أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في التابع اللوغاريتمي للثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

النماذج الوزارية الثلاثة 2020

كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس : أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ : 0998024183

التمرين 1 :

حل كلا من المعادلات التالية :

$ln(x-2)=2$

مجموعة تعريف المعادلة $x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x \in]2,+\infty[$

مقبول $ln(x-2)=2 \Rightarrow x-2=e^2 \Rightarrow x=e^2+2 \in]2,+\infty[$

$ln(x-2)=ln\,2$

مجموعة تعريف المعادلة $x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x \in]2,+\infty[$

مقبول $ln(x-2)=ln\,2 \Rightarrow x-2=2 \Rightarrow x=4 \in]2,+\infty[$

$ln(x-1)=ln(x^2-1)$

المعادلة تحل بتحقق الشرطين معا : الأول : $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x \in]1,+\infty[$

الثاني : $x-1=x^2-1$ وبالتالي : $x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$ ومنه :

مرفوض $x=1 \notin]1,+\infty[$, مرفوض $x=0 \notin]1,+\infty[$ ليس للمعادلة حلول

$ln(x+11)=ln(x+3)+ln(x+2)$

$x+11>0 \Rightarrow x>-11 \Rightarrow x \in]-11,+\infty[$, $x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x \in]-3,+\infty[$

$x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x \in]-2,+\infty[$

وبالتالي مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]-2,+\infty[$ وحسب خواص اللوغاريتم :

$ln(x+11)=ln(x+3)\,(x+2) \Rightarrow x+11=x^2+5x+6$

$\Rightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow (x-1)(x+5)=0$

إمّا مقبول $x=1 \in]-2,+\infty[$ أو مرفوض $x=-5 \notin]-2,+\infty[$ بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{1\}$

$\frac{1}{2}ln2x=ln(3-x)-ln\sqrt{x+1}$

$2x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x \in]0,+\infty[$, $3-x>0 \Rightarrow x<3 \Rightarrow x \in]-\infty,3[$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x \in]-1,+\infty[$

وبالتالي مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0,3[$ وحسب خواص اللوغاريتم :

$\frac{1}{2}ln2x=ln(3-x)-\frac{1}{2}ln(x+1) \Rightarrow ln2x+ln(x+1)=2ln(3-x) \Rightarrow$

$\ln 2x(x+1)=ln(3-x)^2 \Rightarrow 2x(x+1)=(3-x)^2 \Rightarrow$

$2x^2+2x=9-6x+x^2 \Rightarrow x^2+8x-9=0 \Rightarrow (x+9)(x-1)=0$

مقبول $x=1 \in]0,3[$, مرفوض $x=-9 \notin]0,3[$ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{1\}$

$ln|x+2|+ln|x-2|=0$

المعادلة معرّفة على $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ وهي تكافئ : $ln|(x+2)(x-2)|=ln1 \Rightarrow |x^2-4|=1$

$x^2-4=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{cases}$ & $x^2-4=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S=$

$\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$

$ln|x-2|+ln(x+4)=3ln2$

المعادلة معرّفة على $]-4,2[\cup]2+\infty[$ وهي تكافئ : $ln[|x-2|(x+4)]=ln2^3 \Rightarrow$

$|x-2|(x+4)=8 \Rightarrow (x-2)(x+4)=8 \Rightarrow x^2+2x-8=8 \Rightarrow x^2+2x-16=0$

$\Delta=4+64=68=4\times 17 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{17}$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{17}}{2}=\sqrt{17}-1$ مقبول & $x_2=-\sqrt{17}-1$ مرفوض

$(x-2)(x+4)=-8 \Rightarrow x^2+2x-8=-8 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0$

$x_1=0$ مقبول & $x_2=-2$ مقبول $S=\{-2,0,\sqrt{17}-1\}$

$ln|2x+3| + ln|x-1| = 2ln|x|$

المعادلة معرّفة على $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}, 0,1\right\}$ وهي تكافئ : $ln|(2x+3)(x-1)| = ln|x|^2 \Rightarrow |2x^2+x-3| = |x|^2$

$2x^2+x-3 = x^2 \Longrightarrow \ x^2+x-3=0 \ \Longrightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \ , \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$2x^2+x-3 = -x^2 \Longrightarrow \ 3x^2+x-3=0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{37}}{4} \ , \ x_2 = \frac{-1-\sqrt{37}}{4}$

$log(x-1) = 2$

شرط الحل $x-1>0 \Rightarrow x>1 \ \Rightarrow x \in \left]1\ ,+\infty\right[$

$log(x-1) = 2 \Rightarrow \frac{\ln(x-1)}{\ln 10} = 2 \Rightarrow \ln(x-1) = 2\ln 10 \Rightarrow$

$\ln(x-1) = \ln 10^2 \Rightarrow x-1 = 100 \Rightarrow x = 101$

التمرين 2 :

حل كلا من المتراجحات التالية :

$ln(x-2) \le 2$

مجموعة تعريف المتراجحة $x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x \in \left]2,+\infty\right[$

$ln(x-2) \le 2 \Rightarrow x-2 \le e^2 \Rightarrow x \le e^2+2 \Rightarrow x \in \left]-\infty, e^2+2\right]$

بالتالي حلول المتراجحة : $S = \left]2, e^2+2\right]$

$ln(x-2) \le ln\,2$

مجموعة تعريف المتراجحة $x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x \in \left]2,+\infty\right[$

$x-2 \le 2 \Rightarrow x \le 4 \Rightarrow x \in \left]-\infty, 4\right]$

بالتالي حلول المتراجحة : $S = \left]2,4\right]$

$3lnx > ln(3x-2)$

تحل المتراجحة بشرطين $3x-2>0 \Rightarrow x>\frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left]\frac{2}{3}\ ,+\infty\right[$ و $x^3 > 3x-2$

$x^3 > 3x-2 \Rightarrow x^3-3x+2>0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-2)>0 \Rightarrow$

$(x-1)^2(x+2)>0 \Rightarrow x \in]-2,1[\cup]1,+\infty[$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $S = \left]\frac{2}{3}\ ,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$ln(x-1) \le ln(x^2-1)$

تحل المتراجحة بشرطين $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$ و $x-1 \le x^2-1$

$x-1 \le x^2-1 \Rightarrow x^2-x \le 0 \Rightarrow x(x-1) \le 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

بالتالي حلول المتراجحة : $S = \left]1,+\infty\right[$

$ln(x+11) \le ln(x+3) + ln(x+2)$

$x+11>0 \Rightarrow x>-11 \Rightarrow x \in \left]-11,+\infty\right[$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x \in \left]-3,+\infty\right[$

$x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x \in \left]-2,+\infty\right[$

وبالتالي مجموعة تعريف المتراجحة هي $D =]-2,+\infty[$ وحسب خواص اللوغاريتم :

$ln(x+11) \le ln(x+3)\,(x+2) \Rightarrow x+11 \le x^2+5x+6$

$\Rightarrow x^2+4x-5 \le 0 \Rightarrow (x-1)(x+5) \le 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty,-5\right] \cup \left[1,+\infty\right[$

بالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي $S = \left[1,+\infty\right[$

$\frac{1}{2}ln2x \leq ln(3-x) - ln\sqrt{x+1}$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in]0,+\infty[$

$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in]-\infty, 3[$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in]-1,+\infty[$

وبالتالي مجموعة تعريف المتراجحة هي $D =]0,3[$ وحسب خواص اللوغاريتم :

$\frac{1}{2}ln2x \leq ln(3-x) - \frac{1}{2}ln(x+1) \Rightarrow ln2x + ln(x+1) \leq 2ln(3-x) \Rightarrow$

$ln\, 2x(x+1) \leq ln(3-x)^2 \Rightarrow 2x(x+1) \leq (3-x)^2 \Rightarrow$

$2x^2 + 2x \leq 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 \leq 0 \Rightarrow (x+9)(x-1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-9,1]$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]0,1]$

التمرين 3 :

حلّ كلاً من المعادلة $(lnx)^2 - 2lnx - 3 = 0$ و المتراجحة $(lnx)^2 - 2lnx - 3 > 0$

المعادلة و المتراجحة معرفتين بشرط $x > 0 \Rightarrow x \in]0,+\infty[$

المعادلة : $(lnx)^2 - 2lnx - 3 = 0 \Rightarrow (lnx-3)(lnx+1) = 0$

$lnx = 3 \Rightarrow x = e^3 \quad , \quad lnx = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

المتراجحة: $(lnx)^2 - 2lnx - 3 > 0$

x	0		e^{-1}		e^3		$+\infty$
اشارة $(lnx)^2 - 2lnx - 3$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة : $x \in]0, e^{-1}[\cup]e^3, +\infty[$

التمرين 4 :

في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ lnx + lny = ln3 \end{cases}$

شرط الحل $x > 0$ و $y > 0$ ، حسب خواص اللوغاريتم نجد : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x.y = 3 \end{cases}$

من الثانية نجد أنّ $y = \frac{3}{x}$ نعوّض في الأولى نجد :

$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2-9)(x^2-1) = 0$

$x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 < 0 & \text{مرفوض} \\ x = 3 > 0 \Rightarrow y = 1 \ (3,1) \end{cases}$

$x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 & \text{مرفوض} \\ x = 1 > 0 \Rightarrow y = 3 \ (1,3) \end{cases}$

② $\begin{cases} 2lnx + lny = 7 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$

شرط الحل $x > 0$ و $y > 0$ ، نضرب المعادلة الأولى بـ 5 فنحصل على المعادلتين $\begin{cases} 10lnx + 5\,lny = 35 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$

بجمع المعادلتين طرفا الى طرف نجد : $13lnx = 39 \Rightarrow lnx = 3 \Rightarrow x = e^3$

نعوض في المعادلة الأولى نجد : $2(3) + lny = 7 \Rightarrow lny = 1 \Rightarrow y = e$

وللجملة حل وحيد $(x,y) = (e^3, e)$

③ $\begin{cases}(lnx)(lny) = -12 \\ ln(xy) = 1\end{cases}$

شرط الحل $x > 0$ و $y > 0$ فحسب خواص اللوغاريتم : $\begin{cases}(lnx)(lny) = -12 \\ lnx + lny = 1\end{cases}$

من الثانية نجد : $lny = 1 - lnx$ نعوض في الأولى نجد : $(lnx)(1 - lnx) = -12$ وبالتالي :

$(lnx) - (lnx)^2 = -12 \Rightarrow (lnx)^2 - (lnx) - 12 = 0 \Rightarrow (lnx - 4)(lnx + 3) = 0 \Rightarrow$

$lnx - 4 = 0 \Rightarrow lnx = 4 \Rightarrow x = e^4 \ , lny = -3 \Rightarrow y = e^{-3}$

$lnx + 3 = 0 \Rightarrow lnx = -3 \Rightarrow x = e^{-3} \ , lny = 4 \Rightarrow y = e^4$

التمرين 5 :

كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان

الحل :

المعادلة معرفة بشرط $m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow m \in]-1, +\infty[$

يكون لمعادلة $x^2 - 2x + ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان اذا كان $\Delta > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4ln(m+1) = 4\big(1 - ln(m+1)\big) \Rightarrow$

$4\big(1 - ln(m+1)\big) > 0 \Rightarrow 1 - ln(m+1) > 0 \Rightarrow ln(m+1) < 1 \Rightarrow m + 1 < e$

$m + 1 < e \Rightarrow m < e - 1 \Rightarrow m \in]-\infty, e-1[$

وبالتالي ليكون للمعادلة جذران مختلفان $m \in]-\infty, e-1[\cap]-1, +\infty[=]-1, e-1[$

التمرين 6 :

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان : $(1)\ ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{lna+lnb}{2}$ احسب $\frac{a}{b}$

الحل :

بما أن $a > 0$ و $b > 0$ فإن :

$ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{lna + lnb}{2} \Rightarrow ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}ln(ab) \Rightarrow ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = ln\sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab} \Rightarrow a + b = 3\sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = 9ab \Rightarrow$

$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab \Rightarrow a^2 - 7ab + b^2 = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} - 7\frac{a}{b} + 1 = 0$

بالقسمة على $b^2 \neq 0$ ينتج : $\frac{a^2}{b^2} - 7\frac{a}{b} + 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$

$\Delta = 49 - 4 = 45 = 9 \times 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{5}$

$\frac{a}{b} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} > 0$ & $\frac{a}{b} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} > 0$ وهما القيمتان الممكنتان للنسبة $\frac{a}{b}$

التمرين 7 :

أثبت أنّ $lnx \le 2(\sqrt{x}-1)$ ، أيّاً يكن $x>0$ ثم باختيار $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ استنتج أنّ $2<e<4$

الحل :

$$lnx \le 2(\sqrt{x}-1) \Rightarrow lnx - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$$

نفرض التابع $f(x) = lnx - 2\sqrt{x} + 2$ المعرّف عندما $x \in]0,+\infty[$ و لندرس اطّراد التابع f

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} = \frac{1-x}{x(1+\sqrt{x})}$$

إشارة f' من إشارة $1-x$ الذي ينعدم عند $x=1$ ويكون $f(1)=0$ ومنه جدول الاطّراد :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول الاطراد نجد أن $f(x) \le 0$ أيّاً كان $x>0$ وبالتالي $lnx \le 2(\sqrt{x}-1)$

من أجل $x=\frac{1}{e}$ نجد : $ln\left(\frac{1}{e}\right) \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{e} \le 2 \Rightarrow e \le 4$

من أجل $x=e$ نجد : $lne \le 2(\sqrt{e}-1) \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sqrt{e}-1 \Rightarrow \sqrt{e} \ge \frac{3}{2} \Rightarrow e \ge \frac{9}{4} \Rightarrow e > 2$

وبالتالي ينتج أنّ $2<e<4$

التمرين 8 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x - 4 + ln(\frac{x}{x+1})$

❶ أدرس تغيرات f ونظم جدولا بها

❷ أثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d

الحل :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-4+ln(\frac{x}{x+1})\right) = -\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-4+ln(\frac{x}{x+1})\right) = +\infty$$

$$f(x) = x - 4 + ln(x) - ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x(x+1)+x+1-x}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-4) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-(x-4)\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = ln(1) = 0$$

x	0	$+\infty$
f'	‖ $+$	
f	‖ $-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

وبالتالي $y = x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

و الخط C يقع تحت المقارب $f(x)-(x-4) = ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$

التمرين 9 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = ln(e^{-x} + 1)$ والمطلوب :

❶ جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة ؟

❷ أثبت ان $f(x) = -x + ln(e^{x} + 1)$

❸ استنتج أن الخط C يقبل مقاربا مائلا وليكن d في جوار $-\infty$

الحل :

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^{-x} + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(e^{-x} + 1) = \ln(1) = 0 \Rightarrow y = 0$$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

❷ $$f(x) = ln(e^{-x} + 1) = ln\big(e^{-x}(1 + e^{x})\big) = ln\, e^{-x} + ln(1 + e^{x}) = -x + ln(e^{x} + 1)$$

❸ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to-\infty} \big(-x + ln(e^{x} + 1) - (-x)\big) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^{x} + 1) = ln(1) = 0$$

وبالتالي $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

التمرين 10 :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرّف f على $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}lnx$

عين العددين الحقيقين a و b أذا علمت أن $f(1) = -1$ قيمة حدية للتابع

الحل :

بما أنّ النقطة $A(1,0)$ نقطة من C فإنّ $f(1) = 1$ ومنه ينتج : $a + b = 1 \quad \cdots (1)$

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2}lnx + \frac{1}{x^2} = a + \frac{1 - lnx}{x^2}$$

بما أن $f(1) = 1$ قيمة حدية للتابع فإن $f'(1) = 0$ ينتج : $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \cdots (2)$

نعوض في (1) نجد $b = 2$ بالتالي : $f(x) = -x + 2 + \frac{1}{x}lnx$

التمرين 11 :

نتأمّل التابع f المعرّف على $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \begin{cases} x^2(1 - lnx) & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

احسب $lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ واستنتج أنّ f اشتقاقي عند الصفر

الحل :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2(1 - lnx)}{x} = \lim_{x\to0^+} x(1 - lnx) \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} (x - xlnx) = 0 - 0 = 0$$

والتابع اشتقاقي عند $x = 0$ و $f'(0) = 0$

التمرين 12 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right) & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$ والمطلوب :

❶ أدرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند الصفر

❷ استنتج معادلة المماس للخط عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

الحل :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)}{x}=\frac{x}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}xlnx-\frac{3}{4}x \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}xlnx-\frac{3}{4}x\right)=0-0=0$$

وبالتالي التابع f قابل للاشتقاق عند الصفر و $f'(0)=0$

وبالتالي المماس عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ أفقي معادلته $y=f(0)=0$

التمرين 13 :

ادرس تغيرات التابع f على $\mathbb{R}_+^*$ ، وارسم خطّه البياني C : $f(x)=(x+1)lnx$

الحل :

