

الباب الثاني العلاقات والدوال

العلاقة:

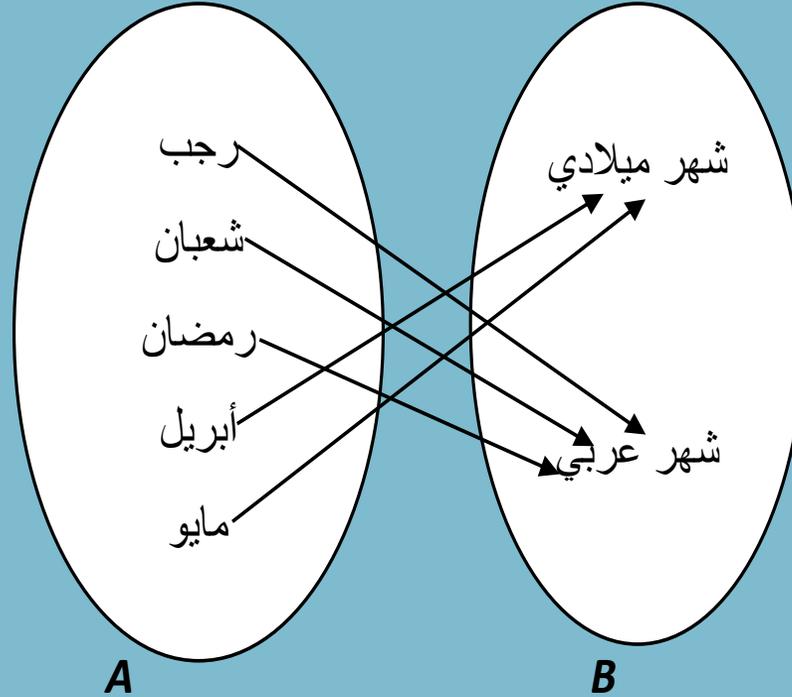
العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتين تسمى المجموعة الأولى بمجال العلاقة وتسمى المجموعة الثانية بالمجال المقابل (أو المجال المصاحب).
تأمل المجموعتين:

$$A = \{\text{رجب، شعبان، رمضان، أبريل، مايو}\}$$

$$B = \{\text{شهر ميلادي، شهر عربي}\}$$

لاحظ أن رجب، شعبان، ورمضان من الشهور العربية، أما أبريل ومايو من الشهور الميلادية، يمكن عمل علاقة بين عناصر المجموعة B بحيث ترتبط العناصر B وعناصر المجموعة A "رجب، شعبان، ورمضان" بالعنصر "شهر عربي"، ويرتبط العنصران "أبريل ومايو" بالعنصر "شهر ميلادي".

لنعبر عن هذه العلاقة بالمخطط السهني التالي:

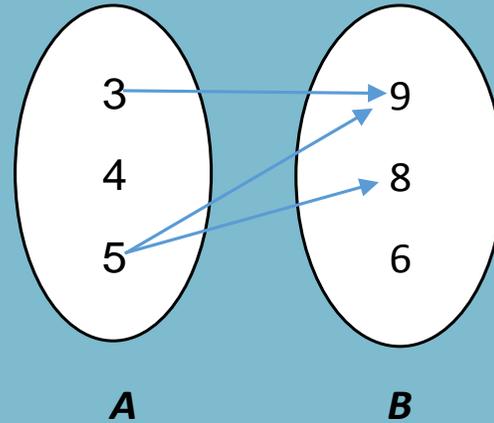


يمكن أن نكتب هذه العلاقة في صورة أزواج مرتبة كالاتي:

{ (أبريل، شهر ميلادي) ، (رمضان، شهر عربي) ، (شعبان، شهر عربي) ، (رجب، شهر عربي) }
{ (مايو، شهر ميلادي) }

هذه علاقة بين المجموعة A و المجموعة B ، مجال العلاقة هو المجموعة A ومجالها المقابل هو المجموعة B .
ليس بالضرورة أن ترتبط كل عناصر المجال وأن ترتبط كل عناصر المجال المقابل،

مثلاً: لتكن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، معرفة بالمخطط السهمي التالي:



لاحظ :

- العنصر "4" في المجموعة A لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة B .
- العنصر "6" في المجموعة B لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة A .
- العنصر "5" في المجموعة A ارتبط بعنصرين في المجموعة B .

