة غير تامة.

ولنرى فيما إذا كانت تقبل عامل تكميل تابع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{(2+9xy^2)-(1+6xy^2)}{x+3x^2y^2}$$

$$= \frac{2+9xy^2-1-6xy^2}{x(1+3xy^2)} = \frac{1+\cancel{3xy^2}}{x(1+\cancel{3xy^2})} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\ln x} \Rightarrow \mu = x$$

لو ضربنا عامل التكميل بطرفي المعادلة نجد

$$(2xy+3x^2y^3)\,dx + (x^2+3x^3y^2)\,dy = 0$$

$$\underline{2xy\,dx} + \underline{3x^2y^3\,dx} + \underline{x^2\,dy} + \underline{3x^3y^2\,dy} = 0$$

$$d(x^2y) + d(x^3y^3) = 0$$

$$\cancel{\int} \quad x^2y + x^3y^3 = c$$

<u>تمرين</u>

أوجد عامل تكميل المعادلة:

$$(x^3+y)\,dx + x(x\cdot y-1)\,dy = 0$$

ثم أوجد حلها العام والشاذ (إن وجد)

- 60 -

الحل

$$M = x^3 + y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N = x(xy-1) = x^2y - x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة غير تامة

ولنبحث عن عامل تكامل تابع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1 - 2xy + 1}{x(xy-1)} = \frac{-2xy + 2}{x^2y - x}$$

$$= \frac{-2(x \cdot y - 1)}{x(x \cdot y - 1)} = \frac{-2}{x} = f(x)$$

∴ المعادلة تقبل عامل تكامل تابع لـ x هو:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2\,dx}{x}} = e^{-2 \ln x}$$

$$\Longrightarrow \mu = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة

$$\left(x + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

$$\underline{x\,dx} + \underline{\underline{\frac{y}{x^2}dx}} + \underline{y\,dy} - \underline{\underline{\frac{1}{x}dy}} = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c$$

$$\Rightarrow x^3 + x y^2 - 2y = c_1 x$$

ملاحظة :

$x=0$ حل المعادلة

وهو حل خاص لأنه ينتج من الحل العام بتعويض $c=\infty$

$$x = \frac{x^3 + x y^2 - 2y}{c_1} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

تمارين :

أوجد الحل العام :

1) $(x^2+y)\,dx - x\,dy = 0$

2) $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$

3) $\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0$

4) $(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$

تمرين (1) : 1)

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x^2+y)\,dx - x\,dy = 0$$

الحل :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 1\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -1\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

المعادلة ليست تامة .

لنبحث عن عامل تكميل تابع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1+1}{-x} = \frac{-2}{x}$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكميل تابع لـ x

$$\mu = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = 1/x^2 \Rightarrow$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل .

$$\frac{1}{x^2}(x^2+y)\,dx - \frac{1}{x^2}x\,dy = 0$$

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0$$

$$d(x) + d\left(\frac{-y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x - \frac{y}{x} = c \Rightarrow \boxed{x^2 - y = xc}$$

وهو الحل العام

مناقشة الجذور :

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

$$\mu \longrightarrow \infty$$

$$x \longrightarrow 0$$

إذاً $x=0$ حل خاص لأنه ينتج من الحل العام بتعويض $c=\infty$

تمرين (2)

$$(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M=2xy^2-y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=4xy-1 \\ N=y^2+x+y \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

والمعادلة ليست تامة :

ولنرى فيما إذا كانت هذه المعادلة تقبل عامل تكميل تابع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4xy-1-1}{y^2+x+y}=\frac{4xy-2}{y^2+x+y}\neq f(x)$$

والمعادلة لا تقبل عامل تكميل يتبع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{4xy-2}{-(2xy^2-y)}=\frac{2(2xy-1)}{-y(2xy-1)}=\frac{-2}{y}$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكميل تابع لـ y هو

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{y}dy}=e^{\ln\frac{1}{y^2}}\Longrightarrow\mu=\frac{1}{y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة

تكامل بالنسبة لـ x

$$2x\,dx-\frac{1}{y}\,dx+dy+\frac{x}{y^2}\,dy+\frac{1}{y}\,dy=0$$

$$d(x^2)+d(y)+d(\ln y)+d\left(\frac{-x}{y}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad x^2+y+\ln y-\frac{x}{y}=c$$

-64-

$$y x^2 + y^2 + y\ln y - x = c.y$$

وهو الحل العام المطلوب

تمرين (3)

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)dx + \left(\frac{x}{y}-1\right)dy = 0$$

الحل:

$$M = \frac{x}{y}+1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$

$$N = \frac{x}{y}-1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

والمعادلة ليست تامة

لنرى فيما إذا كانت المعادلة تتبع لـ x ⇐

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-1} = \frac{-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}}{\frac{x-y}{y}} = \frac{\frac{-x-y}{y^2}}{\frac{x-y}{y}}$$

إذاً عامل التكامل لا يتبع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}}{-\frac{x}{y}-1} = \frac{\frac{-x-y}{y^2}}{\frac{-x-y}{y}} = \frac{1}{y}$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} \Rightarrow \mu = y$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0$$

$$x\,dx + y\,dx + x\,dy - y\,dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) + d(x.y) = 0$$

$$\int \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x.y = c \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 - y^2 + 2x.y = 2c}$$

وهو الحل العام المطلوب

-65-

تمرين (٤)

$$(xy^2+y)dx - xdy = 0$$

الحل:

$$M = xy^2+y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy+1$$

$$N = -x \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

نلاحظ أن $\Rightarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة غير تامة.

ولنبحث عن عامل تكامل تابع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2xy+1 \cancel{-1}}{-x} = \frac{2xy}{-x}$$

$$\Longrightarrow \cancel{2yy} \; -2y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2xy+1+1}{-2xy \cancel{-y}} = \frac{2(xy+1)}{\cancel{2x}\; -y(xy+1)}$$

$$= \frac{-2}{y} = f(y)$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكامل تابع لـ y هو

$$\mu = e^{\int \frac{-2}{y}dy} = e^{\ln\frac{1}{y^2}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فنجد:

$$x\,dx + \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$d\frac{x^2}{2} + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = c$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2y + 2x = c_1 y}$$

وهو الحل العام المطلوب

تمرين (5)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

الحل:

$$M = x\sin y + y\cos y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y$$

$$N = x\cos y - y\sin y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y$$

والمعادلة ليست تامة

لنبحث عن عامل تكامل يتبع لـ x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x\cos y + \cos y - y\sin y - \cos y}{x\cos y - y\sin y} \Rightarrow$$

$$= 1 = f(x)$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكامل يتبع لـ x

$$\mu = e^{\int f x\, dx} = e^{\int dx} = e^{x} \Rightarrow \boxed{\mu = e^{x}}$$

ولنضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فيه:

$$e^x(x\cos y - y\sin y)dy + e^x(x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

$$(x\cdot e^x\cos y - e^x y\sin y)dy + (xe^x\sin y + e^x y\cos y)dx = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = xe^x\sin y + e^x y\cos y \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = xe^x\cos y - e^x y\sin y \quad \text{--- (2)}$$

- 57 -

لنكامل العلاقة ① بالنسبة لـ x على اعتبار y ثابت فنجد:

$$u = \sin y \int x e^{x}\,dx + y\cos y \int e^{x}\,dx$$

$$I = \int e^{x} x\,dx = xe^{x} - e^{x}$$

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$e^{x}\cdot dx = dv \Rightarrow v = e^{x}$$

$$\int u\cdot dv = uv - \int v\,du$$

$$I = x\cdot e^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x}$$

$$u = \sin y\,(xe^{x} - e^{x}) + y\cos y\, e^{x} + \underset{\sim}{c(y)}$$

نشتق لـ y على اعتبار x ثابت

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y\,(xe^{x} - e^{x}) + e^{x}\cos y - e^{x} y \sin y + c'(y)$$

نبدل ② في المعادلة الأخيرة فنجد:

$$xe^{x}\cos y - e^{x} y \sin y = \cos y\,(xe^{x} - e^{x}) + e^{x}\cos y - e^{x} y \sin y + c'(y)$$

$$xe^{x}\cos y - e^{x} y\sin y = \cos y\, xe^{x} - e^{x}\cos y + e^{x}\cos y - e^{x} y \sin y + c'(y)$$

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c_1 = 0$$

$$u = \sin y\,(xe^{x} - e^{x}) + ye^{x}\cos y + c_1^{0} \Rightarrow$$

الحل العام هو

$$\sin y\,(xe^{x} - e^{x}) + e^{x} y \cos y = c$$

تمرين (6) أوجد الحل العام للمعادلة

$$(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$$

علماً أنه تقبل عامل تكميل هو:

$$\mu = \mu(x \cdot y)$$

الحل:

$$M = 2x^3y^2 - y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3y - 1$$

$$N = 2x^2y^3 - x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3 - 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة ليست تامة

$$Z = x \cdot y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \;\&\; \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{4x^3y - 1 - 4xy^3 + 1}{2x^2y^4 - xy - 2x^4y^2 + xy}$$

$$= \frac{4xy(x^2 - y^2)}{2x^2 \cdot y^2(y^2 - x^2)}$$

$$= \frac{-2}{x \cdot y} = \frac{-2}{Z} = f(Z)$$

إذاً المعادلة تقبل عامل التكميل تابع لـ (Z) و $Z = x \cdot y$ هو.

$$\mu = e^{\int \frac{-2}{Z} dZ} = e^{\ln \frac{1}{Z^2}} = \frac{1}{Z^2}$$

$$\mu = \frac{1}{x^2 \cdot y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ عامل التكميل فتصبح تامة.

$$2x\,dx - \frac{dx}{x^2y} + 2y\,dy - \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

$$d(x^2)+d(y^2)+d\left(\frac{1}{x\cdot y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+\frac{1}{x\cdot y}=c} \Rightarrow$$

وهو الحل العام المطلوب.

تمرين (7)

أوجد الحل العام للمعادلة.

$$xy^2\,dx+(x^2y-x)\,dy=0$$

علماً أنه تقبل عامل تكامل من الشكل $\mu=\mu(x\cdot y)$

الحل

$$M=xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2yx$$

$$N=x^2y-x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

والمعادلة ليست تامة.

لنبحث عن عامل تكامل تابع لـ $x\cdot y$ هو.

$$Z=x\cdot y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=y,\qquad \frac{\partial Z}{\partial y}=x$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial Z}{\partial x}-M\frac{\partial Z}{\partial y}}=\frac{2yx-2xy+1}{x^2y^2-xy-x^2y^2}=\frac{-1}{xy}$$

$$=-\frac{1}{Z}=f(Z)$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكامل لـ $z = x\cdot y$ وهو

$$\mu = e^{\int -\frac{dz}{z}} = e^{\ln \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x\cdot y}$$

لنضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة.

$$\cancel{\frac{1}{y}}\, y\,dx + x\,dy - \frac{1}{y}\,dy = 0$$

$$d(x\cdot y) - d(\ln y) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x\cdot y - \ln|y| = c}$$

وهو الحل العام المطلوب

ونلاحظ أن $x=0$ و $y=0$ حلين شاذين لهذه المعادلة لأنهما لا يشتقان من الحل العام بتعويض أي قيمة لـ c.

تمرين (8)

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(y+3x^3)\,dx + \left(x + \frac{x^4}{y}\right)dy = 0$$

علماً أنها تقبل عامل تكامل:

$$\mu = \mu(x\cdot y)$$

$$M = y + 3x^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N = x + \frac{x^4}{y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \frac{4x^3 y}{y^2}$$

$$\Rightarrow z = x\cdot y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x \Rightarrow$$

$$\frac{1 - 1 - \frac{4x^3 y}{y^2}}{\left(x+\frac{x^4}{y}\right)y - (y+3x^3)\,x} = \frac{-\frac{4x^3}{y}}{xy + x^4 - xy - 3x^4} = \frac{-\frac{4x^3}{y}}{4x^4}$$

$$\frac{\frac{-4x^3}{y}}{4x^4} = \frac{-4x^3}{y\,4x^4} = \frac{-1}{x\cdot y} = \frac{-1}{z} = f(z)$$

إذن المعادلة تقبل عامل تكميل مستقل:

$$\mu(z) = e^{-\int\frac{dz}{z}} = e^{-\ln z} = e^{\ln\frac{1}{z}} \Rightarrow \mu(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x\cdot y}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل لتصبح تامة

$$\frac{1}{x\cdot y}(y+3x^3)dx + \frac{1}{x\cdot y}\left(x+\frac{x^4}{y}\right)dy = 0$$

$$\frac{y}{x\cdot y}dx + \frac{3x^3}{x\cdot y}dx + \frac{1}{x\cdot y}x\,dy + \frac{x^4}{y}\cdot\frac{1}{x\cdot y}dy = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{3x^2dx}{y} + \frac{dy}{y} + \frac{x^3}{y^2}dy = 0$$

$$d(\ln x) + d(\ln y) + d\left(\frac{x^3}{y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int \ln x + \ln y + \frac{x^3}{y} = c \Rightarrow$$

$$\ln(x\cdot y) + \frac{x^3}{y} = c \Rightarrow$$

$$\ln x\cdot y = c - \frac{x^3}{y} \Rightarrow$$

$$x\cdot y = e^{c-\frac{x^3}{y}} \Rightarrow y =$$

<u>تمرين (ع)</u> أوجد الحل العام للمعادلة أو ضع عامل تكميل المعادلة ثم أوجد حلها العام

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

$$\Rightarrow M = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$$

$$N = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة غير تامة

نبحث عن عامل تكامل تابع لـ x

$$\frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int dx} = e^x$$

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

$$2xye^x dx + x^2ye^x dx + \frac{y^3}{3}e^x dx + e^x x^2 dy + y^2e^x dy = 0$$

$$= d(yx^2e^x) + \frac{1}{3}d(y^3e^x) =$$

$$\Rightarrow 2y\int xe^x dx + y\int x^2e^x dx + \frac{y^3}{3}\int e^x dx + e^x x^2\int dy + e^x\int y^2 dy = 0$$

$$yx^2e^x + \frac{y^3e^x}{3} = C$$ الحل العام

تمرين (10) أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x + x^4 + x^2y^2)\,dx + y\,dy = 0$$

علماً أنها تقبل عامل تكامل تابع ل

$$Z = x^2 + y^2$$

الحل

$$M = x + x^4 + x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2y$$

$$N = y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow$ المعادلة غير تامة

$$Z = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial Z}{\partial x} - M\dfrac{\partial Z}{\partial y}} = \frac{2x^2y - 0}{2xy - 2xy - 2x^4y - 2x^2y^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2y}{-2x^4y - 2x^2y^3} = \frac{\cancel{2x^2y}}{-\cancel{2x^2y}(x^2 + y^2)} = \frac{-1}{Z}$$

إذاً المعادلة تقبل عامل تكامل يتبع ل Z هو

$$\mu = e^{\int \frac{-dZ}{Z}} = e^{\ln\frac{1}{Z}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{Z}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة.

$$\frac{1}{x^2+y^2}(x + x^4 + x^2y^2)\,dx + \frac{1}{x^2+y^2}\,y\,dy = 0$$

$$\left(\frac{x + x^4 + x^2y^2}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x + x^4 + x^2y^2}{x^2+y^2} \quad — ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad — ②$$

تكامل المعادلة ② لـ y ع اعتبار x ثابت

$$u = \frac{1}{2}\ln x^2+y^2 + c(x)$$

نشتق لـ x ع اعتبار y ثابت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(x)$$

نعوض ① في المعادلة الأخيرة فنجد

$$\frac{x + x^4 + x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(x)$$

$$\cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} + \underbrace{\frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}_{= x^4 +} = \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} = c'(x)$$

$$\Longrightarrow$$

$$c'(x) = \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2y^2 + x^4}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2(y^2+x^2)}{x^2+y^2} = x^2$$

$$\int \Longrightarrow c(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{x^3}{3}$$

ومنه
الحل العام هو:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{x^3}{3} = C}$$

وظيفة: أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية
اذا علمت أن لها عامل تكميل إما تابع لـ $x\cdot y$
أو تابع لـ $x+y$

1) $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$

2) $xy^2\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$

تمرين: أوجد الحل عامل تكميل للمعادلة:

(3) $dx + [1 + (x+y)\,tg\,y]\,dy = 0$
ثم أوجد حلها العام.

الفصل الخامس.

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى
برنولي - ريكاتي

تعريف: نسمي كل معادلة من الشكل:

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

بمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى غير متجانسة (أو مع طرف ثاني)
إذا كان:

$$Q(x) \neq 0$$

تصبح المعادلة

$$y' + P(x)y = 0$$

وتسمى معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى ومتجانسة
"بدون طرف ثاني"

مثال:

$$y' + xy = \ln x$$

معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة (مع طرف ثاني)

طرق حل المعادلة الخطية:

١- طريقة عامل التكميل:

نظرية: المعادلة الخطية غير متجانسة (١) تقبل عامل تكميل من الشكل:

$$\mu_{(x)} = e^{\int P(x)\,dx}$$

البرهان:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$dy + [P(x)y - Q(x)]\,dx = 0$$

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$$

$$M = p(x)y - Q(x) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$$

$$N = 1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow$ المعادلة ليست تامة

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x)\,dx$$

$$\ln \frac{\mu}{c} = \int p(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\mu = c\,e^{\int p(x)\,dx}$$

بجعل $c = 1$ نجد:

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx}$$

ملاحظة: لا يوجد للمعادلة الخطية حلول شاذة.

مثال ١

أوجد الحل العام للمعادلة. غير م . م ، متجانسة

غ خطية $\quad xy' + 2y = 3x \quad$ ، لكنه خطية

الحل:

$$y' + 2\frac{y}{x} = 3 \quad , \quad x \neq 0$$

١- هذه المعادلة هي معادلة خطية من المرتبة الأولى وهي تقبل عامل تكامل من الشكل

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} \Rightarrow p(x) = \frac{2}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة :

$$x^2 dy + 2xy\,dx = 3x^2 dx$$

$$d(x^2 y) = d(x^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 y - x^3 = c}$$

سؤال وهو الحل العام المطلوب

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(xy' - 1)\ln x = 2y$$

الحل :

$$(x\ln x)y' - 2y = \ln x$$

$$y' - \frac{2y}{x\ln x} = \frac{1}{x}$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى

$$p(x) = \frac{-2}{x\ln x}$$

نقبل عامل تكامل من الشكل :

$$\mu = e^{\int \frac{-2}{x\ln x}dx}$$

$$= e^{-2\ln(\ln x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2} = \frac{1}{(\ln x)^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح المعادلة تامة .

$$\frac{1}{(\ln x)^2}dy - \frac{2}{x(\ln x)^3}y\,dx = \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$$

$$d\left(\frac{y}{(\ln x)^2}\right)=d\left(\frac{-1}{\ln x}\right)$$

$\overset{\int}{\Longrightarrow}$

$$\frac{y}{(\ln x)^2}+\frac{1}{\ln x}=c \Longrightarrow$$

$$y+\ln x=c(\ln x)^2$$

وهو الحل العام المطلوب.

2- طريقة لاغرانج (تغير الثوابت):

لاتباع هذه الطريقة نقوم بالخطوات التالية:

① نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة (بدون طرف) وهي معادلة منفصلة المتحولات.

② نعتبر أن : $c = c(x)$

ونشتق صيغة الحل للمعادلة المتجانسة فنحصل على

$y' = \ldots$

③ نبدل قيم y و y' التي حصلنا عليها ونحسب قيمة $c(x)$

④ نبدل قيمة $c(x)$ في الحل العام للمعادلة فنحصل على الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

مثال/

أوجد الحل العام للمعادلة (بطريقة لاغرانج)

$$xy'+2y=3x$$

الحل/

$$y'+\frac{2}{x}y=3 \quad (*) \quad ; \; x\neq 0$$

$$\cancel{y'+\frac{2}{x}y=0}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x}\, y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2}{x}\, dx \Rightarrow \ln\frac{y}{c} = \ln\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{c}{x^2}$$

نعتبر أن :

$$c = C(x)$$

$$y = \frac{c(x)}{x^2}$$

$$y' = \frac{c'(x)\,x^2 - 2x\,c(x)}{x^4} = \frac{c'(x)}{x^2} - \frac{2\,c(x)}{x^3}$$

نبدل y و 'y في *

$$\frac{c'(x)}{x^2} - \cancel{\frac{2\,c(x)}{x^3}} + \cancel{\frac{2\,c(x)}{x^3}} = 3$$

$$\frac{c'(x)}{x^2} = 3 \Rightarrow c'(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow c(x) = x^3 + c_1$$

ومنه الحل العام :

$$y = \frac{x^3 + c_1}{x^2} = x + \frac{c_1}{x^2}$$

مثال: $x y' - x y = e^x$

الحل: (الطريقة لاغرانج)

$$y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (*)$$

$$y' - y = 0$$

$$dy - y\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{c} = x \Longrightarrow y = c e^x \quad (*')$$

نعتبر أن

$$c = c(x)$$

$$y = c(x) e^x \Rightarrow y' = c'(x) e^x + e^x c(x)$$

نبدل في $(*)$

$$c'(x) e^x + \cancel{e^x c(x)} - \cancel{c(x) e^x} = \frac{e^x}{x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow c(x) = \ln x + c_1$$

نبدل في $*$

$$y = (\ln|x| + c_1) e^x$$

طريقة عامل التكميل $p(x) = -1$

$$\mu = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل تكميل فتصبح تامة.

$$e^{-x} dy - y e^{-x} dx = \frac{dx}{x}$$

$$d(e^{-x} y) = d(\ln|x|) \Rightarrow$$

$$y = (\ln|x| + c) e^x$$

مثال:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

الحل:

$$p(x) = 2x \Longrightarrow$$

$$\mu = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$e^{x^2} dy + 2x e^{x^2} y\,dx = 2x\,dx$$

$$d(y e^{x^2}) = d(x^2)$$

$$y e^{x^2} = x^2 + c$$

$$y = (x^2 + c)\, e^{-x^2}$$

مثال: (دورات) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x$$

الحل:

$$y' - y \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x$$

$$\mu = e^{\int -ctg\,x\,dx}$$

$$\mu = e^{-\ln \sin x} = 1/\sin x$$

$$\frac{dy}{\sin x} - y \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = dx$$

$$d\left(\frac{y}{\sin x}\right) = dx \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{y}{\sin x} = x + c \Longrightarrow$$

$$\boxed{y = x\sin x + c\sin x}$$

وظيفة: أوجد الحل العام:

1) $y' - y\sin x = \sin x \cdot \cos x$

2) $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$

3) $y'\sin x - y = 1 - \cos x$

4) $y = x(y' - x\cos x)$

تمرين:

١- أوجد الحل العام للمعادلة على اعتبار أن $x = x(y)$
أي أن التابع x و المتحول y

أ) $(x + y^2)\,dy = y\,dx$

ب) $\left(\sin^2 y + x\dfrac{\cos y}{\sin y}\right)y' = 1$

هام

تمرين (1) $\quad y' - y\sin x = \sin x \cdot \cos x$

الحل

إن المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى

وهي تقبل عامل تكميل من الشكل :

$$\mu = e^{\int -\sin x \, dx} \Longrightarrow \mu = e^{\cos x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة .

$$\underbrace{e^{\cos x} dy - y\sin x \, e^{\cos x} dx} = \sin x \cos x \, e^{\cos x} dx$$

$$d(y \cdot e^{\cos x}) = d\left(\int \sin x \cdot \cos x \, e^{\cos x} dx\right) \qquad (*)$$

$$I = \int \sin x \cdot \cos x \, e^{\cos x} dx$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x \, dx = dt$$

$$\Longrightarrow I = -\int t \cdot e^t dt = -t \cdot e^t + e^t$$

$$I = -\cos x \cdot e^{\cos x} + e^{\cos x}$$

$$I = e^{\cos x}[1 - \cos x]$$

نعوض في المعادلة (*)

$$d(y \cdot e^{\cos x}) = d(e^{\cos x}(1 - \cos x))$$

$$\Rightarrow y e^{\cos x} = e^{\cos x}(1 - \cos x) + c$$

$$\boxed{y = 1 - \cos x + c \cdot e^{-\cos x}}$$ وهو الحل العام للمعادلة

تمرين (2) أوجد الحل العام للمعادلة:

$$xy' + (x+1)\,y = 3x^2 e^{-x}$$

الحل:

نقسم على $x \neq 0$

$$y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = 3x e^{-x}$$

وهي معادلة خطية

تقبل عامل تكامل من الشكل:

$$\mu = e^{\int (1 + \frac{1}{x})\,dx} \Longrightarrow$$

$$\mu = e^{x} \cdot e^{\ln x} \Longrightarrow \boxed{\mu = x e^{x}}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة.

$$\cancel{d(xe^{x}y} \quad \underbrace{x e^{x} dy + (x+1) e^{x}}\, dx = 3x^2 dx$$

$$d(xe^{x}y) = d(x^3)$$

$$\int \Longrightarrow \boxed{x e^{x} y = x^3 + c} \Longrightarrow y = x^2 e^{-x} + \frac{c}{x} e^{-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة.

