اسم الطالب/ة : ....
مدة الاختبار : ساعتان

مركز أونلاين التعليمي
الثالث الثانوي العلمي
اختبار نهايات

أولاً : حل التمارين الآتية :

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+2x+2\sin x}{x}$ وخطه البياني C

1) أوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$

2) برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

التمرين الثاني : ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}$

1- احسب نهاية f عند $+\infty$

2- أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

و أن نهاية $x\to f(x)-ax$ هو عدد حقيقي b ثم استنتج ..وجود مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

التمرين الثالث : ليكن $|f(x)-3|\le\frac{\cos x}{x^2+1}$ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

التمرين الرابع : أوجد نهاية التابع $f(x)=\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+4}-2}$ عندما $x=0$

التمرين الخامس : ليكن التابع $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ المعرف على $R\backslash\{1\}$.

أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم أعط عدد حقيقي A يحقق إذا كان $x>A$ فإن $f(x)\in]2.9\,,3.1[$

التمرين السادس : ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f

2) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$

التمرين السابع : ليكن التابع $f(x)=x+\frac{2+\sin x}{x^2}$ أثبت أن $y=x$ مقارب لـ C وعين وضع C بالنسبة له .

التمرين الثامن : أوجد نهاية التابع $f(x)$ عند أطراف مجموعة التعريف :

$$f(x)=\frac{x-4}{x^2-6x+5}$$

التمرين التاسع : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=x+\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ والمطلوب :

1) أوجد كل مقارب للخط C يوازي المحور xx' أو المحور yy'

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C ثم أدرس وضع C بالنسبة إلى Δ

أ.فارس جقل .. دورات (ر ف ك)... اللاذقية 0955186517

سلم تصحيح اختبار الرياضيات

* التمرين الأول: $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2\sin x}{x}$

$\boxed{1}$ عدم تعيين: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{x}\left(x+2+\frac{2\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}} = 0+2+2(1)$$

$$= 4$$

$\boxed{2}$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2+2x+2\sin x}{x} - \frac{(x+2)}{\underset{(x)}{1}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}+2\sin x-\cancel{x^2}-\cancel{2x}}{x} = \frac{2\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin x}{x}$$

نستخدم الإحاطة

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نضرب في 2:

$$-2 \le 2\sin x \le 2$$

نقسم على x

$$\frac{-2}{x} \le \frac{2\sin x}{x} \le \frac{2}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x} = 0\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0\end{array}\right\}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin x}{x} = 0$$

$\Leftarrow$ $y = x+2$ مقارب مائل

* التمرين الثاني: $f(x) = \sqrt{x^2+4x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+1}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+1} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}(x^2)} = +\infty$$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$= \sqrt{1+0+0} = 1 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+1}-1x\right]$$

$= +\infty - \infty =$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+4x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$$

$= \dfrac{\infty}{\infty} =$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}$$

$$= \frac{4}{2} = 2 = b$$

* المقارب: $y = ax+b$

$$y = x+2$$

* التمرين الثالث :

الفكرة : $\lim |f(x) - \text{عدد}| \leq k$ ⇓ 0

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 3| \leq \frac{\cos x}{x^2+1} \Downarrow 0$$

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$

نقسم على x^2+1

$$\frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

* التمرين الرابع :

$$f(x) = \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+4}-2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2}$$

نأخذ حالتين :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}\right)} = \frac{0}{+\infty-\infty}$$: عدم تعيين

Δ_2 نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2+\cancel{4}-\cancel{4}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\boxed{1}}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)$$

$$= 1\left(\sqrt{4}+2\right) = 4$$

* التمرين الخامس : «x في نهاية الكبر»

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1} \qquad \Delta_1$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{x+1} = 3 = l$$

$$\varepsilon = 3 - 2.9 = 0.1$$

نعوض بالقانون

$$|f(x) - 3| < 0.1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x+2}{x-1} - \frac{3}{1}_{(x-1)}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{\cancel{3x}+2-\cancel{3x}+3}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{5}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{|5|}{|x-1|} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{x-1} < \frac{1}{10}$$

<= لأن x كبيرة

$$50 < x-1 \Rightarrow 51 < x \quad A$$

التمرين السادس : هو نفسه $\boxed{25}$ صفحة 109

التمرين السابع :

رائع

$$f(x) = x + \frac{2+\sin x}{x^2}$$

$$f(x) - y_\Delta = \cancel{x} + \frac{2+\sin x}{x^2} - \cancel{x}$$

$$= \frac{2+\sin x}{x^2}$$

نستخدم الإحاطة :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضيف 2

$$1 \leq 2+\sin x \leq 3$$

نقسم على x الموجب

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2+\sin x}{x} \leq \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sin x}{x} = 0$$

$\Leftarrow$ $y = x$ مقارب مائل عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي للمقارب المائل :

ندرس إشارة الفرق : $\frac{2+\sin x}{x^2}$

* $\sin x$ أصغر من أي عدد أكبر من 1

$$\frac{2+\sin x}{x^2} > 0$$

لأن $\sin x < 2$

والخط C فوق Δ

التمرين الثامن :

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$$

$$=]-\infty,1[\cup]1,5[\cup]5,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = \cancel{\frac{-3}{0^+}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التمرين التاسع :

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$D = [0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x=1$ مقارب يوازي yy' والخط C على يساره

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x=1$ مقارب يوازي $y'y$ والخط C على يمينه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= +\infty + 0 = +\infty$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

$\Leftarrow$ $y = x$ مقارب مائل عند $+\infty$ ، $-\infty$

الوضع النسبي :

x	0	1	$+\infty$
الإشارة	$-$	‖	$+$
	الخط C تحت Δ	‖	الخط C فوق Δ