جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر ١٥١ ريض	الفصل الأول ١٤٣١/١٤٣٢ الزمن: ثلاث ساعات
الإسم:	الرقم:	رقم الشعبة:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
رمز الجواب	أ	ب	د	ب	د	أ	ج	ب	ج	د	ج	ب

الجزء الأول: اختر الاجابة الصحيحة (درجتان لكل سؤال).

(١) العبارة $\neg(p \to q) \to p$ **هي:**

أ) مصدوقة ب) تناقض ج) مخلوطة د) لا شيء مما ذكر.

(٢) العبارة $(p \to q) \to q$ **تكافئ منطقيا :**

أ) $p \wedge q$ ب) $p \vee q$ ج) $p \to q$ د) $q \to p$

(٣) المكافئ العكسي للعبارة $(u \wedge \neg v) \to w$ **هو:**

أ) $\neg(u \wedge \neg v) \to \neg w$ ب) $\neg w \to (v \to u)$

ج) $\neg w \to (\neg u \wedge v)$ د) $\neg w \to (u \to v)$

(٤) الإغلاق المتعدي للعلاقة $R = \{(1,1),(1,2),(3,1)\}$ **على المجموعة** $A = \{1,2,3\}$ **هو.**

أ) R ب) R^2 ج) $A \times A$ د) لاشيء مما ذكر.

(٥) العلاقة R **المعرفة على الأعداد الصحيحة بالقاعدة:** $aRb \Leftrightarrow$ $a+b$ **عدد فردي**

أ) إنعكاسية ب) تخالفية ج) متعدية د) لا شيء مما ذكر.

(٦) العلاقة S **المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة بالقاعدة :** $mSn \Leftrightarrow |m-n| \leq 8$

أ) انعكاسية و تناظرية ب) متعدية و تخالفية ج) علاقة ترتيب جزئي د) علاقة تكافؤ.

(٧) إذا كانت R **علاقة تكافؤ على** $A = \{a,b,c,d\}$ **بحيث فصول التكافؤ هي:** $\{a,d\},\{b\},\{c\}$ **فإن** R **هي:**

أ) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ ب) $\{(a,d),(d,a),(b,b),(c,c)\}$

ج) $\{(a,a),(a,d),(b,b),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ د) $A \times A$.

(٨) إذا كانت $f(x,y,z) = yz' + y'z + x$ **فإن** CPS(f) **هو :**

أ) $x + y + z'$ ب) $(x+y'+z')(x+y+z)$

ج) $(x'+y+z)(x'+y'+z')$ د) $(x+y'+z)(x'+y+z)$.

(٩) الشكل MSP للدالة f المعطاة بالشكل :

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	1	1		1
x'	1		1	1

هو :

أ) $xy + x'y' + yz + y'z$ ب) $xy + xz + x'y' + x'z$

ج) $xy + x'y' + z$ د) لاشيء مما ذكر.

(١٠) الشكل MPS للدالة $g(x,y,z) = y'z' + x'yz' + x'y'z$ هو :

أ) $xy + xz + yz$ ب) $(x'+y')(y'+z')(x'+y+z')$

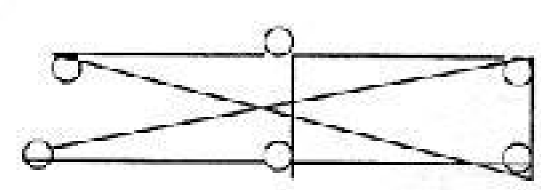
ج) $(x'+z')(y'+z')(x'+y'+z)$ د) $(x'+y')(x'+z')(y'+z')$

(١١) العبارة الصائبة هي :

أ) K_n رسم مستو لكل $n \geq 1$. ب) $K_{n,m}$ رسم مستو لكل $m \geq 1,\ n \geq 1$.

ج) K_n رسم منتظم لكل $n \geq 1$ د) $K_{m,n}$ رسم منتظم لكل $m \geq 1,\ n \geq 1$.

(١٢) الرسم



أ) منتظم ب) ثنائي التجزئة ج) ليس ثنائي التجزئة د) لا شيء مما ذكر .

__الجزء الثاني__ : أجب عن الأسئلة التالية:

(١) أثبت أن $\sqrt{7}$ عدد غير كسري. (٤ درجات)

نستخدم طريقة البرهان بالتناقض:

1 نفترض أن $\sqrt{7}$ هو عدد كسري. إذن يوجد $a, b \in \mathbb{N},\ b \neq 0$

بحيث $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ و $gcd(a,b) = 1$.