تمرين (3) أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y'\sin x - y = 1-\cos x$$

الحل :

نقسم على $\sin x \neq 0$

$$y' - \frac{1}{\sin x}y = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية تقبل عامل تكميل من الشكل

$$\mu = e^{\int -\frac{dx}{\sin x}} \quad *$$

نحسب التكامل :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

نفرض أن $t = tg\frac{x}{2}$

$$x = 2\,arctg\, t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

نبدل في التكامل :

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{dt}{t}$$

$$I = \ln t \Rightarrow I \ln\left(tg\frac{x}{2}\right)$$

نبدل في *

$$\mu = e^{\ln \frac{1}{tg\frac{x}{2}}} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}}$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x = 2$$

$$2\sin^2 x = 2(1-\cos x)$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة.

$$\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\,dy - \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\,y\,dx = \frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\,dx$$

$$cotg\frac{x}{2}\,dy - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,y\,dx =$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cancel{\sin\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$\Longrightarrow \left(cotg\frac{x}{2}\right)dy - \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,y\,dx = dx$$

$$d\left(y\cdot cotg\frac{x}{2}\right) = dx$$

$$\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\xRightarrow{\int} y\cdot cotg\frac{x}{2} = x + c$$

$$\boxed{y = x + c\cdot tg\frac{x}{2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة
ويمكن حلها بطريقة لاغرانج.

$y\,dx = x\,dy - x^2\cos\,dx \qquad x\cdot y \neq 0$

تمرين (4):

$y = x(y' - x\cos x)$

الحل:

طريقة ① نقسم على $x \neq 0$

$y' - x\cos x = \frac{1}{x} y$

$y' - \frac{1}{x} y = x\cos x \qquad (*)$

وهي معادلة خطية عامل تكاملي هو .

$\mu = e^{\int -\frac{dx}{x}} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

نضرب ب طرفي المعادلة فتصبح تامة :

$\frac{1}{x}dy - \frac{1}{x^2}y\,dx = \cos x\,dx$

$d\left(\frac{y}{x}\right) = d(\sin x) \overset{\int}{\Rightarrow}$

$\frac{y}{x} = \sin x + c \Rightarrow y = x(\sin x + c)$

طريقة ② لاغرانج

لنأخذ المعادلة بدون طرف "المتابعة"

$y' - \frac{1}{x} y = 0 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\overset{\int}{\Rightarrow} \ln\frac{y}{c} = \ln x$

$y = cx$

نعتبر أن $c = c(x)$

$$y = c(x) \cdot x$$

لنوجد y' :

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

نبدل y و y' في *

$$c'(x) \cdot x + c(x) - \frac{1}{\cancel{x}} c(x) \cancel{x} = x \cos x$$

$$c'(x) x = x \cos x$$

$$c'(x) = \cos x \implies c(x) = \sin x + c_1$$

ومنه الحل العام هو :

$$y = x(\sin x + c_1)$$

تمرين (5) أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x + y^2) dy = y dx$$

على اعتبار أنها خطية للتابع x والمتحول y

من الشكل

$$x' + P(y) x = Q(y)$$

الحل :

$$y x' = x + y^2 \quad ; \quad dy \neq 0$$

$$x' - \frac{1}{y} x = y \quad ; \quad y \neq 0$$

وهي تقبل عامل تكميل من الشكل :

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{\ln \frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة :

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{1}{y^2}\,x\,dy = dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = dy \Rightarrow \int$$

$$\frac{x}{y} = y + c \Rightarrow \boxed{x = y(y+c)}$$

تمرين (٨) : $x = x(y)$

$$\left(\sin^2 y + x\frac{\cos y}{\sin y}\right) y' = 1$$

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = x' = \frac{dx}{dy}$$

الحل :

$$\sin^2 y + x\,\frac{\cos y}{\sin y} = x'$$

$$x' - \frac{\cos y}{\sin y}\,x = \sin^2 y$$

وهي معادلة تفاضلية خطية للتابع x والمتحول y .
وهي تقبل عامل تكميل :

$$\mu = e^{-\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy}$$

$$\mu = e^{\ln \frac{1}{\sin y}} = \frac{1}{\sin y}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة :

$$\frac{1}{\sin y}dx - \frac{\cos y}{\sin y}x\,dy = \sin y\,dy$$

$$d\left(\frac{x}{\sin y}\right) = d(-\cos y)$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad \frac{x}{\sin y} \cancel{-} + \cos y = c$$

ومنه الحل العام هو:

$$x = \sin y(-\cos y + c)$$

حيث c ثابت اختياري.

- المعادلات التي ترد إلى خطية :

① معادلة برنولي :

إن الشكل العام لمعادلة برنولي هو:

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{n}$$

حيث $n \neq 1$ & $n \neq 0$

وهي معادلة تفاضلية غير خطية (لأن y مرفوعة للقوة n)

⊛ طريقة حل معادلة برنولي:

① نقسم طرفي المعادلة على y^{n} $\quad y'$

② نفرض أن

$$z = y^{1-n}$$

ونبدل في المعادلة بعد إيجاد z'

③ نحصل على معادلة خطية نحلها بالطرق السابقة.

ملاحظة هامة

1- عندما $n > 0$ ~~(...)~~ فإن $y=0$ ليس حل المعادلة برنولي

2- عندما $n > 1$ فإن $y=0$ هو حل خاص لمعادلة برنولي.

3- عندما $0 < n < 1$ فإن $y=0$ هو حل شاذ لمعادلة برنولي.

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' - \frac{1}{x}\,y = e^{x}\,y^{2}$$

الحل: إن هذه المعادلة هي معادلة برنولي من أجل $\boxed{n=2}$

نقسم طرفي المعادلة على $y^2 \neq 0$ فنجد:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x} y^{-1} = e^x$$

نفرض أن $Z = y^{-1}$

$$\Rightarrow Z' = -y^{-2} \cdot y' \Rightarrow$$

$$-Z' = \frac{y'}{y^2}$$

نبدل في المعادلة:

$$-Z' - \frac{1}{x} Z = e^x$$

$$* \quad Z' + \frac{1}{x} Z = -e^x$$

وهي معادلة خطية

التابع Z والمتحول x عامل التكامل هو:

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \qquad \mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

نضرب طرفي المعادلة * بعامل التكامل فتصبح تامة

$$x\,dZ + Z\,dx = -xe^x dx$$

تجزئة

$$d(x.Z) = d(-xe^x + e^x)$$

$$\Rightarrow \int$$

$$x.Z = -xe^x + e^x + c$$

$$\frac{x}{y} = -xe^x + e^x + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{(1-x)e^x + c}}$$

وهو الحل العام المطلوب

وظيفة : أوجد الحل العام للمعادلات الآتية :

1) $y' - y = x y^5$.

حل المعادلة 2) $y' + \frac{x}{1-x^2} y = x\sqrt{y}$

3) $y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{2y}$

تمرين أوجد الحل العام للمعادلات على اعتبار $x = x(y)$
و y هو المتحول.

4) $y' \sin y \, x^3 = x y' - 2y$

5) $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$

تمرين (1)

$$y' - y = x y^5$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير خطية
وهي معادلة برنولي حيث $n=5$
نقسم الطرفين على $y^5 \neq 0$ فنجد:

$$\frac{y'}{y^5} - y^{-4} = x \qquad (1)$$

نفرض أن:

$$Z = y^{-4} \Rightarrow Z' = -4 y^{-5} y'$$

$$\frac{y'}{y^5} = \frac{-1}{4} Z'$$

نبدل في المعادلة (1)

$$-\frac{1}{4} Z' - Z = x$$

نضرب الطرفين بـ -4

$$Z' + 4 Z = -4x$$

وهي معادلة خطية للتابع Z والمتحول x نقبل عامل تكميل:

$$\mu = e^{\int 4 dx} = e^{4x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة.

$$e^{4x} dz + 4 e^{4x} z dx = -4 x e^{4x} dx$$

$\Rightarrow$

$$d(e^{4x} z) = d(-4 \underbrace{\int x e^{4x} dx}_{\text{تكامل تجزئة}})$$

$$I = \int x e^{4x} \, dx$$

$$u = x \Longrightarrow du = dx$$

$$e^{4x} dx = dv \Longrightarrow v = \frac{1}{4} e^{4x}$$

$$\Longrightarrow$$

$$I = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx$$

$$I = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x}$$

نبدل في المعادلة:

$$d(e^{4x} \cdot Z) = d\left(-x e^{4x} + \frac{1}{4} e^{4x}\right)$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow}$$

$$e^{4x} \cdot Z = -x e^{4x} + \frac{1}{4} e^{4x} + c$$

$$Z = -x + \frac{1}{4} + c e^{-4x}$$

$$\frac{1}{y^4} = \frac{1}{4} - x + c e^{-4x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y^4 \left(\frac{1}{4} - x + c e^{-x}\right) = 1}$$

وهو الحل العام للمعادلة.

• <u>مناقشة الجذور</u>

$y = 0$ وهو حل خاص للمعادلة.

لأننا نستطيع الحصول عليه من الحل العام بتعويضنا $c = \pm\infty$

تمرين (2)

$$y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = x\sqrt{y}$$

الحل:

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير خطية.

وهي معادلة برنولي حيث $n=\frac{1}{2}$

نقسم الطرفين على $y^{\frac{1}{2}} \neq 0$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{x}{1-x^2}\, y^{\frac{1}{2}} = x \qquad (1)$$

نفرض أن

$$Z = y^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow Z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = Z' \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2Z'$$

نبدل في المعادلة (1) فنجد:

$$2Z' + \frac{x}{1-x^2}\, Z = x$$

نقسم على (2)

$$Z' + \frac{x}{2(1-x^2)}\, Z = \frac{x}{2}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية للتابع Z والمتحول x ومنه عامل تكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{x}{2(1-x^2)}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{x}{(1-x^2)}\,dx}$$

$$\mu = e^{-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}$$

$$d\left(\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\right) = \frac{-\frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x)}{(1-x^2)^{1/2}} = \quad 2x$$

$\frac{1}{4} = 1 \cdot$

نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكميل فتصبح تامة:

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\,dz + \frac{x}{2(1-x^2)^{5/4}}\,z\,dx = \frac{x}{2(1-x^2)^{1/4}}$$

$$d\left(\frac{z}{(1-x^2)^{1/4}}\right) = d\left(\int \frac{x}{2(1-x^2)^{1/4}}\right) \quad *$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\,dx$$

نفرض أن $\quad 1-x^2 = t \Rightarrow$

$$-2x\,dx = dt$$

$$\Longrightarrow \quad x\,dx = -\frac{1}{2}dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{-\frac{1}{2}\,dt}{t^{1/4}}$$

$$I = -\frac{1}{4}\int t^{-1/4}\,dt$$

$$\cancel{I = -\frac{1}{4}\int} \Longrightarrow \quad I = -\frac{1}{4}\,\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}$$

$$I = -\frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\,(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$$

$$I = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$$

ومنه نعوض في *

$$\frac{Z}{(1-x^2)^{1/4}} = \frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}} + C$$

$$Z = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{4}} + c(1-x^2)^{1/4}$$

$$\sqrt{y} = \frac{-1}{3}(1-x^2) + c\sqrt[4]{(1-x^2)}$$

$$\boxed{y = \left(\frac{-1}{3}(1-x^2) + c\sqrt[4]{1-x^2}\right)^2}$$

وهو الحل العام للمعادلة

<u>مناقشة الجذور:</u>

$y=0$ هو حل شاذ لأنه لا يمكن الحصول عليه بإعطاء أي قيمة للثابت (c).

<u>تمرين (3)</u>

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2y}$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية غير خطية من المرتبة الأولى وهي معادلة برنولي $n = -1$

فمع $y^{-1} \neq 0$ (نضرب بـ y)

$$yy' - \frac{1}{x}y^2 = \frac{1}{2}$$

نفرض أن

$$Z = y^2 \Rightarrow 2yy' = Z' \Rightarrow$$

$$yy' = \frac{1}{2}Z'$$

نبدل في المعادلة ،

$$\frac{1}{2} z' - \frac{1}{x} z = \frac{1}{2}$$

$$z' - \frac{2}{x} z = 1$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى

تقبل عامل تكميل

$$\mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة :

$$\frac{1}{x^2} dz - \frac{2}{x^3} z\, dx = \frac{1}{x^2} dx$$

$$d\left(\frac{z}{x^2}\right) = d\left(\frac{-1}{x}\right) \overset{\int}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{z}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$$

$$z = -x + cx^2 \Longrightarrow \boxed{y^2 = -x + cx^2}$$

وهو الحل العام المطلوب .

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$$

تمرين (4) على اعتبار أن x هو التابع و y هو المتحول :

حل بطريقة عوامل التكامل أي ثابتة

$$y' \sin y\, x^3 = x y' - 2y$$

الحل :

$$y' (\sin y\, x^3 - x) = -2y$$

$$\frac{1}{x'} (\sin y\, x^3 - x) = -2y$$

$$-2y\, x' = \sin y\, x^3 - x$$

$$2y\, x' - x = -(\sin y)\, x^3$$

نقسم على $2y \neq 0$

$$x' - \frac{1}{2y} x = -\frac{(\sin y)\, x^3}{2y}$$

هي معادلة برنولي للتابع x والمتحول y من أجل $n=3$

نقسم على $x^3 \neq 0$

$$\frac{x'}{x^3} - \frac{1}{2y} x^{-2} = -\frac{\sin y}{2y} \qquad (1)$$

نفرض أن : $Z = Z(y)$ حيث

$$Z = x^{-2} \Rightarrow Z' = -2 x^{-3} x'$$

$$\frac{x'}{x^3} = -\frac{1}{2} Z'$$

نبدل في المعادلة (1)

$$-\frac{1}{2} Z' - \frac{1}{\cancel{2}y} Z = \frac{-\sin y}{2y}$$

وهي معادلة خطية للتابع z والمتحول y وتقبل عامل تكميل من الشكل:

$$\mu = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة.

$$y\,dz + z\,dy = \sin y\,dy$$

$$\Longrightarrow \quad d(y \cdot z) = d(-\cos y)$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad y \cdot z = -\cos y + c \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{y}{x^2} = -\cos y} \Longrightarrow \quad \Longrightarrow y = (c - \cos y)\,x^2$$

وهو الحل العام المطلوب.

مناقشة الجذور

$y = 0$ وهو حل خاص للمعادلة.

تمرين (5): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية على اعتبار x هو التابع و y هو المتحول:

$$(2x^2 \cdot y\ln y - x)\, y' = y$$

الحل:

$$(2x^2 \cdot y\ln y - x)\,\frac{1}{x'} = y$$

$$y\, x' = (2x^2 \cdot y\ln y - x)$$

$$y\, x' + x = 2y\ln y\; x^2$$

نقسم على $y \neq 0$

$$x' + \frac{1}{y}x = (2\ln y)\, x^2$$

وهي معادلة نحو برنولي

من أجل x هو تابع و y هو المتحول حيث $\alpha = 2$

نقسم على $x^2 \neq 0$

$$\frac{x'}{x^2} + \frac{1}{y}x^{-1} = 2\ln y$$

نفرض أن:

$$Z = x^{-1} \Rightarrow Z' = x^{-2}x' \Rightarrow \frac{x'}{x^2} = -Z'$$

نبدل:

$$-Z' + \frac{1}{y}Z = 2\ln y$$

$$Z' - \frac{1}{y}Z = -2\ln y$$

وهي معادلة خطية تقبل عامل تكامل من الشكل

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln\frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فنحصل على

$$\frac{1}{y}\, dz - \frac{1}{y^2}\, dy = 2 \ln y \frac{dy}{y} \qquad -2\int \ln y \frac{dy}{y}$$

$$d\left(\frac{z}{y}\right) = d\left(-2\int \ln y \frac{dy}{y}\right)$$

$$I = \int \ln y \frac{dy}{y}$$

نفرض أن

$$\ln y = t$$

$$dt = \frac{dy}{\ln y}$$

$$I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\ln y)^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{z}{y} = -(\ln y)^2 + c$$

$$\frac{1}{xy} = -(\ln y)^2 + c$$

$$\boxed{x \cdot y\left[-(\ln y)^2 + c\right] = 1}$$

وهو الحل العام المطلوب.

سؤال نظري دورة :

حول المعادلة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية خطية :

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$$

حيث

$$n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1$$

الحل :

نقسم طرفي المعادلة على $y^n \neq 0$ فنجد .

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

$$y' \cdot y^{-n} + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

نضع :

$$Z = y^{1-n} \quad ; \quad Z = Z(x)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد :

$$Z' = (1-n)\,y^{1-n-1} \cdot y' = (1-n)\,y^{-n} \cdot y'$$

$$y^{-n}\,y' = \frac{Z'}{1-n}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن :

$$\frac{1}{1-n}\,Z' + p(x)\,Z = q(x)$$

نضرب الطرفين بـ $(1-n)$

$$Z' + (1-n)\,p(x)\,Z = (1-n)\,q(x)$$

(زيادة) نفرض أن :

$$p_1(x) = (1-n)\,p(x)$$

$$q_1(x) = (1-n)\,q(x)$$

$$\boxed{Z' + p_1(x)\,Z = q_1(x)}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية تقبل عامل تكامل من الشكل :

$$\mu(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}$$

2- معادلة ريكاتي:

وهي معادلة من الشكل: «هامة»

$$y' = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + R(x)$$

حيث:

$$R(x) \neq 0 \quad , \quad p(x) \neq 0$$

وهي معادلة تفاضلية غير خطية.

ملاحظة:

لو كانت $p(x) = 0$ لأصبحت المعادلة خطية.

لو كانت $R(x) = 0$ لأصبحت المعادلة معادلة برنولي.

مثال:

$$y' = x\,y^2 + 2\,e^x\,y + \sin x$$

* طريقة حل معادلة ريكاتي علم حل خاص واحد لها:

1- يجب معرفة حل خاص ولكن:

$$y_1 = y_1(x)$$

وهو إما أن يعطى في نص السؤال

أو نحصل عليه بالتجريب.

2- نفرض أن: $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$ حيث $z = z(x)$

3- نبدل في المعادلة التفاضلية المفروضة ونحسب، فتصبح خطية.

4- نوجد الحل العام للمعادلة الخطية الناتجة ونبدل الحل في الزمهلة:

$$y = y_1 + \frac{1}{Z}$$

Z: حل المعادلة الخطية.

- تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' - 2xy + y^2 + x^2 - 1 = 0$$

علماً أن لها حلاً خاصاً على شكل كثير حدود من الدرجة الأولى لـ x:

الحل:

نلاحظ أن هذه المعادلة هي معادلة ريكاتي

ولإيجاد حلها العام يجب معرفة حل خاص واحد على الأقل

وبما أن شكل الحل الخاص هو:

$$y = ax + b \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y' = a$$

نبدل في المعادلة:

$$a - 2x(ax+b) + (ax+b)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$a - 2ax^2 - 2bx + a^2x^2 + 2abx + b^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 + (2ab - 2b)x + a + b^2 - 1 = 0$$

بالمطابقة بالنسبة لأمثال x نجد أن:

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0$$

$$2ab - 2b = 0$$

$$a + b^2 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow a = 1 \quad , b = 0$$

إذن الحل الخاص : $y = x$

نفرض إذن :

$$y = x + \frac{1}{Z}$$

$$; \quad Z = Z(x)$$

$$y' = 1 - \frac{Z'}{Z^2}$$

نبدل في المعادلة التفاضلية المعروضة فنجد :

$$1 - \frac{Z'}{Z^2} - 2x\left(x + \frac{1}{Z}\right) + \left(x + \frac{1}{Z}\right)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$1 - \frac{Z'}{Z^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{\frac{2x}{Z}} + \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2x}{Z}} + \frac{1}{Z^2} + \cancel{x^2} - 1 = 0$$

$$-\frac{Z'}{Z^2} + \frac{1}{Z^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$Z' = 1$$

$$\Rightarrow Z = x + c$$

ومنه الحل العام للمعادلة هو :

$$\boxed{y = x + \frac{1}{x + c}}$$

سؤال نظري:

حوّل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + R(x)$$

حيث:

$R(x) \neq 0$ & $p(x) \neq 0$ وحيث $y_1 = \epsilon\, y(x)$ حلا خاصا لها.

إلى معادلة خطية:

الحل

لنضع $Z = Z(x)$; $y = y_1 + \dfrac{1}{Z}$

$$y' = y_1' - \frac{Z'}{Z^2}$$

نبدل في المعادلة المفروضة:

$$y_1' - \frac{Z'}{Z^2} = p(x)\left(y_1 + \frac{1}{Z}\right)^2 + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{Z}\right) + R(x)$$

$$y_1' - \frac{Z'}{Z^2} = p(x)y_1^2 + \frac{2y_1 p(x)}{Z} + \frac{p(x)}{Z^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{Z} + R(x)$$

$$\underline{y_1'}Z^2 - Z' = \underline{p(x)y_1^2}Z^2 + 2y_1 p(x)Z + p(x) + \underline{q(x)y_1}Z^2 + q(x)Z + \underline{R(x)}Z^2$$

$$Z^2\underbrace{\left[y_1' - p(x)y_1^2 - q(x)y_1 - R(x)\right]}_{\text{0 لأن } y_1 \text{ حل للمعادلة ريكاتي}} - Z' = \left[2y_1 p(x) + q(x)\right]Z + p(x)$$

$$Z' + \left[2y_1 p(x) + q(x)\right]Z = -p(x)$$

لنضع:

$$2p(x)y_1 + q(x) = \tilde{p}(x)$$

$$-p(x) = \tilde{q}(x) \Rightarrow \boxed{Z' + \tilde{p}(x)\,Z = q(x)}$$

وهي معادلة خطية

نظرية : لتكن المعادلة :

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + R(x)$$

حيث

$R(x) \neq 0$ ، $p(x) \neq 0$

وكان : $y = y_1(x)$ ، $y = y_2(x)$

حلين خاصين لهذه المعادلة فإن الحل العام يعطى بالعلاقة

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = c\, e^{\int (y_1 - y_2) p(x)\, dx}$$

هام للحفظ

الحل :

بما أن $y = y_1(x)$ ، $y = y_2(x)$

حلين خاصين للمعادلة

فهما يحققان

$$y_1' = p y_1^2 + q y_1 + R \quad \text{---} \ (1)$$

$$y_2' = p y_2^2 + q y_2 + R \quad \text{---} \ (2)$$

ومنه :

$$y' - y_1' = p(y^2 - y_1^2) + q(y - y_1)$$

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} = p(y + y_1) + q \quad \text{---} \ (3)$$

وبالمثل :

$$\frac{y' - y_2'}{y - y_2} = p(y + y_2) + q \quad \text{---} \ (4)$$

من (3) و (4) نجد أن :

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = p(y + y_1) - p(y + y_2)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = p(y_1 - y_2)$$

$$\ln\left|\frac{y - y_1}{c}\right| - \ln|y - y_2| = \int (y_1 - y_2)\, p(x)\, dx$$

$$\ln\left|\frac{\frac{y - y_1}{y - y_2}}{c}\right| = \int (y_1 - y_2)\, p(x)\, dx$$

ومنه:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = c\, e^{\int (y_1 - y_2) p(x)\, dx}$$

تمرين هام (دورة):

$$x y' - y + y^2 - x^2 = 0$$

علما أنه تقبل حلا خاصا من الشكل:

$$y = ax + b \qquad ; a \neq 0.$$

الحل:

بما أن $y = ax + b$ حل خاص لهذه المعادلة

فهو يحققها

$$y' = a$$

$$\cancel{ax} - \cancel{ax} - b + a^2x^2 + 2ax + b^2 - x^2 = 0$$

$$(a^2 - 1)\, x^2 + 2ax + b^2 - b = 0$$

$$a^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

$$2ab = 0 \qquad (2)$$

$$b^2 - b = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = -x \end{cases}$$

$$y' = -\frac{1}{x} y^2 + \frac{1}{x} y + x$$

$$P(x) = \frac{-1}{x}$$

$$\frac{y-x}{y+x} = c\, e^{\int -\frac{1}{x} 2x \, dx}$$

تصحيح $-\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + c$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y-x}{y+x} = c\, e^{-2\int dx} = c\, e^{-2x}$$

$$y - x = c\, e^{-2x} (y + x)$$

$$\boxed{(y-x)\, e^{2x} = c\,(y+x)}$$

وهو الحل العام المطلوب.

$$(y-x) = \left(c\, e^{-\frac{x^2}{2}+c_1}\right)(y+x)$$

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + 2y e^{x} - y^{2} = e^{2x} + e^{x}$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة ريكاتي ولإيجاد الحل العام يجب معرفة حل خاص لها ونحصل عليه بالتجريب وهو:

$$y_1 = e^{x}$$

حل خاص لهذه المعادلة لأنه يحول المعادلة إلى مطابقة

$$y_1 = e^{x} \Longrightarrow y_1' = e^{x}$$

$$e^{x} + e^{2x} = e^{2x} + e^{x}$$

ومنه

$y_1 = e^{x}$ حل خاص للمعادلة.