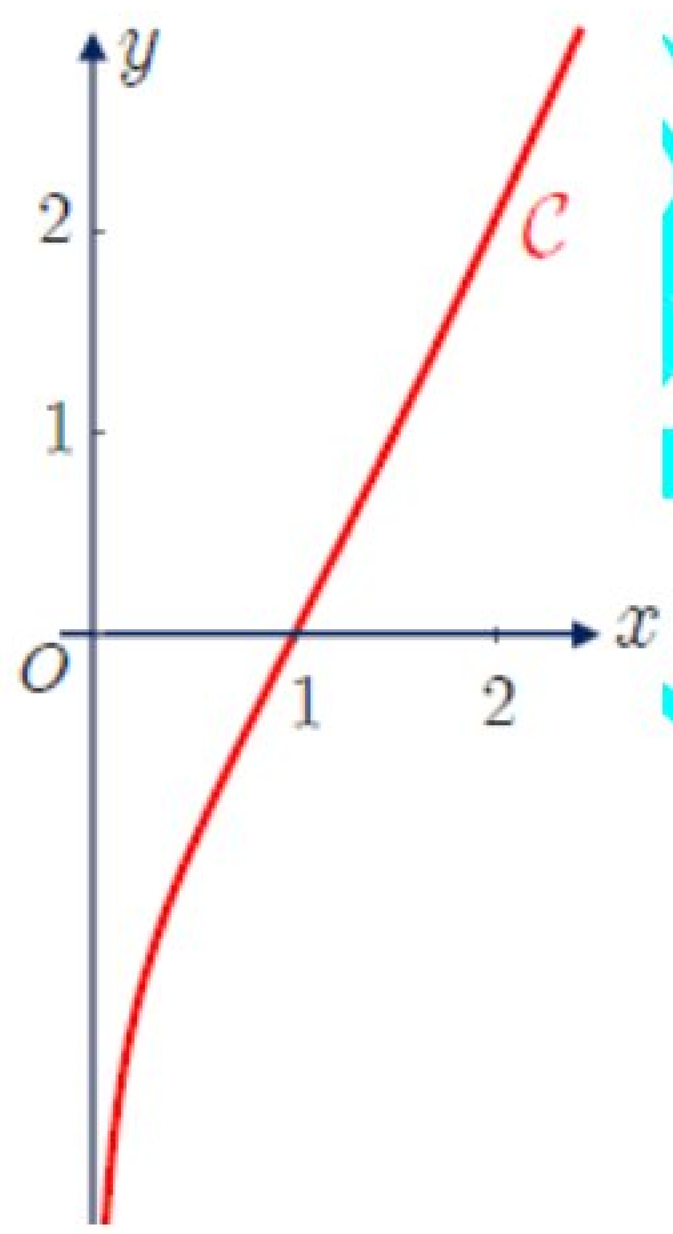
التابع معرّف ومستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه المفروضة $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)lnx=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)lnx=+\infty \quad , f'(x)=lnx+\frac{x+1}{x}=lnx+1+\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2} \quad \Longrightarrow f''(x)=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow f'(1)=2$$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	2	↗	



نلاحظ أنّ $f'(x)\geq 2$ أي أن $f'(x)$ لا ينعدم واشارته موجبة على $\mathbb{R}_+^*$

نعود لجدول تغيرات $f(x)$ نجد :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

التمرين 14:

ادرس تغيرات التابع f على $\mathbb{R}_+^*$ ، وارسم خطّه البياني C : $f(x) = (x-1)lnx$

الحل :

التابع معرّف ومستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه المفروضة $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-1)lnx = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x-1)lnx = +\infty \quad , \quad f'(x) = lnx + \frac{x-1}{x} = lnx + 1 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D$$

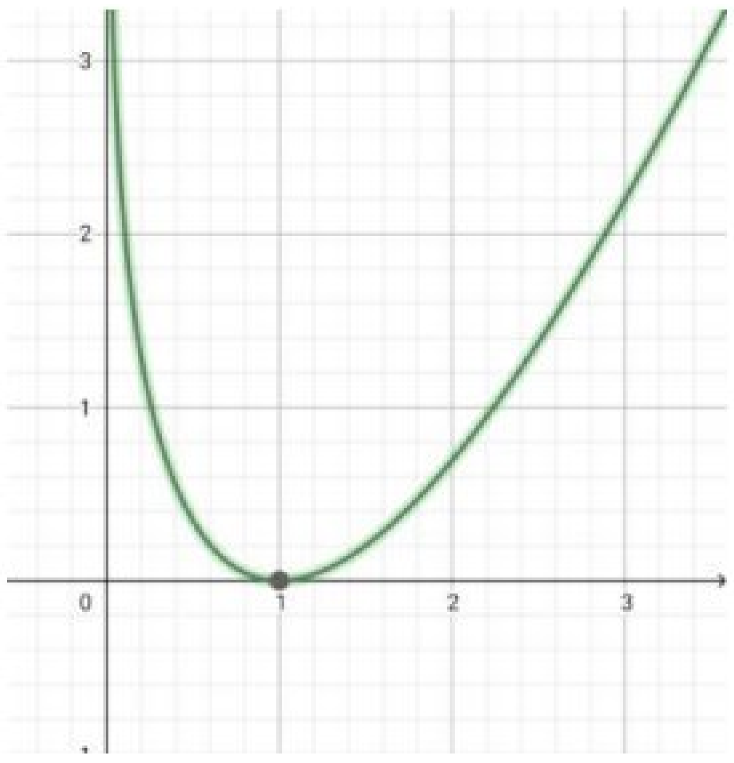
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

أي أنّ $f'(x)$ تابع متزايد تماماً ونلاحظ أنّ $f'(x) \in]-\infty,+\infty[$

وبالتالي يوجد قيمة ينعدم عندها $f'(x)$ وبالتعويض نجد $f'(1) = 0$ ويكون $f(1) = 1$

من الجدول نلاحظ $f'(x) > 0 \,;\, x \in]1,+\infty[$ $\quad f'(x) < 0 \,;\, x \in]0,1[$ نعود لجدول تغيرات $f(x)$ نجد :



x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

التمرين 15:

ادرس تغيرات التابع f على $\mathbb{R}_+^*$ ، وارسم خطّه البياني C : $f(x) = \frac{1}{x} + xlnx$

التابع معرّف ومستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه المفروضة $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + xlnx\right) = +\infty + 0 = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x} + xlnx\right) = 0 + \infty = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + lnx + 1 \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2}{x^3} > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

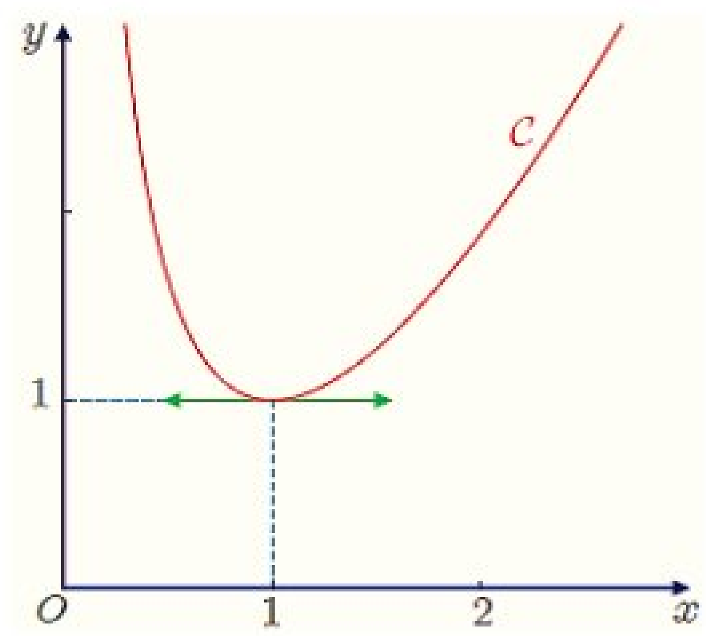
أي أنّ $f'(x)$ تابع متزايد تماماً ونلاحظ أنّ $f'(x) \in]-\infty,+\infty[$

وبالتالي يوجد قيمة ينعدم عندها $f'(x)$ ونلاحظ القيمة هي $x = 1$

وبالتعويض نجد $f'(1) = 0$ ويكون $f(1) = 1$

من الجدول نلاحظ $f'(x) > 0 \,;\, x \in]1,+\infty[$, $f'(x) < 0 \,;\, x \in]0,1[$ نعود لجدول تغيرات $f(x)$ نجد :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$



التمرين 16 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = x + ln(x^2 - 1)$

❶ أثبت أنّ f متزايد تماماً على I.

❷ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α .

❸ أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1 + e^{-1}}$.

الحل :

❶

طريقة أولى :

التابع $x \longmapsto x^2 - 1$ موجب تماما ومتزايد تماما على I و $x \longmapsto lnx$ متزايد تماما على I

بالتالي $x \longmapsto ln(x^2 - 1)$ متزايد تماما على I (مركب تابعين متزايدين على I) بالتالي :

f متزايد تماماً على I لأنه مجموع تابعين متزايدين تماما

طريقة ثانية : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1}$

بما أن $x > 1$ فإن $\frac{2x}{x^2-1} > 0$ لأن كل من البسط والمقام موجب تماما على $I =]1, +\infty[$

وبالتالي $f'(x) > 0 \Leftarrow 1 + \frac{2x}{x^2-1} > 0$ ومنه نجد أن التابع متزايد تماما على $I =]1, +\infty[$

طريقة ثالثة : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 \Longrightarrow \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \notin I \quad , \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \notin I$$

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1 \notin I \quad , \quad x_2 = 1 \notin I$$

بالتالي $f'(x)$ من اشارة واحدة في المجال $I =]1, +\infty[$ وبتعويض قيمة من المجال نجد:

والتابع f متزايد تماماً على I $\quad \Longleftarrow f'(2) = \frac{4+4-1}{4-1} = \frac{7}{3} > 0$

❷

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

وبما أنّ التابع متزايد تماماً فيصبح جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

$f(x)$ مستمر ومتزايد تماما على $I =]1, +\infty[$

$f(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[\ni 0$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]1, +\infty[$

❸

$$f\left(\sqrt{1 + e^{-1}}\right) = \sqrt{1 + e^{-1}} + lne^{-1} = \sqrt{1 + e^{-1}} - 1 > 0 \text{ و } \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty < 0$$

$f(x)$ مستمر ومتزايد تماما على $I = \left]1, \sqrt{1 + e^{-1}}\right[$

$$0 \in \left]-\infty, \sqrt{1 + e^{-1}} - 1\right[= f\left(\left]1, \sqrt{1 + e^{-1}}\right[\right)$$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in \left]1, \sqrt{1 + e^{-1}}\right[$ وبالتالي $1 < \alpha < \sqrt{1 + e^{-1}}$

التمرين 17 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x) = \ln x + 1 - x$

❶ أثبت أن $\ln x \leq x - 1$ ❷ في حالة $t > -1$ أثبت أن $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

❸ ليكن p عددا طبيعيا موجبا تماما أثبت أن $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

❹ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

أثبت أن $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

الحل :

❶ $\ln x \leq x - 1 \Rightarrow \ln x + 1 - x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$

ندرس اطراد التابع $f(x) = \ln x + 1 - x$ المعرّف على $]0, +\infty[$ حيث $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

إشارة f' من إشارة $1 - x$ الذي ينعدم عند $x = 1$ ويكون $f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الاطّراد أنّ $f(x) \leq 0$ أيّاً كان $x \in]0, +\infty[$ بالتالي $\ln x \leq x - 1$

❷ في حالة $t > -1$ نعوض في المتراجحة $\ln x \leq x - 1$ مايلي :

$x = 1 + t > 0 \Rightarrow \ln(1+t) \leq t$ ①

$x = \frac{1}{1+t} > 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq \frac{1}{1+t} - 1 \Rightarrow -\ln(1+t) \leq -\frac{t}{1+t} \Rightarrow \ln(1+t) \geq \frac{t}{1+t}$ ②

من ① و ② نجد $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

❸ ليكن $t = \frac{1}{p}$ ولنعوض في المتراجحة $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$ فيكون

$$\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} \leq \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

❹ بالاستفادة من المتراجحة $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

أولا بأخذ الطرف الايسر $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ نجد :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{(n)+1} + \frac{1}{(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)+1}$$

$$u_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right) \Rightarrow$$

$$u_n \leq \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right) \Rightarrow u_n \leq \ln\frac{2n}{n} \Rightarrow u_n \leq \ln 2 \quad ①$$

ثانيا بأخذ الطرف الايمن $\frac{1}{p} \geq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ نجد :

$$u_n + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \Rightarrow u_n + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$u_n + \frac{1}{2n} \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)$$

$$u_n + \frac{1}{2n} \geq \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right) \Rightarrow u_n + \frac{1}{2n} \geq \ln\frac{2n}{n} \Rightarrow u_n + \frac{1}{2n} \geq \ln 2 \quad ②$$

من ① و ② نجد $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ ومن ثم بإمكاننا أن نكتب $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2 - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$ بالتالي حسب مبرهنة الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \ln 2$

المسألة 1 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = ln(x^2 + 1)$

❶ أثبت أن f تابع زوجي

❷ ادرس تغيرات f على $[0, +\infty[$

❸ جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq ln2$

❹ جد معادلة المماس T للخط في نقطة منه فاصلتها $x = 1$ ثم أدرس الوضع النسبي للخط C والمماس T

❺ ارسم مستفيدا من الخاصة التناظرية الخط C والمماس T في معلمٍ متجانس

الحل :

❶ أياً كانت x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

$f(-x) = ln((-x)^2 + 1) = ln(x^2 + 1) = f(x)$ أي التابع f فردي

❷ $f(0) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} > 0$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\quad \nearrow \quad$ $+\infty$

❸ $f(x) > ln2 \Rightarrow ln(x^2 + 1) > ln2$ مجموعة تعريف المتراجحة $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 1 > 2 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in]-\infty , -1[\cup]1 , +\infty[$

بالتالي مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq ln2$ هي $x \in]-\infty , -1[\cup]1 , +\infty[$

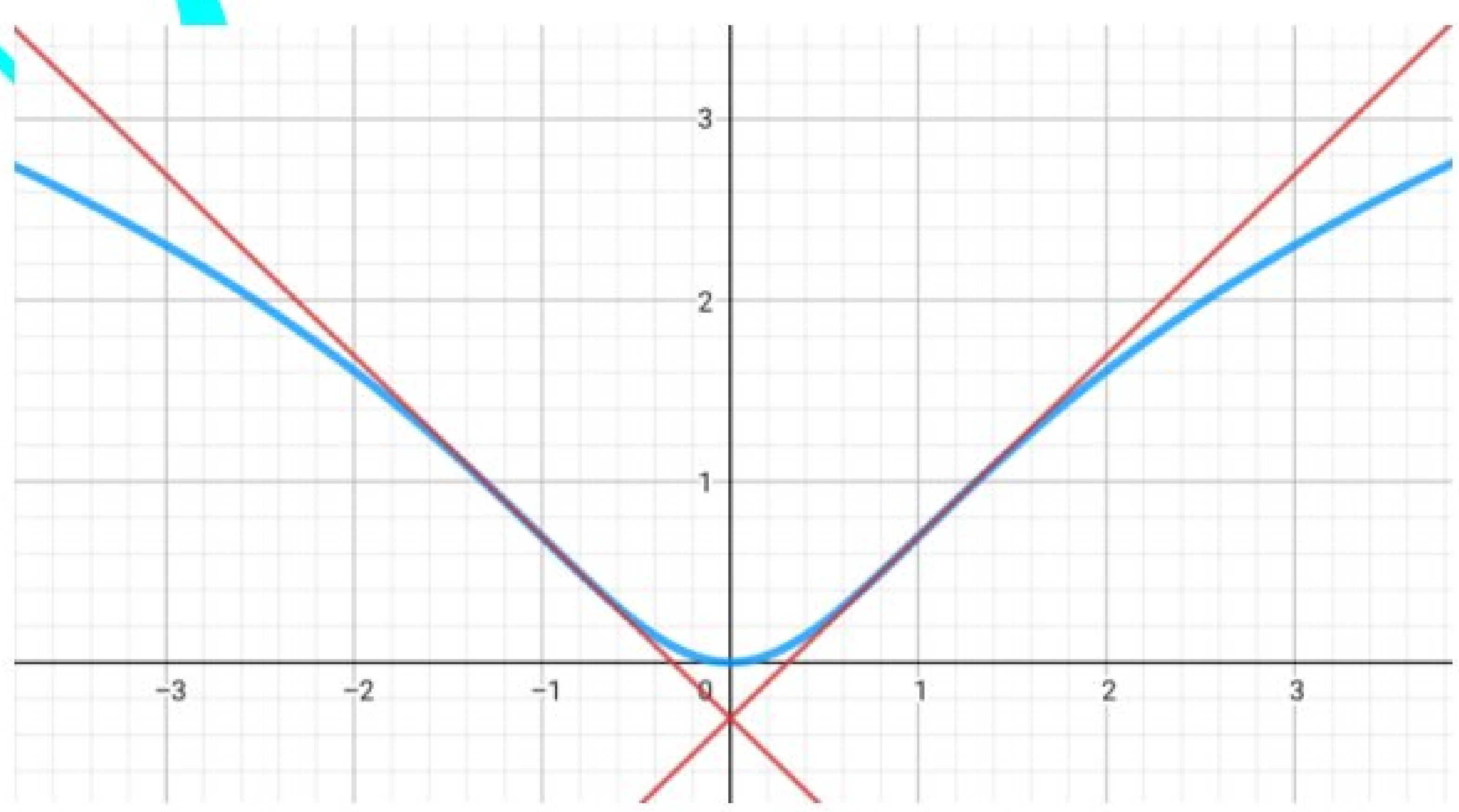
❹ $x = 1 \Rightarrow f(1) = ln2 \quad , \quad f'(1) = 1 \Rightarrow$

$y - ln2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 + ln2$

$g(x) = f(x) - (x - 1 + ln2) = ln(x^2 + 1) - x + 1 - ln2$

$g(x)$ مستمر وينعدم مرة واحدة عند $x = 1$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 1 $\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
	C يقع فوق المماس $\quad\quad$ C يقع تحت المماس



المسألة 2 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=ln(x^2-1)$

❶ أثبت أن f تابع زوجي

❷ ادرس تغيرات f على $]1,+\infty[$

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α على $]1,+\infty[$ أحصره في مجال طوله 1

❹ ارسم مستفيدا من الخاصة التناظرية الخط C في معلمٍ متجانس

❺ احسب مساحة السطع المحصور بين الخط البياني للتابع ومحور الفواصل والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