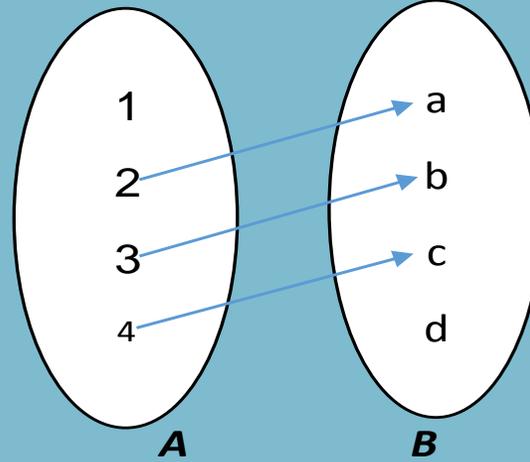
الدالة

الدالة هي علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجال بعنصر وحد من عناصر المجال المقابل. نرسم للدالة عادة بالرمز f ، فإذا كان لدينا دالة مجالها المجموعة A ومجالها المقابل المجموعة B نقول أن دالة من المجموعة A إلى المجموعة B ونكتب ذلك كالآتي:

$$f : A \rightarrow B$$

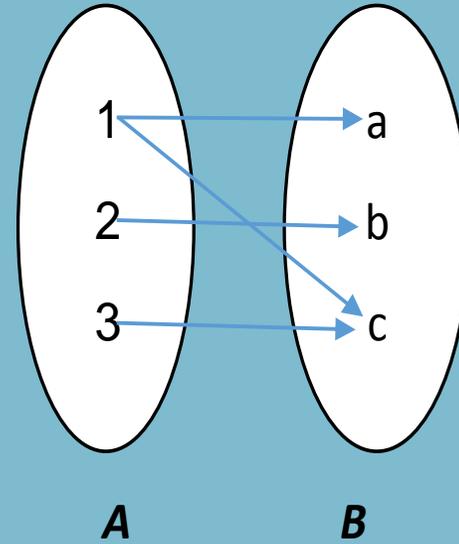
تأمل العلاقات التالية:

.1



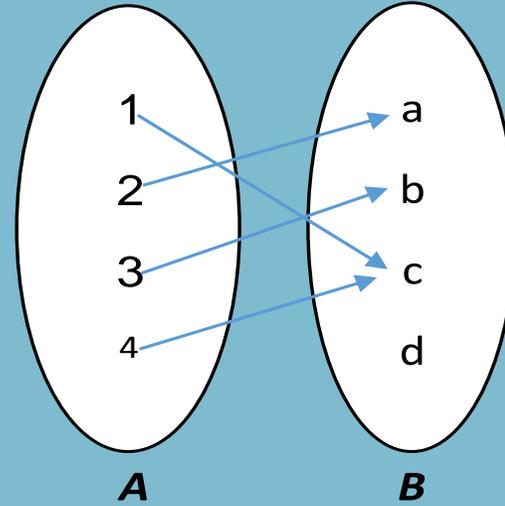
لاحظ العنصر "1" في المجموعة A لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة B .
هذه العلاقة ليست دالة.

.1



لاحظ العنصر "1" في المجموعة A ارتبط بأكثر من عنصر في المجموعة B .
هذه العلاقة ليست دالة.

.1

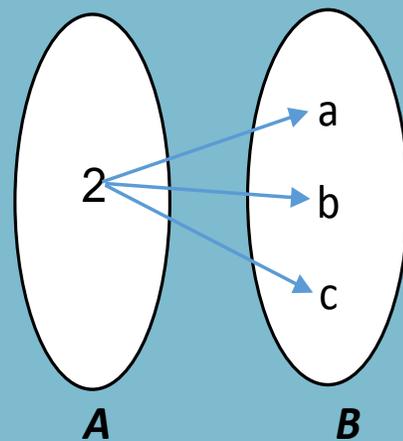


لاحظ كل عنصر في المجموعة A ارتبط بعنصر وحيد في المجموعة B .

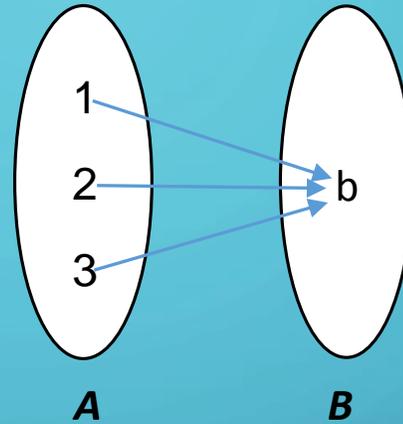
هذه العلاقة دالة. نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$$f = \{(1, c), (2, a), (3, b), (4, c)\}$$

.1



لاحظ العنصر "2" في المجموعة A ارتبط بأكثر من عنصر في المجموعة B .
هذه العلاقة ليست دالة.