نفرض أن:

$$y = e^{x} + \frac{1}{z} \quad , \quad z = z(x)$$

$$y' = e^{x} - \frac{z'}{z^{2}}$$

$$e^{x} - \frac{z'}{z^{2}} + 2e^{2x} + \frac{2e^{x}}{z} - e^{2x} - \frac{2e^{x}}{z} - \frac{1}{z^{2}} - e^{2x} - e^{x} = 0$$

$$\frac{-z'}{z^{2}} - \frac{1}{z^{2}} = 0$$

$$\Rightarrow z' = -1 \Rightarrow dz = -dx \overset{\int}{\Rightarrow} z = -x + c$$

ومنه الحل العام:

$$y = e^{x} + \frac{1}{-x + c}$$

تمرين: لتكن المعادلة

$$xy' - (2x+1)y + y^2 + x^2 = 0$$

① تحقق من أن $y = x$ حل خاص للمعادلة

② أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

الحل:

①

$$y = x \Longrightarrow y' = 1$$

$$x - (2x+1)x + x^2 + x^2 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

إذن $y = x$ حل خاص

② إن هذه المعادلة هي معادلة ريكاتي ولإيجاد الحل العام نفرض

$$y = x + \frac{1}{Z} \quad ; \quad Z = Z(x)$$

$$y' = 1 - \frac{Z'}{Z^2}$$

$$x - x\frac{Z'}{Z^2} - (2x+1)\left(x + \frac{1}{Z}\right) + \left(x + \frac{1}{Z}\right)^2 + x^2 = 0$$

$$-x\frac{Z'}{Z^2} - \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} = 0$$

$$-xZ' - Z + 1 = 0$$

$$xZ' = 1 - Z$$

$$\frac{dZ}{1-Z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln\frac{c}{1-Z} = \ln x$$

$$(1-Z)\,x = c \Longrightarrow Z = \frac{c+x}{x} \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{x}{c+x}}$$

تمرين:

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$$

إذن م.ت هي معادلة ريكاتي ولإيجاد حلها العام يجب معرفة حل خاص واحد على الأقل

وليكن $y = \frac{1}{x}$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$3 \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

إذن $y = \frac{1}{x}$ حل خاص

ولإيجاد الحل العام نفرض

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

نبدل في معادلة تفاضلية:

$$\frac{\cancel{-3}}{x^2} - \frac{3z'}{z^2} + \frac{\cancel{1}}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} + \frac{\cancel{2}}{x^2} = 0$$

$$\frac{-3z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz} = 0$$

$$-3z' + \frac{2}{x} z = -1$$

$$z' - \frac{2}{3x} z = \frac{1}{3}$$

معادلة خطية مرتبة أولى :

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{3}x\,dx} = e^{-\ln x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

$$\frac{dZ}{x^{2/3}} - \frac{2}{3x}\frac{1}{x^{2/3}}Z\,dx = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{2/3}}dx$$

$$d\left(\frac{Z}{x^{2/3}}\right) = d\left(\frac{1}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\frac{Z}{x^{2/3}} = x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$\boxed{Z = x + C\,x^{2/3}}$$ وهو الحل العام المطلوب

$$\boxed{y = x + \frac{1}{x + C\,x^{2/3}}}$$

وظيفة

أوجد الحل العام للمعادلة إذا علمت أنه تقبل حل خاص

$$y = \frac{a}{x}$$

① $4y' + y^2 + \frac{4}{x^2} = 0$

② $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$

$$y = ax + b$$ تن

1) $xy' + (2x+1)y - y^2 - x^2 - 2x = 0$

2) $xy' + y^2 - 3y + 4x - 4x^2 = 0$

تمرين (1) : $4y' + y^2 + \frac{4}{x^2} = 0$

الحل : $y = \frac{a}{x}$

$$y' = \frac{-a}{x^2}$$

نبدل في المعادلة :

$$4\left(\frac{-a}{x^2}\right) + \frac{a^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$(a-2)^2 = 0 \Longrightarrow a = 2$$

$y = \frac{2}{x}$ هو حل خاص للمعادلة.

نفرض أن : $Z = Z(x)$ ، $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{Z}$

$$y' = \frac{-2}{x^2} - \frac{Z'}{Z^2}$$

نبدل في المعادلة

$$\frac{-8}{x^2} - \frac{4Z'}{Z^2} + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{Z}\right)^2 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\cancel{\frac{-8}{x^2}} - \frac{4Z'}{Z^2} + \cancel{\frac{4}{x^2}} + \frac{4}{xZ} + \frac{1}{Z^2} + \cancel{\frac{4}{x^2}} = 0$$

$$-4Z' + 4\frac{1}{x}Z + 1 = 0$$

$$\boxed{Z' - \frac{1}{x}Z = \frac{1}{4}}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية للتابع Z والمتحول x. وغير متجانسة (من مرتبة أولى)

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

ونقبل عامل تكميل من الشكل

$$\mu = e^{\int \frac{-dx}{x}} = e^{\ln \frac{1}{x}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x}$$

نضرب الطرفين بعامل التكميل فتصبح المعادلة تامة:

$$\frac{1}{x} dz - \frac{1}{x^2} z dx = \frac{1}{4x} dx$$

$$d\left(\frac{z}{x}\right) = d\left(\frac{1}{4} \ln|x|\right)$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \frac{z}{x} = \frac{1}{4} \ln|x| + c$$

$$z = \frac{x}{4} \ln|x| + cx$$

ومنه الحل العام:

$$\boxed{y = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{x}{4} \ln|x| + cx}}$$

تمرين (2)

الحل

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

$$y = \frac{a}{x}$$

$$y' = \frac{-a}{x^2}$$

$$\frac{-a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{2}{x}$$

$$y_2 = \frac{-1}{x}$$

حلين خاصين للمعادلة :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = c\, e^{\int p(x)(y_1 - y_2)\, dx}$$

$$\frac{y - \frac{2}{x}}{y + \frac{1}{x}} = c\, e^{\int -1\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right) dx}$$

$$\frac{y - \frac{2}{x}}{y + \frac{1}{x}} = c\, e^{\int \frac{-3}{x} dx} = c\, e^{-3\int \frac{dx}{x}} = c\, e^{\ln \frac{1}{x^3}}$$

$$\frac{y - \frac{2}{x}}{y + \frac{1}{x}} = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{xy-2}{xy+1} = \frac{c}{x^2} \Longrightarrow$$

$$(xy-2)\,x^2 = (xy+1)\,c$$

$$x^3y - 2x^2 = cxy + c \Longrightarrow$$

$$(x^3 - cx)y = c + 2x^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{2x^2+c}{x^3+cx}}$$

وهو الحل العام المطلوب.

تمرين (3):

$$xy' + (2x+1)y - y^2 - x^2 - 2x = 0$$

$$y = ax+b$$

الحل:

$$y' = a$$

$$ax + (2x+1)(ax+b) - (ax+b)^2 - x^2 - 2x = 0$$

$$ax + 2ax^2 + 2bx + ax + b - a^2x^2 - 2abx + b^2 - x^2 - 2x = 0$$

$$(2a - a^2 - 1)\,x^2 + (2a + 2b - 2ab - 2)x + b - b^2 = 0$$

$$-a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$2a + 2b - 2ab - 2 = 0 \Rightarrow 2 + 2b - 2b - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$b - b^2 = 0 \Rightarrow b(1-b) = 0 \Rightarrow$$

إما $\boxed{b=1}$ أو $\boxed{b=0}$

$$y_1 = x$$
$$y_2 = x + 1$$

إذاً المعادلة حليه خاصين

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = c\, e^{\int p(x)\,(y_1 - y_2)\,dx}$$

$$\cancel{\frac{y-y_1}{y-y_2} = c\, e^{\int \frac{1}{x}}}$$

$$\frac{y-x}{y-x-1} = c\, e^{\int \frac{1}{x}(x - x - 1)\,dx}$$

$$\frac{y-x}{y-x-1} = c\, e^{\int \frac{-dx}{x}} = c\, e^{\ln \frac{1}{x}}$$

$$\frac{y-x}{y-x-1} = \frac{c}{x}$$

$$c(y-x-1) = xy - x^2$$

$$(x-c)\,y = x^2 - cx - c \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{x^2 - cx - c}{x-c}} \quad y = \frac{-cx(-\frac{x}{c} + 1) - c}{-c(1 - \frac{x}{c})}$$

$$= x + \frac{1}{1 - \frac{x}{c}}$$

ملاحظة

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x+1 \\ y_2 = x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y-x-1}{y-x} = c\, e^{\int \frac{1}{x}(\cancel{x} + 1 - \cancel{x})\,dx}$$

$$1 - \frac{1}{y-x} = c\, e^{\ln x} \;\therefore\; 1 - \frac{1}{y-x} = cx$$

$$\frac{1}{y-x} = 1 - cx \Rightarrow y - x = \frac{1}{1-cx} \Rightarrow y = x + \frac{1}{1-cx}$$

تمرين (4) $xy' + y^2 - 3y + 4x - 4x^2 = 0$

$$y = ax + b$$

$$y' = a$$

$$ax + (ax+b)^2 - 3(ax+b) + 4x - 4x^2 = 0$$

$$ax + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 3ax - 3b + 4x - 4x^2 = 0$$

$$a^2 - 4)x^2 + (2ab - 2a + 4)x + b^2 - 3b = 0$$

$$a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$
$$2ab - 2a + 4 = 0$$
$$b^2 - 3b = 0$$

$$a = 2 \Longrightarrow b = 0$$
$$a = -2 \Longrightarrow b = 2$$
$$a = -1 \Longrightarrow b = 3$$

وبالتالي يوجد ثلاثة حلول خاصة :

$$y_1 = 2x$$
$$y_2 = -2x + 2$$

$$y_3 = -x + 3$$

ونعلم أنه إذا كان للمعادلة ريكاتي ثلاثة حلول خاصة فإنه الحل العام يعطى بالعلاقة :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = c\,\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

التكامل العام عندما نكتب الحل بشكل ضمني أي لا يمكن فصل المتغيرات

المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى وغير المحلولة للمشتقة.

ان الشكل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وغير المحلولة بالنسبة للمشتقة هو :

$$F(x,y,y')=0 \qquad ; \quad y=y(x)$$

طرق حل المعادلات من هذا النمط :

1- المعادلات التفاضلية التي يمكن ردها إلى محلولة لـ y' :

لتكن المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'^{n}+A_1(x,y)\,y'^{\,n-1}+\dots\dots+A_n(x,y)=0$$

في بعض الأحيان يمكن رد هذه المعادلة إلى معادلة محلولة للمشتقة إذا أمكن كتابتها بالشكل :

$$[y'-f_1(x,y)][y'-f_2(x,y)]\dots\dots[y'-f_n(x,y)]=0$$

في هذه الحالة نحصل على n معادلة محلولة للمشتقة
من أجل إيجاد الحل العام (التكامل العام) للمعادلة المعروضة نوجد الحل العام لكل من هذه المعادلات فيكون الحل العام هو جداء الحلول.

تمرين (1) :

أوجد الحل العام (التكامل العام) للمعادلة :

$$y'^2+yy'-x(x+y)=0$$

الحل :

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة للمشتقة ، ويمكن ردها إلى محلولة بالنسبة للمشتقة :

$$\Delta = y^2+4x(x+y) \Rightarrow$$

$$\Delta = y^2+4x^2+4xy = (y+2x)^2$$

إما

$$y' = \frac{-y + (y + 2x)}{2} \Rightarrow \boxed{y' = x}$$

أو

$$y' = \frac{-y - y - 2x}{2} \Rightarrow \boxed{y' = -y - x}$$

ومنه المعادلة تكتب بالشكل:

$$(y' - x)(y' + y + x) = 0$$

إما $y' = x$ معادلة د رمية من المرتبة الأولى بمتحولات منفصلة معادلة:

$$\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \boxed{y = \frac{x^2}{2} + c}$$

أو

$$y' + y + x = 0$$

$$y' + y = -x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى تقبل عامل تكميل من الشكل:

$$\mu = e^{\int dx} = e^x$$

$$e^x dy + e^x y\, dx = \underbrace{-xe^x dx}_{\text{تكامل بالتجزئة}}$$

$$d(e^x y) = -d(xe^x - e^x)$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} e^x y = -xe^x + e^x + c$$

$$\boxed{y = 1 - x + ce^{-x}}$$

ومنه التكامل العام (الحل) العام للمعادلة المفروضة هو:

$$\boxed{\left(y - \frac{x^2}{2} - c\right)\left(y + x - 1 - ce^{-x}\right) = 0}$$

تمرين (٤):

أوجد التكامل العام للمعادلة:

مرتبة أولى ودرجة ثالثة

$$y'^3 - (x+y)\,y'^2 + x\,y\,y' = 0$$

الحل/

أن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة للمشتقة ويمكن ردها إلى محلولة المشتقة بتفريقها إلى جداء أقواس:

$$y'\left[y'^2 - (x+y)\,y' + x\,y\right] = 0$$

$$y'\,(y'-x)\,(y'-y) = 0$$

إما

$$y' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c}$$

أو

$$y' = x$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{2} + c}$$

أو

$$y' = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln\frac{y}{c} = x \Rightarrow \boxed{y = c\,e^{x}}$$

إذاً التكامل العام للمعادلة هو:

$$\boxed{(y-c)\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)\left(y-c\,e^{x}\right) = 0}$$

حيث

c: ثابت اختياري

تمرين (9): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'^2 + \frac{y}{x} y' - 2\frac{y^2}{x^2} = 0$$

الحل:

ان هذه المعادلة هي معادلة من المرتبة الأولى ومن درجة ثانية وغير محلولة بالنسبة للمشتقة ويمكن ردها الى محلولة للمشتقة.

$$\Delta = \frac{y^2}{x^2} - 4\left(-2\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$\Delta = 9\frac{y^2}{x^2}$$

إما

$$y' = \frac{-\frac{y}{x} + 3\frac{y}{x}}{2} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y}{x}}$$

أو

$$y' = \frac{-\frac{y}{x} - 3\frac{y}{x}}{2} \Rightarrow \boxed{y' = -2\frac{y}{x}}$$

اذاً المعادلة تكتب بالشكل:

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right)\left(y' + 2\frac{y}{x}\right) = 0$$

إما:

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln\frac{y}{c} = \ln x \Rightarrow \boxed{y = cx}$$

أو

$$y' = -2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}$$

$$\ln\frac{y}{c} = \ln\frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x^2}}$$

وبالتالي التكامل العام هو

$$\boxed{(y-cx)\left(y-\frac{c}{x^2}\right)=0}$$

تمارين وطنية:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

① $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

② $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$

③ $xyy'^2 + (x^2+y^2)y' + xy = 0$

④ $yy'^2 + (x-y)y' - x = 0$

ملاحظة:

إذا كانت المعادلة التفاضلية لا تحوي إلا المشتقة y' فقط أي على الشكل:

$$f(y') = 0$$

فإن تكاملها العام يعطى بالشكل:

$$f\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$

مثال: أوجد التكامل العام للمعادلة

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0$$

الحل:

إن هذه المعادلة تحوي y' فقط وبالتالي فإن تكاملها العام ينتج بتعويض كل y' بـ $\frac{y-c}{x}$ أي:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \left(\frac{y-c}{x}\right) + 3 = 0$$

2- المعادلات التفاضلية الخالية من التابع y :

الشكل العام لها:

$$f(x, y') = 0 \quad \text{——— } ①$$

طريقة حل هذا النوع من المعادلات فهم :

الحل العام لهذا النوع من المعادلات نعطي على الأغلب وسيطياً :

وطريقة إيجاده كما يلي :

نفرض أن

$$x = \varphi(t)$$

حيث $\varphi(t)$ تابع ما لـ t

ثم بالاعتماد على المعادلة ① نحسب y' بدلالة t

ولتكن اباي

$$y' = \psi(t)$$

يمكن أن نفرض في البداية (بشكل معاكس وهو الأسهل)

$$y' = \psi(t)$$

ثم بالإعتماد على المعادلة ① نحسب x بدلالة t ولتكن

$$x = \varphi(t)$$

المهم أنه في كلا الحالتين نحصل على التمثيل الوسيطي

$$x = \varphi(t)$$
$$y' = \psi(t)$$

من المعادلة الأولى نجد :

$$dx = \varphi'(t) \cdot dt$$

ومن المعادلة الثانية نجد :

$$dy = \psi(t)\, dx$$

$$\Longrightarrow dy = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\Longrightarrow y = \int \psi(t)\,.\,\varphi'(t)\,dt$$

فيكون الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\,.\,\varphi'(t)\,dt \end{cases}$$

تمرين (1):

أوجد الحل العام (وسيطياً) للمعادلة:

$$x - y' \ln y' = 0$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة غير محلولة بالنسبة للمشتقة وهي خالية من التابع y ولإيجاد حلها العام نفرض أن:

$$y' = t$$

نبدل في المعادلة فنجد:

التفاضل أي مشتقة

$$x = t \ln t \quad \text{---- (1)}$$

$$dx = (\ln t + 1)\,dt$$

$$y' = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t \Longrightarrow$$

$$dy = t\,dx$$

$$dy = t(\ln t + 1)\,dt$$

$$dy = (t \ln t + t)\,dt$$

$$y = \frac{t^2}{2} + \int t \ln t\,dt$$

فرضنا أن

$$I = \int t \ln t \, dt$$

ولنحسب هذا التكامل بالتجزئة:

$$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$$

$$t\,dt = dv \Rightarrow v = \frac{t^2}{2}$$

$$I = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int t^2 \cdot \frac{dt}{t}$$

$$I = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int t \, dt$$

$$I = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} + c$$

$$y = \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} + c$$

$$y = \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \ln t + c$$

بحكمة أن

إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t^2}{2} \ln t + c \end{cases}$$

ملاحظة: إن اختيار التابع $y' = t$ ليس وحيد

في المثال السابق يمكننا أن نفرض أن

$y' = e^t$

ونحصل على الحل العام وسيطياً بطريقة أخرى

تمرين: أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة:

① $y'(x - \ln y') = 1$

② $x = y' + y'^3$

تمرين:

$$y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$$

المعادلة تكتب بالشكل

$$(y' + 2x)(y' - 4x) = 0$$

إما $y' = -2x$

$$\Rightarrow dy = -2x\,dx$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \boxed{y = -x^2 + c}$$

أو

$$y' = 4x$$

$$\Rightarrow dy = 4x\,dx$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} y = 2x^2 + c$$

⇐ الحل العام للمعادلة هو

$$(y + x^2 - c)(y - 2x^2 - c) = 0$$

تمرين:

$$y'(x - \ln y') = 1$$

الحل:

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة بالنسبة للمشتقة وهي خالية من y وسنوجد الحل العام وسيطيا من أجل ذلك نفرض أن:

$$y' = t \Rightarrow \cancel{dy}$$

نبدل في المعادلة:

$$t(x - \ln t) = 1$$

$$xt - t\ln t = 1$$

$$xt = 1 + t\ln t \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{t} + \ln t} \quad (1)$$

$$\Rightarrow dx = \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt$$

$$y' = t \Rightarrow$$

لدينا:

$$dy = t\,dx \Rightarrow dy = \left(\frac{-t}{t^2} + \frac{t}{t}\right)dt$$

$$\Rightarrow dy = -\frac{1}{t}dt + dt$$

$$dy = \left(\frac{-1}{t} + 1\right)dt$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{t} + 1\right)dt$$

$$\boxed{y = -\ln t + t + c} \quad (2)$$

ومنه الحل العام هو:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \ln t \\ y = t - \ln t + c \end{cases}$$

تمرين:

$$x = y' + y'^3$$

الحل:

إن هذه المعادلة معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الثالثة
وغير محلولة للمشتقة وخالية من التابع y
وسنوجد حلها العام وسيطياً من أجل ذلك نفرض:

$$y' = t \Longrightarrow$$

نبدل في المعادلة:

$$① \quad \boxed{x = t + t^3} \Longrightarrow$$

$$dx = (1 + 3t^2)\, dt$$

$$dy = t\, dx \Longrightarrow$$

$$dy = t(1 + 3t^2)\, dt$$

$$② \quad \boxed{y = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{4} t^4 + c}$$

ومنه الحل العام وسيطياً هو

$$\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{4} t^4 + c \end{cases}$$

3- المعادلات الخالية من المتحول x :

إن الشكل العام لهذه المعادلات هو :

$$F(y, y') = 0$$

لإيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات نسلك نفس الطريق الذي اتبعناه في الحالة السابقة :

حيث نفرض أن

$$y' = \psi(t)$$

ثم نبدل في المعادلة فنجد أن :

$$y = \varphi(t) \qquad ①$$

$$\Rightarrow dy = \varphi'(t)\,dt$$

~~ومنها~~

ولدينا

$$\frac{dy}{dx} = \psi(t)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{\psi(t)}$$

$$dx = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi t}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + c \qquad ②$$

إن المعادلتان ① و ② تمثلان الحل العام وسيطياً.

