*خلاصة الأشعة:

١- طويلة شعاع:

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

٢- ضرب شعاع بعدد:

$$k.\vec{v} = k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

٣- جمع أو طرح شعاعين:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x, y, z) \pm (a, b, c) = (x \pm a, y \pm b, z \pm c)$$

٤- تساوي شعاعين:

$$\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow (x, y, z) = (a, b, c) \Rightarrow x = a / y = b / z = c$$

٥- إثبات متوازي أضلاع:

أربع نقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة و $\vec{AB} = \vec{DC}$ ومنه ABCD متوازي أضلاع.

٦- جداء شعاعين:

$$\vec{u} . \vec{v} = ax + by + cz$$

٧- شرط تعامد شعاعين: $\vec{u} . \vec{v} = 0$

٨- إحداثيات منتصف قطعة [AB]:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

٩- إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

* معادلة الكرة :

معادلة كرة مركزها Ω ونصف قطرها R :

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$$

- حالة خاصة : كرة مركزها مبدأ الإحداثيات :

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

* المعادلة العامة للكرة : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+D=0$

نتمم إلى مربع كامل فنحصل : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=k$

$k>0 \Leftarrow$ كرة مركزها Ω نصف قطرها $\sqrt{k}$

$k<0 \Leftarrow$ مجموعة خالية من النقاط

$k=0 \Leftarrow$ مجموعة النقاط تمثل نقطة وحيدة .

* خطوات الإتمام لمربع كامل :

١- نتأكد أن أمثال الدرجة الثانية يساوي (1) دوماً .

٢- نضيف ونطرح مربع نصف أمثال الدرجة الأولى .

٣- (جذر الأول جذر الثاني ± جذر الثالث)^2

* ملاحظة : بالأشعة ما بصير نعكس $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

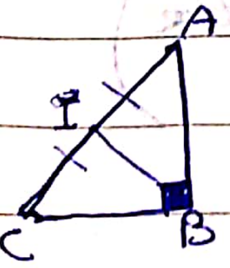
بالطويلة بصير نعكس $AB=BA$

* إثبات مثلث قائم :

١- $BC^2+BA^2=AC^2$: المثلث ABC قائم في B عكس فيثاغورث

٢- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$: المثلث ABC قائم

٣- I منتصف $[AC]$ و $BI=\frac{1}{2}AC$



المتوسط المتعلق بضلع ويساوي نصف طول تلك الضلع $\Leftarrow$ المثلث قائم وتره تلك الضلع

المبتدأ والخبر

* حجم المخروط : $V = \frac{1}{3}\pi . r^2 . h$
* حجم الإسطوانة : $V = \pi . r^2 . h$
* حجم رباعي الوجوه : $V = \frac{1}{3} . S . h$
* حساب مساحة المثلث :

١- بشكل عام : $S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدة}}{2}$

٢- قائم : $S = \frac{\text{جداء طول الضلعين القائمين}}{2}$

٣- متساوي الأضلاع : $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ → طول الضلع

* لإثبات أن النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري لـ [AB]

إذا تحقق $AM = BM$

* لإثبات شعاعين مرتبطين خطياً : $\vec{v}(x, y, z)$ / $\vec{u}(a, b, c)$

١- أحدهما ينتج عن الآخر بالضرب بعدد حقيقي $\vec{u} = k . \vec{v}$

٢- مركبات الشعاعين متناسبة : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

* ماذا نستفيد من الارتباط الخطي لشعاعين

١- A, B, C ثلاث نقاط و $\vec{AB}, \vec{AC}$ مرتبطان خطياً ومنه النقاط A, B, C على استقامة واحدة .

٢- A, B, C, D أربع نقاط مختلفة , $\vec{AB}, \vec{CD}$ مرتبطان خطياً ومنه $(AB) // (CD)$

* فائدة : لإثبات الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}(a, 0, 0)$ / $\vec{v}(x, 0, 0)$ نعمل حركة التبديل (يعني : $x\vec{u} = a\vec{v}$)

* فائدة : الشعاعان $\vec{u}(a, 0, c)$ و $\vec{v}(0, b, 0)$ غير مرتبطين لأنا : $\vec{u} . \vec{v} = a(0) + b(0) + c(0) = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

* الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

١- لإثبات ثلاث أشعة مرتبطة خطياً نثبت وجود عددين حقيقين a , b يحققان: $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

٢- كل شعاعين مرتبطين خطياً فهما مرتبطان مع أي شعاع آخر

٣- كل ثلاث أشعة مرتبطة خطياً ولها البداية ذاتها تقع في مستوٍ واحد.

* الوقوع في مستوٍ واحد:

١- إثبات ثلاث نقط تقع في مستوٍ واحد: شعاعين غير مرتبطين خطياً

٢- إثبات أربع نقط تقع في مستوٍ واحد: إما ارتباط خطي لثلاث أشعة لها البداية ذاتها أو مركز أبعاد متناسبة.