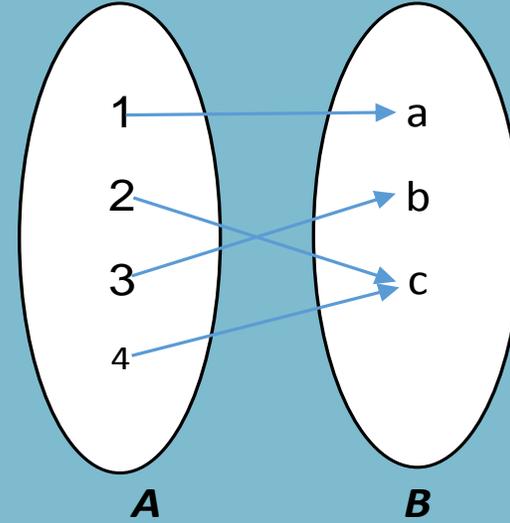


.1

لاحظ كل عنصر في المجموعة A ارتبط بعنصر وحيد في المجموعة B .
هذه العلاقة دالة. نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$$f = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$$

.1



لاحظ كل عنصر في المجموعة A ارتبط بعنصر وحيد في المجموعة B .

هذه العلاقة دالة. نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (7, c), (6, c)\}$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

الدالة $f = \{(1, a), (5, b), (7, d), (4, c)\}$ مجالها هو

(a) دالة مجالها $\{1, 5, 6, 7\}$

(b) دالة مجالها $\{1, 5, 7, 4\}$

(c) دالة مجالها $\{a, b, c\}$

(d) دالة مجالها $\{1, a, 5, b, 7, d, 4, c\}$

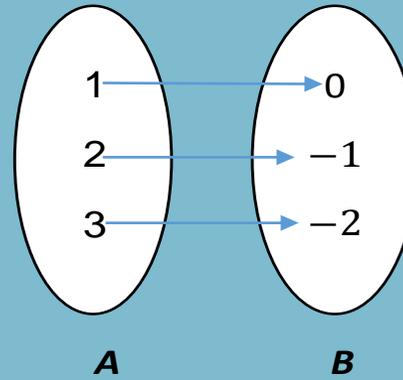
الحل:

(b) دالة مجالها $\{1, 5, 7, 4\}$

الدرس الثاني

صورة العنصر:

الدالة $f : A \rightarrow B$ معرفة كالآتي:



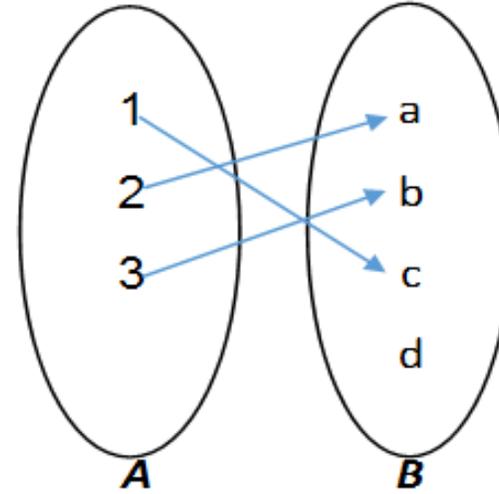
نلاحظ أن العنصر 1 اقترن (ارتبط) بالعنصر 0 ، نقول ان صورة العنصر 1 هي 0 ونكتب ذلك: $f(1) = 0$.

لاحظ:

$$f(2) = -1$$

$$f(3) = -2$$

مدى الدالة: تأمل الدالة:



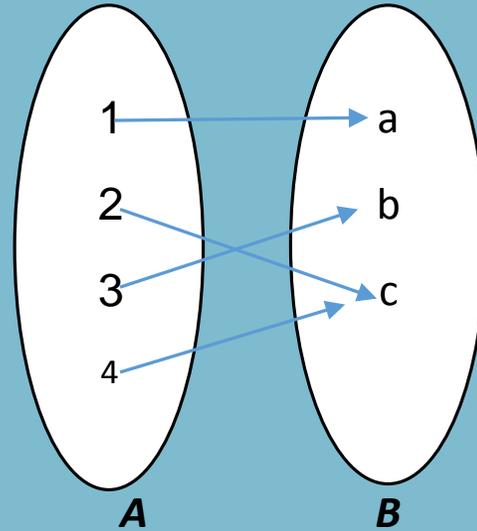
مجال الدالة هو $\{1, 2, 3\}$ ومجالها المقابل هو $\{a, b, c, d\}$