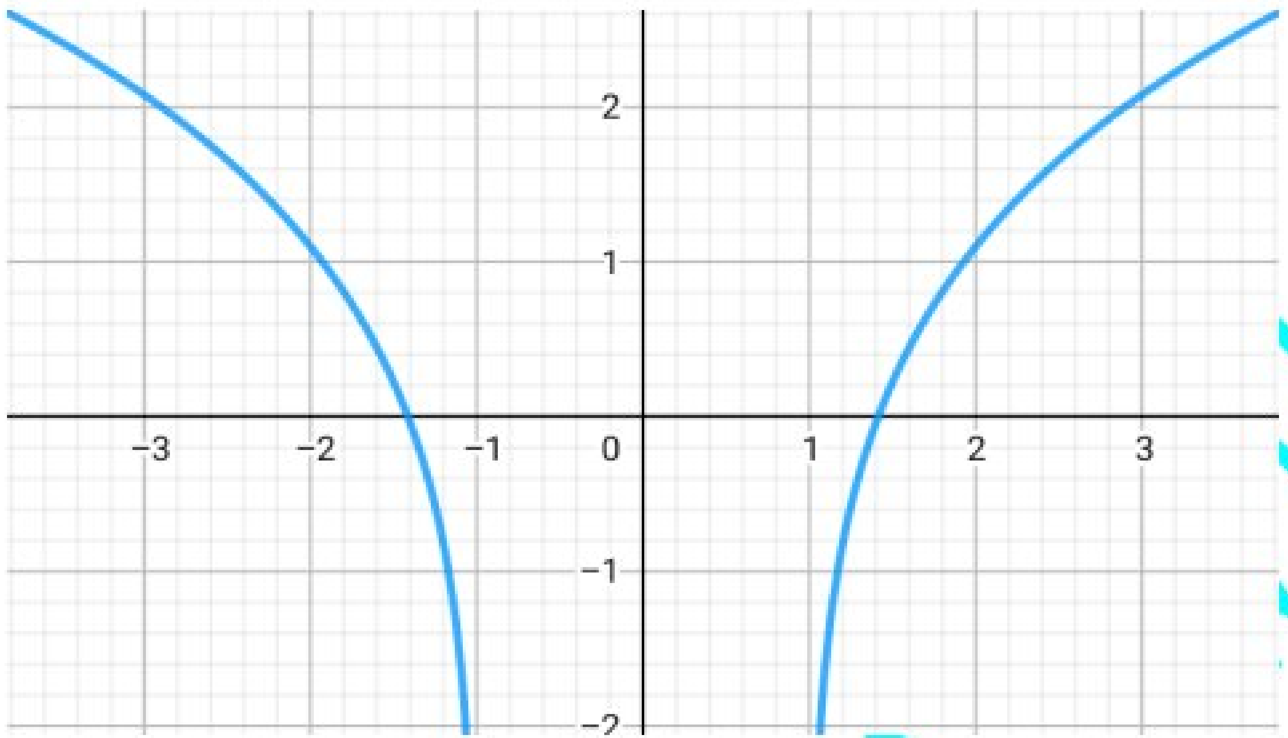
الحل :

❶ أياً كانت x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

$f(-x)=ln((-x)^2-1)=ln(x^2-1)=f(x)$ أي التابع f فردي

❷ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \; , \; f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}>0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



❸ f مستمر و متزايد تماماً على $]1,+\infty[$

و $0\in]-\infty,+\infty[=f(]1,+\infty[)$

بالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]1,+\infty[$

وبما أن $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ و $f(2)=ln3>0$ فإن $\alpha\in]1,2[$

❹ الرسم

❸

$$s=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 ln(x^2-1)\,dx$$

$$u=ln(x^2-1)\Rightarrow u'=\frac{2x}{x^2-1} \quad , \quad v'=1\Rightarrow v=x$$

$$s=\int_a^b uv'=[uv]_a^b-\int_a^b u'v \Rightarrow s=\int_2^3 ln(x^2-1)\,dx=[xln(x^2-1)]_2^3-\int_2^3\frac{2x^2}{x^2-1}dx$$

$$\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{2x^2-2+2}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}=2+\frac{2}{x^2-1}=$$

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{(a+b)x+a-b}{(x-1)(x+1)}$$

$$a+b=0\;,\qquad a-b=2\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-1\Rightarrow\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$s=[xln(x^2-1)]_2^3-\int_2^3\left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=[xln(x^2-1)]_2^3-[2x+ln(x-1)-ln(x+1)]_2^3$$

$$=[xln(x^2-1)-2x-ln(x-1)+ln(x+1)]_2^3$$

$$=(3ln8-6-ln2+ln4)-(3ln3-4)=3ln8-3ln3+ln2-2$$

المسألة 3 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة : $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

❶ تحقّق أنّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$

❷ أثبت أنّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C

❸ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها

❹ جد معادلة المماس T للخط في نقطة منه فاصلتها $x = 0$ ثم أدرس الوضع النسبي للخط C والمماس T

❺ ارسم الخط C والمماس T في معلمٍ متجانس

❻ استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x) = ln(3+x) - ln(-x-1)$ على المجال $]1,3[$

الحل :

❶ f معرّف عندما : $\frac{x-1}{3-x} > 0$ و $3 - x \neq 0$

وبالتالي $D_f =]1,3[$

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
اشارة $\frac{x-1}{3-x}$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ ‖ $\quad$ $-$

❷ $2x_0 - x = 4 - x \Rightarrow x \in]1,3[\Rightarrow -x \in]-3,-1[\Rightarrow 4 - x \in]1,3[$

بالتالي تحقق الشرط $x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$

$$f(4-x) + f(x) = ln\left(\frac{4-x-1}{3-(4-x)}\right) + ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = -ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 0$$

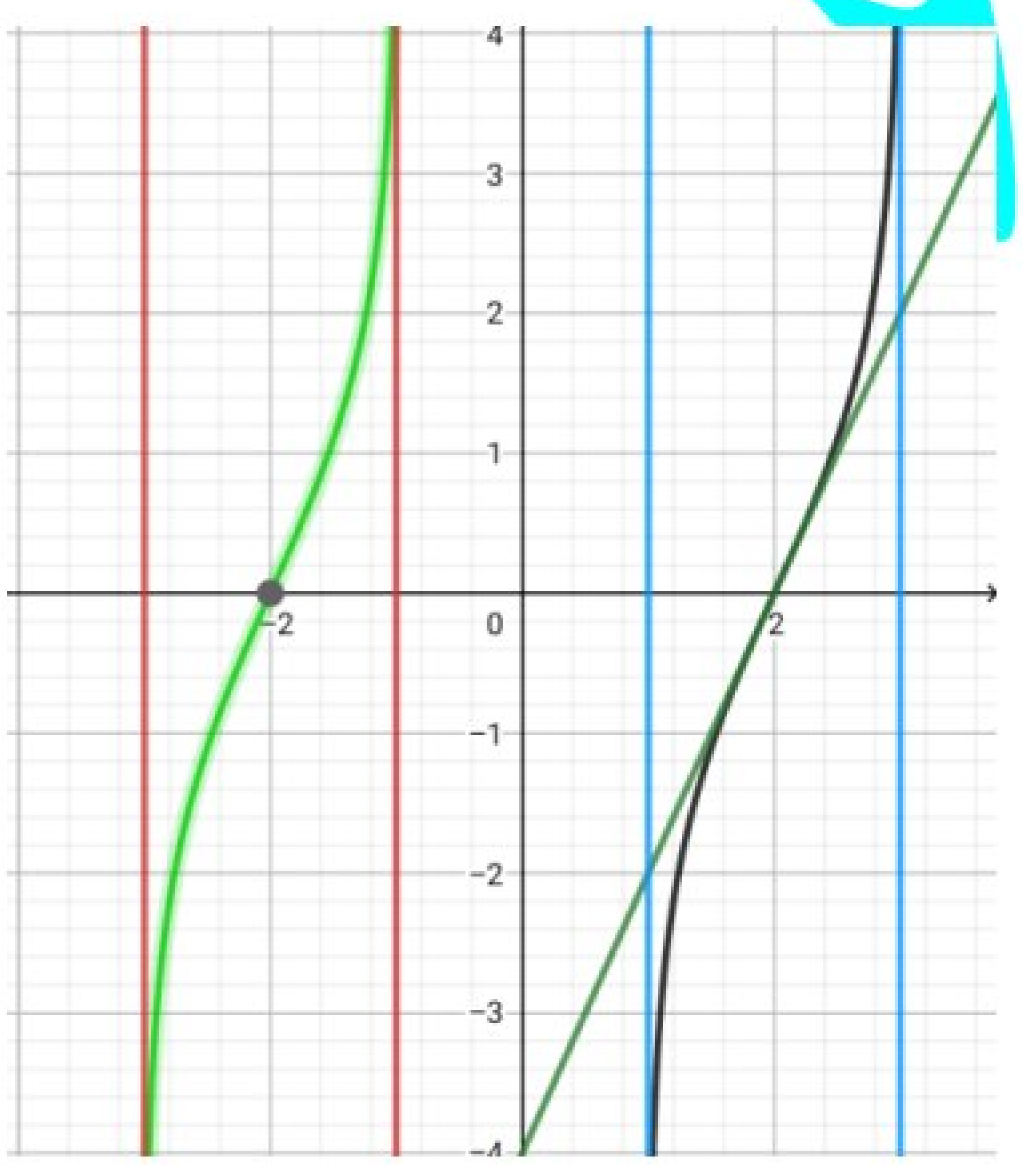
بالتالي تحقق الشرط $f(2x_0 - x) - f(x) = 2y_0$

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C

❸ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} n\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = -\infty$

بما أن كل من $x - 1$ و $3 - x$ موجب تماما في $]1,3[$ فحسب خواص اللوغاريتم

$$f(x) = ln(x-1) - ln(3-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} = \frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$



x	1		3
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

❹ $x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \quad , \quad f'(2) = 2 \Rightarrow$

$y - 0 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 4$

$g(x) = f(x) - (2x-4) = ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) - 2x + 4$

$g(x)$ مستمر وينعدم مرة واحدة عند $x = 0$

x	1		2		3
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
	‖	C يقع تحت المماس		C يقع فوق المماس	‖

❻ $f(-x) = ln\left(\frac{-x-1}{3+x}\right) = ln(-x-1) - ln(3+x) = -\big(ln(3+x) - ln(-x-1)\big) = -g(x)$

بالتالي $g(x) = -f(-x)$ بالتالي C' نظير C بالنسبة للمبدأ

المسألة 4 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

❶ أثبت أنّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثمّ أثبت أنه متزايد تماما

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها

❸ أثبت أنّ المستقيم $y = x - ln2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❹ ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d

❺ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

❻ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

الحل :

❶ $x \longmapsto 1 + \frac{1}{x}$ موجب تماما و اشتقاقي على I بالتالي $x \longmapsto ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I

التابع f اشتقاقي على I لأنّه مجموع تابعين اشتقاقيّين على I

$$f(x) = x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) \Longrightarrow f(x) = x - ln(2x+1) + ln(x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)} > 0 \Longrightarrow$$ التابع f متزايد تماما

❶ $$f(x) = x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right) = -\infty \Longrightarrow$$ $x = 0$ مقارب يوازي yy' للمنحني C

$$lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)} > 0$$

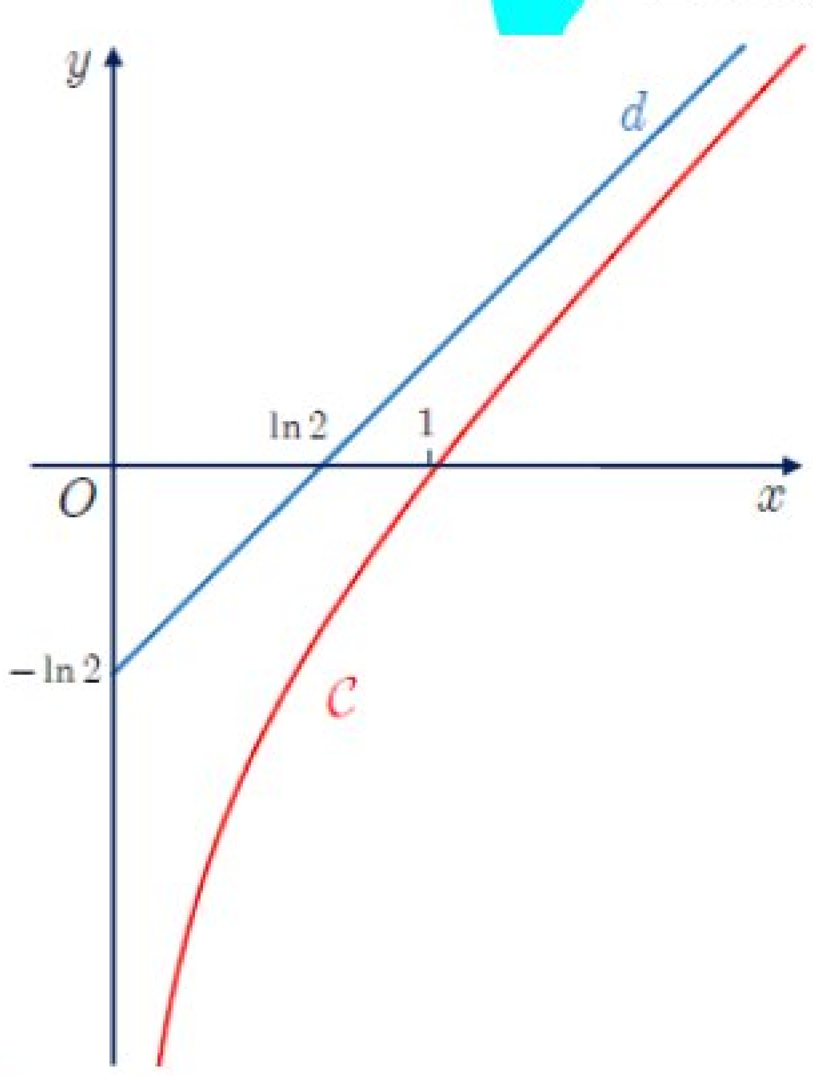
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

❷ $$f(x) - (x - ln2) = x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) - x + ln2 = ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x) - (x - ln2)) = \lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x) - (x - ln2)) = \lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) = 0 \Longrightarrow$$ المستقيم d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ لدراسة الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x - ln2) = ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$



$$2x < 2x + 1 \Longrightarrow \frac{2x}{2x+1} < 1 \Longrightarrow ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0 \Longrightarrow$$

$f(x) - (x - ln2) < 0$ فالخط C يقع دوما تحت المقارب d

❹ بما أنّ التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]0, +\infty[$

و $f(x) = 0 \in]-\infty, +\infty[= f(]0, +\infty[)$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α

$$f(1) = 1 - ln3 = lne - ln3 < 0$$

$$f(2) = 2 - ln\left(\frac{5}{2}\right) > 2 - lne > 0$$

$$f(1) \times f(2) < 0$$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

المسألة 5:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I=]4,+\infty[$ وفق: $f(x)=5-2x+3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

❶ أثبت أنّ المستقيم $y=5-2x$ مقارب للخط C

❷ ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d

❸ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها. ثمّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

❹ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ، واحصره في مجال طوله يساوي 1

الحل:

❶ $$g(x)=f(x)-(5-2x)=5-2x+3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)-5+2x=3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=0 \Longrightarrow$$ إذاً d مقارب مائل في جوار $+\infty$

❷ $$x+1>x-4 \Longrightarrow \frac{x+1}{x-4}>1 \Longrightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)>0 \Longrightarrow g(x)>0$$ و C يقع فوق المقارب d

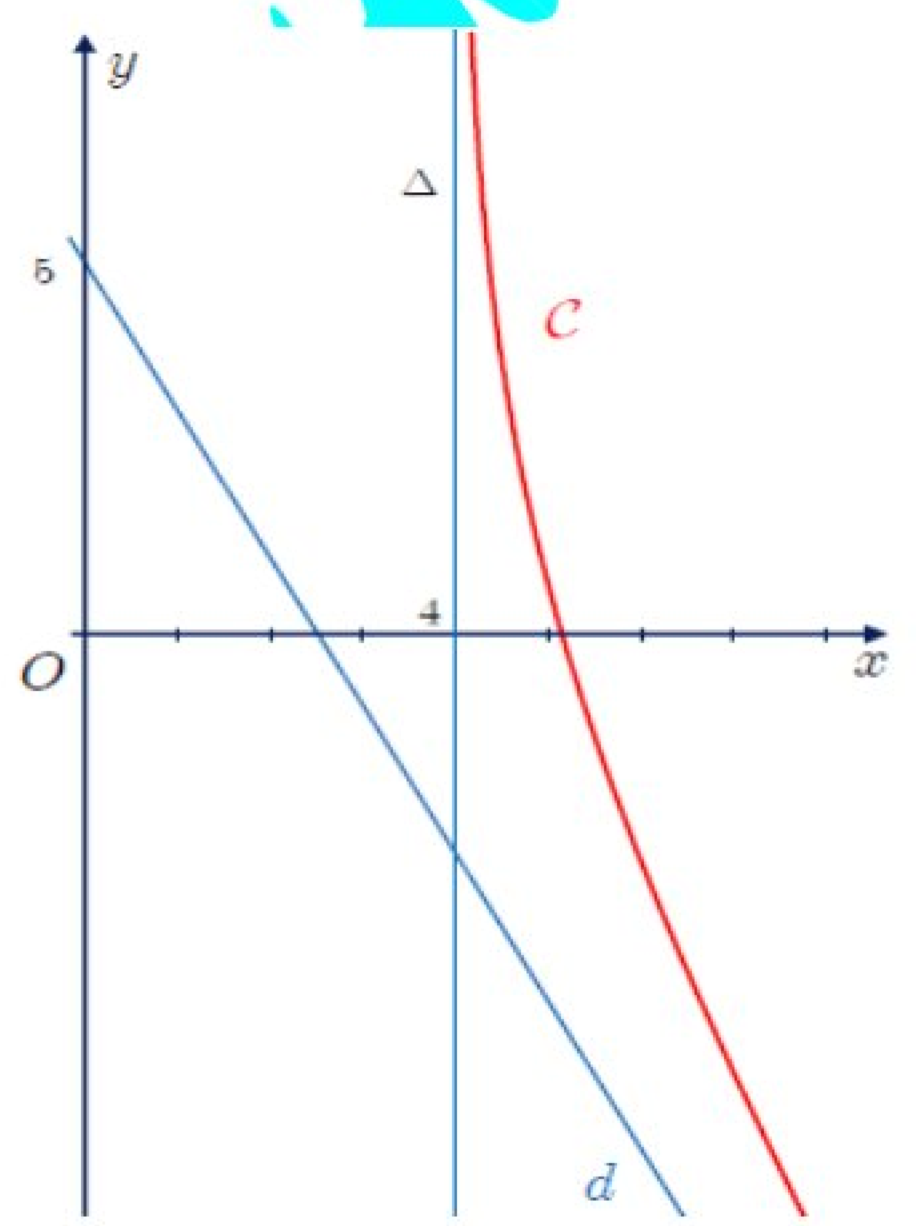
❸ $$lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4^+}\left(5-2x+3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)\right)=+\infty \Longrightarrow$$ $x=4$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(5-2x+3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)\right)=-\infty$$

$$f(x)=5-2x+ln(x+1)-ln(x-4)$$

$$f'(x)=-2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-4}=-\left(2+\frac{5}{(x+1)(x-4)}\right)<0$$