مثال: أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة:

$$y = y' + \ln y'$$

الحل:

إن هذه المعادلة غير محلولة بالنسبة للمشتقة وهي خالية من المتحول x
ولإيجاد حلها العام نفرض أن:

$$y' = t$$

نبدل في المعادلة:

$$y = t + \ln t \quad (1)$$

$$dy = \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$\frac{dy}{dx} = t$$

$$dx = \frac{dy}{t}$$

$$\cancel{dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt}$$

$$dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$x = \ln t - \frac{1}{t} + c$$

ومنه الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \ln t - \frac{1}{t} + c \\ y = t + \ln t \end{cases}$$

هام جدا

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y = \ln(1 + y'^2)$$

الحل:

إن هذه المعادلة معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة للمشتقة فهي خالية من x ولإيجاد الحل نفرض أن:

$$y' = t$$

نبدل في المعادلة:

$$y = \ln(1+t^2) \quad (1)$$

$$dy = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow$$

$$dx = \frac{dy}{t}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c \quad (2)$$

إذن الحل العام هو:

$$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$$

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y = e^{y'} \, y'^2$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وغير محلولة بالنسبة للمشتقة ولإيجاد حلها العام وسيطياً نفرض:

$$y' = t$$

نبدل في المعادلة

$$y = e^t \cdot t^2 \qquad ①$$

$$dy = (2te^t + e^t t^2)\, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = t \Longrightarrow$$

$$dx = \frac{dy}{t} \Longrightarrow$$

$$dx = (2e^t + te^t)\, dt$$

$$\Longrightarrow x = 2e^t + te^t - e^t + c \qquad ②$$

إذن الحل العام هو:

$$\begin{cases} x = e^t + te^t + c \\ y = t^2 e^t \end{cases}$$

تمرين : أوجد الحل العام وسيطياً :

$$y'^2 + e^y = 1$$

الحل :

ان هذه المعادلة غير محلولة بالمشتقة وهي خالية من التابع x

لإيجاد حلها العام نفرض أن :

$$y' = t$$

نبدل في المعادلة :

$$t^2 + e^y = 1$$

$$e^y = 1 - t^2 \Rightarrow$$

$$y = \ln(1 - t^2) \quad (1)$$

$$dy = \frac{-2t}{1-t^2}\, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow$$

$$dx = \frac{dy}{t} \Rightarrow$$

$$dx = \frac{-2}{1-t^2}\, dt$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad x = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + c \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = \ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right| + c \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$$

تمرين :

$$x - y' \sin y' = 0$$

الحل :

معادلة غير محلولة بالنسبة للمشتقة و قابلة للحل من y و لديها حلا وسيطا نفرض أن :

$$y' = t$$

$$\Rightarrow x = t \sin t \quad (1)$$

$$dx = (\sin t + t\cos t)\, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = t \Rightarrow$$

$$dy = t\, dx$$

$$dy = [t(\sin t + t\cos t)]\, dt$$

$$dy = (t\sin t + t^2 \cos t)\, dt$$

$$y = \int t\sin t\, dt + \int t^2 \cos t\, dt$$

$$I_1 = \int t.\sin t\, dt$$

نفرض أن :

$$t = u \Rightarrow dt = du$$

$$\sin t\, dt = dV$$

$$\Rightarrow$$

$$V = -\cos t$$

$$I_1 = t.\cos t + \int \cos t\, dt$$

$$\boxed{I_1 = -t\cos t + \sin t}$$

$$I_2 = \int t^2 \cos t \, dt \rightarrow$$

$$t^2 = u \Rightarrow 2t\,dt = du$$

$$\cos t\,dt = dv \Rightarrow v = \sin t \Rightarrow$$

$$I_2 = t^2 \sin t - 2\int t \sin t \, dt$$

$$I_2 = t^2 \sin t - 2 I_1$$

$$I_2 = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t \Rightarrow$$

ومنه:

$$y = \underline{-t\cos t} + \underline{\sin t} + t^2 \sin t + \underline{2t\cos t} - \underline{2\sin t} + c$$

$$y = t\cos t - \sin t + t^2 \sin t + c$$

إذن الحل العام هو:

$$\begin{cases} x = t \sin t \\ y = t\cos t - \sin t + t^2 \sin t + c \end{cases}$$

$y' = t \Rightarrow x = \sqrt{1+t^2}$

تمرين: أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة: $x\sqrt{1+y'^2} = y'$

$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$

$1 + tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

الحل:

ان هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية وغير محلولة بالنسبة للمشتقة وهي خالية من التابع y ، ولإيجاد حلها العام وسيطياً نفرض أن:

$$y' = tg\, t$$ حفظ الفرضية

نبدل في المعادلة:

$$x\sqrt{1+tg^2 t} = tg\, t$$

$$x = \frac{tg\, t}{\sqrt{1+tg^2 t}}$$

$$x = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}} = \sin t$$

$$x = \sin t \quad (1)$$

$$\Rightarrow dx = \cos t\, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\, t \Rightarrow dy = tg\, t \cdot \cos t\, dt$$

$$dy = \sin t\, dt \Rightarrow y = -\cos t + c$$

اذن الحل العام هو:

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -\cos t + c \end{cases}$$

$x = \sin t$

$y = -\cos t$

بالتربيع و الجمع نجد

$$\boxed{x^2 + (y - c)^2 = 1}$$

و هو الحل العام ديكارتيا

لإيجاد الحل العام نحذف t

تمرين 2 : أوجد الحل العام وسيطيا للمعادلة :

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1$$

الحل :

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية غير محلولة بالنسبة للمشتقة و خالية من المتحول x و لإيجاد الحل العام وسيطيا نفرض أن

$y' = tg\, t$

$ch^2 - sh^2 = 1$

$1 + sh^2 = ch^2$

$$y' = sh\, t$$

نبدل في المعادلة نجد :

$$y = \sqrt{1 + sh^2 t}$$

لدينا :

$$ch^2 t - sh^2 t = 1 \Rightarrow ch^2 t = 1 + sh^2 t$$

$$y = \sqrt{ch^2 t} \Rightarrow \boxed{y = ch\, t} \quad (1)$$

$$dy = sh\, t\, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{sh\, t}$$

ملاحظة :

$sh\, t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$ch\, t = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$(ch\, t)' = sh\, t$

$(sh\, t)' = ch\, t$

$$dx = \frac{sh\,t}{sh\,t}\,dt$$

$$dx = dt$$

$$x = t + c \quad (3)$$

$\Longrightarrow$

الحل العام وسيطياً :

$$\begin{cases} x = t + c & (1) \\ y = ch\,t & (2) \end{cases}$$

لإيجاد الحل ديكارتياً نأخذ من (1)

$$t = x - c$$

$$y = ch(x - c)$$

وهو الحل العام ديكارتياً.

4- المعادلات التفاضلية القابلة للحل بالنسبة لـ y :
الشكل العام لهذه المعادلات هو : (الحل العام يكون وسيطيا)

$$y = f(x, y')$$

لحل هذا النوع من المعادلات نتبع الخطوات التالية :

أ- نفرض أن :

$$z = z(x) \quad \text{حيث} \quad y' = z$$

فنحصل على

$$y = f(x, z) \qquad ①$$

2- نشتق المعادلة ① بالنسبة لـ x مع تبديل $y' = z$ فنحصل على معادلة تفاضلية للتابع z والمتحول x .

3- نحل المعادلة الناتجة بإحدى الطرق التي مرت معنا سابقا (منفصلة ، خطية ، تامة ـــ) فيكون :

$$z = \varphi(x, c) \qquad ②$$

4- يكون الحل العام وسيطيا

$$\begin{cases} y = f(x, z) \\ z = \varphi(x, c) \end{cases}$$

5- إذا أمكن حذف z بين x & y نحصل على الحل العام ديكارتيا .

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية غير محلولة بالنسبة للمشتقة وغير خالية من x وغير خالية من y وهي محلولة بالنسبة للتابع y لذلك من أجل إيجاد حلها العام نفرض أن

$$y' = Z$$

ثم نبدل في المعادلة:

$$y = Z^2 - xZ + \frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد: (مع اعتبار $Z = Z(x)$)

$$y' = 2ZZ' - Z - xZ' + x$$

$$\Rightarrow$$

$$Z = 2ZZ' - Z - xZ' + x$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{2ZZ'} - 2Z - \underline{xZ'} + x = 0 \Rightarrow 2ZZ' - xZ' - 2Z + x = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$Z'(2Z - x) - (2Z - x) = 0$$

عامل مشترك

$$(2Z - x)(Z' - 1) = 0$$

$$2Z - x \neq 0 \Rightarrow \cancel{Z'}$$

$$Z' = 1 \Rightarrow dZ = dx \Rightarrow Z = x + c$$

إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = Z - c \\ y = Z^2 - xZ + \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

والحل العام ديكارتياً هو

$$y = (x+c)^2 - x(x+c) + \frac{x^2}{2}$$

تمرينة :

أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلات وديكارتياً إن أمكن

1)

$$y = 2y' + y'^2$$ [illegible]

2)

$$y = \frac{1}{2} x y' + \frac{x}{2y'}$$

3)

$$2yy' = xy'^2 + 4x$$

تمرين:

$$y = 2y' + y'^2$$

الحل:

$$y' = Z$$

نبدل في المعادلة:

$$y = 2Z + Z^2 \quad \text{①}$$

باشتقاق (1) بالنسبة لـ x نجد:

$$y' = 2Z' + 2ZZ'$$

$$Z = 2Z' + 2ZZ'$$

$$Z = Z'(2 + 2Z)$$

$$(2 + 2Z)\frac{dZ}{dx} = Z$$

$$dx = \left(\frac{2}{Z} + 2\right)dZ$$

$$\Rightarrow$$

$$x = \ln Z^2 + 2Z + C$$

إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \ln Z^2 + 2Z + C \\ y = 2Z + Z^2 \end{cases}$$

تمرين :

$$y = \frac{1}{2}xy' + \frac{x}{2y'}$$

الحل : نفرض أن $y' = z$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}xz + \frac{x}{2z}} \quad ①$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد أن :

$$y' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}xz' + \frac{2z - 2xz'}{4z^2}$$

$$\cancel{y'} = z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2z} - \frac{xz'}{2z^2}$$

$$2z^3 = z^3 + xz'z^2 + z - xz'$$

$$z^3 - z = xz'(z^2 - 1)$$

$$z(z^2 - 1) = xz'(z^2 - 1)$$

حيث $z^2 - 1 \neq 0$

$$z = xz'$$

$$z = x\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{z}{c} = \ln x \Rightarrow \boxed{z = c.x} \quad ②$$

ومنه الحل العام وسيطياً هو :

$$\begin{cases} z = c.x \\ y = \frac{1}{2}xz + \frac{x}{2z} \end{cases}$$

لإيجاد الحل العام ديكارتيا نحذف الوسيط Z بين المعادلتين السابقتين:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \cdot c + \frac{x}{2c \cdot x}$$

$$\boxed{y = \frac{c}{2}x^2 + \frac{1}{2c}} \quad *$$

سؤال: ما شكل المعادلة التفاضلية الموافقة لها؟

$$y' = cx \Rightarrow c = \frac{y'}{x}$$

نعوض في *

$$y = \frac{\frac{y'}{x}}{2}x^2 + \frac{1}{2\frac{y'}{x}}$$

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 + \frac{x}{2y'}$$

$$y = \frac{1}{2}xy' + \frac{x}{2y'}$$

مناقشة الجذور: أي ايجاد الحلول الشاذة:

$$Z^2 - 1 = 0 \Rightarrow Z^2 = 1 \Rightarrow Z = \pm 1$$

$$\Rightarrow y' = \pm 1$$

إما $\Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx \Rightarrow \boxed{y = x}$

أو $y' = -1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow \boxed{y = -x}$

$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ من أجل $y = x$ & $y' = 1$

$-x = \frac{1}{2}$ من أجل $y = -x$ & $y' = -1$

وهما حلان للمعادلة لأنه عندما نعوضهما في المعادلة نحصل على مطابقة وهما حلان شاذان لأنه لا يمكن الحصول عليهما بإعطاء قيمة الثابت c .

سؤال : حل المعادلة

$$2yy' = xy'^2 + 4x$$

الحل : إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى غير محلولة بالنسبة لـ y' وهي ممكنة الحل بالنسبة لـ y أي نعزل y

$$y = \frac{x}{2}\frac{y'^2}{y'} + \frac{4x}{2y'} \Rightarrow y = \frac{1}{2}xy' + \frac{2x}{y'}$$

$$y' = Z \Rightarrow y = \frac{1}{2}xZ + \frac{2x}{Z}$$

$$y' = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}xZ' + \frac{2Z - 2xZ'}{Z^2}$$

$$Z = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}xZ' + \frac{2(Z - xZ')}{Z^2}$$

نضرب بـ $2Z^2$

$$2Z^3 = Z^3 + xZ^2Z' + 4(Z - xZ')Z^2$$

$$xZ^2Z' + 4Z^3 - 4xZ^2Z' = 0$$

$$4Z^3 + xZ^2Z' - 4xZ^2Z' = 4Z^3 - 3xZ^2Z'$$

$$Z' = 3xZ^2 Z' \Rightarrow -4Z^3 + 3xZ^2Z' = 0$$

$$Z^2(-4Z + 3xZ') = 0$$

$$4Z = 3xZ' \Rightarrow 3xZ' = 4Z \Rightarrow \frac{dZ}{4Z} = \frac{dx}{3x}$$

$$\frac{1}{4}\ln Z = \frac{1}{3}\ln\frac{x}{c} \Rightarrow \frac{1}{4}Z = \frac{1}{3}\frac{x}{c}$$

$$Z = \frac{4}{3}\frac{x}{c}$$

$y = \ldots$

تمرين: أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية ثم ديكارتياً:

$$y = 2xy' + x^2 y'^4$$

الحل:

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة للمشتقة وغير خالية من x وغير خالية من y

نفرض أن

$$y' = z \quad ; \quad z = z(x)$$

نبدل في المعادلة:

$$y = 2xz + x^2 z^4 \quad \text{——} \quad (1)$$

بالاشتقاق (1) بالنسبة لـ x نجد أن

$$y' = 2z + 2xz' + 2xz^4 + 4x^2 z^3 z'$$

$$z = 2z + 2xz' + 2xz^4 + 4x^2 z^3 z'$$

$$z + 2xz' + 2xz^4 + 4x^2 z^3 z' = 0$$

$$z + 2xz' + \cancel{2xz^4} + 2xz^3(z + 2xz') = 0$$

$$(z + 2xz')(1 + 2xz^3) = 0$$

$$1 + 2xz^3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$2xz' = -z$$

$$2x\frac{dz}{dx} = -z \Rightarrow -2\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{x}{c} = \ln\frac{1}{z^2}$$

$$x = \frac{c}{z^2} \quad — (2)$$

إذن الحل العام وسيطياً هو :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{z^2} \\ y = 2xz + x^2 z^4 \end{cases}$$

لإيجاد الحل ديكارتياً نزيل x

$$x z^2 = c \Rightarrow$$

نعوض :

$$z^2 = \frac{c}{x} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{x}}$$

نبدل في المعادلة :

$$y = 2x\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{x}} + x^2\left(\frac{c_1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

$$y = 2x\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{x}} + x^2\frac{c^2}{x^2}$$

$$y = 2x\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x}} + c^2$$

$$y = 2\sqrt{c.x} + c^2 \Rightarrow \boxed{(y - c^2)^2 = 4c.x}$$

مناقشة الجذور ..

$$1 + 2xz^3 = 0$$

$$2xz^3 = -1 \Rightarrow$$

$$z^3 = \frac{-1}{2x} \Rightarrow z = y' = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}\, x^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} . x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} . \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}}$$

وهو حل شاذ للمعادلة : -156-

معادلة لاغرانج:

هي حالة خاصة من المعادلة المحلولة لـ y وهي من الشكل

$$y = xf(y') + g(y')$$

مثال:

$$y = x y'^3 + e^{y'}$$

وتحل بنفس خطوات المعادلة المحلولة لـ y .

تمرين:

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y = xy'^2 + y'^2$$

الحل:

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة للمشتقة وهي من الشكل

$$y = x f(y') + g(y')$$

وهو شكل معادلة لاغرانج

لإيجاد حلها العام نفرض أن

$y' = z$; $z = z(x)$

$$y = x z^2 + z^2 \quad \text{——} \quad (1)$$

باشتقاق (1) بالنسبة لـ x نجد

$$y' = z^2 + 2xz \cdot z' + 2z \cdot z'$$

$$z = z^2 + 2xz \cdot z' + 2z \cdot z'$$

$$1 = z + 2xz' + 2z' \quad (*)$$

$$1 - z = (2x + 2) z'$$

-157-

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{dx}{2x+2}$$

$$\ln \frac{1}{c(1-z)} = \frac{1}{2} \ln (x+1)$$

$$\frac{1}{c(1-z)} = \sqrt{(x+1)} \qquad \sqrt{(x+1)}\,(1-z)\,c = 1$$

$$1 - z = \frac{1}{c\sqrt{}}$$

$$1 - z = \frac{1}{c\sqrt{x+1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{z = 1 - \frac{1}{c\sqrt{x+1}}}$$

ملاحظة: ممكن حل هذه المعادلة (*)
على أنها خطية بالنسبة للتابع x والمتحول z
إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} z = 1 - \dfrac{1}{c\sqrt{x+1}} \Rightarrow x = \dfrac{c^2}{(z-1)^2} - 1 \\ y = x z^2 + z^2 \end{cases}$$

ومنه الحل العام ديكارتياً هو:

$$y = x\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{c}\right)^2$$

مثال

حل المعادلة

$$y'^2 - y'y + e^x = 0$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وغير خطية بالنسبة للمشتقة وهي غير خالية من x وغير خالية من y لذلك نقسم على $y' \neq 0$

$$y' - y + \frac{e^x}{y'} = 0$$

$$\boxed{y = y' + \frac{e^x}{y'}}$$ هي معادلة محلولة لـ y.

نفرض أن $y' = z$; $z = z(x)$

نعوض في المعادلة:

$$\boxed{y = z + \frac{e^x}{y'}} \quad (1)$$

$$z = z' + \frac{e^x z - z' e^x}{z^2}$$

نضرب الطرفين بـ z^2

$$z^3 = z^2 z' + e^x z - z' e^x$$

$$z^2 z' - z^3 + e^x z - z' e^x = 0$$

$$z'(z^2 - e^x) - z(z^2 - e^x) = 0$$

$$(z^2 - e^x)(z' - z) = 0$$

$$z^2 - e^x \neq 0 \Rightarrow$$

$$z' = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = dx \Rightarrow \ln\frac{z}{c} = x$$

$$\Rightarrow \boxed{z = ce^x} \quad (2)$$

إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} Z = ce^{x} & ② \\ y = Z + \dfrac{e^{x}}{Z} & ① \end{cases}$$

لو طلب منا الحل ديكارتياً

نبدل ② في ① أي

$$y = ce^{x} + \frac{e^{x}}{ce^{x}}$$

$$y = ce^{x} + \frac{1}{c}$$

مناقشة الجذور

$$Z^2 = e^{x} \Longrightarrow$$

$$Z = \pm e^{x/2} \Longrightarrow Z = \alpha e^{x/2} \quad ; \quad \alpha = \pm 1$$

$$y' = \alpha e^{x/2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha e^{x/2}$$

$$dy = \alpha e^{x/2}\, dx$$

$$\Longrightarrow$$

$$y = 2\alpha e^{x/2}$$

$$y'^2 - y'y + e^{x} = 0$$

$$\alpha^2 e^{x} - \alpha e^{x/2} \cdot 2\alpha e^{x/2} + e^{x} = 0$$

$$\alpha^2 e^{x} - 2\alpha^2 e^{x} + e^{x} = 0$$

$$(1-\alpha^2)\, e^{x} = 0$$

$$0 = 0$$

وهو حل شاذ لأننا لا نستطيع الحصول عليه من أجل أي قيمة للثابت.

معادلة كليرو :

وهي معادلة من الشكل :

$$y = xy' + f(y')$$

مثال :

$$y = xy' + \sin y'$$

أما المعادلة

$$y = -xy' + \sin y'$$

ليست معادلة كليرو وانما هي معادلة لاغرانج.

سؤال نظري :

أكتب الشكل العام لمعادلة كليرو ثم أثبت أن حلها العام ينتج بتبديل كل y' ب c وأن حلها الشاذ يعطى وسيطياً بالشكل

$$x = -f'(z)$$
$$y = xz + f(z)$$

شريطة أن يكون :

$$f''(z) \neq 0$$

الحل :

إن الشكل العام لمعادلة كليرو هو :

$$y = xy' + f(y')$$

نفرض أن $y' = z$ حيث $z = z(x)$

$$y = xz + f(z)$$

بالاشتقاق بالنسبة ل x نجد

$$\cancel{z} = \cancel{z} + xz' + \frac{d f(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$xz' + f'(z)\, z' = 0$$

$$z'(x + f'(z)) = 0 \Rightarrow x + f'(z) \neq 0$$

-161-

$$z' = 0 \Longrightarrow Z = c$$

إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} Z = c \\ y = xZ + f(Z) \end{cases}$$

والحل العام ديكارتياً:

$$y = cx + f(c)$$

مناقشة الجذور:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -f'(Z) \\ y &= xZ + f(Z) \end{aligned}}$$

وهو الحل الشاذ وسيطياً.

مثال / حل المعادلة:

$$y = xy' - \ln y'$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة كليرو وبالتالي فإن حلها العام ينتج بتبديل كل $y' = c$

ويكون حلها العام

$$y = xc - \ln c$$

ولإيجاد الحل الشاذ نضع $y' = Z$

فتكون

$$y = xZ - \ln Z$$

أما:

$$x = -f'(Z)$$

$$x = -(-\ln Z)' \quad ; \quad f(Z) = -\ln Z$$

$$x = \frac{1}{Z}$$

إذن الحل الشاذ وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{Z} \\ y = xZ + \ln \dfrac{1}{Z} \end{cases}$$

مـ الحل الشاذ ديكارتيا :

$$y = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\boxed{y = 1 + \ln x}$$

تمرين :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(y - xy')^2 - (1 + y'^2)^2 = 0$$

مثال :

$$(y - xy' + 1 + y'^2)(y - xy' - 1 - y'^2) = 0$$

إما

$$y = xy' - 1 - y'^2$$

وهي معادلة كليرو

الحل العام $y = xc - (1 + c^2)$

أو

$$y = xy' + 1 + y'^2$$

وهي معادلة كليرو.

والحل العام هو :

$$y = xc + (1 + c^2)$$

إذن الحل العام للمعادلة هو

$$(y - xc + c_1 + c^2)(y - xc - (1 + c^2)) = 0$$

5- المعادلات القابلة للحل بالنسبة لـ x :
الشكل العام لهذه المعادلة هو:

$$x = f(y, y')$$

الحل العام هو حل وسيطي.
لإيجاد الحل العام وسيطياً نفرض أن:

$$y' = z \;;\; z(x)$$

نبدل في المعادلة:

$$x = f(y, z) \quad \text{---} \; (1)$$

نشتق المعادلة الأخيرة (1) بالنسبة لـ y .
فنجد

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\, f(y,z)}{dy}$$

فنحصل على معادلة من المرتبة الأولى حلها هو.

$$f(y, z, c) = 0 \quad \text{---} \; (2)$$

فيكون الحل الوسيطي هو

$$\begin{cases} x = f(y, z) \\ \varphi(y, z, c) = 0 \end{cases}$$

وللحصول على الحل الديكارتي
نحذف الوسيط z من المعادلة.