مدى الدالة هي العناصر المجال المقابل التي تقترن بالمجال بالتالي المدى هو $\{a, b, c\}$

الدالة الشاملة:

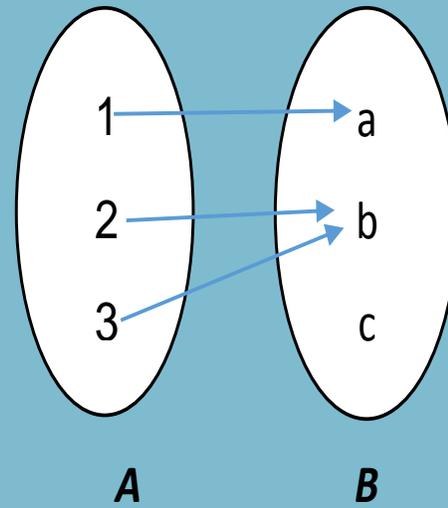
نقول أن f دالة شاملة إذا كان مداها مساويا لمجالها المقابل.

مثلا: الدالة



دالة شاملة.

بينما الدالة:

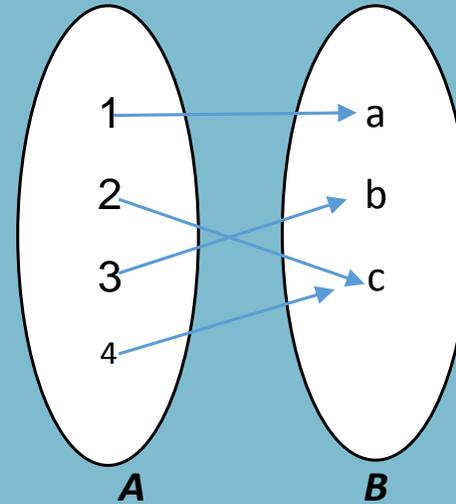


ليست شاملة ، لاحظ: مدها لا يساوي مجالها المقابل.

الدالة واحد لواحد:

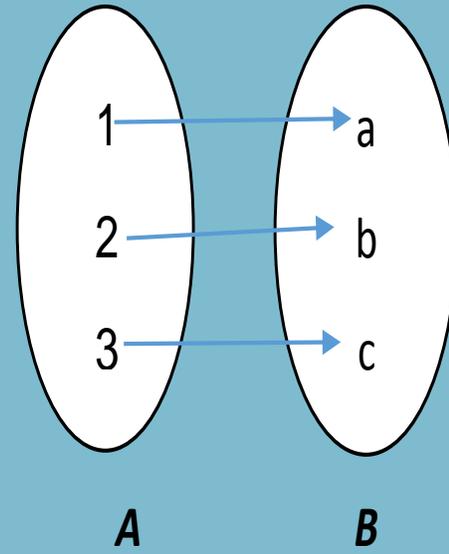
نقول أن f دالة واحد لواحد إذا كان كل عنصر في المدى هو صورة لعنصر واحد فقط من المجال.

مثلا: الدالة



ليست دالة واحد لواحد لأن العنصر c هو صورة للعنصر 3 وأيضا صورة للعنصر 4

بينما الدالة:



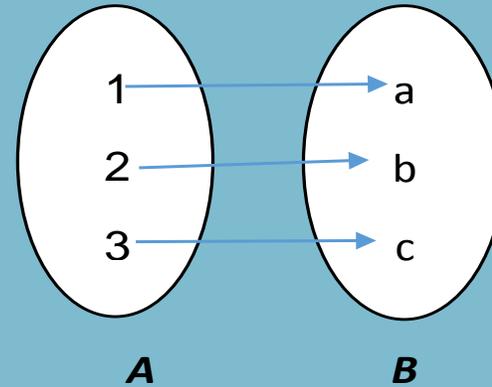
دالة واحد لواحد.