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$



❹ بما أنّ التابع مستمر ومتناقص تماماً على $]4,+\infty[$

و $f(x)=0\in]-\infty,+\infty[=f(]4,+\infty[)$

فإنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α

$$f(5)=-5+3ln6>0$$

$$f(6)=-25+3ln\left(\frac{7}{2}\right)<0$$

$$f(5)\times f(6)<0$$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]1,2[$

المسألة 6 :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$

❶ برهن أن التابع $f\ (x)$ يكتب بالصيغة : $f(x) = 2x + ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

❷ برهن أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار ال $+\infty$

❸ برهن أن الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً لمحور الفواصل

❹ ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

❺ اكتب معادلة المماس Δ للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ منه

❻ ارسم كلا" من d و Δ ، ثم ارسم الخط C في المعلم ذاته

الحل :

❶ $$f(x) = ln(e^{2x} - e^{x} + 1) = ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

❷ $$f(x) - y_d = ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty}(f(x) - y_d) = ln(1 + 0 + 0) = ln(1) = 0$$

بالتالي المستقيم $y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1} = \frac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1}$ نلاحظ أنّ إشارة f' من إشارة $2e^{x} - 1$ الذي ينعدم عند:

$$2e^{x} - 1 = 0 \Longrightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = -ln2 \Longrightarrow f(-ln2) = ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = ln\frac{3}{4}$$

بما أنّ المشتق ينعدم فقط مرّة واحدة فيوجد مماس وحيد ميله 0 أي يوازي xx' و $\Delta: y = ln\frac{3}{4}$

❹ ومنه $y = 0$ مقارب مائل في جوار $-\infty$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln(e^{2x} - e^{x} + 1) = 0$

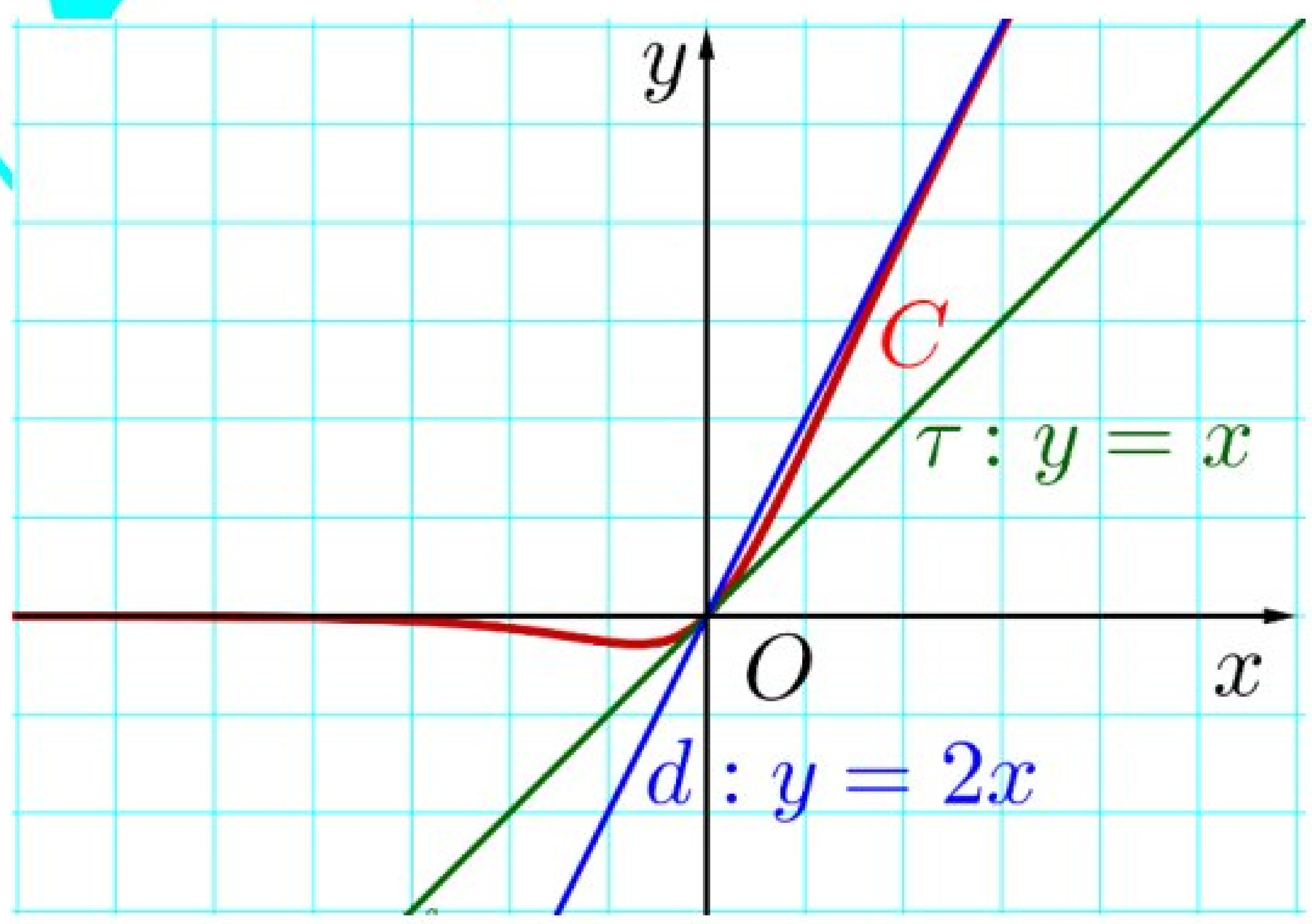
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(2x + ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1} = \frac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1} \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -ln2 \Longrightarrow f(-ln2) = ln\frac{3}{4}$$

x	$-\infty$		$-ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

❺ $$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0\ ,\ m_{\Delta} = f'(0) = 1 \Longrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Longrightarrow \Delta : y = x$$

❻ الرسم



المسألة 7:

في معلمٍ متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرّفين على المجال $I =]-1\,,+\infty[$ وفق $f(x) = ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$

❶ أثبت أنّ $g(x) \le f(x)$ أيّاً يكن x من I.

❷ أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

❸ ادرس تغيّرات كلٍ من f و g وارسم الخطّين C_f و C_g مستفيداً من رسم المماس المشترك.

الحل :

❶ $g(x) \le f(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \ge 0$

لنفرض التابع $h(x) = f(x) - g(x)$ المعرّف والاشتقاقي على $I =]-1\,,+\infty[$

$$h(x) = ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

إشارة h' من إشارة x الذي ينعدم عند $x = 0$ و يكون $h(0) = 0$ ومنه جدول الاطّراد:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘	0	↗	

ومنه نلاحظ أنّ أيّاً كان $x \in I$ فإن: $h(x) \ge 0 \Rightarrow f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) \ge g(x)$

❷ ونستنتج من جدول الاطّراد السابق أنّ $h(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) = \frac{0}{0+1} = 0$

وأنّ $h'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

وبالتالي أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة $(0\,,0)$ ومعادلته $y = x$

❸ دراسة تغيّرات f : $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} ln(x+1) = -\infty \Rightarrow$ $x = -1$ مقارب شاقولي

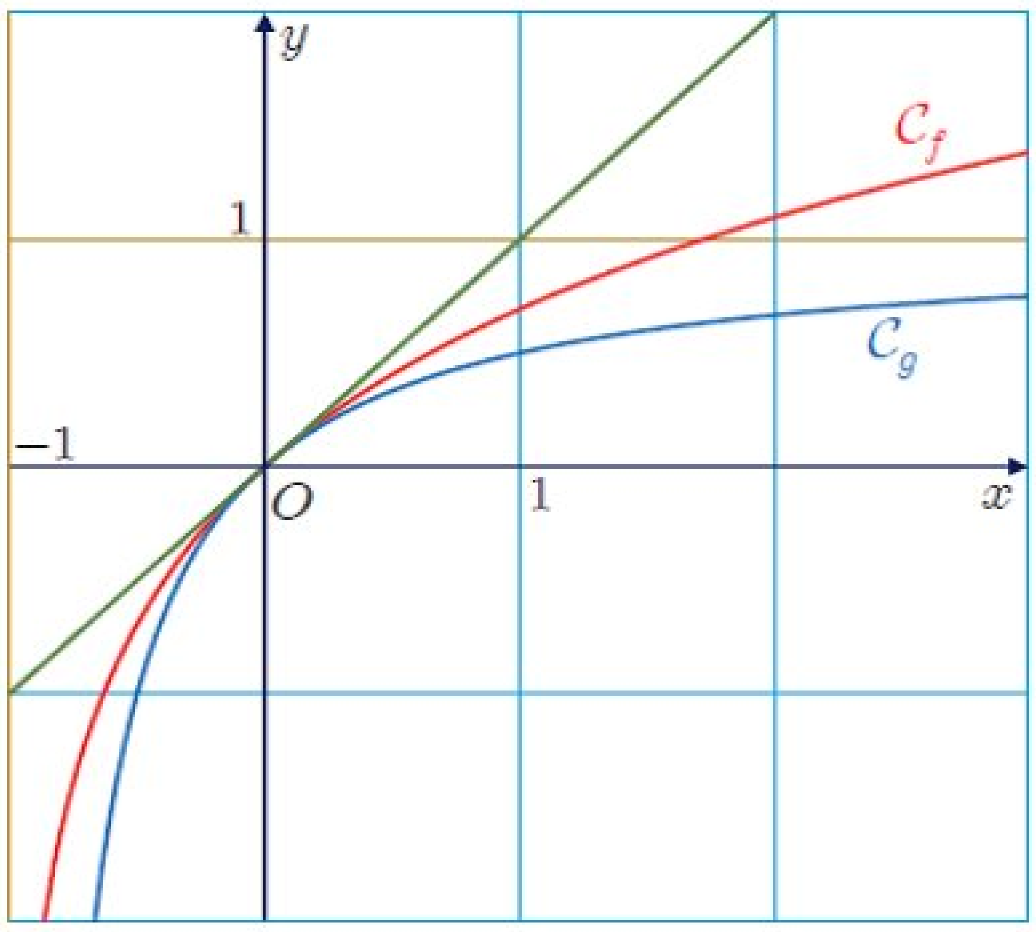
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [ln(x+1)] = +\infty \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↗	0	↗	0

دراسة تغيّرات g : $x = -1$ مقارب شاقولي $lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↗	0	↗	1



المسألة 8:

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = lnx$

❶ أوجد معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة فاصلتها $x = e^2$

❷ أثبت أن C يقع تحت جميع مماساته

❸ ليكن التابع g المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $g(x) = \frac{x}{e^2} + 1 - lnx$ ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها

❹ أثبت أن $G(x) = \frac{x^2}{2e^2} + 2x - xlnx$ هو تابع أصلي للتابع g

❺ احسب مساحة السطح المحصور بين C و T والمستقيمين $x = e$ و $x = e^2$

الحل :

❶ $f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$$x = e^2 \Rightarrow f(e^2) = lne^2 = 2 \Rightarrow f'(e^2) = \frac{1}{e^2} \Rightarrow$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2) \Rightarrow y = \frac{1}{e^2}x + 1$$

❷ معادلة T المماس للخط البياني للتابع الاشتقاقي في أي نقطة a هي :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \Rightarrow y = lna + \frac{1}{a}(x - a) \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - 1 + lna$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة المقدار $h(x) = f(x) - y_T = lnx - \frac{1}{a}x + 1 - lna$

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{ax}$ اشارة $h'(x)$ من اشارة $a - x$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow a - x = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow h(a) = lna - 1 + 1 - lna = 0$$

x	0		a		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نستنتج من جدول الاطراد أن :

$h(x) < 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و لا ينعدم الا عند $x = a$

بالتالي الخط C يقع تحت المماس له في النقطة التي فاصلتها $x = a$

بالتالي نستنتج ان الخط C يقع تحت جميع مماساته

❸ $g(x) = \frac{x}{e^2} + 1 - lnx$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{e^2} + 1 - lnx\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{e^2} + 1 - lnx\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{x} = \frac{x-e^2}{e^2x} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x - e^2 = 0 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow g(e^2) = 0$$

$$x = \frac{e}{\sqrt{2}} \Rightarrow g\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{e^2}{2}}{e^2} + 1 - ln\frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + 1 - 1 + \frac{1}{2}ln2 \Rightarrow g\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+ln2}{2}$$

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

❹ $x \mapsto \frac{x^2}{2e^2} + 2x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

و $x \mapsto xlnx$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

بالتالي $G(x)$ مجموعهما أي اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$G'(x) = \frac{2x^2}{2e^2} + 2 - (lnx + 1)$$

$G'(x) = \frac{x^2}{e^2} + 1 - lnx = g(x)$ بالتالي G هو تابع أصلي للتابع g

❺ $$S = \int_e^{e^2}\left(y_T - f(x)\right)\,dx = \int_e^{e^2}\left(\frac{x}{e^2} + 1 - lnx\right)\,dx = \int_e^{e^2} g(x)\,dx = [G(x)]_e^{e^2}$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2e^2} + 2x - xlnx\right]_e^{e^2} = \left(\frac{e^2}{2} + 2e^2 - 2e^2\right) - \left(\frac{1}{2} + 2e - e\right) = \frac{e^2-2e-1}{2}$$

المسألة 9 :

ليكن C الخط البياني للتابع g المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(0)=0$ و $f(x)=\frac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$

❶ تيقن أن $f(x)$ معرف في حالة $x>0$

❷ أثبت أن f مستمر عند الصفر

❸ أدرس قابلية اشتقاق f عند الصفر وعين ان أمكن المماس للخط عند مبدأ الاحداثيات

❹ جد نهاية f عند $+\infty$

❺ أحسب $f'(x)$ في حالة $x>0$ ثم أدرس تغيرات $f(x)$

❻ أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=1$

الحل :

❶ ليكن التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=x-\ln x$

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$$g'(x)=0\Longrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Longrightarrow x=1\Longrightarrow g(1)=1$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

من جدول اطراد f نجد في حالة $x>0$ يكون $g(x)\geq 1$ ومنه $x-\ln x\geq 1$

اذن مقام f لا ينعدم في حالة $x>0$ والتابع f معرف في حالة $x>0$

❷

$$\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty\Longrightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=0\quad,\quad f(0)=0$$

بالتالي $\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ فالتابع f مستمر عند الصغر

❸

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{x-\ln x}-0}{x}=\frac{1}{x-\ln x}\Longrightarrow\lim_{x\to 0}t(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-\ln x}=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$ ولدينا $f(0)=0$

بالتالي $y=0$ أي محور الفواصل هو مماس لخط التابع f في المبدأ

❹ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

❺ في حالة $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{x-\ln x-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

$$f'(x)=0\Longrightarrow 1-\ln x=0\Longrightarrow\ln x=1\Longrightarrow x=e\Longrightarrow f(e)=\frac{e}{e-1}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

❻ $x=1\Longrightarrow f(1)=\frac{1}{1-0}=1\quad,\quad f'(1)=1$

معادلة المماس $y=f(1)+f'(1)(x-1)\Longrightarrow y=x$

المسألة 10 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1+lnx}{x}$

❶ احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C ؟

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

❹ اكتب معادلة المماس T المار بالمبدأ للخط البياني C ، ثم ارسم الخط C . والمماس T

❺ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = e$

❻ استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{1-x+ln\,x}{x}$

الحل :

❶ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+lnx}{x} = -\infty$ $x = 0$ مستقيم مقارب منطبق على yy'

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+lnx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب منطبق على xx' في جوار $+\infty$

❷ $f'(x) = \frac{1-1-lnx}{x^2} = \frac{-lnx}{x^2}$

إشارة f من إشارة $-lnx$ الذي ينعدم عندما $x = 1$ ويكون $f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❸ التابع مستمر ومتزايد تماما على المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2ln2 > 0 \text{ و } f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 3ln3 < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

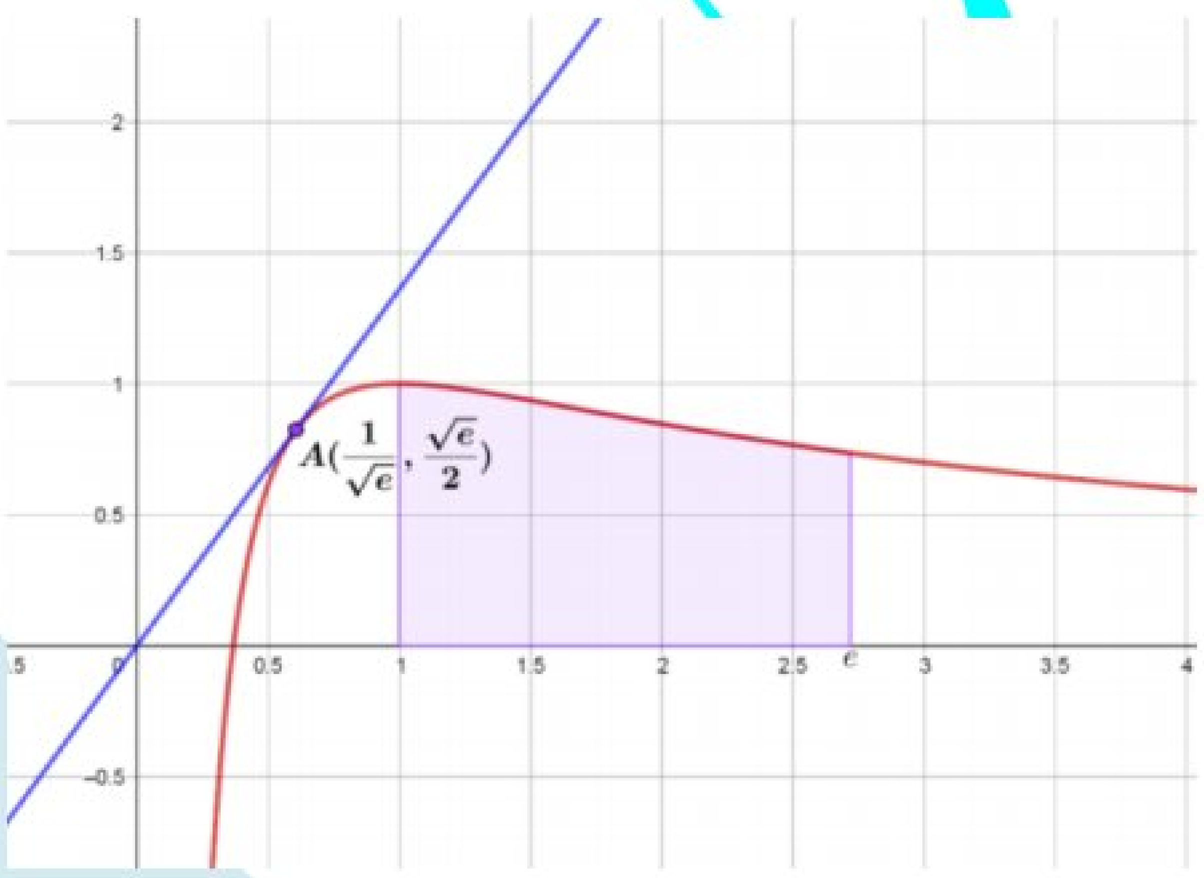
❹ بفرض $A(a,b)$ وبالتالي $A\left(a, \frac{1+lna}{a}\right)$ تكون معادلة المماس : $y = \frac{-lna}{a^2}(x-a) + \frac{1+lna}{a}$