تمرين دورة ٨ــ ٩ــ ع

حل المعادلة التفاضلية

$$2x = \frac{y(1-y'^2)}{y'}$$

الحل: ان هذه المعادلة محلولة لـ x لذلك نفرض

$$y' = z \quad , \quad z(x)$$

نبدل في المعادلة فنجد

$$2x = \frac{y(1-z^2)}{z}$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ y نجد:

$$\frac{2dx}{dy} = \frac{[(1-z^2)+y(-2z)z']\,z - zy(1-z^2)}{z^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{2}{z} = \frac{1-z^2}{z} - 2yz' - yz'\,\frac{1-z^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{z} = \frac{1}{z} - z - 2yz' - \frac{yz'}{z^2} + yz'$$

$$\Rightarrow \frac{2}{z} = \frac{1}{z} - z - yz' - \frac{yz'}{z^2}$$

أو

$$\frac{2}{z} = \frac{[(1-z^2)+y(-2z)z']\,z - zy(1-z^2)}{z^2}$$

$$2z = z - z^3 - 2yz^2z' - yz' + yz^2z'$$

$$-z - z^3 - yz^2z' - yz' = 0$$

$$Z(1+Z^2) + yZ'(1+Z^2) = 0$$

$$(1+Z^2)(Z + yZ') = 0$$

$$Z^2+1 \neq 0$$

$$yZ' = -Z$$

$$y\frac{dZ}{dy} = -Z$$

نفصل المتحولات

$$-\frac{dZ}{Z} = \frac{dy}{y}$$

نكامل:

$$\ln\frac{y}{c} = \ln\frac{1}{Z}$$

$$y = \frac{c}{Z}$$

إذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y(1-Z^2)}{Z} & ① \\ y = \dfrac{c}{Z} & ② \end{cases}$$

لإيجاد الحل العام ديكارتياً نبدل ② في ① فنجد

$$Z = \frac{c}{y}$$

وبعد الاختصار والترتيب

$$y^2 = 2cx + c^2$$

وهو الحل العام ديكارتياً

ولا يوجد حلول شاذة لأن

$$Z^2 \neq -1$$

-166-

تمرين: حل المعادلة:

$$y'^3 - 4xy\,y' + 8y^2 = 0$$

الحل:

ان المعادلة محلولة لـ x لأنه اذا قسمنا الطرفين على

$$4yy' \neq 0$$

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'}$$

نفرض أن $y' = z$

لايجاد الحل العام

$$x = \frac{z^2}{4y} + \frac{2y}{z} \quad \text{①}$$

باشتقاق المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ y:

$$\frac{1}{z} = \frac{2zz'(4y) - 4z^2}{16y^2} + \frac{2z - 2yz'}{z^2}$$

نقسم

$$\frac{1}{z} = \frac{zz'}{2y} - \frac{z^2}{4y^2} + \frac{2}{z} - \frac{2yz'}{z^2}$$

ننقل $\frac{1}{z}$ إلى الطرف الآخر:

$$\frac{zz'}{2y} - \frac{z^2}{4y^2} + \frac{1}{z} - \frac{2yz'}{z^2} = 0$$

$$z'\left(\frac{z}{2y} - \frac{2y}{z^2}\right) - \frac{z}{2y}\left(\frac{z}{2y} - \frac{2y}{z^2}\right) = 0$$

$$\left(z' - \frac{z}{2y}\right)\left(\frac{z}{2y} - \frac{2y}{z^2}\right) = 0$$

$$z' = \frac{z}{2y}$$

-167-

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{Z}{2y}$$

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dy}{2y}$$

$$\ln \frac{Z}{c} = \ln \sqrt{y}$$

$$\boxed{Z = c\sqrt{y}}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{Z^2}{4y} + \dfrac{2y}{Z} & \text{---} ① \\ Z = c\sqrt{y} & \text{---} ② \end{cases}$$

نبدل ② في ①

$$x = \frac{c^2 y}{4y} + \frac{2y}{c\sqrt{y}}$$

$$x = \frac{c^2}{4} + \frac{2}{c}\sqrt{y}$$

وهو الحل العام ديكارتياً.

مناقشة الجذور:

$$\frac{Z}{2y} = \frac{2y}{Z^2} \qquad Z^3 = 4y^2$$

$$Z = \sqrt[3]{4}\, y^{2/3}$$

$$y' = \sqrt[3]{4}\, y^{2/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{4}\, y^{2/3}$$

-168-

$$y^{-2/3}\, dy = \sqrt[3]{4}\, dx$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{y^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot 3\, y^{\frac{1}{3}}$$

$$x^3 = \frac{27}{4} y \Rightarrow y = \frac{4}{27} x^3$$

وهو حل شاذ لأننا لا نستطيع الحصول عليه من الحل العام بإعطاء قيم عددية للثابت

$y=0$ هو حل شاذ للمعادلة

تمرين وطنية

حل المعادلة:

1) $y = 2xy' + y^2 y'^3$

2) $x = \frac{y}{y'} \ln y - \frac{y'^2}{y^2}$

المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا
والقابلة لتخفيض مرتبتها .

كل معادلة تفاضلية تحتوي على المتحول والتابع وبعض مشتقاته الأعلى من الأولى فهي معادلة تفاضلية ذات مرتبة عليا .
أي لها الشكل :

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

في الحقيقية لا يوجد طريقة عملية لحل معادلة تفاضلية من المرتبة العليا ولكن هناك حالات يمكن فيها تخفيض مرتبة المعادلة ثم مكاملتها إذا أصبحت من الأشكال المعروفة سابقاً .
ومن هذه الحالات :

الحالة الأولى : المعادلة الخالية من التابع y ، مطلوبة
أي المعادلة من الشكل :

$$f(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

لتخفيض مرتبة هذه المعادلة نفترض :

$$y' = Z \; ; \; Z = Z(x)$$

فيكون :

$$y'' = Z'$$
$$y''' = Z''$$

وهكذا

$$y^{(n)} = Z^{(n-1)}$$

فتصبح المعادلة على الشكل :

$$f(x, Z, Z', \ldots, Z^{(n-1)}) = 0$$

وهي معادلة من المرتبة $(n-1)$ أي :
أخفض مرتبة من المعادلة المعطاة .

مطلوبة

ملاحظة

إذا كانت المعادلة خالية من التابع ومشتقاته حتى المرتبة $(k-1)$

أي من الشكل:

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

عندئذ لتخفيض مرتبة المعادلة نفرض.

$$y^{(k)} = z$$

بالتعويض نحصل على معادلة أخفض مرتبة.

تمرين:

خفض مرتبة المعادلة ~~...~~

ثم أوجد حلها العام

$$(y''')^3 + x y''' - y'' = 0$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة وهي غير خطية و سنحلها بطريقة تخفيض المرتبة ونلاحظ أن هذه المعادلة خالية من التابع y لذلك نفرض أن

$$y'' = z \Rightarrow y''' = z' \quad و \quad z = z(x)$$

نبدل في المعادلة فنجد.

$$(z')^3 + x z' - z = 0 \qquad \text{غير محلولة بالنسبة للمشتق}$$

$$z = x z' + z'^3$$

وهي معادلة كليرو وحلها العام ينتج بتبديل كل z' ب c

$$z' = c \Rightarrow$$

$$z = x c_1 + c_1^3$$

$$y'' = x c_1 + c_1^3$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} c_1 + c_1^3 x + c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{6} c_1 + c_1^3 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

تمرين:

أوجد الحل العام للمعادلة بعد تخفيض مرتبتها

$$y''' + y'' = x^2$$

الحل: إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة - وهي معادلة خطية وغير متجانسة وهي أيضاً خالية من التابع y لذلك لتخفيض مرتبتها نفرض:

$$y'' = Z \qquad Z = Z(x)$$

$$\Rightarrow y''' = Z'$$

نبدل في المعادلة

$$Z' + Z = x^2 \quad ; \quad Z = Z(x)$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى للتابع Z والمتحول x وهي تقبل عامل تكميل من الشكل

$$\mu = e^{\int dx} = e^x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنجد أن

$$e^x Z' + e^x Z = x^2 e^x dx$$

$$d(e^x Z) = x^2 e^x dx \Rightarrow e^x Z = \int x^2 e^x dx + c_1$$

$$I_1 = \int x^2 e^x dx$$

ولحساب هذا التكامل بطريقة التجزئة

$$x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

نبدل في I_1

$$I_1 = x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)$$

$$I_1 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$\Rightarrow$$

$$e^x Z = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c_1$$

$$\Rightarrow$$

نضرب بـ e^{-x}

$$Z = x^2 - 2x + 2 + c_1 e^{-x}$$

نبدل قيمة Z

$$y'' = x^2 - 2x + 2 + c_1 e^{-x}$$

بالمكاملة بالنسبة لـ x نجد

$$① \int \Rightarrow \quad y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - c_1 e^{-x} + c_2$$

$$② \int \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 + c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

ملاحظة:

يمكن حل هذه المعادلة بطريقة المؤثرات لأنها خطية.

تمرين: خفض مرتبة المعادلة

$$xy'' + 2y' = \sin x$$

ثم أوجد حلها العام.

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وهي خطية ولتخفيض مرتبتها نفرض وهي خالية من التابع y .

$$y'' = z' \Leftarrow y' = z , \quad z = z(x)$$

نعوض في المعادلة

$$xz' + 2z = \sin x$$

نقسم على $x \neq 0$

$$z' + \frac{2z}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى للمتحول x والتابع z ونقبل عامل تكميل من الشكل:

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل.

$$x^2 dz + 2xz\,dx = x \sin x\,dx$$

$$d(x^2 z) = x \cdot \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int$$

$$x^2 z = \int \overset{u}{x} \overset{dv}{\sin x\,dx} \Leftarrow \text{تكامل بالتجزئة}$$

$$\Rightarrow x^2 z = -x\cos x + \sin x + c$$

نقسم على x^2 ونبدل قيمة z

$$y' = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$dy = \left(-\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{c_1}{x^2}\right)dx$$

$$dy = -d\left(\frac{\sin x}{x}\right) - d\left(\frac{c_1}{x^2}\right)$$

توضيح : حيث

$$d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = d\left(\sin \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x}\cos x - \frac{1}{x^2}\sin x\right)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{\sin x}{x} - \frac{c_1}{x} + c_2}$$

وهو الحل العام المطلوب للمعادلة المفروضة .

مطلوبة الحالة الثانية : المعادلة الخالية من المتحول x .
وهي معادلة من الشكل

$$f(y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

لتخفيض مرتبة هذه المعادلة نفرض أن . خالية من المتحول x

$$y' = z \quad ; \quad z = z(y)$$

ونعتبر y متحولاً جديداً

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{y'' = z'_y \cdot z}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(Z'_y \cdot Z)}{dx}$$

اشتقاق

$$= \frac{d(Z' \cdot Z)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad y' = Z$$

$$= (Z''_y \cdot Z + Z'_y \cdot Z'_y)\, Z$$

$$= (Z''_y \cdot Z + Z'^2_y)\, Z$$

$$y''' = Z^2 Z'' + Z Z'^2$$

نبدل في المعادلة فنحصل على معادلة أخفض رتبة

تمرين / سؤال الدورة :

خفض مرتبة المعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$(y'^2 + 1) = 2y\, y''$$

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وغير خطية وهي خالية من المتحول x وللتخفيض من رتبتها نفرض

$$y' = Z \quad ; \quad Z = Z(y)$$

و نعتبر y متحولاً جديداً فنجد.

$$y'' = Z'_y \cdot Z$$

نبدل في المعادلة.

$$Z^2 + 1 = 2y\, Z'_y \cdot Z$$

$$Z^2 + 1 = 2y\, Z \cdot \frac{dZ}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2Z}{Z^2+1}\, dZ$$

بتكامل طرفي المعادلة ينتج

$$\ln\left|\frac{y}{c_1}\right| = \ln|Z^2+1|$$

$$y = c_1(Z^2+1)$$

$$Z^2 = \frac{y}{c_1} - 1$$

$$Z = \pm\sqrt{\frac{y-c_1}{c_1}}$$

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{c_1}}\sqrt{y-c_1}$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x

$$\frac{dy}{\sqrt{y-c_1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{c}}\, dx$$

$$x + c_2 = \pm\sqrt{c_1}\, 2\sqrt{y-c_1}$$

بتربيع الطرفين

$$(x+c_2)^2 = 4c_1(y-c_1)$$

$$(x+c_2)^2 = 4c_1 y - 4c_1^2$$

~~وهو~~

$$4c_1 y = (x+c_2)^2 + 4c_1^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{(x+c_2)^2}{4c_1} + c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة.

تمرين) أوجد ~~الحل العام للمعادلة~~ خفض بطريقتين مختلفتين

خفض رتبة المعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام.

$$y'' = y'^3 + y'$$

الحل

نلاحظ أن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وغير خطية

وهي خالية من المتحول x لتخفيض رتبتها نفرض:

$$y' = z$$

ونعتبر y متحول جديد:

$$y'' = z'_y \cdot z$$

نبدل في المعادلة:

$$z'_y \cdot z = z^3 + z$$

نقسم الطرفين على $z \neq 0$

$$z'_y = z^2 + 1$$

$$\frac{dz}{dy} = z^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z^2+1} = dy$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{arctg} z + c_1$$

$$\operatorname{arctg} z = y - c_1$$

$$z = tg(y - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = tg(y - c_1)$$

$$\frac{dy}{tg(y - c_1)} = dx$$

$$\frac{\cos(y-c_1)}{\sin(y-c_1)}\,dy = dx$$

$$\xRightarrow{\int} \boxed{x = \ln|\sin(y-c_1)| + c_2}$$ وهو الحل العام

طريقة (٢)

يمكننا التخفيض مع إيجاد الحل العام باعتبارها خالية من y.

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وغير خطية

ولتخفيض مرتبة هذه المعادلة نفرض:

$$y' = z \quad ; \quad z = z(x)$$

$$y'' = z'$$

نبدل في المعادلة:

$$z' = z^3 + z \qquad z' - z = z^3$$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k$$

$$\frac{dz}{dx} = z^3 + z$$

$$\frac{dz}{z(z^2+1)} = dx \quad ; \quad z(z^2+1) \neq 0$$

$$dx = \frac{dz}{z} - \frac{z\,dz}{z^2+1} \qquad \frac{A}{z} (1) + \frac{Bz+C}{z^2+1}$$

$$\star \xRightarrow{\int} x = \ln|z| - \frac{1}{2}\ln|z^2+1| + c_1$$

ولدينا:

$$y' = z \Rightarrow$$

$$dy = z\,dx$$

$$\Longrightarrow$$

$$dy = z\left[\frac{dz}{z} - \frac{z\,dz}{z^2+1}\right]$$

$$dy = dz - \frac{z^2\,dz}{z^2+1}$$

$$\frac{dZ}{Z^2+1} = \frac{Z^2 + 1 - 1}{Z^2+1}\, dZ = \frac{Z^2}{Z^2+1}\, dZ - \frac{1}{Z^2+1}\, dZ$$

نعوض نتيجة ① في نفس ... [illegible]

$$dy = \cancel{dZ} - \cancel{dZ} + \frac{dZ}{Z^2+1}$$

$$= dZ - \frac{Z^2+1}{Z^2+1} + \frac{1}{Z^2+1}$$

$$dy = \frac{dZ}{Z^2+1}$$

$$\Longrightarrow y = \operatorname{arctg} Z + c_2$$

اذن الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \ln|Z| - \frac{1}{2}\ln|Z^2+1| + c_1 & ① \\ y = \operatorname{arctg} Z + c_2 & ② \end{cases}$$

من ②

$$Z = tg(y - c_2)$$

نبدل في ①

$$x = \ln|tg(y-c_2)| - \frac{1}{2}\ln|(tg^2(y-c_2)+1)| + c_1$$

$$x = \ln|\sin(y-c_2)| - \ln|\cos(y-c_2)| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos^2(y-c_2)}\right| + c_1$$

$$x = \ln|\sin(y-c_2)| - \cancel{\ln|\cos(y-c_2)|} + \cancel{\ln|\cos(y-c_2)|} + c_1$$

$$\boxed{x = \ln|\sin(y-c_2)| + c_1}$$

[illegible]

$$dx = \frac{dt}{t} - \frac{t}{t^2+1} \Rightarrow x = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c$$

[illegible] x

مطلوبة

الحالة الثالثة: المعادلة المتجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته:

تعريف:

نقول عن معادلة أنها متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته إذا استبدلنا:

$$y \longrightarrow \lambda y$$
$$y' \longrightarrow \lambda y'$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} \longrightarrow \lambda y^{(n)}$$

وتحققت المطابقة

$$f(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'', \text{———} \lambda (y^{(n)})$$

$$= \lambda f(x, y, y', y'', \text{———} y^{(n)})$$

لتخفيض رتبة هذا النوع من المعادلات نفرض تابعاً جديداً Z حيث

$$Z = \frac{y'}{y} \qquad , \qquad Z = Z(\cancel{y})$$

$$y' = y . Z$$

$$y'' = y' . Z + y Z'$$

$$y'' = y Z^2 + y Z'$$

$$y'' = y(Z^2 + Z') \Rightarrow \frac{y''}{y} = Z^2 + Z'$$

وبنفس الأسلوب نجد أن

$$\frac{y'''}{y} = (Z'' + 3 Z Z' + Z^3)$$

بالتبديل في المعادلة المفروضة نحصل على معادلة أخفض مرتبة من المعادلة المعطاة.

مثال

لتكن المعادلة:

$$yy'' - y'^2 = y^2$$

① خفض مرتبة هذه المعادلة مرتبة واحدة باعتبارها خالية من المتحول المستقل x

② خفض رتبة هذه المعادلة مرتبة واحدة باعتبارها متجانسة لـ y ومشتقاته.

③ أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

الحل

① إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وغير خطية وهي خالية من المتحول المستقل x ولتخفيض مرتبتها نفرض أن

$$y' = Z \quad ; \quad Z$$

ونعتبر أن y متحول جديد أي

$$y'' = Z'_y \cdot Z$$

نبدل في المعادلة

$$y \cdot Z' Z - Z^2 = y^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{Z' - Z = y \cdot Z^{-1}}$$

وهي معادلة برنولي للتابع Z والمتحول y ,

② إن هذه المعادلة متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته لأنه

$$(\lambda y)(\lambda y'') - (\lambda y')^2 = (\lambda y)^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$yy'' - y'^2 = y^2$$

وللتخلص من متغير نفرض أن :

$$Z = \frac{y'}{y} \quad ; \quad Z(x)$$

$$\Longrightarrow \quad y' = y \cdot Z$$

$$\Longrightarrow \quad y'' = y\left(Z^2 + Z'\right)$$

نبدل في المعادلة المفروضة

$$y^2\left(Z^2 + Z'\right) - y^2 Z^2 = y^2$$

$$\left(Z^2 + Z'\right) - Z^2 = 1 \qquad ; \; y^2 \neq 0$$

$$Z' = 1$$

③

$$dZ = dx$$

① $\overset{\int}{\Longrightarrow}$

$$Z = x + c_1$$

$$\frac{y'}{y} = x + c_1$$

$$\frac{dy}{y} = (x + c_1)\, dx$$

② $\overset{\int}{\Longrightarrow}$ $$\ln \frac{y}{c_2} = \frac{x^2}{2} + x c_1$$

$$\Longrightarrow \quad y = c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2} + c_1 x}$$

تمرين

خفض رتبة المعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام:

$$x\cdot y\cdot y'' + x y'^2 - y y' = 0$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وغير خطية وهي معادلة متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته لأنه إذا استبدلنا

$$y \longrightarrow \lambda y$$
$$y' \longrightarrow \lambda y'$$
$$y'' \longrightarrow \lambda y''$$

نحصل على:

$$\lambda^2 (x\cdot y\cdot y'' + x y'^2 - y y') = 0$$

لذلك لتخفيض رتبتها نفرض أن:

$$Z = \frac{y'}{y} \quad ; \quad Z(x)$$

$$\Longrightarrow y' = y\cdot Z$$

$$y'' = y(Z^2 + Z')$$

نبدل في المعادلة المعطاة:

$$x y^2(Z^2 + Z') + x y^2 Z^2 - y^2 Z = 0$$

$$x Z^2 + x Z' + x Z^2 - Z = 0 \qquad ; y^2 \neq 0$$

$$Z' - \frac{1}{x} Z = -2Z^2 \qquad ; x \neq 0$$

وهي معادلة برنولي.

للتابع (z) و المتحول (x) لذلك.

نقسم الطرفين على $z^2 \neq 0$

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x} z^{-1} = -2$$

نفرض أن

$$z^{-1} = u$$

$$\Rightarrow -z^{-2} z' = u'$$

$$\frac{z'}{z^2} = -u'$$

نبدلها في المعادلة:

$$\Rightarrow -u' - \frac{1}{x} u = -2$$

$$u' + \frac{1}{x} u = 2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية

للتابع u و المتحول x و تقبل عامل تكميل من الشكل .

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل .

$$x u' + u = 2x$$

$$x\, du + u\, dx = 2x\, dx$$

$$d(x.u) = d(x^2 + c_1)$$

$$x.u = x^2 + c_1$$

نبدل u بقيمتها .

$$\frac{x}{z} = x^2 + c$$

$$\frac{x}{x^2+c_1} = z$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+c_1}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{x^2+c_1}$$

$$\int \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c_2}\right| = \ln\sqrt{x^2+c_1}$$

$$\boxed{y = c_2\sqrt{x^2+c_1}}$$

وهو الحل العام المطلوب للمعادلة المفروضة.

مطلوبة

الحالة الرابعة: المعادلة التفاضلية التامة غير الخطية.

تعريف:

نقول عن المعادلة التفاضلية

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

بأنها تامة إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية تالية بحيث مشتقها هو المعادلة المعطاة

تمرين:

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y y'' + y'^2 = 0$$

1. هل المعادلة خطية ولماذا
2. خفض رتبة هذه المعادلة مرتبة واحدة باعتبارها خالية من المتحول المستقل x
3. خفض رتبة هذه المعادلة باعتبارها متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته
4. خفض رتبة هذه المعادلة باعتبارها تامة

⑤ أوجد الحل العام لهذه المعادلة

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

① ليست خطية لأنها تحتوي على جداءات بين التابع ومشتقاته أي تحتوي على

$$y'^2 \quad \& \quad y.y''$$

② نفرض أن

$$Z = y'$$

ونعتبر y متحول جديد:

$$y'' = Z'_y . \cancel{Z}$$

نبدل في المعادلة فنجد:

$$y . Z'_y . \cancel{Z} + Z^2 = 0$$

$$y . Z'_y + Z = 0 \qquad ; \quad Z \neq 0$$

$$Z' + \frac{1}{y} Z = 0 \qquad ; y \neq 0$$

وهي معادلة خطية متجانسة للتابع Z والمتحول y.

نخفض رتبة المعادلة باعتبارها متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته

③ نفرض أن:

$$\frac{y'}{y} = Z \Rightarrow \quad ; \quad Z(x)$$

$$y' = y . Z$$

$$y'' = y(Z^2 + Z')$$

نبدل في المعادلة فنجد:

$$y^2(z^2+z')+y^2z^2=0$$

$$z^2+z'+z^2=0$$

$$z'+2z^2=0 \quad ; y.z\neq 0$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتحولات

للتابع z و المتحول x

فخفض مرتبة هذه المعادلة باعتبارها تامة

④ $yy''+y'^2=0$

$$y.y''=-y'^2$$

نقسم على $yy'\neq 0$

$$\frac{y''}{y'}=-\frac{y'}{y}$$

$$\Rightarrow \int$$

$$\ln\frac{y'}{c_1}=\ln\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y.y'=c_1 \qquad y'.y'+y''.y=y'^2+yy''$$

~~وهي معادلة~~

نلاحظ أن مشتقة هذه المعادلة هي المعادلة المفروضة

إذاً المعادلة تامة

⑤ أوجد الحل العام

$$y.\frac{dy}{dx}=c_1$$

$$y\,dy=c_1dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=c_1x+c_2$$

$$\boxed{y^2=2c_1x+2c_2}$$

$yy'' + y'^2 \longrightarrow$ مباشر $d(y' \cdot y)$

$yy'' - y'^2 \longrightarrow$ مشتق $d\left(\frac{y'}{y}\right)$

$\frac{-\frac{y'}{y^2}}{} = -\frac{y'}{y^2}$

تمرين:

خفض مرتبة المعادلة التفاضلية:

$$yy'' = y'(y'+1)$$

باعتبارها تامة ثم أوجد حلها العام.

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

$$yy'' - y'^2 - y' = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على $y^2 \neq 0$

$$\frac{yy'' - y'^2}{y} - \frac{y'}{y} = 0$$

$$\cancel{yy''}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = c_1$$

نضرب طرفي المعادلة بـ y

$$\boxed{y' - c_1 y = -1}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى نقبل عامل تكميل من الشكل

$$\mu = e^{-c_1\int dx} = e^{-c_1 x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنصبح تامة

$$e^{-c_1 x} dy - c_1 e^{-c_1 x} y\, dx = -e^{-c_1 x} dx$$

$$d(e^{-c_1 x} y) = d\left(\frac{1}{c_1} e^{-c_1 x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-c_1 x} y = \frac{1}{c_1} e^{-c_1 x} + c_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{c_1} + c_2 e^{c_1 x}}$$

وهو الحل العام المطلوب.

ملاحظة: خفضنا مرتبة هذه المعادلة باعتبارها خالية من المتحول x .

تمرين:

لتكن المعادلة:

$$xy'' - y' = x^3$$

① ~~خفض مرتبة~~ هل هذه المعادلة خطية ولماذا!

② خفض مرتبة هذه المعادلة بطريقتين مختلفتين

③ أوجد الحل العام.