الدالة العكسية:

إذا كانت الدالة شاملة وأيضاً واحد لواحد فإنه توجد لها دالة عكسية نركز لها بالرمز f^{-1}

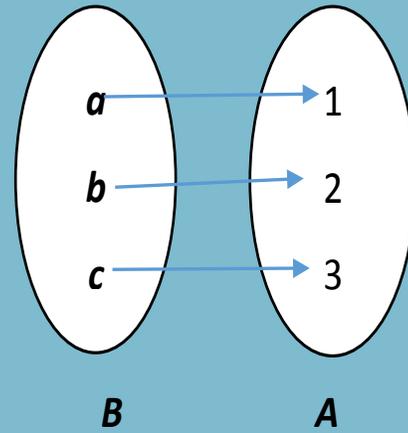
ونقرأ " الدالة العكسية "

مثلاً: الدالة $f : A \rightarrow B$ معرفة كالآتي:



دالة شاملة ودالة واحد لواحد ، بالتالي الدالة العكسية موجوده وهي:

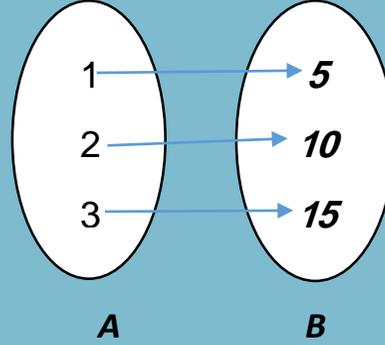
الدالة $f^{-1} : B \rightarrow A$ معرفة كالآتي:



لاحظ: مجال f هو المجال المقابل لـ f^{-1} . والمجال المقابل لـ f هو مجال f^{-1} .

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

معطى الدالة $f: A \rightarrow B$ معرفة كالآتي:



1. $f^{-1}(10)$ تساوي

- (a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 2

2. $f^{-1}(5)$ تساوي

- (a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 2

3. $f(3)$ تساوي

- (a) 1 (b) 0 (c) 15 (d) 5

الدرس الثالث

المتغيرات والثوابت

المتغير هو رمز (عادة يكون حرف) يستخدم للتعبير عن عدد، مثلاً إذا كان لدينا علبة بها عدد غير معلوم من الأقلام وهناك قلمان خارج العلبة فالمجموع الكلي للأقلام يكون عدد الأقلام المجهول إضافة للقلمين، لنعبر عن عدد الأقلام المجهول بالحرف بالتالي يمكن التعبير عن المجموع الكلي x للأقلام بـ $x + 2$

نسمي $x + 2$ بتعبير (أو مقدار)، فإننا نسمي $x + 2$ بتعبير جبري ونسمي x متغير ، يمكن استخدام أي حرف للدلالة على متغير ولكن عادة ما نستخدم الحرف x . المتغير في المقدار يمكن استبداله بأي عدد، ومتى ما استبدلنا المتغير بعدد يمكن إيجاد قيمة المقدار، مثلاً لنأخذ $x + 2$ إذا وضعنا $x = 8$ فإن

$$x + 2 = 8 + 2 = 10$$

مثال:

احسب قيمة $3x + 4$ إذا كان $x = 5$

الحل

$$3x + 4 = 3(5) + 4 = 15 + 4 = 19$$

مثال:

احسب $6x - 3 + 5(y - 1)$ إذا كان $x = 2$ و $y = 3$

الحل

$$6x - 3 + 5(y - 1) = 6(2) - 3 + 5(3 - 1) = 12 - 3 + 10 = 19$$

الصورة الرياضية للدالة

لنفرض لدينا دالة f مجالها \mathbb{N} ومجالها المقابل \mathbb{N} ، تربط كل عنصر مع نفسه، بالتالي العنصر 1 سيرتبط بالعنصر 1 العنصر 5 سيرتبط بالعنصر 5 وهكذا . يمكن التعبير عن ذلك رياضيا كآتي:

الدالة $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ معرفة بالقانون: $f(x) = x$
لاحظ:

$$f(1) = 1 , f(2) = 2 , f(10) = 10$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

إذا كانت $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ معرفة بالقانون: $f(x) = x + 1$

1. $f(1)$ تساوي

- (a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 2

2. $f(5)$ تساوي

- (a) 7 (b) 6 (c) 5 (d) 9

3. $f(0)$ تساوي

- (a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 4

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

إذا كانت $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ معرفة بالقانون: $f(x) = 4x - 2$

1. $f(1)$ تساوي

- (a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 2

2. $f(5)$ تساوي

- (a) 17 (b) 16 (c) 18 (d) 6

3. $f(3)$ تساوي

- (a) 4 (b) 0 (c) 15 (d) 10