وبما أنّ المماس يمر من المبدأ فإنّ : $0 = \frac{lna}{a} + \frac{1+lna}{a} = \frac{1+2lna}{a}$

$$1 + 2lna = 0 \quad \Rightarrow \quad lna = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow b = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

وتكون معادلة المماس المطلوب $y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x$

❺



$$S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}lnx\right)dx$$

$$= \left[lnx + \frac{1}{2}ln^2(x)\right]_1^e = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{3}{2}$$

❻ $g(x) = \frac{1+ln\,x}{x} - 1 = f(x) - 1$

بالتالي ينتج C' عن C بانسحاب مقداره -1 على محور التراتيب

المسألة 11 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق : $f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ما مقاربات الخط C ؟

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط C

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x) - 1 = 0$ حلاً وحيداً على $\mathbb{R}_+^*$

❹ استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1}$

الحل :

❶ $x = 0$ محور التراتيب مقارب شاقولي $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = +\infty - 1 = +\infty$

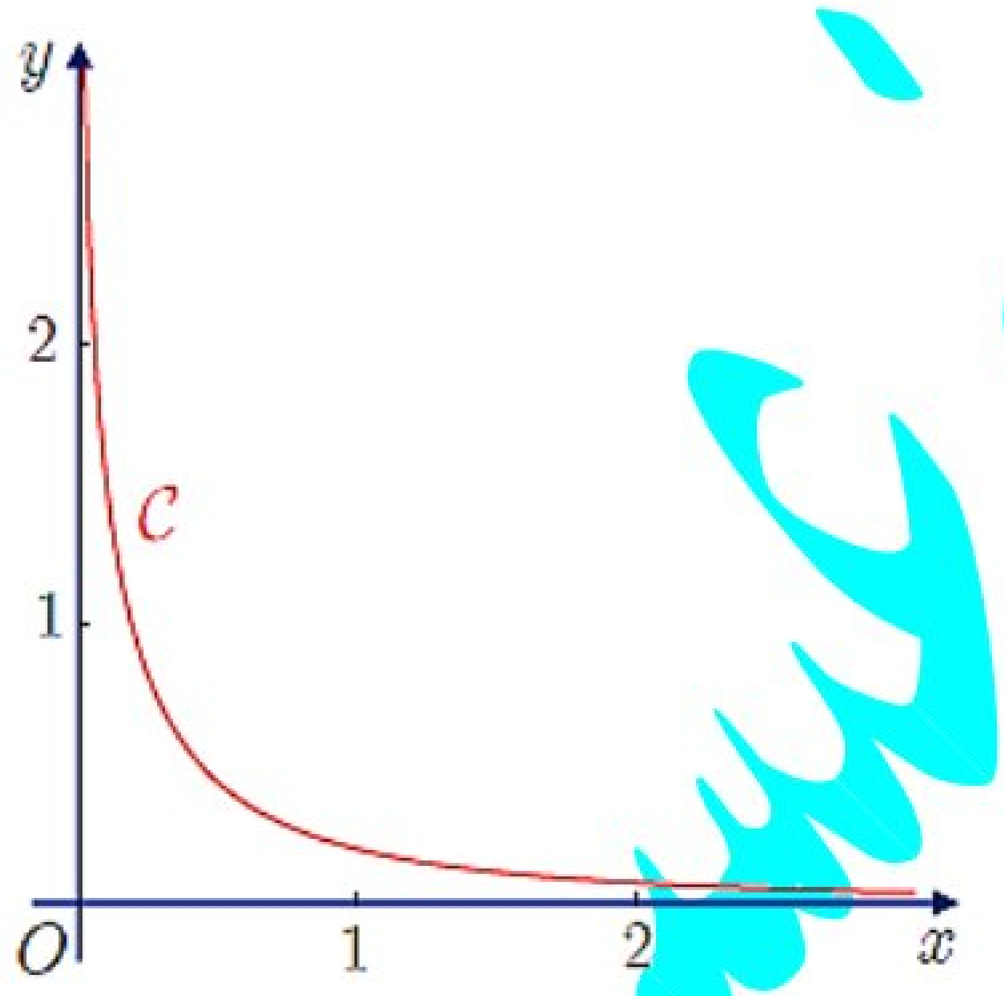
$y = 0$ محور الفواصل مقارب للخط في جوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow$

❷ التابع معرّف ومستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه المفروضة $]0, +\infty[$

بما أن كل من $x - 1$ و $3 - x$ موجب تماما في $]1,3[$ فحسب خواص اللوغاريتم

$$f(x) = ln(x+1) - lnx - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$



x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

❸

التابع مستمر و متناقص تماما على المجال $]0, +\infty[$

$1 \in]0, +\infty[= f(]0, +\infty[)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 1$ حلاً وحيداً في المجال $]0, +\infty[$

❹ $g(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x+1-1}{x+1} = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 = f(x) + 1$

بالتالي ينتج C' عن C بانسحاب مقداره 1 على محور التراتيب

طريقة ثانية :

$$g(x) - f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1 \Rightarrow g(x) = f(x) + 1$$

بالتالي ينتج C' عن C بانسحاب مقداره 1 على محور التراتيب

المسألة 12 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{xlnx}$

❶ ادرس تغيرات التابع f على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ ونظم جدولاً بها
ودل على كل قيمة حدية إن وجدت وبيّن نوعها وبين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية

❷ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x=e$

❸ أثبت أن التابع $g(x)=ln(ln(x))$ المعرف على $]1,+\infty[$ هو تابع أصلي للتابع f على هذا المجال

❹ أرسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C

❺ أحسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=2\,,x=e$

❻ استنتج من الخط البياني C للتابع f الخط البياني للتابع $h(x)=\frac{1}{|xlnx|}$

الحل :

❶ دراسة التغيرات

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للخط C $\quad lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=-\infty\Rightarrow$

المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط C $\quad lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=-\infty\Rightarrow$

المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط C $\quad lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=+\infty\Rightarrow$

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ $\quad lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=0\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{-1-ln(x)}{(xlnx)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -1-ln(x)=0\Rightarrow ln(x)=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	‖		
f	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

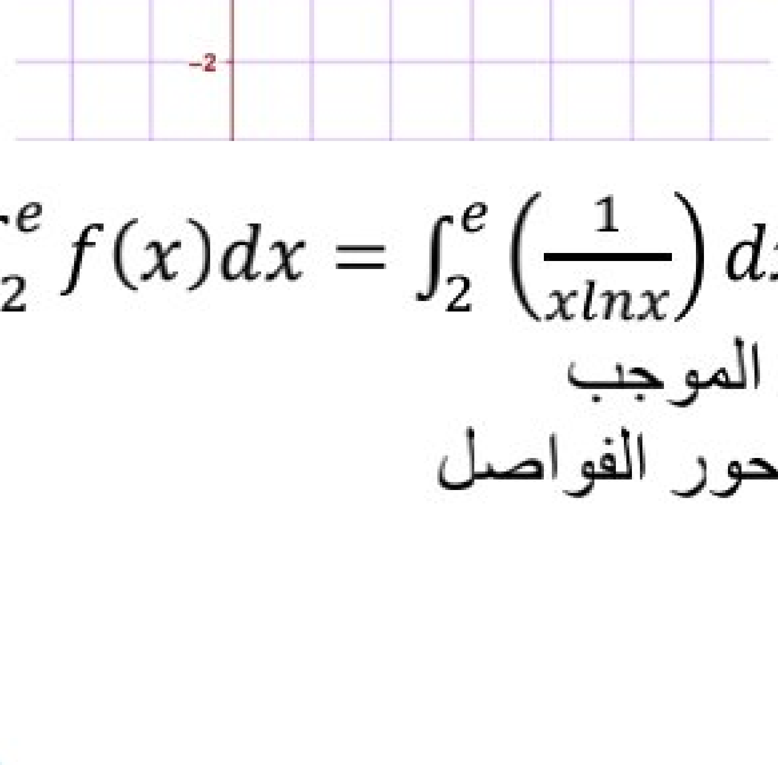
من جدول التغيرات نجد $f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$ قيمة حدية كبرى محلية

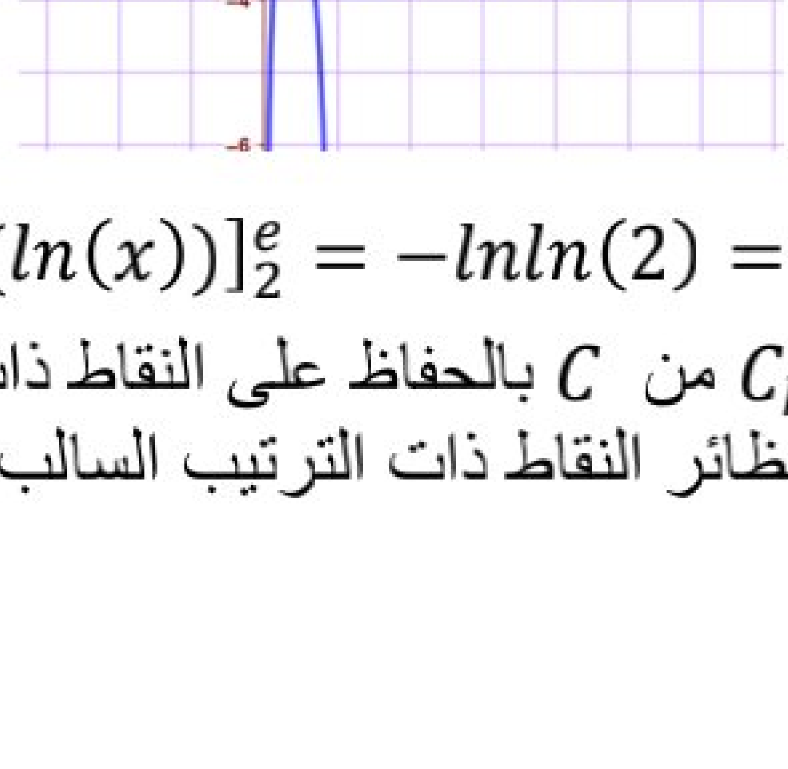
❷ $x=e\Rightarrow f(e)=\frac{1}{e}\;,f'(e)=\frac{-2}{e^2}\Rightarrow y-0=\frac{-2}{e^2}(x-e)+\frac{1}{e}\Rightarrow y=\frac{-2}{e^2}x+\frac{3}{e}$

❸ التابع $g(x)=ln(ln(x))$ المعرف على $]1,+\infty[$ هو اشتقاقي على $]1,+\infty[$

فالتابع $g(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال $]1,+\infty[$ $\quad g'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{ln(x)}=\frac{1}{xlnx}=f(x)$

❹ الرسم:





❺ المساحة $S=\int_2^e f(x)dx=\int_2^e\left(\frac{1}{xlnx}\right)dx=[ln(ln(x))]_2^e=-lnln(2)=0.36$

❻ رسم h : ينتج C_h من C بالحفاظ على النقاط ذات الترتيب الموجب
وأخذ نظائر النقاط ذات الترتيب السالب بالنسبة لمحور الفواصل

المسألة 13 :

ليكن C الخط البياني للتابع f في معلم متجانس والمعرّف على $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق : $f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

① a. أثبت انّ : $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$ أياً يكن x من D_f

b. استنتج انّ النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه .

③ أثبت انّ المستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه d

④ ارسم في معلم واحد d ثم C .

الحل :

❶ a . $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \Rightarrow 1-x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \Rightarrow x \in D_f \Rightarrow 1-x \in D_f$

$$f(x) + f(1-x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1-x}{2} + ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| = -\frac{1}{2} + ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|.\left|\frac{x}{x-1}\right|\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$$

b . مما سبق وجدنا : $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{-1}{4}$

$x \in D_f \Rightarrow 1-x \in D_f$ وهذا يعطي تحقق الشرط $x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$

$f(x) + f(1-x) = \frac{-1}{2}$ وهذا يعطي تحقق الشرط $f(2x_0 - x) - f(x) = 2y_0$

وبالتالي تكون النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط C

❷ نكتب التابع بدون قيمة مطلقة :

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$\frac{x-1}{x}$	$+$ ‖ $-$ 0 $+$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & x \in]-\infty, 0[\cup]+1, +\infty[\\ -\frac{x}{2} + ln\frac{1-x}{x} & x \in]0, +1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x}{2} + ln\frac{1-x}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(-\frac{x}{2} + ln\frac{1-x}{x}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-2}{2x(1-x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2x(1-x)} & x \in]-\infty, 0[\cup]+1, +\infty[\\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{x(1-x)} = \frac{x^2-x-2}{2x(1-x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2x(1-x)} & x \in]0, +1[\end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2} + ln\,2 \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = -1 - ln\,2 \end{cases}$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0$$

المستقيم $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع في جوار $-\infty$ و $+\infty$

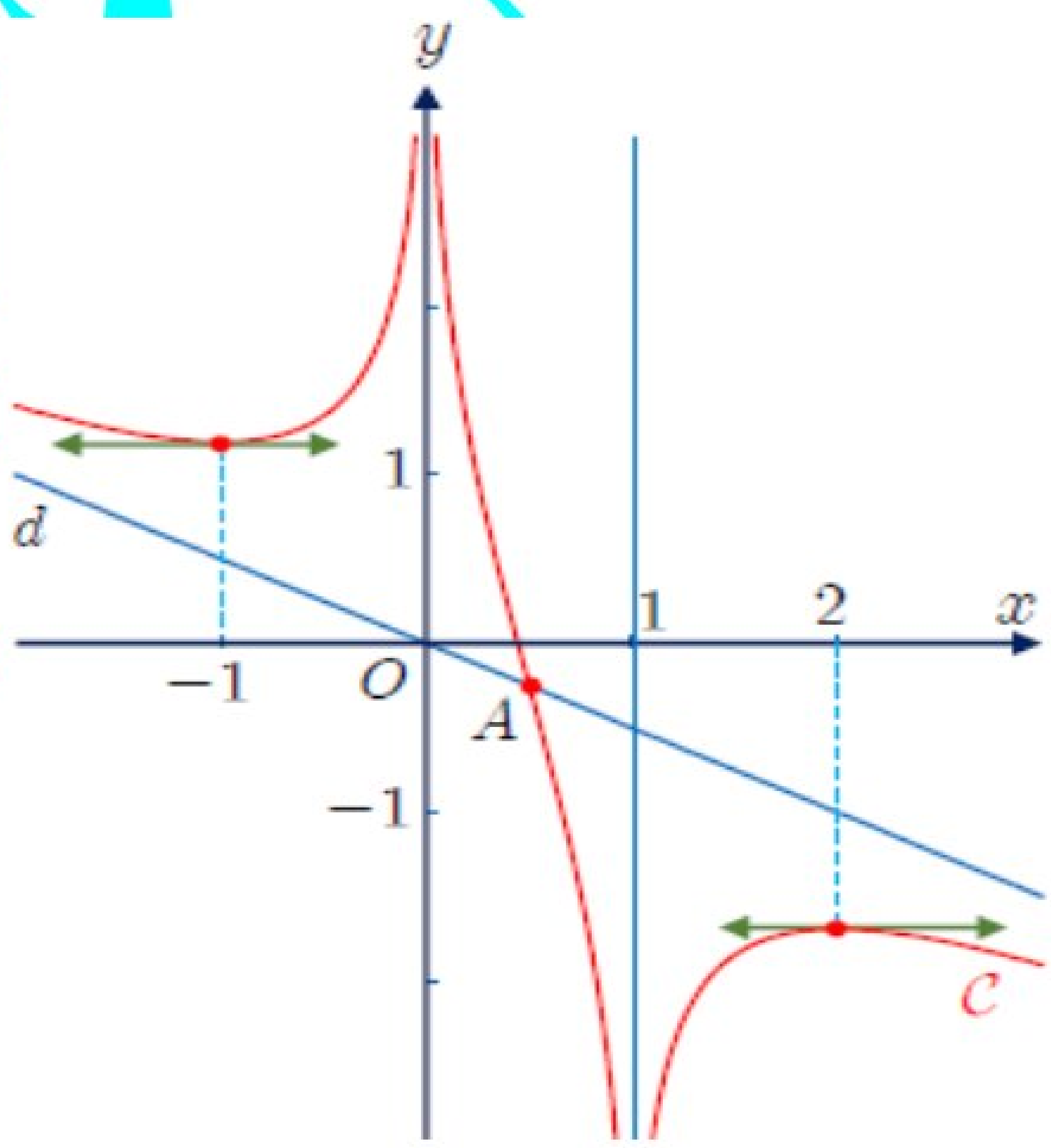
لدراسة الوضع النسبي بين المقارب المائل والخط البياني ندرس إشارة الفرق $f(x)-\frac{1}{2}x$

$$f(x)-x=0 \Rightarrow ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right|=1$$

$\frac{x-1}{x}=1 \Rightarrow x-1=x$ مستحيلة الحل

$\frac{x-1}{x}=-1 \Rightarrow x-1=-x \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
الوضع النسبي		d فوق C	‖	d فوق C		d تحت C	‖	d تحت C	



الاختبار 1

السؤال الأوّل :