الحل:

① إن هذه المعادلة هي معادلة خطية لأنها لا تحتوي على قوى ولا جداءات بين التابع ومشتقاته

② أ) خالية من y

نفرض أن

$$Z = y' \quad ; \quad Z = Z(x)$$

$$Z' = y''$$

نبدل في المعادلة:

$$xZ' - Z = x^3$$

$$\boxed{Z' - \frac{1}{x} Z = x^2} \quad ; \quad x \neq 0$$

ب) باعتبارها تامة:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x}\right) = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{x} = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\boxed{y' = \frac{x^3}{2} + c_1 x}$$

$$y' = \frac{x^3}{2} + c_1 x$$

(3)

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^4}{8} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2}$$

وهو الحل العام المطلوب

ملاحظة: يمكن حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة أولر كما سنرى لاحقاً (بطريقة المؤثرات).

تمرين: خفض رتبة المعادلة الآتية إلى الرتبة الأولى ثم أوجد حلها العام.

$$2yy''' + 6y'y'' + \frac{1}{x^2} = 0$$

الحل:

$$2yy''' + 2y'y'' + 4y'y'' + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2\frac{d}{dx}(yy'') + 2\frac{d}{dx}(y'^2) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2yy'' + 2y'^2 - \frac{1}{x} = c_1$$

$$2(yy'' + y'^2) - \frac{1}{x} = c_1$$

$$2\frac{d}{dx}(y \cdot y') - \frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(c_1 x)$$

$$\Rightarrow \boxed{2yy' - \ln|x| = c_1 x + c_2}$$

وهي معادلة منفصلة المتحولات.

$$2y\,dy = (\ln|x| + c_1 x + c_2)\,dx$$

$$\Rightarrow y^2 = \int \ln x\,dx + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$I = \int \ln x\,dx$$

$$\ln x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x$$

$$y^2 = x\ln x - x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\boxed{y^2 = x\ln x + c_1\frac{x^2}{2} + (c_2 - 1)x + c_3}$$

وهو الحل العام المطلوب.

تمرين وظيفة:

خفض مرتبة المعادلة التفاضلية الآتية مرتبة واحدة باعتبارها تامة ثم أوجد حلها العام.

$$yy'' + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0$$

نقسم على $y.y'$

مطلوبة

الحالة الخامسة: المعادلة التامة الخطية:

تعريف:

تكون المعادلة التفاضلية خطية من المرتبة n خطية إذا كانت من الدرجة الأولى بالنسبة للتابع و مشتقاته ولا تحتوي على جداءات وتأخذ الشكل: اكتب الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = R(x)$$

تكون هذه المعادلة تامة إذا حققت أمثالها الشرط.

$$a_0^{(n)}(x) - a_1^{(n-1)}(x) + a_2^{(n-2)}(x) - \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

شرط التمام

تمرين:

لتكن المعادلة

$$x^2 y'' + 4x y' + 2y = \cos x .$$

① هل المعادلة خطية ولماذا؟

② " " تامة " ؟

③ خفض مرتبة هذه المعادلة.

④ أوجد حلها العام.

الحل:

① إن هذه المعادلة خطية لأنها لا تحتوي على جداءات بين التابع و مشتقاته.

② لنختبر الشرط.

$$a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x) = 0$$

مشتقة رابعة

$$2 - 4 + 2 = 0$$

$$0 = 0$$

∴ الشرط محقق و المعادلة تامة.

(3)

$x^2y'' + 4xy' + 2y$

$$x^2y' \xleftarrow{\text{تكامل } y} x^2y'' + 4xy' + 2y$$

$$x^2y' \xrightarrow{\text{تفاضل } x} 2xy'' + 2xy'$$

$$2xy \xleftarrow{\text{تكامل } y} 2xy' + 2y$$

$$2xy \xrightarrow{\text{تفاضل } x} 2xy' + 2y$$

$$0 \qquad 0$$

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{d}{dx}\left(x^2y' + 2xy\right)$$

$$2xy' + x^2y'' + 2y + 2xy' =$$

$$x^2y'' + 4xy' + 2y$$

إذن المعادلة تكتب بالشكل

$$\frac{d}{dx}\left(x^2y' + 2xy\right) = \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$\xrightarrow{\int} \quad x^2y' + 2xy = \sin x + c_1$$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x^2} + \frac{c_1}{x^2}$$

نجد عامل تكامل :

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\cancel{x^2 dy + 2xy\,dy = (\sin x + c_1)\,dx}$$

$$x^2 dy + 2xy\,dy = (\sin x + c_1)\,dx$$

$$d(x^2 \cdot y) = d(-\cos x + c_1 x)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y = -\cos x + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{-1}{x^2}\cos x + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$$

تمرين:

خفض رتبة المعادلة بإعتبارها تامة ثم أوجد حلها العام:

$$yy'' + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0$$

الحل:

بضرب طرفي المعادلة بالتابع

$$\mu = \frac{1}{yy'}$$

نجد

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - \ln x^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y'| + y^2 + \ln|y| - \ln x^2 = \ln c_1$$

$$y^2 + \ln\frac{y' \cdot y}{x^2} = \ln c_1$$

$$y^2 = \ln c_1 - \ln\frac{y' \cdot y}{x^2}$$

$$y^2 = \ln\frac{c_1 x^2}{yy'}$$

$$e^{y^2} = \frac{c_1 x^2}{y y'}$$

$$\frac{1}{2} 2 y y' e^{y^2} - c_1 x^2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2} e^{y^2} - c_1 \frac{x^3}{3} = c_2}$$

الحالـة السـادسـة: المعادلـة تحتوي على المشتقة النونية و المتحول x فقط.
أي هي من الشكل

$$f(x, y^{(n)}) = 0$$

مطلوبة ونميز من هذه الحالـة ثلاث حالات.

1) المعادلـة محلولة للمشتقة النونية:
أي تكتب بالشكل

$$y^{(n)} = f(x)$$

ومن أجل إيجاد الحل العام في هذه الحالـة نكامل هذه المعادلة
n مرة على التتالي
فيكون عدد الثوابت يساوي مرتبة المعادلـة.

هامة.
2) المعادلـة محلولة بالنسبة للمتحول x:
مطلوبة أي تكتب بالشكل

$$x = f(y^{(n)})$$

لإيجاد الحل العام في هذه الحالـة نفرض أن

$$y^{(n)} = Z \quad و \quad Z = Z(x)$$

ونبدل في المعادلـة فنجد:

$$x = f(Z) \quad —— ①$$

$$\Longrightarrow$$

$$dx = f'(Z)\, dZ$$

ولدينا

$$dy^{(n-1)} = z\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad y^{(n-1)} = \int z\, f'(z)\, dz$$

وبالمكاملة n مرة

نجد الحل العام وسيطياً هو

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = \text{ناتج المكاملة } n \text{ مرة} \end{cases}$$

غير مطلوبة

③ المعادلة بشكلها الضمني :

غير قابلة للحل بالنسبة للمشتقة النونية وكذلك بالنسبة لـ x

أي هي من الشكل

$$F(x, y^{(n)}) = 0$$

لإيجاد الحل العام نفرض أن :

$$y^{(n)} = z \quad ; \quad z = z(x)$$

ونختار تمثيل وسيطي لـ x بدلالة u من الشكل

$$x = x(u)$$

ونعوض في المعادلة ونجد z بدلالة u .

أي $z = z(u)$

ثم نبدل في العلاقة :

$$d y^{(n-1)} = z(u)\, dx$$

فيكون الحل العام وسيطياً بعد حساب y

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = \boxed{} \end{cases}$$

مثال (1): أوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' = \sin x + \sin 2x$$

الحل

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة وتحتوي على المشتقة النوني (y''') و المتحول x بالمكاملة نجد

$$\xrightarrow{\int ①} \quad y'' = -\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + c_1$$

$$\xrightarrow{\int ②} \quad y' = -\sin x - \frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2$$

$$\xrightarrow{\int ③} \quad y = \cos x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$$

مثال (2): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x = y''^2 + y'' + 1$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وتحتوي على المشتقة النوني y'' و المتحول x ~~وبالمكاملة نجد~~.
وهي محلولة بالنسبة لـ x لذلك غاية حل العام نضع وسيطياً.
نفرض أن

$$Z = y'' \quad ; \quad Z = Z(x)$$

نبدل في المعادلة:

$$x = Z^2 + Z + 1 \quad —— ①$$

$$dx = (2Z + 1)\,dZ$$

س

$$y'' = Z \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = Z$$

$$\Longrightarrow \quad dy' = z\,dx$$

$$dy' = ((2z+1)\,z)\,dz$$

$$dy' = (2z^2 + z)\,dz$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad y' = \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 + c_1\right)$$

$$dy = \left(\frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 + c_1\right) dx$$

نبدل dx بقيمتها

$$dy = \left(\frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 + c_1\right)(2z+1)\,dz$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad y = \int \left(\frac{4}{3} z^4 + \frac{5}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 + 2c_1 z + c_1\right) dz$$

$$y = \frac{4}{15} z^5 + \frac{5}{12} z^4 + \frac{1}{6} z^3 + c_1 z^2 + c_1 z + c_2$$

إذن الحل العام وسيطياً :

$$\begin{cases} x = z^2 + z + 1 \\ y = \frac{4}{15} z^5 + \frac{5}{12} z^4 + \frac{1}{6} z^3 + c_1 z^2 + c_1 z + c_2 \end{cases}$$

مثال (3) أوجد الحل العام

$$(x+y'')^2+4(x+y'')=x$$

الحل

ان هذه المعادلة لا يمكن حلها بالنسبة لـ y'' ولا بالنسبة لـ x فهي من الشكل

$$f(x, y^{(n)})=0$$

لذلك نفرض أن :

$$y''=z$$

$$(x+z)^2+4(x+z)=x$$

لنفرض أن

$$u=x+z \Rightarrow z=u-x$$

$\cancel{x=}$

نبدل في المعادلة :

$$u^2+4u=x \quad \text{--- (1)}$$

$$dx=(2u+4)du$$

ولدينا

$$z=u-u^2-4u \Rightarrow z=-u^2-u$$

$\cancel{y''=u-u^2-4u}$

$$\frac{dy'}{dx}=-u^2-3u$$

$$dy'=(-u^2-3u)\,dx$$

$$dy'=(-u^2-3u)(2u+4)\,du$$

$$dy'=$$

$$dy' = (-2u^3 - 10u^2 - 12u)\, du$$

$$\Rightarrow \int \quad y' = -\frac{1}{2}u^4 - \frac{10}{3}u^3 - 6u^2 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}u^4 - \frac{10}{3}u^3 - 6u^2 + c_1$$

$$dy = \left(-\frac{1}{2}u^4 - \frac{10}{3}u^3 - 6u^2 + c_1\right) dx$$

$$dy = \left(-\frac{1}{2}u^4 - \frac{10}{3}u^3 - 6u^2 + c_1\right)(2u+4)\, du$$

$\cancel{y = -\frac{1}{6}}$ نجد الضرب و التكامل نجد

$$y = -\frac{1}{6}u^6 - \frac{25}{15}u^5 - \frac{10}{3}u^4 - 12u^3 + c_1\frac{u^2}{2} + 4c_1 u + c_2$$

و الحل الوسيطي هو

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

حذف

الحالة السابعة: المعادلة المتجانسة بالنسبة للمتحول:

تعريف:

نقول عن معادلة أنها متجانسة بالنسبة للمتحول فقط إذا استبدلنا

حيث

$$x \longrightarrow \lambda x$$

$$y' \longrightarrow \frac{y'}{\lambda}$$

$$x \longrightarrow \lambda x$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{d\lambda x}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{\lambda}$$

$$y'' \longrightarrow \frac{y''}{\lambda^2}$$

$$y^{(n)} \longrightarrow \frac{y^{(n)}}{\lambda^n}$$

أما y فتبقى على حالها أي

$$y \longrightarrow y$$

وتحققت المطابقة

$$f\left(\lambda x, y, \frac{y'}{\lambda}, \frac{y''}{\lambda^2}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{\lambda^n}\right)$$

$$= \lambda^k f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

* لحل هذا النوع من المعادلات

نحاول ردّ هذه المعادلة إلى معادلة خالية من المتحول ثم تخفيض مرتبتها

كما في الحالة الثالثة

ويمكننا التخلص من x كما يلي:

نفرض أن

$$t = \ln x \Longleftarrow \underset{\sim}{x = e^t}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= y'_t \cdot \frac{1}{x} \Longrightarrow \boxed{y'_t = x\, y'_x}$$

$$\boxed{x^2 y''_x = y''_t - y'_t}$$

فنحصل على معادلة (بعد تعويض الفرضيتين) خالية من المحول التابع y و المحول t

حذف

الحالة الثامنة: المعادلة المتجانسة بالنسبة للتابع والمحول.

تعريفاً:

نقول عن معادلة أنها متجانسة بالنسبة للتابع والمحول إذا بدلنا

$$x \longrightarrow \lambda x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\lambda y}{d\lambda x} \qquad y \longrightarrow \lambda y$$

$$y' \longrightarrow y'$$

$$= \frac{d^2 \lambda y}{d} \qquad y'' \longrightarrow \frac{y''}{\lambda}$$

$$y^{(n)} \longrightarrow \frac{y^{(n)}}{\lambda^{n-1}}$$

وحصلنا على معادلة خالية من λ

لتخفيض رتبة هذا النوع من المعادلات نفرض أن:

$$Z = \frac{y}{x} \quad , \quad Z = Z(x)$$

فنحصل على معادلة متجانسة بالنسبة للمحول x فقط

وهكذا نكمل الحل كما في الحالة السابقة.

ملاحظة

تكون المعادلة من المراتب العليا ذات تجانس عام إذا استبدلنا.

$$x \longrightarrow \lambda x$$

$$y \longrightarrow \lambda^k y$$

$$y' \longrightarrow \lambda^{k-1} y'$$

$$y^n \longrightarrow \lambda^{n-1} y^n$$

وحصلنا على معادلة خالية من λ

تمرين 1 دورة — حل على ثلاث مستويات

لتكن المعادلة:

$$xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$$

اذكر كم نوع من التجانس (مع التعليل) تحققه هذه المعادلة ثم أوجد حلها العام مستخدماً طريقة واحدة فقط من الطرق التي درستها واكتبه بأبسط صورة ممكنة.

الحل:

1- تجانس للتابع ومشتقاته:

$$y = \lambda y$$
$$y' = \lambda y'$$
$$y'' = \lambda y''$$

نبدل في المعادلة:

$$\lambda^2 xyy'' - \lambda^2 xy'^2 + \lambda^2 yy' = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda^2(xyy'' - xy'^2 + yy') = 0$$

2- تجانس للمتحول المستقل.

$$x = \lambda x$$
$$y = y$$
$$y' = \frac{y'}{\lambda} \quad , \quad y'' = \frac{y''}{\lambda^2}$$

نبدل في المعادلة

$$\lambda x y \frac{y''}{\lambda^2} - \lambda x \frac{y'^2}{\lambda^2} + y\frac{y'}{\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda}(xyy'' - xy'^2 + yy') = 0$$

3- تجانس التابع والمتحول :

$$x = \lambda x$$
$$y = \lambda y$$
$$y' = y'$$
$$y'' = \frac{y''}{\lambda}$$

$$\lambda x \lambda y \frac{y''}{\lambda} - \lambda x y'^2 + \lambda y y' = 0$$

$$\lambda (x y y'' - x y'^2 + y y') = 0$$

4- تجانس عام : (مرتبة ثانية)

$$x = \lambda x$$
$$y = \lambda^k y$$
$$y' = \lambda^{k-1} y'$$
$$y'' = \lambda^{k-2} y''$$

$$\lambda x \lambda^k y \lambda^{k-2} y'' - \lambda x \lambda^{2k-2} y^2 + \lambda^k y \lambda^{k-1} y' = 0$$

$$\lambda^{2k-1} (x y y'' - x y'^2 + y y') = 0$$

حل بالنسبة للتابع ومشتقاته :

$$\frac{y'}{y} = z \quad ; \quad z(x)$$

$$y' = y . z$$

$$y'' = y (z^2 + z')$$

تمرين دورة ١ لتكن المعادلة

$$y\, y'' - y'^2 - 6y^2 = 0$$

① هل المعادلة خطية ولماذا؟

② خفض مرتبة هذه المعادلة مرتبة واحدة باعتبارها متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته.

③ خفض مرتبة هذه المعادلة مرتبة واحدة باعتبارها لا تحوي المتحول المستقل x

④ " " " " " " " تامة

⑤ أوجد الحل العام من خلال إحدى الطرق فقط التي تحقق المعادلة

الحل:

① ليست خطية لأنها تحتوي على قوى وجداءات بين التابع ومشتقات التابع أي تحتوي على yy'' و y'^2 و y^2

②

$$\frac{y'}{y} = z \; ; \; z = z(x)$$

$$y' = y z$$

$$y'' = y(z^2 + z')$$

نبدل في المعادلة المفروضة فنجد:

$$y^2(z^2 + z') - y^2 z^2 - 6y^2 = 0$$

$$y^2 \neq 0$$

$$\cancel{y^2(z^2+z}\quad z^2 + z' - z^2 - 6 = 0$$

$$\boxed{z' = 6}$$

وهي معادلة أخفض مرتبة من المعادلة المفروضة

③ خالية من x نفرض

$$y' = z$$

ونعتبر y متحولاً جديداً

$$y'' = z \cdot z'_y$$

$$y z z'_y - z^2 - 6y^2 = 0$$

نقسم $y.z \neq 0$

$$z'_y - \frac{1}{y} z = y \frac{1}{z}$$

وهي معادلة برنولي للتابع z والمتحول y

وهي معادلة أخفض مرتبة من المعادلة المفروضة

② تامة :

$$yy'' - y'^2 - 6y^2 = 0$$

$y^2 \neq 0$

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 6$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{d}{dx}(6x + c_1)$$

$$\xRightarrow{\int}$$

$$\frac{y'}{y} = 6x + c_1$$

وهي معادلة أخفض مرتبة من المعادلة المفروضة.

③

نوجد الحل العام للمعادلة على اعتبارها متجانسة بالنسبة للتابع ومشتقاته.

$$z' = 6$$

$$\xRightarrow{\int}$$

$$z = 6x + c_1$$

فنحصل

$$\frac{y'}{y} = 6x + c_1 ,$$

$$\frac{dy}{y} = (6x + c_1)\, dx \xRightarrow{\int} \ln\frac{y}{c_2} = 3x^2 + c_1 x$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = c_2 e^{3x^2 + c_1 x}}$$

وهو الحل العام المطلوب.

الرابع عشر

ج) دلالة .

الخطية، التالية ليس لا علول شكل

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المراتب العالية والأمثال الثابتة .

سؤال أكتب شكل المعادلة التفاضلية ...

إن المعادلة التفاضلية من الشكل

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = R(x) \quad (1)$$

حيث

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ أعداد ثابتة

تدعى معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n .

ذات أمثال ثابتة .

كما يسمى التابع

$R(x)$ بالطرف الثاني للمعادلة وهو تابع لـ x فقط ،

لإيجاد الحل العام لهذه المعادلة :

نوجد الحل العام للمعادلة بدون طرف ثاني ، ثم نوجد حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة . أي الحل العام من الشكل : ... مع طرف

$$y = y_c + y_p$$

حيث y_c : حل عام للمعادلة بدون طرف (متجانسة)

y_p : حل خاص به مع طرف (غير متجانسة)

ولإيجاد طريقة المؤثرات التفاضلية لإيجاد الحل العام للمعادلة (1)

1) طريقة المؤثرات لإيجاد y_c : $D = \frac{d}{dx}$ ، $Dy = \frac{dy}{dx}$

نرمز $D = \frac{d}{dx}$ مؤثر تفاضلي :

$$Dy = \frac{dy}{dx} = y'$$

$A e^{ax}$ إذا كانت تعرف ثوابتها

$A \cos ax$

$A \sin ax$

كثيرة حدود $P(x)$

$x e^{ax}$ ضرب دوال

$$D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$\vdots$$

$$D^n y = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$$

وبالتالي تكتب المعادلة (1) بالشكل

$$\underbrace{(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)}_{f(D)} y = R(x)$$

$$f(D) y = R(x)$$

$\frac{1}{D} = \frac{d}{dx}$ مؤثر تفاضلي

$\frac{1}{D} = \int dx$ مؤثر تكاملي

عندما المعادلة متجانسة $R(x) = 0$

$\Longrightarrow$

حيث $f(D) y = 0 \quad ; \quad y \neq 0$

$\Longrightarrow$

$$f(D) = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة .

⊛ لإيجاد جذور المعادلة المميزة نميز الحالات الآتية :

1) جذور المعادلة المميزة حقيقية مختلفة ولتكن :

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_n$$

فيكون الحل العام :

$$y_c = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

مثال / أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y''' - 6y'' + 5y' = 0$$

حل خطية متجانسة للثالثة من مختلفة.

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ذات أمثال ثابتة متجانسة (بدون طرف ثاني) نوجد حلها العام بطريقة المؤثرات التفاضلية.

لدينا:

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$(D^3 - 6D^2 + 5D)y = 0$$

المعادلة المميزة هي:

$$D^3 - 6D^2 + 5D = 0$$

نوجد جذور المعادلة المميزة

$$D(D^2 - 6D + 5) = 0$$

$$D(D-1)(D-5) = 0$$

إذن جذور المعادلة المميزة هي:

$$D = 5 \quad \& \quad D = 1 \quad \& \quad D = 0$$

وهي جذور حقيقية مختلفة إذن الحل العام للمعادلة هو:

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{5x}$$

$$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{5x}}$$

وهو الحل العام.

② المعادلة المميزة k جذر حقيقي مكرر:

ولكي نميز أ.D جذر تكرر k من مرة.

فإن الحل العام

$$y_c = (c_1 x^0 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots c_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة:

خطية من الدرجة الرابعة

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الرابعة ومتجانسة (بدون طرف ثاني) وسنوجد حلها العام بطريقة المؤثرات التفاضلية لنرمز بـ

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$(D^4 - 8D^2 + 16)y = 0$$

لنوجد جذور المعادلة المميزة.

$$(D^4 - 8D^2 + 16) = 0$$

$$(D^2 - 4)^2 = 0$$

$$(D - 2)^2 (D + 2)^2 = 0$$

$D = 2$ جذر حقيقي مكرر مرتين ،

$\lambda = 2$

$D = -2$ = = = = ،

إذن الحل العام هو:

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x}}$$

$D=2$ $\qquad$ $D=-2$

③ للمعادلة المميزة جذور عقدية مترافقة:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

هذان عقديان مترافقان.
واحد منهم ينتج عن الآخر بتبديل كل i بـ $-i$.

فيكون الحل العام هو

$$y_c = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

مثال/

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^{(4)} - 9y = 0$$

الحل/
إن هذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الرابعة ذات أمثال ثابتة ومتجانسة نوجد الحل العام بطريقة المؤثرات

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$(D^{(4)} - 9)y = 0$$

المعادلة المميزة هي:

$$D^{(4)} - 9 = 0$$

$$(D^2 - 3)(D^2 + 3) = 0$$

$x^2 = -1 = i^2$

$x^2 = i^2$

$x = \pm i$

$-1 = i^2$

$D^2 = 3i^2 \; ; \; i^2 = -1$

$$(D+\sqrt{3})(D-\sqrt{3})(D+i\sqrt{3})(D-i\sqrt{3}) = 0$$

$D = \sqrt{3}$, $D = -\sqrt{3}$ جذور حقيقية مختلفة

$D = \pm i\sqrt{3}$ جذور عقدية مترافقة.

$$\boxed{y = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x} + c_3 \cos\sqrt{3}\,x + c_4 \sin\sqrt{3}\,x}$$

وهو الحل العام.