بما أن $\sqrt{7} = a/b$ فإن $7 = \frac{a^2}{b^2}$ يعني $a^2 = 7b^2$ ، إذن

1 $7/a^2$ هذا يؤدي إلى أن $7/a$ (*) (يعني يوجد $c \in \mathbb{N}$ بحيث $a = 7c$)

فإن $a^2 = 49c^2 = 7b^2$ $\Leftarrow$ $b^2 = 7c^2$ إذن $7/b^2$. هذا يؤدي

1 إلى أن $7/b$ (**) نرى أن $gcd(a,b) \geq 7$ وهذا تناقض مع $gcd(a,b)=1$

1 من خلال (*) و (**)

فنستنتج أن $\sqrt{7}$ هو عدد غير كسري.

(٢) استخدم الاستقراء الرياضي لاثبات أن n^2+n-8 عدد زوجي لكل عدد صحيح $n \geq 0$.　　　(٤ درجات)

- نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي على n:

نضع $P(n)$: " n^2+n-8 هو عدد زوجي "

- خطوة الأساسية: $n=0$ ، $0+0-8 = -8$ وهو عدد زوجي إذن $P(0)$ صائب.　(1)
- خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 0$. نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني k^2+k-8 هو عدد زوجي) فلنثبت أن $P(k+1)$ صائب.　(1)

$$(k+1)^2+(k+1)-8 = k^2+2k+1+k+1-8 \quad (1)$$
$$= \underbrace{(k^2+k-8)}+2(k+1)$$
حيث $c \in \mathbb{Z}$
$$= 2c+2(k+1) = 2(c+k+1) \quad (1)$$

إذن $(k+1)^2+(k+1)-8$ هو عدد زوجي . يعني $P(k+1)$ صائب.

الاستنتاج: لكل $n \geq 0$ ، $P(n)$ صائب يعني n^2+n-8 هو زوجي.

(٣) إذا كانت R علاقة معرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة بالقاعدة : $aRb \Leftrightarrow a|b$ فاثبت أن علاقة ترتيب جزئي ثم ارسم شكل هاس للمجموعة $A=\{2,3,4,7,8,12,16\}$.　　　(٤ درجات)

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+=\{1,2,\dots\}$

* R انعكاسية على $\mathbb{Z}^+$.

نأخذ $a \in \mathbb{Z}^+$ ، نعلم أن $a|a$ يعني aRa　(1)

* R تخالفية على $\mathbb{Z}^+$.

نأخذ $a,b \in \mathbb{Z}^+$. نفترض أن $a|b$ و $b|a$ فلنثبت أن $a=b$.　(1)

بما أن $a|b$ إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $b=ak$ (1)

بالمثل $b|a$ إذن يوجد $k' \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $a=bk'$ (2)

بالتعويض (2) في (1) نجد أن $b=ak=bk'k \Rightarrow$

$b(1-kk')=0$, $b \neq 0$ إذن $kk'=1$. وهذا يؤدي

إلى $k=k'=1$ إذن $a=b$.

* R متعدية على $\mathbb{Z}^+$. نفترض أن aRb و bRc فلنثبت أن aRc .　(1)

بما أن aRb و bRc فإنه يوجد:

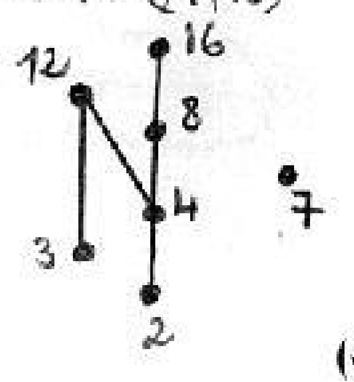
$b=ak$ ، $k \in \mathbb{Z}^+$
$c=bk'$ ، $k' \in \mathbb{Z}^+$ بالتعويض

$c=akk'$ يعني $a|c$

$\Leftarrow$ aRc .

- بما أن R انعكاسية، تخالفية، متعدية على $\mathbb{Z}^+$ فإن R هي علاقة ترتيب جزئي.
- بما أن $A \subset \mathbb{Z}^+$ ، (A,R) مجموعة مرتبة جزئية.

شكل هاس هو:　(1)



(٤) ليكن الشكل التالي هو شكل كارنو للدالة f:　　　(٥ درجات)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy				1
xy'	1	1	1	1
$x'y'$		1	1	1
$x'y$				1

(أ) جد $MSP(f)$.

$$MSP(f) = xy' + y'w' + z'w$$

(ب) جد $MPS(f)$.

(ج) صمم دارة عطف و فصل أصفرية مخرجها f .

(د) صمم دارة مخرجها f مستخدما بوابات نفي العطف فقط.