احسب كلاً ممّا يأتي: $lim_{x\to+\infty}\left(xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

الحل :

بفرض $t=\frac{1}{x}$ يصبح لدينا : $lim_{x\to+\infty}\left(xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=lim_{t\to0}\left(\frac{ln(1+t)}{t}\right)=1$

التمرين الأوّل :

أثبت أنّ $lnx\le x-1$ أيّاً كان $x>0$ باختيار $x=e^{\frac{1}{3}}$ و $x=e^{-\frac{1}{3}}$ احصر e

الحل :

نفرض التابع $f(x)=lnx+1-x$ المعرّف والاشتقاقي عندما $x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\quad ,f'(x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الاطّراد أنّ $f(x)\le0$ أيّاً كان $x\in]0,+\infty[$ وبالتالي $lnx+1-x\le0\Rightarrow lnx\le x-1$

ومن المتراجحة نلاحظ أنّ :

$$lne^{\frac{1}{3}}\le e^{\frac{1}{3}}-1\ \Rightarrow e^{\frac{1}{3}}\ge1+\frac{1}{3}\Rightarrow e^{\frac{1}{3}}\ge\frac{4}{3}\ \Rightarrow e\ge\frac{64}{27}$$

$$lne^{-\frac{1}{3}}\le e^{-\frac{1}{3}}-1\ \Rightarrow e^{-\frac{1}{3}}\ge1-\frac{1}{3}\Rightarrow e^{-\frac{1}{3}}\ge\frac{2}{3}\ \Rightarrow\frac{1}{e}\ge\frac{8}{27}\Rightarrow e\le\frac{27}{8}$$

ومنه نجد أنّ: $\frac{64}{27}\le e\le\frac{27}{8}$

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

1. أثبت أن المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب للخط C، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ.
2. ادرس التابع f، وعيّن المقارب الشاقولي لـ C وارسم كل مقارب وجدته، ثمّ ارسم C.
3. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ، واحصره في مجال طوله 0.5

الحل :

الحل:

❶ $g(x) = f(x) - y_{\Delta} = ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \Rightarrow lim_{x\to+\infty}\, g(x) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

في حالة $x > 0$ فإنّ $x < 1 + x \Rightarrow \frac{x}{1+x} < 1 \Rightarrow ln\left(\frac{x}{1+x}\right) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$

وينتج أنّ C تحت Δ على المجال $]0, +\infty[$

❷ $f(x) = 2x - 1 + ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \quad x \in]0, +\infty[$

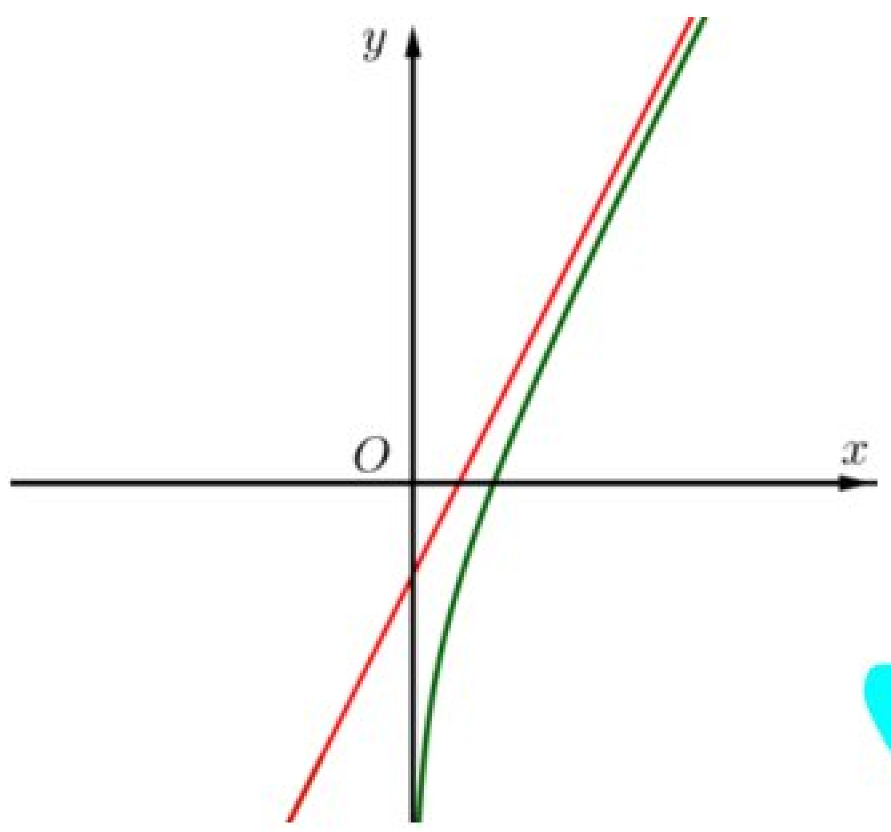
$lim_{x\to+\infty}\, f(x) = +\infty$ $\quad$ $lim_{x\to 0^+}\, f(x) = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} > 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ من جدول التغيّرات نلاحظ أنّ التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]0, +\infty[$ وأنّ :

$f(\,]0, +\infty[\,) =]-\infty, +\infty[\ni 0$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحل وحيد α



$$f(0.5) = 1 - 1 + ln\left(\frac{1}{3}\right) = -ln(3) < 0$$

$$f(1) = 1 + ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - ln(2) > 0$$

$f(0.5) < 0 < f(1)$ وبالتالي $0{,}5 < \alpha < 1$

الاختبار 2

التمرين الثاني :

أثبت أنّه أيّاً كانت x من $]-1, +\infty[$ كان $\frac{x}{1+x} \le ln(x+1)$

الحل :

نصطنع التابع $f(x) = \frac{x}{x+1} - ln(x+1)$ يؤول حل المتراجحة إلى $f(x) \le 0$

لذلك ندرس اطّراد التابع f

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

إشارة f' من إشارة $-x$ الذي ينعدم عند $x = 0$ ويكون $f(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول الاطّراد نلاحظ أنّ $f(x) \le 0$ وذلك يّاً كان $x \in]-1, +\infty[$

أي أنّه أيّاً كان $x \in]-1, +\infty[$ فإنّ $\frac{x}{x+1} \le ln(x+1)$

الاختبار 3

المسألة الأولى :

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x(1-lnx)}$

❶ ادرس تغيّرت التابع f ونظّم جدولاً بها

واستنتج ما للخط (C) من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعيّن قيمته الحدّيّة مبيّناً نوعها.

❷ ارسم ما وجدّته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم (C).

❸ احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$

الحل :

$lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-xlnx}=\frac{1}{0^+-0^-}=+\infty$ والمستقيم $x=0$ مقارب منطبق على yy' عند $+\infty$

$lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^-}\frac{1}{x(1-lnx)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ والمستقيم $x=e$ مقارب يوازي yy' عند $+\infty$

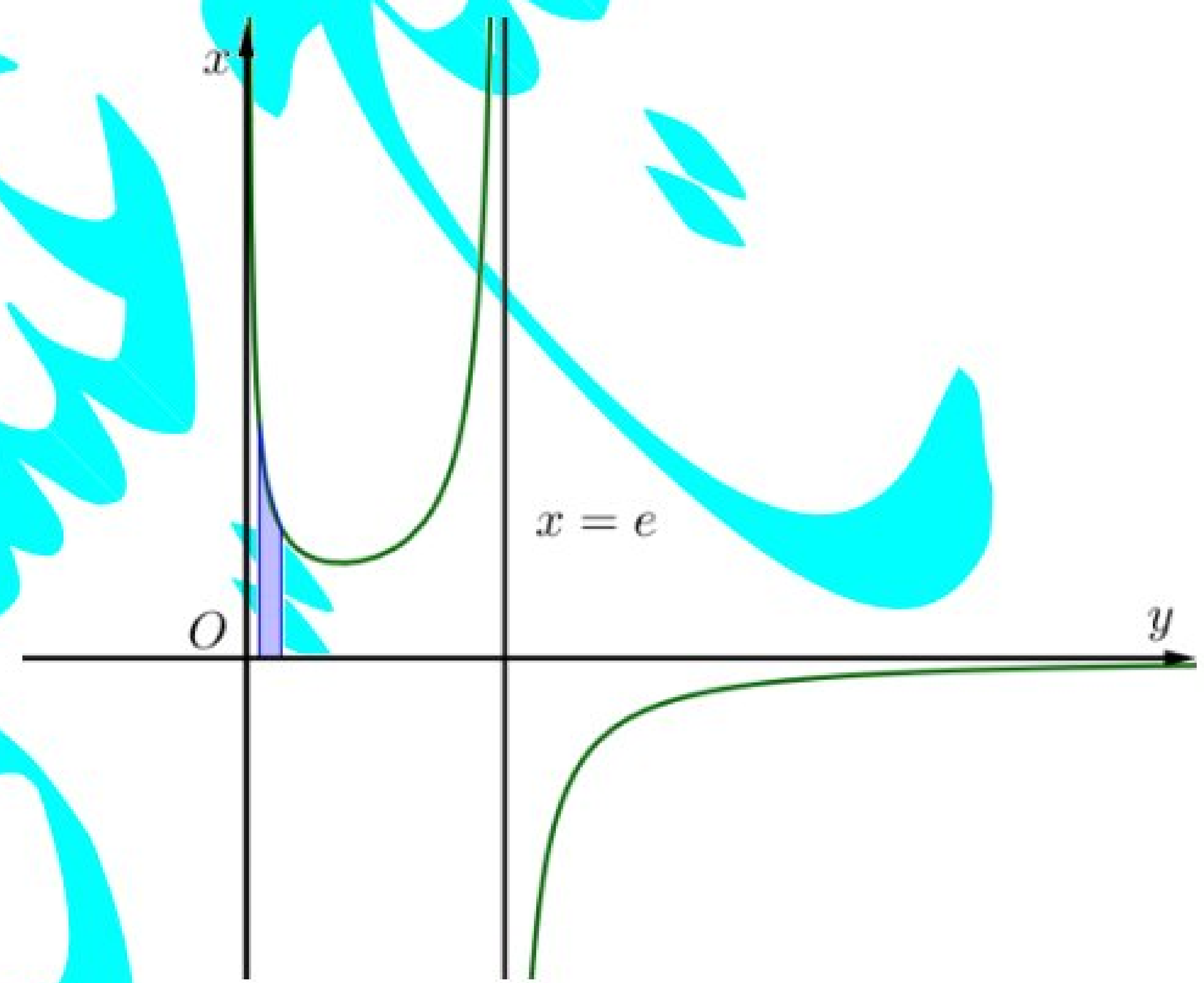
$lim_{x\to e^+}f(x)=\lim_{x\to e^+}\frac{1}{x(1-lnx)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ والمستقيم $x=e$ مقارب يوازي yy' عند $+\infty$

$lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-lnx)}=\frac{1}{+\infty}=0$ والمستقيم $y=0$ مقارب منطبق على xx' في جوار $+\infty$.

$$f'(x)=\frac{0-(1-lnx)+1}{x^2(1-lnx)^2}=\frac{lnx}{x^2(1-lnx)^2}$$

إشارة f' من إشارة lnx الذي ينعدم عند $x=1$ ويكون $f(1)=1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0



$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-lnx)}dx=-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{-\frac{1}{x}}{1-lnx}dx=-[ln(1-lnx)]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$=-(ln2-ln3)=ln\frac{3}{2}$$

المسألة الأولى:

أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x.(lnx)^2$

❶ أثبت أن $f(x)$ يُكتب بالشكل : $f(x) = 4\left(\sqrt{x}.ln\sqrt{x}\right)^2$

❷ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها.

ثانياً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $g(x) = -2xlnx$

أثبت أنّه عند $x > 1$ يكون $f(x) - g(x) = xf'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطّين C_f و C_g .

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0,+\infty[$.

❶ بيّن أنّ معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y = xf'(x_0) + g(x_0)$

❷ ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب،
ثمّ استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0.

الحل :

أولاً:

❶ $$f(x) = x.(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2\left(ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2\left(2ln\sqrt{x}\right)^2 = 4\left(\sqrt{x}.ln\sqrt{x}\right)^2$$

❷ $$lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 4\left(\sqrt{x}.ln\sqrt{x}\right)^2 = 0 \quad , \quad lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[x.(lnx)^2] = +\infty$$

$$f'(x) = (lnx)^2 + 2x\frac{1}{x}lnx = (lnx)^2 + 2lnx = lnx(lnx+2)$$

إشارة f' من إشارة $(lnx)^2 + 2lnx$ الذي ينعدم عند:

$$lnx = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \qquad f(1) = 0 \quad , \quad lnx = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{e^2} \qquad f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$$

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

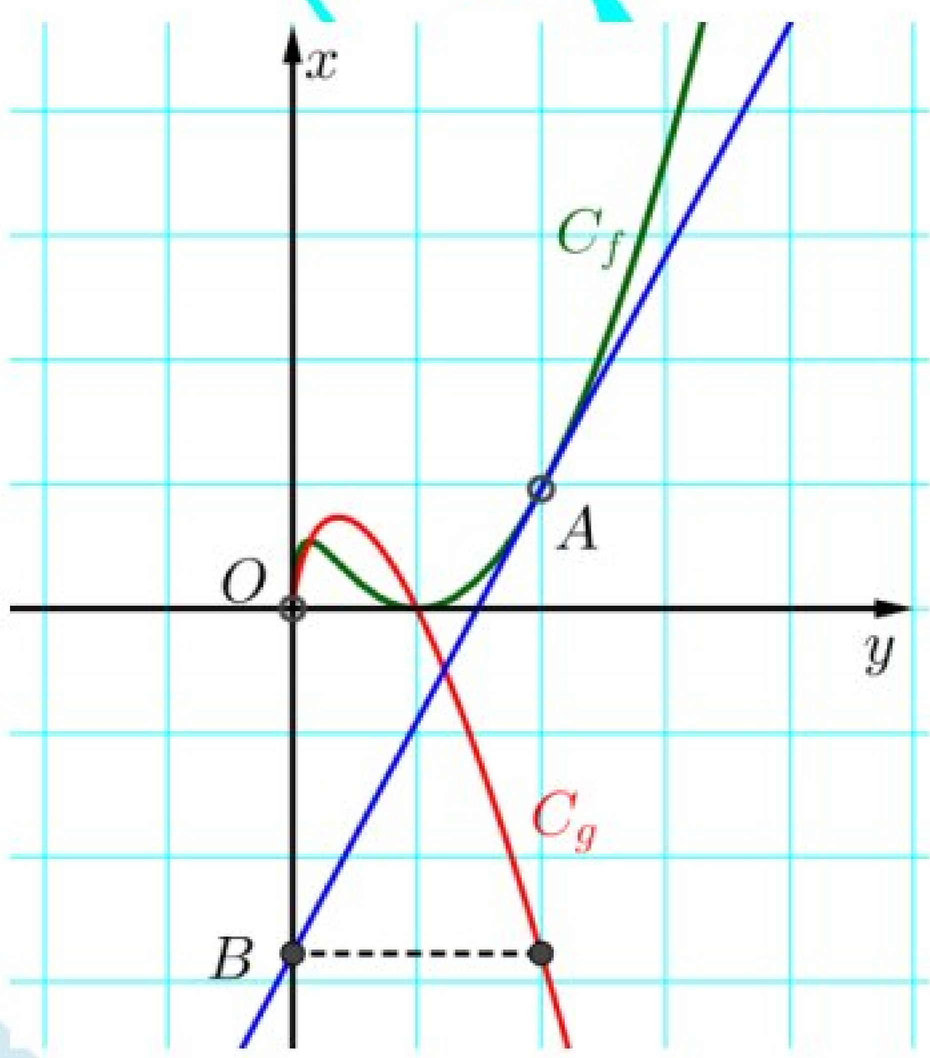
ثانياً :

$$f(x) - g(x) = x.(lnx)^2 + 2xlnx = x[(lnx)^2 + 2lnx] = xf'(x)$$

نلاحظ أنّه عندما $0 < x < \frac{1}{e^2}$ فإنّ $f'(x) > 0$ وبالتالي C_f فوق C_g

وعندما $\frac{1}{e^2} < x < 1$ فإنّ $f' < 0$ وبالتالي C_f تحت C_g وعندما $x > 1$ فإنّ $f' > 0$ وبالتالي C_f فوق C_g

ثالثاً :



❶ ليكن x_0 من $]0,+\infty[$ بالتالي :

$$m = f'(x_0) = (lnx_0)^2 + 2lnx_0$$
$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$= xf'(x_0) - x_0f'(x_0) + f(x_0)$$
$$= xf'(x_0) + g(x_0)$$

❷ $x = 0 \Rightarrow y = g(x_0)$

ولإنشاء المماس في نقطة $A\left(x_0, f(x_0)\right)$
نعيّن على محور التراتيب النقطة $B\left(0, g(x_0)\right)$
ثمّ نصل بين النقطتين A و B ونمدّد.