مثال/

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

الحل/

ان هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ذات أمثال ثابتة متجانسة نوجد حلها العام بطريقة المؤثرات

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$$

نبحث عن حل تجريبي.

$$\begin{array}{r|l}
 & D^2 - 4D + 4 \\
\hline
D-2 & D^3 - 6D^2 + 12D - 8 \\
 & D^3 \mp 2D^2 \\
\hline
 & 0 - 4D^2 + 12D - 8 \\
 & -4D^2 + 8D \\
\hline
 & 0 \quad 4D - 8 \\
 & -4D \pm 8 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}$$

$$(D-2)(D^2-4D+4)=0$$

$$(D-2)(D-2)^2=0$$

$$(D-2)^3=0$$

$D=2$ جذر حقيقي مكرر ثلاث مرات . $\lambda=2$, $k=3$

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$$

تمرين: هام جذور عقدية مكررة:
أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y^{(6)}+3y^{(4)}+3y''+y=0$$

الحل:
إن هذه المعادلة هي معادلة خطية متجانسة من الدرجة السادسة.

لنرمز $D=\frac{d}{dx}$

نبدل في المعادلة:

$$(D^6+3D^4+3D^2+1)y=0$$

$$(D^2+1)^3=0$$

$D^2+1=0$

$D^2=-1$

$D^2=i^2$

$D=\pm i$

$$(D+i)^3\cdot(D-i)^3=0$$

$D=i$ جذر مكرر ثلاث مرات . حيث $\lambda=i$ و $k=3$

$D=-i$ ـ ـ ـ ـ ـ $\lambda=-i$, $k=3$

$$y_c=(c_1+c_2x+c_3x^2)\cos x+(c_4+c_5x+c_6x^2)\sin x$$

$\int_0^n dx = \frac{1}{D^n}$ تكامل و $\frac{d^n}{dx^n} = D^n$ تفاضل

ج) طريقة المؤثرات من أجل إيجاد الحل الخاص y_p:

نعلم أن

$$Dy = y'$$

لنعرف الآن المؤثر $\frac{1}{D}$

$\frac{1}{D}$ هو عملية تكامل للتابع المؤثر عليه دون إضافة ثوابت تكامل.

مثلاً:

$$\frac{1}{D}(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{D} e^{4x} = \frac{1}{4} e^{4x}$$

وبصورة عامة:

$$\frac{1}{D^n} f(x) = \underbrace{\iint \cdots \int}_{n\ \text{تكامل}} f(x)\,dx$$

* لنعرف المؤثر $\frac{1}{D-a}$:

يعرف بالعلاقة:

$$\boxed{\frac{1}{D-a} R(x) = e^{ax} \int e^{-ax} R(x)\,dx}$$

مثال: أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{x}$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية

الحل العام :

$$y = y_c + y_p$$

لنرمز ب

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$(D^2 + 3D + 2)y = 2e^x$$

$$D^2 + 3D + 2 = 0$$

$$(D+2)(D+1) = 0$$

$$\begin{cases} D = -1 \\ D = -2 \end{cases}$$ جذور حقيقية مختلفة

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

حساب y_p

$$y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$$

$$y_p = \frac{1}{D+2} \cdot \frac{1}{D+1} 2e^x$$

$$y_p = \frac{1}{D+2} e^{-x} \int e^x . 2 e^x dx$$

$$y_p = \frac{1}{D+2} e^{-x} \left[\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} e^{2x} \right] = \frac{1}{D+2} e^x$$

$$= e^{-2x} \int e^{2x} . e^x dx$$

$$= e^{-2x} \int e^{3x} dx$$

$$y_p = e^{-2x} \frac{1}{3} e^{3x} = \frac{1}{3} e^x = y_p$$

والحل العام للمعادلة المفروضة هو:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{x}$$

قانون الحل الخاص:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)}$$

حيث $R(x)$: هو الطرف الثاني للمعادلة.

* الحالات الخاصة لإيجاد y_p والمتعلقة بشكل التابع $R(x)$:

الحالة الأولى:

$$R(x) = A e^{ax}$$

حيث A ، a ثوابت.

$$y_p = \frac{1}{f(D)} A e^{ax}$$

نميز حالتين:

أ- a ليس جذراً لـ $f(D)$ أي

$$f(a) \neq 0$$

عندئذٍ الحل الخاص هو:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{f(a)} A e^{ax}}$$

2- a جذر لـ $f(D)$ مكرر k مرة أي:

$$f(a) = 0$$

عندئذٍ:

$$f(D) = (D-a)^k g(D)$$

وبالتالي قانون الحل الخاص هو

$$\boxed{y_p = \frac{x^k}{k!} \frac{1}{g(a)} A e^{ax}}$$

مثال 1: أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{x}$$

الحل:

$$(D^2 + 3D + 2)\,y = 2e^{x}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 2}\,2e^{x}$$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D+2)}\,2e^{x}$$

$$\Longrightarrow$$

$$y_p = \frac{1}{(1+1)(1+2)}\,2e^{x}$$

$$y_p = \frac{1}{3}\,e^{x}$$

مثال 2: أوجد الحل الخاص للمعادلة.

$$y'' + 5y' + 6y = 10e^{-2x}$$

الحل:

$$(D^2 + 5D + 6)\,y = 10e^{-2x}$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)}\,R(x) \quad ; 1$$

$$y_p = \frac{1}{(D+2)(D+3)}\,10e^{-2x}$$

$$y_p = \frac{1}{(-2+2)(-2+3)}\,10e^{\overset{a}{(-2)}x}$$ $a = -2$ جذر لـ $F(D)$

$$y_p = \frac{x}{1!} \cdot \frac{1}{-2+3} \, 10 \, e^{-2x}$$

$$y_p = 10 x e^{-2x}$$

الحالة الثانية:

إذا كان التابع $R(x)$ من أحد الأشكال:

$R(x) = A\cos ax + B\sin bx$

$R(x) = A\cos ax$

$R(x) = B\sin bx$

نميز حالتين:

أ- ai ليس جذر ل $f(D)$

حيث $i^2 = -1$

في هذه الحالة نبدل $D^2 = -a^2$

فلا نبدل $D = ai$

وإنما نضرب بمرافق المقام للحصول على D^2.

$$y_p = \frac{1}{f(-a^2)} A\cos ax$$

2- ai جذر ل $f(D)$ أي

$f(ai) = 0$

في هذه الحالة نغير حالة التابع المثلثي إلى تابع أسي وفق العلاقة الهامة والشهيرة الآتية:

$$e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$$

$\cos(ax) = Re[e^{iax}]$

$\sin(ax) = Im$

والمساواة بعلاقة أولر الشهيرة

$$\cos(ax) = Re[e^{iax}]$$

$$\sin(ax) = Im[e^{iax}]$$

مثال: أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' = \cos 3x$$

الحل:

$$y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$$

$$(D^2 + 2D)y = \cos 3x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D} \cos 3x$$

$-9i + 6i = -3i$ نعوض $ai = 3i$

ليست جذر لـ $f(D)$

نبدل $D^2 = -a^2 = -9$

$$y_p = \frac{1}{-9+2D} \cos 3x$$

نضرب بمرافق المقام.

$$y_p = \frac{2D+9}{(2D-9)(2D+9)} \cos 3x$$

$$y_p = \frac{2D+9}{4D^2-81} \cos 3x$$

نبدل $D^2 = -9$

$$y_p = \frac{2D+9}{-36-81} \cos 3x$$

$$y_p = \frac{-1}{117} (2D+9) \cos 3x = 2D\cos 3x + 9\cos 3x$$

$$y_p = \frac{-1}{117} [\underbrace{2D\cos 3x}_{\text{تفاضل}} + 9\cos 3x]$$

$$\boxed{y_p = \frac{-1}{117} [-6\sin 3x + 9\cos 3x]}$$

مثال: أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + y = \sin x$$

الحل:
معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية وغير متجانسة للتابع ومشتقاته ذات أمثال ثابتة لنوجد الحل بطريقة المؤثرات.

$$y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$$

$$(D^2+1)y = \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2+1)} \sin x.$$

$$ai = i$$

$$f(ai) = f(i) = 0$$ جذر لـ $f(D)$

لذلك نتبع هذه الحالة حالة تابع أسي.
لدينا وفقاً علاقة أولر.

$$e^{ix} = \underbrace{\cos x}_{Re} + \underbrace{i \sin x}_{Im}$$

$$Im[e^{ix}] = \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1} Im[e^{ix}]$$

$$y_p = Im\left[\frac{1}{(D+i)(D-i)} e^{ix}\right]$$

$$y_p = Im\left[\frac{x}{1!} \frac{1}{2i} e^{ix}\right]$$

$$y_p = Im\left[x \frac{-2i}{(2i)(-2i)} (\cos x + i \sin x)\right]$$

$$y_p = \operatorname{Im}\left[x \frac{-2i}{4} (\cos x + i\sin x) \right]$$

$$y_p = \operatorname{Im}\left[\frac{-ix}{2} \cos x + \frac{x}{2} \sin x \right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y_p = \frac{-x}{2} \cos x}$$

الحالــة الثالثــة:

إذا كان $R(x)$ كثير حدود في هذه الحالــة لإيجاد الحل الخاص نقسم 1 على $f(D)$ المرتبة بشكل تصاعدي ونتوقف عند عملية القسمة عندما تصبح درجة كل حد من حدود ناتج القسمة أكبر من درجة كثير الحدود.

مثال:

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + y = \overbrace{x^2 - x + 2}^{\text{كثير حدود}}$$

الحل:

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

$$y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$$

$$(D^2+1) y_p = x^2 - x + 2$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1} (x^2 - x + 2)$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 - D^2 + D^4 \\
\hline
1 + D^2 & 1 \\
 & 1 + D^2 \\
\hline
 & -D^2 \\
 & -D^2 - D^4 \\
\hline
 & 0 \quad -D^4 \\
 & D^4 + D^6 \\
\hline
 & 0 \quad -D^6
\end{array}
$$

$$y_p = (1 - D^2 + D^4)(x^2 - x + 2)$$

$$y_p = x^2 - x + 2 \underbrace{- D^2(x^2 - x + 2)}_{\text{مشتقة ثانية}} + \underbrace{D^4(x^2 - x + 2)}_{\text{مشتقة صفر}}$$

$$y_p = x^2 - x + 2 - 2$$

$$y_p = x^2 - x$$

الحالة الرابعة:

التابع $R(x)$ الموجود في الطرف الثاني من المعادلة هو جداء تابعين أحدها أسي والثاني إما ثابت أو كثير حدود أي:

$$R(x) = p(x)\ A e^{ax}$$

$p(x)$: ثابت أو كثير حدود

في هذه الحالة نستخدم القانون:

$$y_p = \frac{1}{f(D)}\, p(x) . A e^{ax}$$

$$y_p = A e^{ax} \frac{1}{f(D+a)}\, p(x)$$

نبدل كل $D \rightarrow (D+a)$

225

مثال: أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + y' + y = x e^x$$

الحل: معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة غير متجانسة تحل

$$(D^2 + D + 1)y = x e^x$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2 + D + 1)} x e^x$$

$$y_p = e^x \frac{1}{((D+1)^2 + D + 1 + 1)} x$$

$$y_p = e^x \frac{1}{D^2 + 2D + 1 + D + 2} x$$

$$y_p = e^x \frac{1}{D^2 + 3D + 3} x$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}D \\ \hline 3 + 3D + D^2 & 1 \\ & \underline{1 + D + \frac{1}{3}D^2} \\ & 0 - D - \frac{1}{3}D^2 \\ & \underline{-D - D^2 - \frac{1}{3}D^3} \\ & 0 \quad 0 + \frac{2}{3}D^2 + \frac{1}{3}D^3 \end{array}$$

$$y_p = e^x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}D\right) x$$

$$\boxed{y_p = e^x \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 2y' + 3y = e^{x} \sin x .$$

- 227 -

معادلة أولر:
وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة. "مع طرف ثاني" ذات أمثال متغيرة تعطى بالشكل:

$$\boxed{x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = R(x)}$$

مثلاً عندما $n=3$

$$x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = R(x)$$

حيث:

$a_i \in \mathbb{R}$ ، $(1 \le i \le n)$

طريقة حل معادلة أولر
لإيجاد الحل العام لمعادلة أولر نحول هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة
ومن أجل ذلك نفرض:

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

ونرمز بمؤثر جديد

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$$

$$xD = \mathcal{D}$$

$$x^2 D^2 = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)$$

$$x^3 D^3 = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)$$

$$x^n D^n = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\dots(\mathcal{D}-n+1)$$

بالتعويض في معادلة أولر الخطية نحصل على معادلة ذات أمثال ثابتة نحلها كما في الطريقة السابقة ثم نعود إلى المتحول x

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية.
آخر دورة

$$x^2y''+4xy'+2y=2x+x^3+\sin(\ln x)$$

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال متغيرة وخطية وغير متجانسة وهي معادلة أولر من المرتبة الثانية

نرمز أولاً:

$$D=\frac{d}{dx}$$

نبدل في المعادلة:

$$(x^2D^2+4xD+2)y=2x+x^3+\sin(\ln x)$$

نفرض أن:

$$x=e^t \Rightarrow t=\ln x$$

ولنرمز بـ

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{D}=\frac{d}{dt}\\&xD=\mathbb{D}\\&x^2D^2=\mathbb{D}(\mathbb{D}-1)\end{aligned}\right\}$$

نبدل في المعادلة الأخيرة.

$$(\mathbb{D}(\mathbb{D}-1)+4\mathbb{D}+2)y=2e^t+e^{3t}+\sin(t)$$

$$(\mathbb{D}^2+3\mathbb{D}+2)y=2e^t+e^{3t}+\sin t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة

حلها العام:

$$\boxed{y(t)=y_c(t)+y_p(t)}$$

* حساب y_c

$$\mathbb{D}^2+3\mathbb{D}+2=0$$

$$(D+1)(D+2)=0$$

$$D=-2 \quad , \quad D=-1$$

جذور حقيقية مختلفة

$$\boxed{y_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

* حساب y_p :

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} + y_{3p}$$

$$y_{1p} = \frac{1}{(D+1)(D+2)} \, 2e^{t} \Rightarrow$$

$$y_{1p} = \frac{1}{(1+1)(1+2)} \, 2e^{t} \Rightarrow \boxed{y_{1p} = \frac{1}{3} e^{t}}$$

$$y_{2p} = \frac{1}{(D+1)(D+2)} \, e^{3t}$$

$$y_{2p} = \frac{1}{(3+1)(3+2)} \, e^{3t} \Rightarrow \boxed{y_{2p} = \frac{1}{20} e^{3t}}$$

$$y_{3p} = \frac{1}{D^2+3D+2} \sin t$$

$$a_i = i$$

ليست جذر

$$D^2 = -a^2 = -1$$

$$y_{3p} = \frac{1}{-1+3D+2} \sin t$$

~~نضرب البسط والمقام بمرافق المقام~~.

$$y_{3p} = \frac{1}{3D+1} \sin t$$

نضرب بمرافق المقام.

$$y_{3p} = \frac{3D-1}{9D^2-1} \sin t$$

$$y_{3p} = \frac{3D-1}{-9-1} \sin t$$

$$y_{3p} = \frac{-1}{10} (3D \sin t - \sin t)$$

$$\boxed{y_{3p} = \frac{-1}{10} (3\cos t - \sin t)}$$

إذن:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{3} e^{t} + \frac{1}{20} e^{3t} - \frac{1}{10} (3\cos t - \sin t)}$$

ومنه الحل العام هو:

$$y = \frac{1}{3} e^{t} + \frac{1}{20} e^{3t} - \frac{1}{10} (3\cos t - \sin t) + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

نبدل:

$$x = e^{t} \quad \& \quad t = \ln x$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3} x + \frac{1}{20} x^3 - \frac{1}{10} (3\cos \ln x - \sin \ln x) + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x_2}}$$

تمرين 1

أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2y'' - 5xy' + 8y = 8x^6 + \sin(\ln x^3)$$

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ذات أمثال متغيرة وهي خطية وغير متجانسة وهي معادلة أولر

نرمز

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$(x^2D^2 - 5xD + 8)y = 8x^6 + \sin(\ln x^3)$$

نفرض أن

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$Q = \frac{d}{dt}$$

$$xD = Q$$

$$x^2D^2 = Q(Q-1)$$

نبدل في المعادلة

$$(Q(Q-1) - 5Q + 8)y = 8e^{6t} + \sin(3t)$$

$$(Q^2 - Q - 5Q + 8)y = 8e^{6t} + \sin(3t)$$

$$(Q^2 - 6Q + 8)y = 8e^{6t} + \sin(3t)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة

وحلها العام

$$y = y_c(t) + y_p(t)$$

حساب y_c :

$$D^2 - 6D + 8 = 0$$

$$(D-2)(D-4) = 0$$

$$D = 4 \quad , \quad D = 2$$

جذور حقيقية مختلفة

$$y_c = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

حساب y_p

$$y_p = \frac{1}{F(D)}\left[8e^{6t} + \sin(3t)\right]$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} 8e^{6t} + \frac{1}{F(D)} \sin(3t)$$

$$y_p = y_{1p} + y_{2p}$$

$$y_{1p} = \frac{1}{(D-2)(D-4)} 8e^{6t}$$

$$y_{1p} = \frac{1}{(6-2)(6-4)} 8e^{6t} \Rightarrow y_{1p} = e^{6t}$$

$$y_{2p} = \frac{1}{D^2 - 6D + 8} \sin(3t)$$

$a_i = 3i$

ليست جذر نبدل $D^2 = -a_i = -9$

$$y_{2p} = \frac{1}{-9 - 6D + 8} \sin 3t \Rightarrow$$

$$y_{2p} = \frac{-1}{6D+1} \sin 3t$$

نضرب بمرافق المقام

$$y_{2p} = \frac{-(6D-1)}{(6D+1)(6D-1)} \sin 3t$$

$$y_{2p} = \frac{-(6D-1)}{36D^2-1} \sin 3t$$

$D^2 = -9$ و

$$y_{2p} = \frac{-(6D-1)}{-325} \sin 3t$$

$$y_{2p} = \frac{1}{325} [6D \sin 3t - \sin 3t$$

$$y_{2p} = \frac{1}{325} [18 \cos 3t - \sin 3t]$$

ومنه الحل العام

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} + e^{6t} \frac{1}{325} [18 \cos 3t - \sin 3t]$$

نبدل

$$x = e^t \quad , \quad t = \ln x$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^4 + x^6 \frac{1}{325} [18 \cos(\ln x^3) - \sin(\ln x^3)]$$

معادلة كوشي أولر:

وهي معادلة من الشكل

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{n-1} + \dots + a_n y = R(x)$$

حيث $a,b\in\mathbb{R}$ & $a_i\in\mathbb{R}$ $(1\leq i\leq n)$

لحل هذه المعادلة نفرض أن

$$ax+b = e^t$$

ونرمز

$$D = \frac{d}{dx}$$

و

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$$

تمرين

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$$

الحل

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية غير متجانسة ذات أمثال ثابتة نحلها بطريقة المؤثرات:

$$(D^2 - 2D + 5)y = e^x \cos 2x$$

$$y = y_c + y_p$$

* حساب y_c

$$D^2 - 2D + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 = 16i^2$$

$$D = \frac{2+4i}{2} \Rightarrow \boxed{D = 1 \pm 2i}$$

جذور تخيلية مترافقة

$$y_c = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

حساب y_p:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 5} e^{x} \cos 2x$$

$$y_p = e^{x} \frac{1}{(D+1)^2 - 2D - 2 + 5} \cos 2x$$

$$y_p = e^{x} \frac{1}{D^2 + 2D + 1 - 2D + 3} \cos 2x$$

$$y_p = e^{x} \frac{1}{D^2 + 4} \cos 2x$$

$ai = 2i$

$D^2 = -4$

نبدل في جذر

$$\cos 2x = Re[e^{2ix}]$$

$$y_p = e^{x} Re\left[\frac{1}{D^2+4} e^{2ix}\right]$$

$$y_p = e^{x} Re\left[\frac{1}{(D+2i)\underline{(D-2i)}} e^{2ix}\right]$$

2i جذر

-236-

$$y_p = e^x \, Re\left[\frac{x}{1!} \, \frac{1}{4i} \, e^{2ix} \right]$$

بضرب ~~بمرافق~~ البسط والمقام بـ $-i$

$$y_p = e^x \, Re\left[\frac{-xi}{4} \left(\cos 2x + i \sin 2x\right) \right]$$

$$y_p = e^x \, R\left[i \frac{-x}{4} \cos 2x + \frac{x}{4} \sin 2x \right]$$

$$\boxed{y_p = e^x \, \frac{x}{4} \, \sin 2x}$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^x \frac{x}{4} \sin 2x$$

تمرينة وظيفة

1) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 3x$

2) $y'' - y = 10 \sin^2 x$

الفصل الثاني عشر :

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المرتبة الثانية

تعريف:

كل معادلة من الشكل

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = R(x)$$

تسمى معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية وغير متجانسة (مع طرف ثاني)

إذا كان $R(x) \neq 0$

أما إذا كان $R(x) = 0$

فإننا نسمي هذه المعادلة

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (*)$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة للتابع ومشتقاته.

1) المعادلة الخطية المتجانسة

وهي من الشكل :

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

ولدينا طريقتين لحل مثل هذا النوع من المعادلات

أ) **طريقة تغيير التابع :**

تقبل المعادلة (*) تغييراً في التابع من الشكل

$$y = u \cdot z$$

اذا تحققت أمثال الشرط:

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = \begin{cases} a & , \quad a \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{x^2} & \end{cases}$$

حيث $u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \Rightarrow y = u.z$ فتتحول المعادلة إلى معادلة من الشكل

$$Z'' + aZ = 0$$

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(9 + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$$

ان هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال متغيرة متجانسة من المرتبة الثانية لدينا

$$p(x) = \frac{-2}{x} \Rightarrow p'(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$q(x) = 9 + \frac{2}{x^2}$$

لنرى فيما إذا كانت المعادلة تقبل تغيير

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = 9 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 9 = a$$

اذن المعادلة تقبل تغيير في التابع من الشكل:

$$y = u.z \ ,$$

حيث

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{-2}{x}\,dx} = e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$u = e^{\ln x} \Longrightarrow \boxed{u = x}$$

إذن المعادلة تقبل التغيير:

$$y = x \cdot Z$$

فتصبح المعادلة بالشكل:

$$Z'' + 9Z = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة تحل
طريقة المؤثرات التفاضلية
نرمز للمؤثر

$$D = \frac{d}{dx}$$

نبدل في المعادلة

$$(D^2 + 9)Z = 0$$

$$D^2 + 9 = 0$$

$D = \pm 3i$ جذور عقدية مترافقة.

$$Z = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

ومنه الحل العام للمعادلة المفروضة هو:

$$\boxed{y = x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)}$$

إذا تحقق الشرط الأول:

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = a$$

أي معادلة من الشكل:

$$x^2 Z'' + aZ = 0$$

إذا تحقق الشرط الثاني:

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = \frac{a}{x^2}$$

بحل هذه المعادلة نحصل على Z ونعوضها في

$$y = uZ$$

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 8xy' + 16x^2 y = 0$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال متغيرة.

لذلك سنوجد حلها العام بطريقة تغيير التابع.

$$p(x) = -8x \longrightarrow p'(x) = -8$$

$$q(x) = 16x^2$$

ولنتحقق من شرط تغيير التابع:

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = 16x^2 + 4 - 16x^2 = \boxed{4 = q}$$

إذن المعادلة تقبل تغييراً في التابع من الشكل:

$$y = u \cdot z$$

حيث:

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -8x\,dx}$$

$$u = e^{\int 4x\,dx} = e^{2x^2}$$

نجري تغييراً في التابع من الشكل:

$$y = e^{2x^2} z$$

فتأخذ المعادلة الشكل:

$$z'' + 4z = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة تحل بطريقة المؤثرات.

$$(D^2+4)Z=0$$

$$D=\pm 2i$$

جذور عقدية مترافقة .

$$Z=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

ومنه الحل العام للمعادلة المفروضة .

$$y=e^{2x^2}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

تمرين دورة ل

تحقق فيما إذا كانت المعادلة

$$y''+2xy'+(x^2+2)y=0$$

تقبل تغيراً في التابع ثم أوجد حلها العام .