٣- إثبات خمس نقط تقع في مستوٍ واحد: علاقة شعاعين تشتركان بنقطة

* علاقة المتوسط:

لدينا مثلث ABC و $[AI]$ متوسط فيه فإن:

$$2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

* إثبات أو اختصار علاقة شعاعية: نفكر بـ:

١- الحشر: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

٢- استبدال شعاع بمساوٍ له $\vec{AB} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$

٣- إخراج عامل مشترك $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$

٤- طريقة متوازي الأضلاع ٥- طريقة شال.

٦- ترتيب الأشعة: $\vec{BC}+\vec{AB}+\vec{CD} = \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD} = \vec{AD}$

٧- استعمال نقطة نظيرة نقطة عند وجود شعاعين لهما المنتصف ذاته وتكون النقطة مركز المكعب.

* d_1 مستقيم موجه بالشعاع $\vec{u}$ و d_2 مستقيم موجه بالشعاع $\vec{v}$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً:
- d_1 و d_2 متوازيان
- d_1 و d_2 منطبقان

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً:
- تقعان في مستوٍ واحد ← d_1 و d_2 متقاطعان
- أو لا تقعان في مستوٍ واحد ← متخالفان

* إثبات تقاطع مستقيمين:
لدينا مستقيمان موجهان ~~بشعاع~~ بشعاعين وشعاع واصل بين نقطتين منهما: إذا كانت الأشعة مرتبطة خطياً وتقع في مستوٍ واحد فإن المستقيمان متقاطعان.

* إثبات مستقيم يوازي مستوي:
لدينا المستقيم d الموجه بالشعاع $\vec{u}$ والمستوي P الموجه بالشعاعين $\vec{v}$, $\vec{w}$ إذا كانت الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً كان المستقيم d يوازي المستوي P

* مركز الأبعاد المتناسبة: مركز الأبعاد المتناسبة هو نقطة وحيدة.

1) مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (A,α)

و $\alpha+\beta \neq 0$ ومنه: $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$

* ملاحظة: إذا أعطانا رجعة وطلب مركز أبعاد متناسبة لنقطتين نضع المتثقلات بعكس الأطوال.

* إنشاء مركز أبعاد متناسبة لنقطتين: $\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

ملاحظة ← وتذكير: أ- β و α من إشارة واحدة ⇐ G يقع بين A و B وأقرب إلى النقطة الأكبر.

ب- β و α من إشارتين مختلفتين ⇐ G لا يقع بين A و B ويكون أقرب إلى المتثقلة الأكبر.

* ملاحظة: طول AB هو β (البسط) وطول AG هو $\alpha+\beta$ (المقام)

2) مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقط:

G مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط (C,γ) (B,β) (A,α)

و $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ ومنه $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$

* إنشاء مركز أبعاد متناسبة لثلاث نقاط:

نفرض H مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (B,β) (A,α)

حسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(H,\alpha+\beta)$ (C,γ)

* إحداثيات مركز أبعاد متناسبة لثلاث نقاط:

$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ | $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ | $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

* ملاحظة: عند إثبات أن النقطة D تنتمي إلى المستوي ABC يمكن استنتاج أن D مركز الأبعاد المتناسبة من خلال الارتباط الخطي لثلاث أشعة.

٣) مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط.

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)(D,\delta)$ و $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$

ومنه: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

* إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط

حالة ①: $\alpha+\beta+\gamma=\delta$ و $\alpha=\beta=\gamma$

نفرض H مركز الأبعاد المتناسبة للنقط المثقلة $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

فيكون H مركز ثقل المثلث ABC حسب الخاصة التجميعية

G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(D,\delta)(H,\alpha+\beta+\gamma)$

حالة ②: إذا لم يتحقق أحد الشروط من الحالة ①:

نفرض H مركز أبعاد للنقطتين $(A,\alpha)(B,\beta) \Leftarrow (H,\alpha+\beta)$

ونوضع H على الشكل من خلال: $\overrightarrow{AH}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

ونفرض K مركز أبعاد للنقطتين: $(C,\gamma)(D,\delta) \Leftarrow (K,\gamma+\delta)$

ونوضع K على الشكل من خلال: $\overrightarrow{CK}=\frac{\delta}{\gamma+\delta}\overrightarrow{CD}$

حسب الخاصة التجميعية G مركز أبعاد للنقطتين $(H,\alpha+\beta)$ و $(K,\gamma+\delta)$ ونوضع G على الشكل من خلال:

$$\overrightarrow{KG}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{KH}$$

* ماذا نستفيد من مركز أبعاد متناسبة؟
١- إثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة.
٢- إثبات أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد.
٣- إثبات تقاطع مستقيمات.

النهاية.

إضافة للأسطوانة والمخروط

ماحي صاحا بنفلات، إذا حدا اكتشف غلط يخبرني
بتعليقاتكن وبتفيدو الدفعة على التلغرام
@alsmra_963 أو على الرقم ٠٩٦٤٦٠٨٤٤٠

وخوة ٤٠ غريبا مستجابة، وحولها
موفقين جميعاً.