النموذج الوزاري الأول

التمرين الأوّل :

ليكن f التابع المعرّف على $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة $g(x) = ln(\sqrt{x+1})$

1. احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج $lim_{x\to 1}\frac{ln(\sqrt{x+1}) - ln\sqrt{2}}{x-1}$
2. احسب نهاية التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+sinx}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل :

1. $$g(x) = ln(\sqrt{x+1}) \ , \ g(1) = ln\sqrt{2} \quad , \quad g'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1} \quad , \quad g'(1) = \frac{1}{4}$$
$$lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \quad \Rightarrow lim_{x\to 1}\frac{ln(\sqrt{x+1}) - ln\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{4}$$

2. $$-1 \le sinx \le 1 \Rightarrow 2x - 1 \le 2x + sinx \le 2x + 1$$

وفي حال $x > 2$ فإنّ $x - 2 > 0$ وبالتالي : $\frac{2x-1}{x-2} \le \frac{2x+sinx}{x-2} \le \frac{2x+1}{x-2}$

وبما أنّ: $lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2} = 2 \ , \quad lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-2} = 2$

فحسب مبرهنة الإحاطة يكون : $lim_{x\to+\infty}\frac{2x+sinx}{x-2} = 2$

النموذج الوزاري الثاني

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

1. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.
2. أوجد $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارة المشتق ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f.
3. ارسم الخط البياني C في معلم متجانس.
4. لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية معرّفة وفق $u_n = f(n)$ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

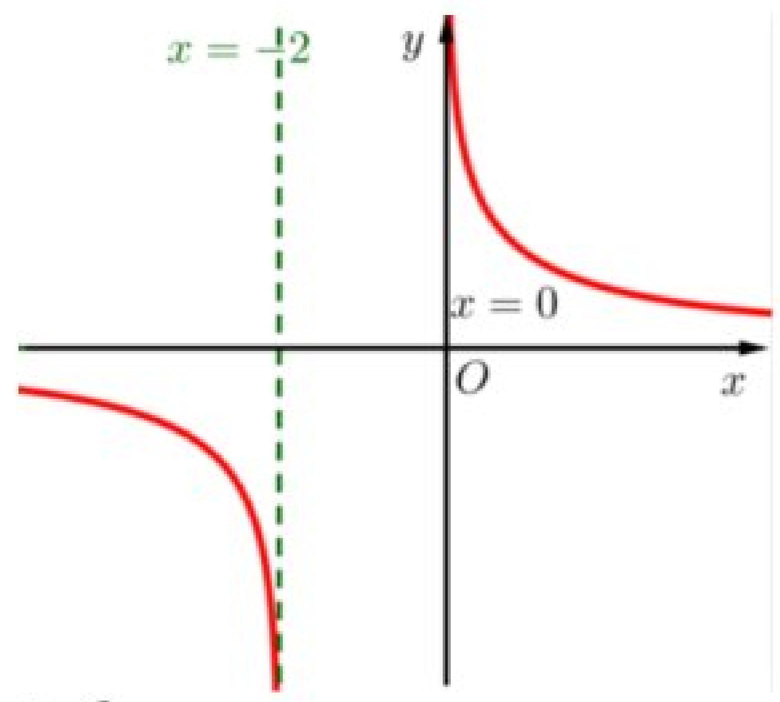
أثبت أنّ : $S_n = ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

الحل :

1. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

2. $$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	1

3. 

4. $$u_n = f(n) = ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= ln\left(\frac{3}{1}\right) + ln\left(\frac{4}{2}\right) + ln\left(\frac{5}{3}\right) + ln\left(\frac{6}{4}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n-2}\right) + ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$
$$= ln\left(\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n+2}{n}\right) = ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

النموذج الوزاري الثالث

السؤال الثاني :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $ln(x-1) = lnx - ln(x+1)$

الحل :

شرط وجود الحل هو $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in]1, +\infty[$

$$ln(x-1) + ln(x+1) = lnx \Rightarrow ln(x^2-1) = lnx \Rightarrow x^2 - 1 = x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad , \quad \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow$$

مرفوض $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ ، مقبول $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$

النموذج الوزاري 2019

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$

و ليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور f على $]1, +\infty[$

1. أثبت أن f تابع فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C
2. ادرس تغيّرات التابع g ونظّم جدولاً بها. واكتب معادلة كل مقارب للخط C'
3. ارسم كل مقارب وجدته وارسم C' واستنتج رسم C
4. احسب مساحة السطح المحصور بين (C') ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

الحل :

❶ $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$f(-x) = ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right) = ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = -f(x)$$

بالتالي التابع f فردي وخطه البياني C متناظر بالنسبة للمبدأ

❷ التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow$$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C'

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C' في جوار $+\infty$

$$f(x) = ln(1+x) - ln(x-1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{(1+x)(x-1)} < 0$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘ 0

❸ الخط C هو اجتماع الخط C' ونظيره بالنسبة للمبدأ

❹ $$S = \int_a^b f(x)dx = \int_2^3 ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)dx$$

$$u(x) = ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \Rightarrow u'(x) = \frac{-2}{x^2-1} \quad , \quad v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

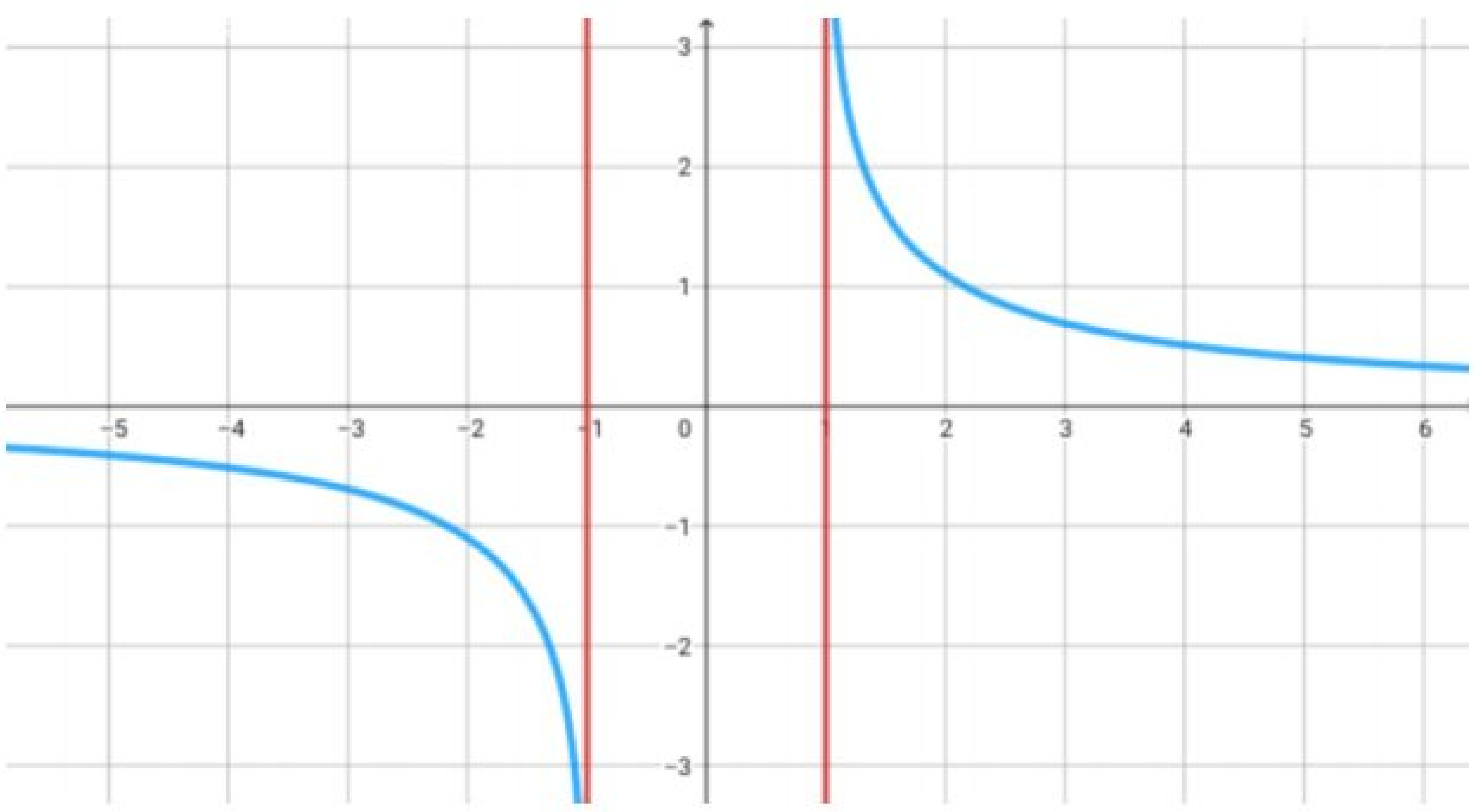
$$S = \left[x\,ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$= \left[x\,ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + [ln(x^2-1)]_2^3$$

$$= (3\,ln\,2 - 2\,ln\,3) + (ln\,8 - ln\,3)$$

$$= 3\,ln\,2 - 2\,ln\,3 + 3\,ln\,2 - ln\,3$$

$$= 6\,ln\,2 - 3\,ln\,3$$



المسألة الأولى :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

❶ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$، وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالسنبة للمقارب d

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f

❸ أثبت أن $f(x)+f(-x)=-2$

❹ استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$

❺ ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f

❻ استنتج رسم C_g للتابع C_g المعرف وفق: $g(x)=-2x+1-ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

الحل :

❶ $g(x)=f(x)-y_d=-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\Rightarrow lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

$lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $-\infty$

في حالة $x>1$ فإنّ $x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\Rightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0\Rightarrow-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$

بالتالي $g(x)<0$ وينتج أنّ C يقع تحت d على المجال $]0,+\infty[$

في حالة $x<-1$ فإنّ $x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}<1\Rightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0\Rightarrow-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$

بالتالي $g(x)>0$ وينتج أنّ C يقع فوق d على المجال $]0,+\infty[$

❷ $f(x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\quad x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي للخط C

$$\lim_{x\to1^+}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C

$$\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f(x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$f'(x)=2-\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=2+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=2+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow2x^2=0\Rightarrow x=0\notin D$$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ $$f(x)+f(-x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2x-1-ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)\Rightarrow$$

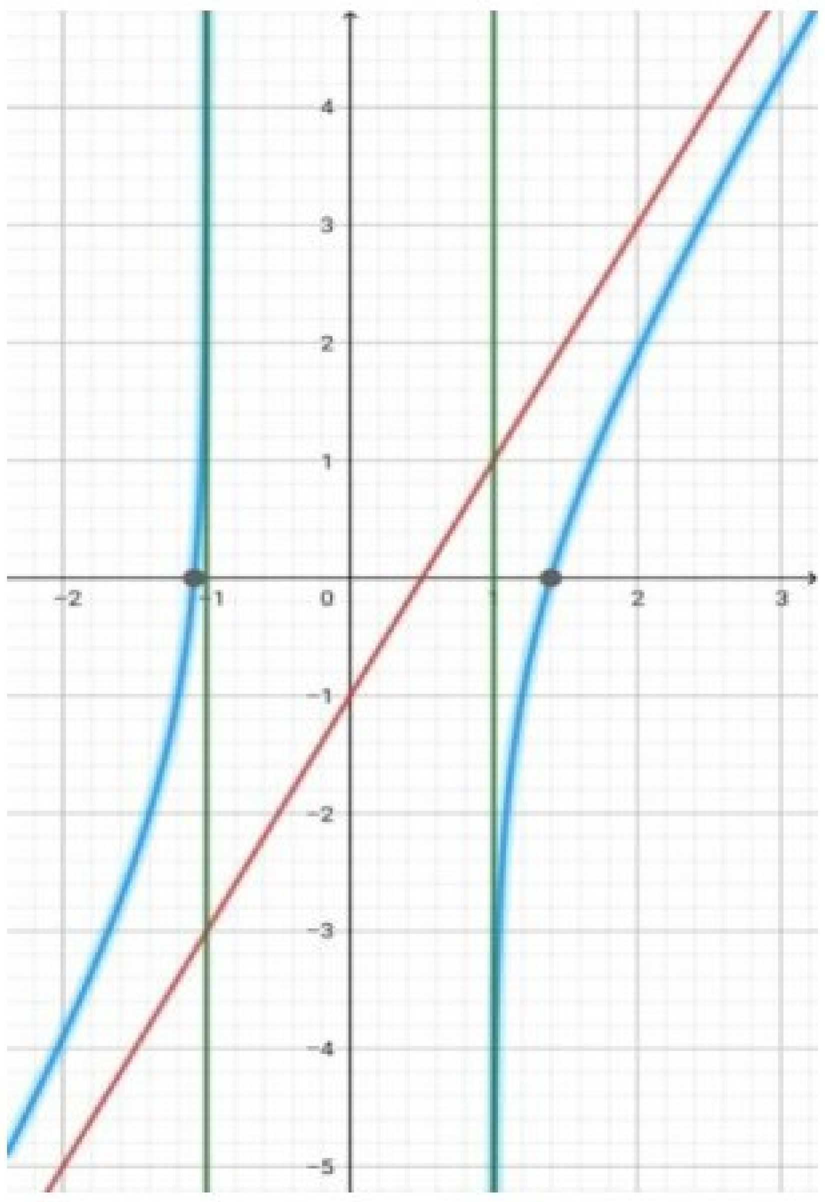
$$f(x)+f(-x)=-2-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Rightarrow$$

$$f(x)+f(-x)=-2-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-2$$

❹ استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$

$\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,\Rightarrow -x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

و $f(x)+f(-x)=-2$ بالتالي C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$



❺ ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f.

❻ $$g(x)=-2x+1+ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\Rightarrow$$

$$g(x)=-\left(2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=-f(x)$$

بالتالي C_g هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

النموذج الوزاري الثاني 2020

التمرين الأول :

ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ والمعطى بالعلاقة $f(x)=\sqrt{x}ln(1+x)$

❶ أثبت أن f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف f'

❷ جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$

❸ استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=\sqrt{cos\,x}\,ln(1+cos\,x)$

الحل :

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}t(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)\right)=0\times1=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$ بالتالي مجموعة تعريف f' هي $[0,+\infty[$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{ln(1+x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}=\dfrac{(1+x)\big(ln(1+x)\big)+2x}{2\sqrt{x}(1+x)} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\sqrt{cos\,x}\,ln(1+cos\,x)=f(cos\,x)$$

$$g'(x)=f'(cos\,x)\times(-\sin x)=\frac{(-\sin x)\Big((1+cos\,x)\big(ln(1+cos\,x)\big)+2\,cos\,x\Big)}{2\sqrt{cos\,x}\,(1+cos\,x)}$$

المسألة الثانية :

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ وفق $f(x) = ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = g(n)$. حيث $g(n)$ هو مقصور التابع f على $[1,+\infty[$

❶ ادرس تغيرات f على $]0,+\infty[$ ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب.

❷ ارسم الخط C على $]0,+\infty[$.

❸ أثبت أن النقطة $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ هي مركز تناظر للخط C، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع f.

❹ نضع $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$ أثبت أن $S_n = -ln(n+1)$.

❺ جد نهاية هذه المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$، وما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$؟

الحل :

❶ المستقيم $x = 0$ محور الفواصل مقارب شاقولي للخط C $\qquad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

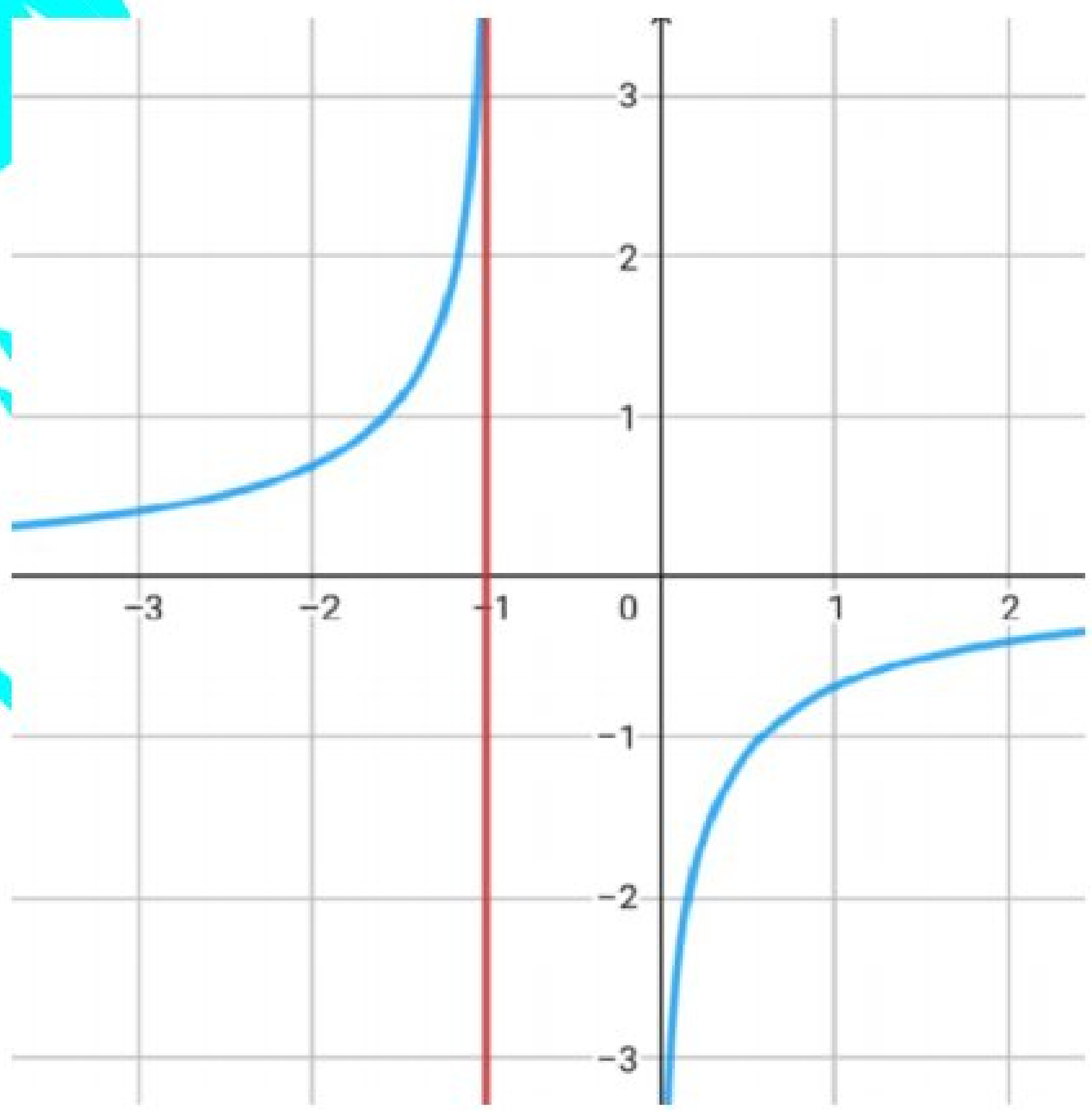
المستقيم $y = 0$ محور الفواصل مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ln(1) = 0$

في حالة $x\in]0,+\infty[$ فإن $f(x) = ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = ln(x) - ln(1+x)$ بالتالي :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(1+x)} > 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

❷ الرسم



❸

$2x_0 - x = -1 - x$

$x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\Rightarrow$

$-x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\Rightarrow$

$-1-x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$x\in D_f \Rightarrow 2x_0 - x\in D_f$ بالتالي تحقق الشرط

$$f(-1-x)+f(x) = ln\left(\frac{-1-x}{-x}\right) + ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$= ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$= -ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$$