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

حتى تقبل المعادلة تغيراً في التابع يجب أن تحقق أمثالها الشرط .

$$q-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}=a$$

$$p=2x \Rightarrow p'=2$$

$$q=x^2+2 \Rightarrow$$

نعوض في الشرط

$$x^2+2-1-x^2=\boxed{1=a}$$

إذن المعادلة تقبل تغيراً في التابع من الشكل:

$$y=u.z$$

-242-

حيث :

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int 2x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

إذاً نجري التغيير التابع من الشكل

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} Z$$

فنحصل على المعادلة :

$$Z'' + Z = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة تحل بطريقة المؤثرات

$$(D^2 + 1) Z = 0$$

$D = \pm i$ جذور عقدية مترافقة.

$$Z = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ومنه الحل العام هو

$$\boxed{y = e^{-\frac{x^2}{2}} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)}$$

طريقة تغيير المتحول :

سؤال نظري : ماهو الشرط الواجب تحققه حتى تقبل المعادلة ؟

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

تغيير أي المتحول من الشكل :

$$t = t(x)$$

الحل

t'_x مشتق t بالنسبة لـ x

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot t'_x$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(y'_t \cdot t'_x\right) \frac{dt}{dx}$$

$$y'' = \left(y''_t\, t'_x + y'_t \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)\right) t'_x$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt}$$

$$y'' = y''_t\, t'^2_x + y'_t\, t''_x$$

بالتعويض في المعادلة والإصلاح نجد أن :

$$t'^2 y'' + (t'' + p t') y' + q y = 0 \quad , \quad y = y(t)$$

نقسم $t'^2 \neq 0$

$$y'' + \left(\frac{t'' + p t'}{t'^2}\right) y' + \frac{q}{t'^2}\, y = 0$$

ونميز حالتين :

الحالة الأولى: إذا حققت أمثال المعادلة الشرط التالي:

شرط تغير المتحول.

$$\boxed{q' + 2pq = 0}$$

عندئذٍ تقبل المعادلة

تغير أي المتحول من الشكل.

$$\boxed{t'' + pt' = 0} \quad \text{or} \quad t' = \sqrt{\alpha q}$$

وتتحول المعادلة إلى معادلة من الشكل:

$$\boxed{y''_t + a y = 0 \quad , \quad a = \frac{q}{t'^2}}$$

الحالة الثانية:

إذا حققت أمثال المعادلة الشرط

$$\boxed{\frac{q' + 2pq}{q\sqrt{q}} = c \quad \text{ثابت}}$$

عندئذٍ تقبل المعادلة تغيراً في المتحول من الشكل. $t = t(x)$

$$\boxed{t = \int \sqrt{\alpha q}\, dx}$$

هكذا يجب أن نأخذ $t' = \sqrt{\alpha q}$

حيث α مقدار ثابت.

نختاره بحيث يسهل عملية التكامل. وعادة ما نأخذه عكس أمثال q

فنحصل على المعادلة:

$$\boxed{y'' + a y' + b y = 0} \quad , \quad y = y(t)$$

حيث

$$a = \frac{t'' + pt'}{t'^2}$$

$$b = \frac{q}{t'^2}$$

-245-

تمرين: أوجد بطريقة تغيير المتحول حل المعادلة الآتية:

$$(1-x^2)\,y'' - xy' - 9y = 0$$

الحل

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية
ولكن ذات أمثال ثابتة ولنقسم المعادلة أولاً.

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}\,y' - \frac{9}{1-x^2}\,y = 0$$

$$p = \frac{-x}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$q = -\frac{9}{1-x^2} \Rightarrow q' = \frac{-18x}{(1-x^2)^2}$$

حتى تحل هذه المعادلة بتغيير المتحول يجب أن تحقق أمثالها الشرط.

$$q' + 2pq = 0$$

$$\frac{-18x}{(1-x^2)^2} + 2\left(\frac{-x}{1-x^2}\right)\left(\frac{-9}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{-18x}{(1-x^2)^2} + \frac{18x}{(1-x^2)^2} = 0$$

إذاً المعادلة تقبل تغييراً في المتحول من الشكل

$$t = t(x)$$

حيث:

$$t = \int \sqrt{\alpha q}\; dx$$

02

$$t'' + pt = 0$$

$$t=\int\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{-9}{1-x^2}}\,dx$$

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \boxed{t=\arcsin x}$$

نبدل في المعادلة التفاضلية .

$$y''+ay=0 \quad ; \quad a=\frac{q}{t'^2}=\frac{\frac{-9}{1-x^2}}{\frac{1}{1-x^2}}=-9$$

$$y''-9y=0$$

وهي تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية

تحل بطريقة المؤثرات ~~[illegible]~~ التفاضلية .

$$(D^2-9)y=0$$

$$D=\pm 3$$

$$y_t=c_1e^{-3t}+c_2e^{3t}$$

$$y=c_1e^{-3\arcsin x}+c_2e^{3\arcsin x}\,.$$

<u>تمرين :</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$$

بطريقة تغيير المتحول.

<u>الحل:</u>

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{1}{x^4} y = 0$$

$$p = \frac{2}{x}$$

$$q = \frac{1}{x^4} \Rightarrow q' = \frac{-4}{x^5}$$

ولنرى فيما إذا كانت هذه المعادلة تقبل تغيير أي المتحول أي نحقق الشرط:

$$\frac{q' + 2pq}{q\sqrt{q}} = c$$

$$\frac{\frac{-4}{x^5} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}\sqrt{\frac{1}{x^4}}} = \frac{-\frac{4}{x^5} + \frac{4}{x^5}}{\frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{x^2}} = 0$$

إذن المعادلة تقبل تغيير في المتحول من الشكل:

$$t = t(x) \Rightarrow t' = \sqrt{\alpha q}$$

$$t' = \sqrt{\frac{1}{x^4}} = t' = \frac{1}{x^2}$$

$$t = \frac{-1}{x}$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$y'' + a y = 0$$

$$y'' + \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} y = 0$$

$$y'' + y = 0$$

$$(D^2 + 1) y = 0 \Rightarrow D = \pm i$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$\boxed{y = c_1 \cos \frac{1}{x} - c_2 \sin \frac{1}{x}}$$

تمرين وظيفة

بطريقة تغيير المتحول حل المعادلات.

1) $x y'' - y' + 4 x^3 y = 0$

2) $y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$

3) $y'' + 4 x y' + 4 x^2 y = 0$

تمرين:

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0$$

الحل:

إن هذه المعادلة هي معادلة خطية متجانسة ذات أمثال متغيرة ولية أولى

~~لنرى فيما إذا المحقق~~

$$y'' - \frac{1}{x} y' + 4x^2 y = 0$$

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$q(x) = 4x^2 \Rightarrow q' = 8x$$

$$q' + 2pq = 8x - \frac{2}{x} 4x^2$$

$$= 8x - 8x = 0$$

إذن المعادلة تقبل تغيير في المتحول من الشكل

$$t' = t'(x) \Rightarrow t' = \sqrt{\alpha q}$$

$$t' = \sqrt{\frac{1}{4} 4x^2} = x$$

$$t' = x \Rightarrow t = \frac{x^2}{2}$$

عندئذٍ تؤول المعادلة إلى:

$$y'' + ay = 0 \quad ; \quad a = \frac{q}{t'^2}$$

$$y'' + \frac{4x^2}{x^2} y = 0$$

$$y'' + 4y = 0$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة من الرتبة الثانية لحل بطريقة المؤثرات :

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$(D^2 + 4)y = 0$$

$D = \pm 2i$ جذرين عقديين مترافقين

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

ومنه الحل العام هو :

$$\boxed{y = c_1 \cos x^2 + c_2 \sin x^2}$$

تمرين : أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$$

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال متغيرة ~~و~~ معادلة أولر و لنرى فيما إذا كانت تقبل تغيراً في المتحول.

$$p = \frac{3}{x}$$

$$q = \frac{4}{x^2} \Rightarrow q' = \frac{-8x}{x^4} = \frac{-8}{x^3}$$

$$\frac{q' + 2pq}{q\sqrt{q}} = \frac{\frac{-8}{x^3} + \frac{24}{x^3}}{\frac{2}{x} \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{16}{x^3}}{\frac{8}{x^3}} = 2 = c$$

والمعادلة تقبل تغيير المتحول من هذا الشكل.

إذن :

$$t = t(x)$$

$$t' = \sqrt{\alpha q} \Rightarrow t' = \sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{x}$$

$$t = \ln x$$

نبدل في المعادلة فتصبح من الشكل :

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$a = \frac{pt' + t''}{t'^2} = \frac{\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$b = \frac{a}{t'^2} = \frac{\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 4$$

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$(D^2 + 2D + 4)\,y = 0$$

$$D^2 + 2D + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(4) = 12\,i^2$$

$$D = \frac{-2 + 2\sqrt{3}\,i}{2} = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$D_{1,2} = -1 \mp \sqrt{3}\,i$$

$$\boxed{y = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\,t + c_2 \sin\sqrt{3}\,t\right)}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\ln x + c_2 \sin\sqrt{3}\ln x\right)}$$

ملاحظة: يمكن حل هذه المعادلة بطريقة تغيير التابع
ويمكن حل هذه المعادلة كمعادلة أولر.

تمرين:

$$y''+4xy'+4x^2y=0$$

إن هذه المعادلة هي معادلة خطية متجانسة ذات أمثال غير ثابتة ولنبحث أولاً.

$$q-\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}=$$

$$4x^2-2-4x^2 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

إذن المعادلة تقبل تغييراً في التابع من الشكل

$$y=u.z$$

حيث

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int 4x\,dx}=e^{-x^2}$$

$$y=e^{-x^2}.z$$

عندئذٍ تصبح المعادلة:

$$z''-2z=0$$

معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية نحل بطريقة المؤثرات.

$$D^2-2=0$$

$$D=\pm\sqrt{2}$$

$$y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}$$

$$y = e^{-x^2}\left(c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}\right)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة .

ملاحظة :

1) إذا حققت أمثال المعادلة :

$$(*) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = \underset{\sim}{R(x)}$$

الشرط

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = \begin{cases} a \\ \frac{a}{x^2} \end{cases}$$

وهذا شرط تغيير التابع

فإن المعادلة تقبل تغيير في التابع

$$y = u \cdot z$$

حيث

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$$

وتصبح المعادلة :

$$z'' + a z = \frac{R(x)}{u}$$

أو

$$x^2 z'' + a z = \frac{R(x)}{u}$$

2) إذا حققت أمثال المعادلة * الشرط

$$q' + 2pq = 0$$

تقبل تغييراً في المتحول

$$t = t(x)$$

$$t' = \sqrt{\alpha q}$$

فنحصل على المعادلة :

$$y'' + a y = \frac{R(t)}{t'^2} \quad , \quad a = \frac{q}{t'^2}$$

أما إذا حققت أمثال المعادلة الشرط الثاني .

$$\frac{q' + 2pq}{q\sqrt{q}} = c$$

فتصبح المعادلة :

$$y'' + a y' + b y = \frac{R(t)}{t'^2}$$

حيث

$$b = \frac{q}{t'^2} \quad , \quad a = \frac{t'' + p t'}{t'^2}$$

تمرين : أوجد بطريقة تغيير التابع الحل العام للمعادلة :

$$x y'' + 2 y' + 4 x y = x^3$$

الحل :

إن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال متغيرة
وليست متجانسة وليست معادلة أولر .

$$y'' + \frac{2}{x} y' + 4 y = x^2$$

لنرى فيما إذا كانت تقبل تغييراً في التابع .

$$\begin{cases} p = \frac{2}{x} \Rightarrow p' = \frac{-2}{x^2} \\ q = 4 . \end{cases}$$

$$q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = 4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 4$$

$$a = 4$$

إذن المعادلة تقبل تغيير في التابع من الشكل :

$$y = u . Z$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2}{x}dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}}$$

$$u = e^{\ln \frac{1}{x}} \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{x}}$$

عندئذٍ تصبح المعادلة :

$$Z'' + aZ = \frac{R(x)}{u}$$

$$Z'' + 4Z = \frac{x^2}{\frac{1}{x}}$$

$$Z'' + 4Z = x^3$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية نوجد حلها بطريقة المؤثرات ونكتبها :

$$(D^2 + 4) Z = x^3$$

$$Z = Z_c + Z_p$$

حساب Z_c

$$D^2 + 4 = 0 \Rightarrow D = \pm 2i$$

وهي جذور عقدية :

$$Z_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

حساب Z_p

$$Z_p = \frac{1}{D^2+4} x^3$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + - - -$$

أو بطريقة بسط السلسلة:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{4} - \frac{1}{16}D^2 + \frac{1}{64}D^4 \\ \hline 4+D^2 & 1 \\ & \underline{1 + \frac{1}{4}D^2} \\ & 0 - \frac{1}{4}D^2 \\ & \underline{-\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}D^4} \\ & +\frac{1}{16}D^4 \\ & \underline{\frac{1}{16}D^4 + \frac{1}{64}D^6} \end{array}$$

$$\frac{1}{4+D^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+\frac{D^2}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{D^2}{4} + \left(\frac{D^2}{4}\right)^2 - - - -\right.$$

$t^2 + t^3$

$? \ t = \frac{D^2}{4}$

$$\Rightarrow Z_p = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}D^2 + \frac{1}{64}D^4 + \_\_\_\right) x^3$$

$$Z_p = \frac{1}{4}x^3 - \frac{6}{16}x + 0$$

$$Z_p = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x$$

إذن:

$$Z = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x$$

ومنه

الحل العام:

$$y = \frac{1}{x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x\right)$$

تمرين : دورة

$$y'' + \frac{2}{x} y' + 4y = \frac{16}{x} e^{2x}$$

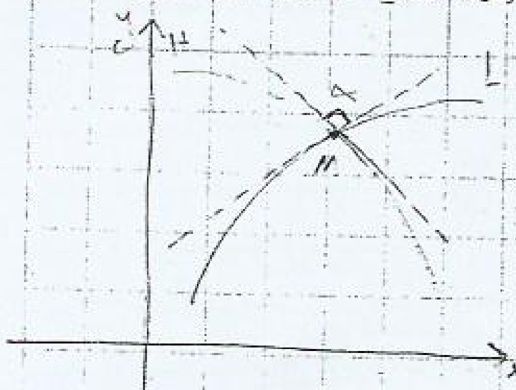
تحقق من أن المعادلة المتجانسة الموافقة (لهذه المعادلة) تقبل تغيير في التابع ثم استخدم ذلك بإيجاد الحل العام لهذه المعادلة.

المسارات المائلة .

إذا كان L منحنى من مجموعة منحنيات معطاة ولتكن

$$\phi(x,y,c)=0$$

ولتكن H منحنى من مجموعة منحنيات متقاطعة مع المنحنيات المعطاة في نقطة التقاطع M



إن الزاوية المحصورة بين المماسين هي (α)

المطلوب:

تعيين المنحنيات H من معرفتنا للمنحنيات L

عندما $\alpha=\frac{\pi}{2}$ نحصل على منحنيات متعامدة .
$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ " " " مائلة .

طريقة إيجاد المسارات المائلة والمتعامدة :
لمجموعة المنحنيات :

$$\phi(x,y,c)=0$$

① نشكل المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات وهي .

$$\phi(x,y,c)=0$$

ولتكن

$$F(x,y,y')=0 \quad "*"$$

② نبدل في المعادلة * كل y' بـ $\frac{y'-k}{1+ky'}$ حيث $k=Tg\alpha$

وذلك عندما تكون المسارات مائلة بزاوية α

(أما إذا كانت المسارات متعامدة عندئذٍ نبدل كل y' بـ $\frac{-1}{y'}$)

③ حل المعادلة التفاضلية الناتجة تكون هو المسارات المائلة أو المتعامدة .

$$yx + yc - 1 = 0$$

مثال: أوجد المسارات المائلة بزاوية $\alpha = \frac{\pi}{4}$ لمجموعة المنحنيات.

$$y(x + c) - 1 = 0$$

الحل:

نشكل المعادلة التفاضلية الموافقة لمجموعة المنحنيات المعطاة

$$y(x + c) - 1 = 0 \quad \text{——} \quad ①$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$y'(x + c) + y = 0 \quad \text{——} \quad ②$$

من ② نجد:

$$y'(x + c) = -y \Rightarrow x + c = \frac{-y}{y'}$$

نبدل في المعادلة ①:

$$y\left(\frac{-y}{y'}\right) - 1 = 0$$

نضرب الطرفين بـ y'

$$-y^2 - y' = 0$$

$$y' + y^2 = 0 \quad *$$

وهي المعادلة التفاضلية الموافقة لمجموعة المنحنيات المعطاة.

وبما أن المنحنيات مائلة بزاوية $\alpha = \frac{\pi}{4}$ فإن

$$k = tg\,\alpha = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$$

إذن نبدل في المعادلة * كل y' بـ $\frac{y' - 1}{1 + y'}$

فنجد:

$$\frac{y' - 1}{1 + y'} + y^2 = 0$$

نضرب الطرفين بـ $1 + y'$

$$y' - 1 + y^2(y'+1) = 0$$

$$y' - 1 + y^2 y' + y^2 = 0$$

$$y'(y^2+1) - 1 + y^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y'(y^2+1) = 1 - y^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى وحلوله بالنسبة المشتقة

$$\frac{dy}{dx}(y^2+1) = 1 - y^2$$

$$\frac{y^2+1}{1-y^2}\, dy = dx \qquad ; \ (1 - y^2 \neq 0)$$

$$\frac{y^2 - 1 + 2}{-(y^2-1)}\, dy = dx$$

$$-dy + \frac{2\,dy}{1-y^2} = dx$$

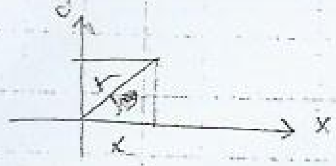
$$-y + 2\,\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + c$$

$$\boxed{\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - y - x = c}$$

وهي المنحنيات المائلة عن المنحنيات المفروضة بزاوية $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

$$\boxed{\begin{matrix} r = y \\ \theta = x \end{matrix}}$$

طريقة إيجاد المسارات المائلة والمتعامدة مع المنحنيات المعطاة بالصيغة القطبية :



$$\phi(r, \theta, c) = 0$$

حيث $r = r(\theta)$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

① نشكل المعادلة التفاضلية الموافقة لمجموعة المنحنيات المعطاة

$$\phi(r, \theta, c) = 0$$

ولتكن :

$$F\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0 \quad (*)$$

② لإيجاد المنحنيات المائلة لزاوية α

نستبدل كل $r' = \frac{dr}{d\theta}$ بـ :

$$r' = r\,\frac{1 + k\frac{r}{r'}}{\frac{r}{r'} - k}$$

حيث $k = \tan\alpha$

• لإيجاد المسارات المتعامدة $\alpha = \frac{\pi}{2}$

نستبدل كل r' بـ

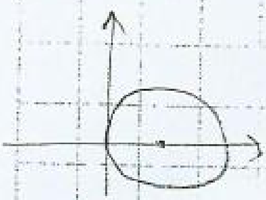
$$r' = \frac{-r^2}{r}$$

في المعادلة *

بحل المعادلة الناتجة نحصل على المسارات المتعامدة أو المائلة.

مثال: أوجد المنحنيات (المسارات) المائلة بزاوية α

على المنحنيات والتي هي معادلة دائرة مركزها على محور ox ومستقيم محور



الصادات يمس أ... المنحنيات ① $(x-a)^2+y^2=a^2$

الحل:

نشكل المعادلة التفاضلية الموافقة لمجموعة المنحنيات ① عند

$$x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$$

$$x^2+y^2-2ax=0$$

ونعلم أن

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

$$r^2-2ar\cos\theta=0 \quad ; \quad r=r(\theta)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ θ عند $2r-2a\cos\theta=0 \Rightarrow$

$$\frac{dr}{d\theta}+2a\sin\theta=0$$

$$r'=-2a\sin\theta \Rightarrow a=\frac{-r'}{2\sin\theta}$$

نبدل في *

$$r+2\frac{r'}{2\sin\theta}\cos\theta=0$$

$$r+r'\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=0$$

$$ctg\,\theta\, r'+r=0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى للتابع r والمتحول θ متجانسة بدون طرف ثاني.

$$\cot g\,\theta \, r' = -r$$

$$* \quad \boxed{\frac{r'}{r} = -Tg\,\theta} \quad ; \quad (r\cot g\,\theta \neq 0)$$

لدينا :

$$r' = r \cdot \frac{1 + k\frac{r}{r'}}{\frac{r}{r'} - k}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{r' + kr}{r - kr'} \quad ; \quad k = Tg\,\cancel{\alpha}$$

نعوض في المعادلة *' نجد :

$$-tg\,\theta = \frac{r' + kr}{r - kr'}$$

$$-r\,Tg\,\theta + k\,Tg\,\theta\, r' = r' + kr$$

$$r'(k\,Tg\,\theta - 1) - r(tg\,\theta + k) = 0$$

$$\frac{dr}{d\theta}\;\frac{r'}{r} = -\frac{k + Tg\,\theta}{1 - k\,tg\,\theta} \qquad tg(x+y) = \frac{tg\,x + Tg\,y}{1 - Tg\,x\, Tg\,y}$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{k + Tg\,\theta}{1 - k\,Tg\,\theta}\, d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{Tg\,\alpha + Tg\,\theta}{1 - tg\,\alpha \cdot Tg\,\theta} \cdot d\theta$$

$$\frac{dr}{r} + Tg(\theta + \alpha)\, d\theta = 0$$

$$\ln\left|\frac{r}{c}\right| - \ln\left|\cos(\theta+\alpha)\right| = 0$$

$$\frac{r}{c} = \cos(\theta+\alpha)$$

$$r = c\cos(\theta+\alpha)$$

وهي المسارات المائلة للزاوية α .

تمرين: أوجد المسارات المتعامدة مع عائلة الدوائر.

$$x^2+y^2 = c^2$$

نشكل المعادلة الموافقة:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0$$

لإيجاد المسارات المتعامدة نبدل

$$y' = \frac{-1}{y'}$$

$$x - \frac{y}{y'} = 0 \Rightarrow \boxed{xy' - y = 0}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى منفصلة المتحولات.

$$xy' = y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad ; \quad (x.y \neq 0)$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|x| \Rightarrow \boxed{y = cx}$$

وهي المنحنيات المتعامدة.

وظيفة: ① أوجد المسارات المائلة بزاوية $\alpha = \frac{\pi}{4}$ لجملة المستقيمات

الجواب: معادلة تفاضلية متجانسة

$$y = c \cdot x$$

② أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة الدوائر التي تمر من نقطة الأصل ومراكزها تقع على المحور oy. الجواب $x^2+y^2=cx$

سؤال دورة ٩ـ٢ من أسئلة الرقة.

السؤال الأول

لتكن لدينا مجموعة المنحنيات الجبرية:

$$y^2 = c(1-x^2) \quad ; \quad y = y(x) \qquad ①$$

١ـ أوجد المعادلة التفاضلية لـ ① ثم حدد رتبة ودرجة المعادلة الناتجة

الحل/

إن المعادلة الجبرية تحتوي على ثابت اختياري واحد لذلك نشتق مرة واحدة لـ x.

$$2yy' = c(-2x)$$

$$c = \frac{-yy'}{x}$$

نبدل في المعادلة ① فنجد:

$$y^2 = \frac{-yy'}{x}(1-x^2)$$

$$xy^2 = +yy'(-1+x^2)$$

$$\cancel{xy^2 = -yy' + x^2yy'}$$

نقسم الطرفين على y

$$\boxed{xy = y'(x^2-1)} \quad ; \quad y \neq 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

ب - أوجد المسارات المتعامدة مع مجموعة المنحنيات ①

الحل

لإيجاد المسارات المتعامدة نبدل في المعادلة التفاضلية الناتجة

بالطلب (أ) كل y' بـ $-\frac{1}{y'}$

$$xy = -\frac{1}{y'}\left(x^2-1\right)$$

$$\boxed{x y y' = 1 - x^2}$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات

~~نضرب طرفي المعادلة بـ x~~

$$x\, y \frac{dy}{dx} = 1 - x^2$$

$$y\,dy = \left(\frac{1}{x} - x\right) dx \quad , \quad x \neq 0$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = \left(\ln x^2\right) - x^2 + 2c$$

وهي المسارات المتعامدة للمسارات ①