(ه) صمم دارة مخرجها f مستخدما بوابات نفي الفصل فقط.

(أ) ① $MSP(f) = xy' + z'w + y'w'$.

(ب)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	
xy'				
$x'y'$	1			
$x'y$	1	1	1	

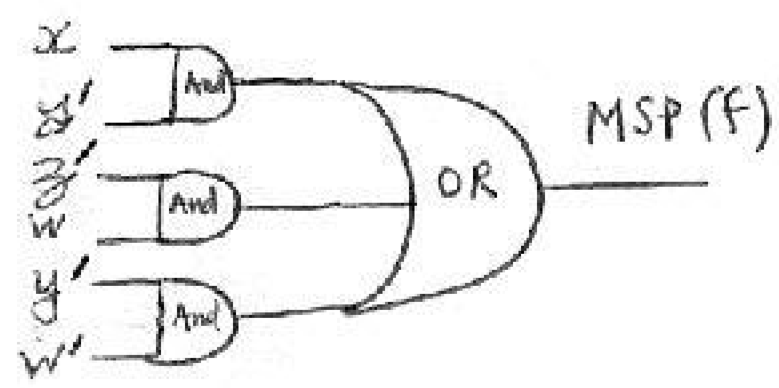
①

$MSP(f') = yz + yw' + x'zw$.

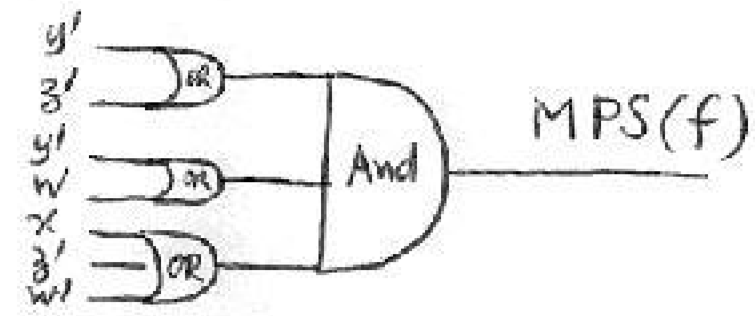
بما أن $MPS(f) = [MSP(f')]'$

فإن $MPS(f) = (y'+z')\cdot(y'+w)\cdot(x+z'+w')$

(ج)



①



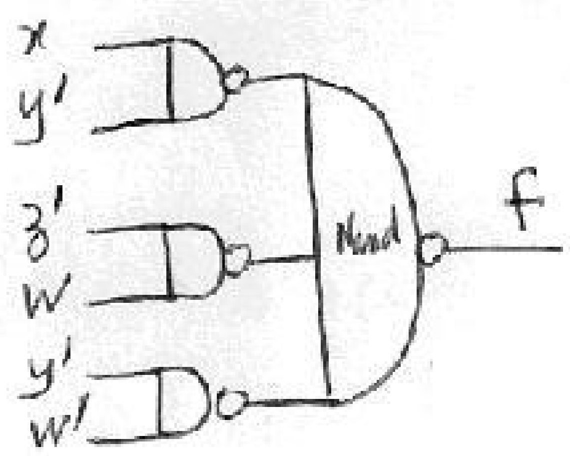
شبكة العطف والفصل الأصغرية هي كلا الشبكتين لأنهما يحتويان على نفس عدد البوابات

(د) $MSP(f) = xy' + z'w + y'w'$

$MSP(f) = [(xy' + z'w + y'w')']'$

$= (xy')' \cdot (z'w)' \cdot (y'w')'$

ولذا فإن شبكة نفي عطف أصغرية لـ f هي



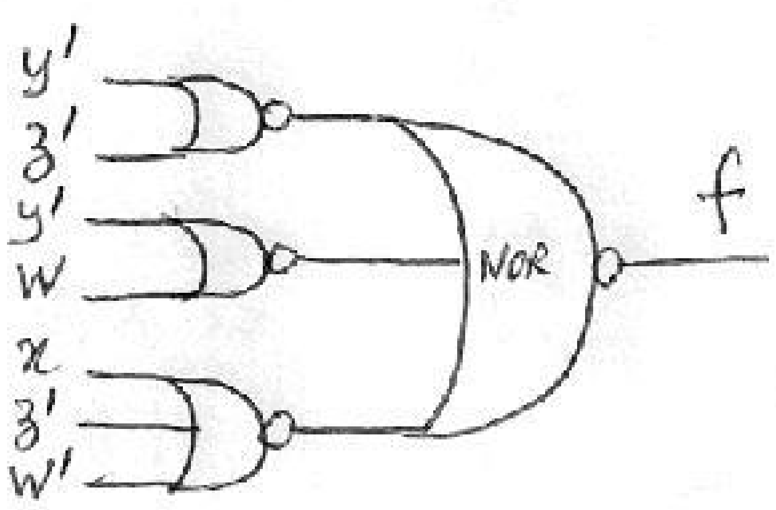
①

(هـ) $MPS(f) = (y'+z')\cdot(y'+w)\cdot(x+z'+w')$

$MPS(f) = [((y'+z')\cdot(y'+w)\cdot(x+z'+w'))']'$

$MPS(f) = [(y'+z')' + (y'+w)' + (x+z'+w')']'$

ولذا فإن شبكة نفي فصل أصغرية لـ f هي



①

(٥) رسم مترابط مستو درجات رؤوسه $1,1,2,2,2,3,4,x$ و عدد أوجهه 4 . جد x. **(٣ درجات)**

نضع
$V(G)$ عدد رؤوس الرسم G
$e(G)$ عدد أضلاع الرسم G
$f(G)$ عدد أوجه الرسم G .

① بما أن G مترابط مستو فإنه يحقق صيغة أويلر: $V(G) - e(G) + f(G) = 2$

إذن $8 - e(G) + 4 = 2$ فنستنتج أن $e(G) = 10$

① و بما أن $\sum_{x_i} deg(x_i) = 2\, e(G)$ فإن $1+1+2+2+2+3+4+x = 20$

① إذن $x = 5$.

(٦) ليكن G رسما بسيطا عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 36. جد n إذا علمت أن عدد أضلاع متمم G يساوي 42.
(٣ درجات)

بما أن $G \cup \bar{G}$ هو رسم تام (منتظم من النوع $(n-1)$).

فإن $E(G) + E(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$ 1

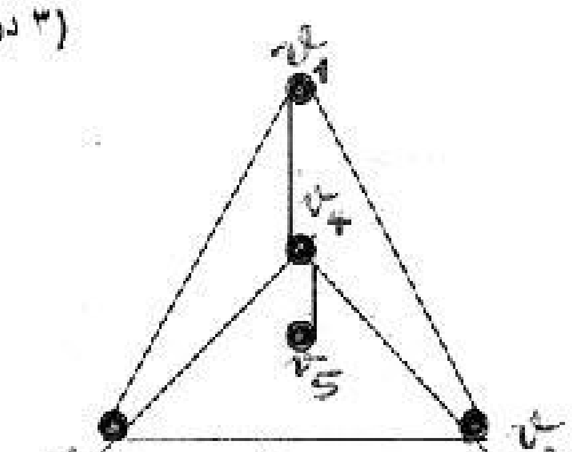
إذن $36 + 42 = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n(n-1) = 156 \Rightarrow n^2 - n - 156 = 0$ 1

معادلة من الدرجة 2. المميز: $\Delta = 725 = 25^2$ ، $n_1 = \frac{1-25}{2} < 0$

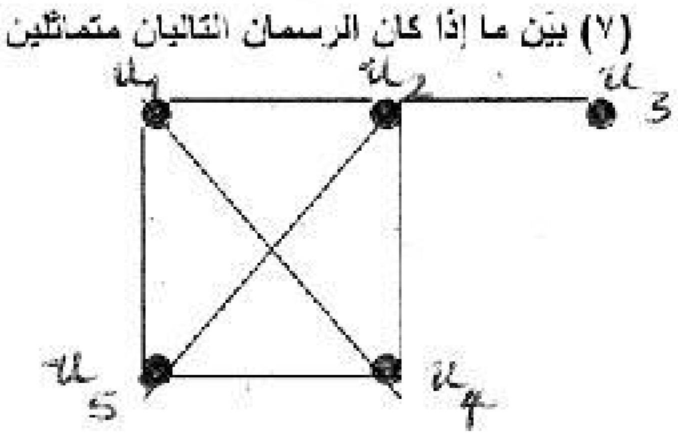
$n_2 = \frac{1+25}{2} = 13$

إذن عدد رؤوس الرسم G هو $n = 13$. 1

(٧) بين ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا ؟
(٣ درجات)



G



H

نلاحظ أن كلا من الرسمين G و H لديهما نفس عدد الرؤوس ،
نفس عدد الأضلاع و نفس عدد الرؤوس ذات درجة $4, 3$ و 1.

فلنثبت الآن أنهما متماثلين : $G \simeq H$:

$V(G)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$f(v(G))$	u_1	u_4	u_5	u_2	u_3

3

الدالة f هي دالة تقابلية (أحادية + شمولية).
كذلك صورة أي ضلع من G هو ضلع لـ H.

إذن $G \simeq H$