$f(2x_0 - x) - f(x) = 2y_0$ بالتالي تحقق الشرط

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ مركز تناظر للخط C

❹

$$u_n = f(n) = ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$$

$$S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + +ln\left(\frac{n}{1+n}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{1+n}\right)$$

$$S_n = ln\frac{1}{1+n} = -\,ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{n}{1+n}\right) = ln(1) = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -\,ln(n+1) = -\infty$$

التمرين الثاني :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق $f(x)=ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$، والمطلوب :

❶ أثبت أن التابع f فردي، ثم ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,2[$

❷ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$

❸ ادرس الوضع النسبي بين C_f و T

الحل :

❶ $\forall x \in]-2,2[\Rightarrow -x \in]-2,2[$

$$f(-x)=ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)=-ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)=-f(x)$$

بالتالي التابع f فردي

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0,2[$

$$f(0)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$$

على المجال $[0,2[$ يمكن أن نكتب f باستخدام خواص اللوغاريتم بالشكل

$$f(x)=ln(x+2)-ln(-x+2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}=\frac{4}{(2-x)(2+x)}>0$$

التابع f متزايد تماما على المجال $[0,2[$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

❷

معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

$$f(0)=0 \ , \quad f'(0)=1 \Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow$$
$$y=(1)(x-0)+(0) \Rightarrow y=x$$

❸

$$h(x)=f(x)-(x)=ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)-x$$

$$h(x)=ln(x+2)-ln(-x+2)-x$$

$$h'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}-1=\frac{4}{(2-x)(2+x)}-1=\frac{4-(4-x^2)}{(2-x)(2+x)}$$

$$h'(x)=\frac{x^2}{(2-x)(2+x)}\geq 0$$

x	-2		0		2
$h'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖
$h(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

من جدول الاطراد نستنتج

x	-2		0		2
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

دورة 2017 الأولى

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{ln\,x}{x^2}$

❶ احسب $lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $lim_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية محلياً

❸ جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x = 1$

❹ ارسم كل مقارب وجدته ، وارسم المماس Δ ثم ارسم C

❺ احسب مساحة السطح المحور بين C والمحور $\grave{x}x$ والمستقيم الذي معادلته $x = e$

الحل :

❶ $lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{lnx}{x}\right) = 0$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\times lnx\right) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

❷ التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x(lnx)}{x^4} = \frac{1 - 2lnx}{x^3}$$

المقام موجب تماماً على مجموعة التعريف فإشارة المشتق تماثل إشارة البسط :

ينعدم المشتق عندما: $1 - 2lnx = 0$ ومنه $lnx = \frac{1}{2}$ وبالتالي $x = \sqrt{2}$ حيث $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

❸ لدينا: $f(1) = 0$ و $f'(1) = 1$

صيغة معادلة المماس : $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$

إذن معادلة المماس Δ هي: $y = x - 1$

❹ الرسم : $(0, -1)$ نقطة مساعدة لرسم المماس

❺ المساحة :

$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^e \frac{lnx}{x^2}dx$

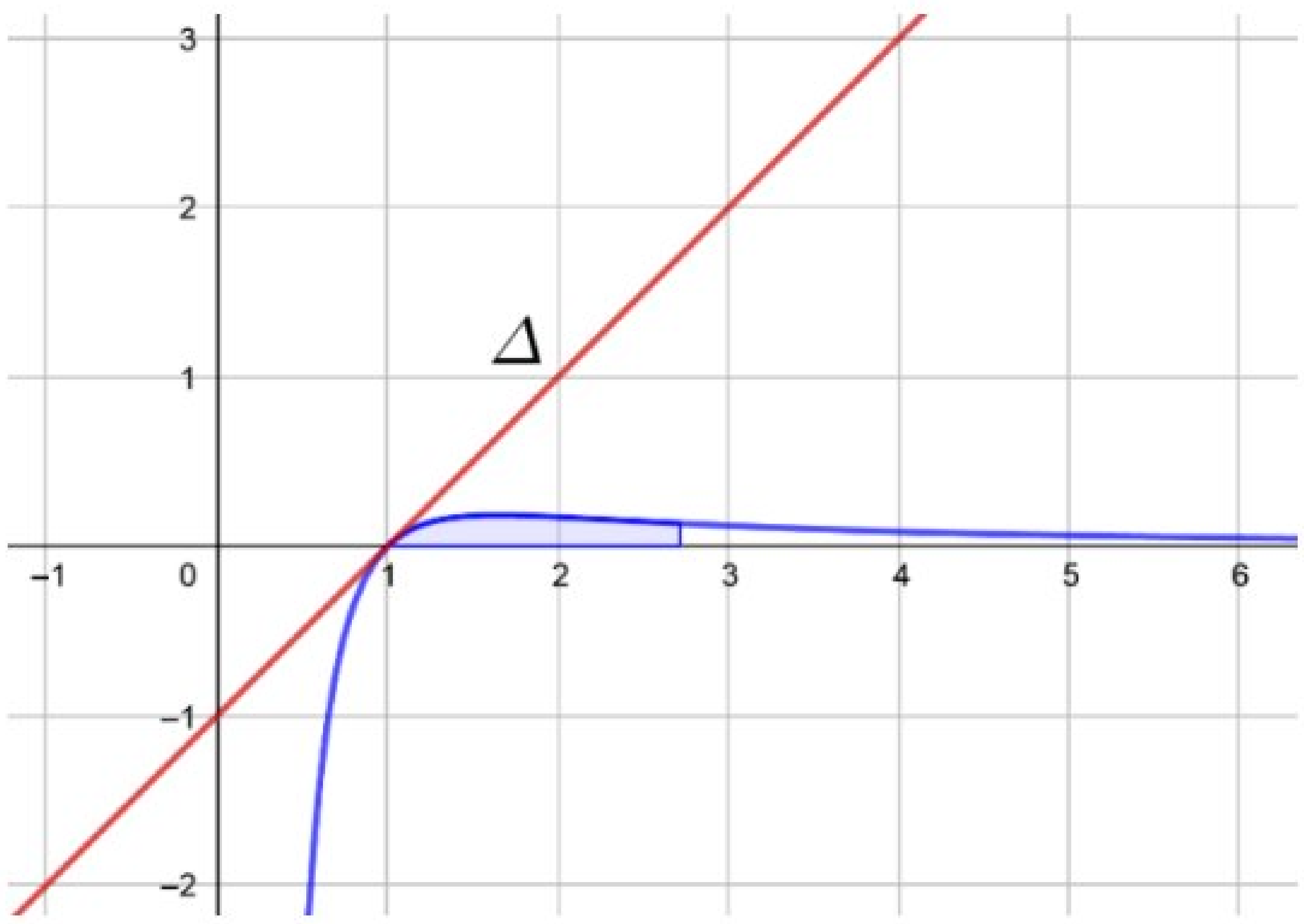
$u(x) = lnx \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow v(x) = -\frac{1}{x}$

$$S = \left[-\frac{1}{x}lnx\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x}lnx\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = \left[-\frac{1}{x}lnx - \frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$S = \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0 - 1) = 1 - \frac{2}{e}$$



دورة 2017 الثانية

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x + x(\ln x)^2$

وليكن $g(x) = (\ln(x) + 1)^2$ والمطلوب :

❶ أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$

❷ أثبت أن $f'(x) = g(x)$

❸ حل المعادلة $g(x) = 0$

❹ نظم جدول تغيرات f

❺ اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$

❻ وارسم المماس Δ وارسم C

الحل

❶ $f(x) = x + \left(\sqrt{x}\right)^2 \left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2 = x + \left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}^2\right)^2$

بما أن $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right) = \lim_{u\to 0}(u\ln u) = 0$ فإن: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 0 = 0$

و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

❷ التابع f معرف واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2(\ln x) \times \frac{1}{x} \times x = (\ln x)^2 + 2(\ln x) + 1$$

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)^2 = g(x)$$

❸ $g(x) = 0$ ومنه $\ln x = -1$ وبالتالي $x = \frac{1}{e}$

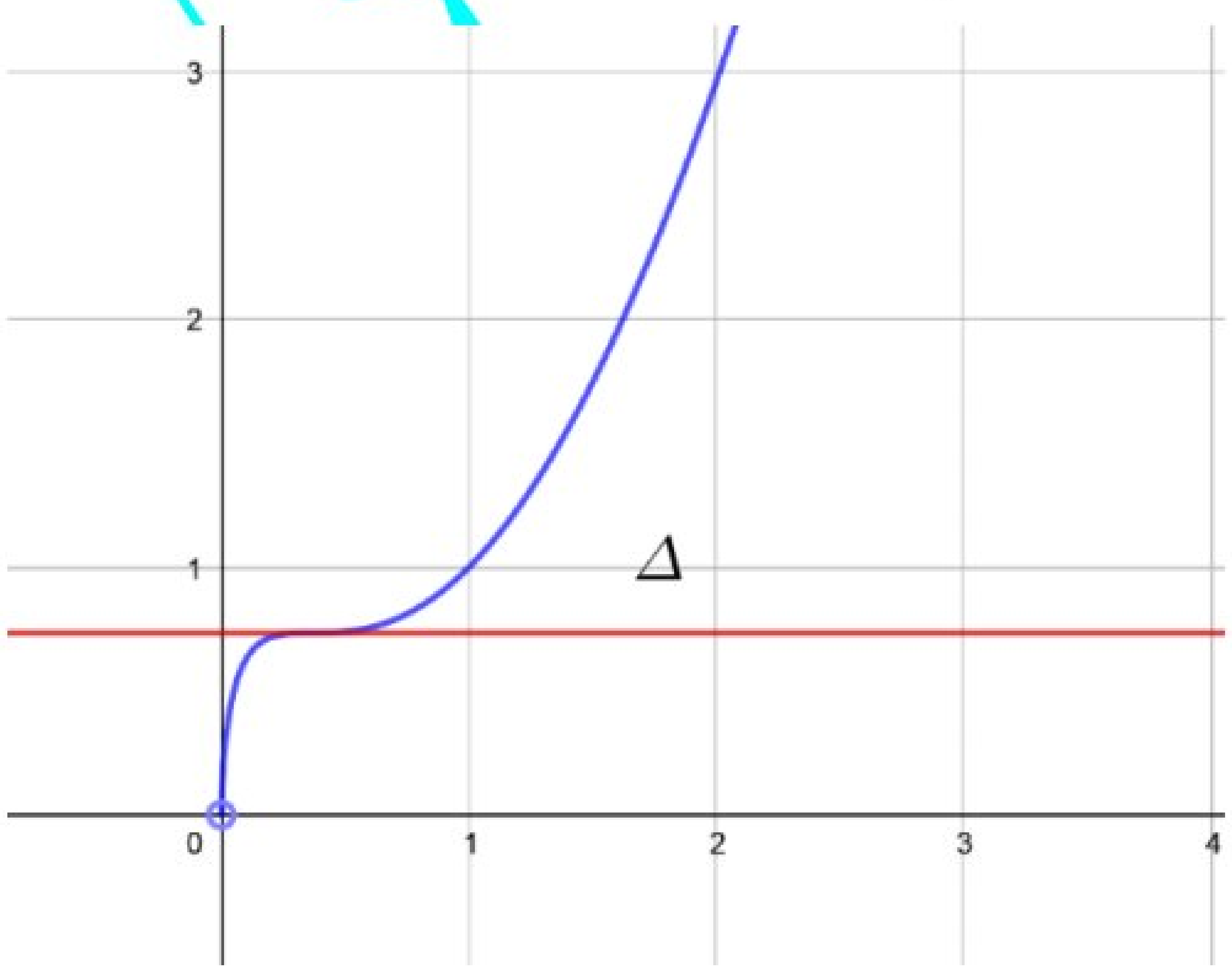
❹ $f'(x) = 0$ يقتضي $g(x) = 0$ ومنه $x = \frac{1}{e}$ وبالتالي $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{2}{e}\right)$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

❺ من الجدول $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{2}{e}\right)$ و $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ ، $(0,0)$ نقطة مقاربة

معادلة المماس: $y = f\left(\frac{1}{e}\right) + f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right)$ ومنه $y = \frac{2}{e}$

❻ الرسم



المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = x^2 - lnx$ والمطلوب :

❶ جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه
❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
❸ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$
❹ في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C
❺ احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$
❻ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث : $u_n = n^2 - ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة

الحل

❶ $lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$ $\quad lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$f(x) = x^2 - lnx = x^2\left(1 - \frac{lnx}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\frac{lnx}{x}\right) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حيث $\left(lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\ lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0, lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0\right)$

❷ التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x} \quad , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

إما $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin]0,+\infty[$ مرفوض

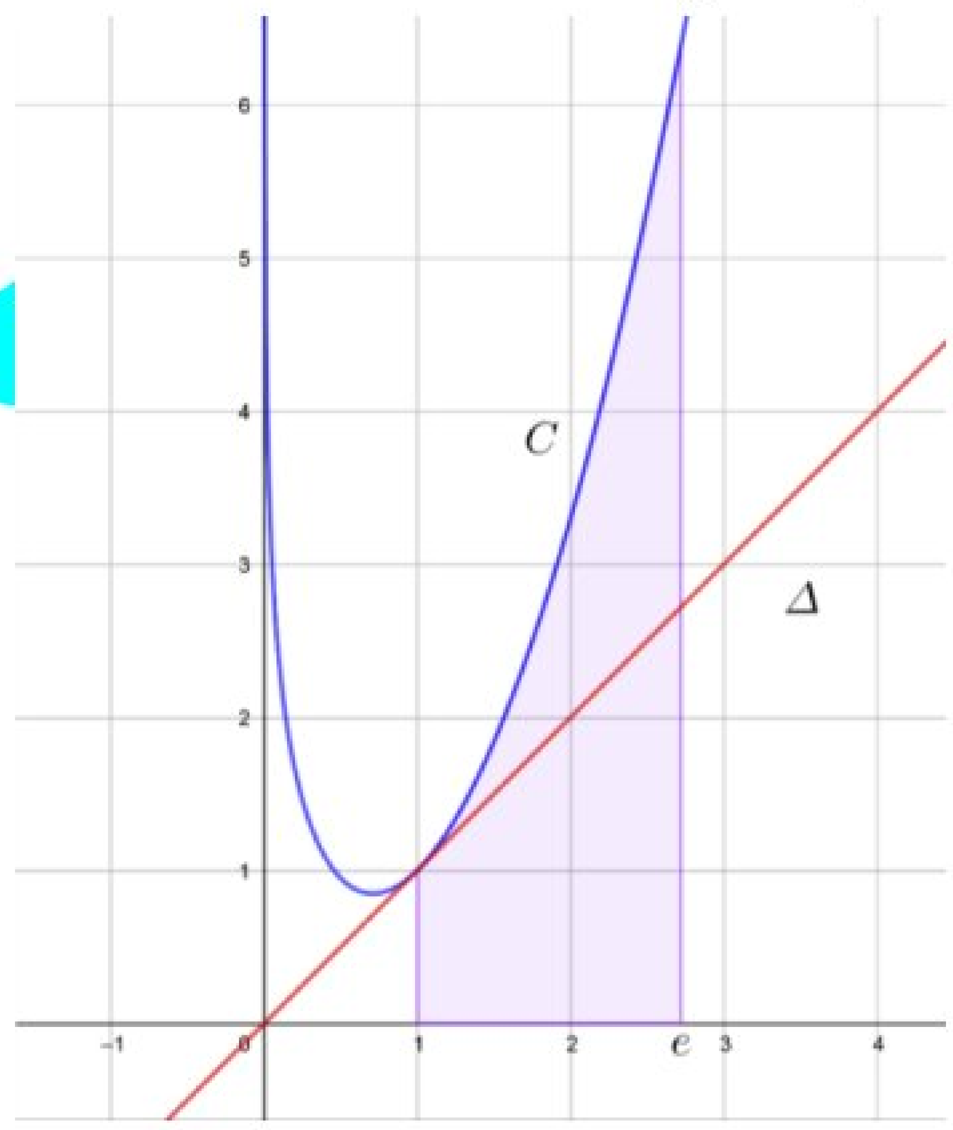
أو $x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - (ln1 - ln\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

❸ $f(x) = x^2 - lnx \Rightarrow f(1)^2 - ln1 = 1$

$$f'(x) = \frac{2x^2-1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{2(1)^2-1}{1} = 1 \Longrightarrow$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Longrightarrow y = 1(x-1) + 1 \Rightarrow y = x$$

❹ الرسم البياني :



❺

$$S = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e (x^2 - lnx)dx$$

$$S = \int_1^e x^2dx - \int_1^e lnxdx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e lnxdx$$

$$I = \int_a^b (u.v') = [u,v']_a^b - \int_a^b (u'.v)$$

$$u = lnx \Longrightarrow u' = \frac{1}{x} \quad , \quad v' = 1 \Longrightarrow v = x$$

$$I = [xlnx]_1^e - \int_1^e 1dx = [xlnx]_1^e - [xl]_1^e = [xlnx - x]_1^e$$

$$I = (elne - e) - (1ln1 - 1) = 1$$

$$S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - 1 = \left(\frac{e^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{e^3-1-3}{3} = \frac{e^3-4}{3}$$

❻ نلاحظ أن $u_n = f(n)$ حيث $f(x) = x^2 - lnx$

ومن جدول التغيرات نلاحظ أن التابع f مستمر ومتزايد على $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$ فهو متزايد على $[1,+\infty[$

وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

دورة 2019 الأولى

التمرين الثالث

ليكن التابع f المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقاً A يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$

❷ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل :

حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$

$$lim_{x\to+\infty} f(x)=lim_{x\to+\infty}\frac{lnx(\frac{2}{lnx}+1)}{lnx(\frac{1}{lnx}+1)}=lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{2}{lnx}+1)}{(\frac{1}{lnx}+1)}=1$$

$$|f(x)-1|<0.1\Rightarrow\left|\frac{2+lnx}{1+lnx}-1\right|<0.1\Rightarrow\left|\frac{1}{1+lnx}\right|<0.1$$

$$\frac{1}{1+lnx}<\frac{1}{10}\Rightarrow 1+lnx>10\Rightarrow lnx>9\Rightarrow x>e^9$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to1} f(x)=2$$

دورة 2019 الثانية

التمرين الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرّف f على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=ax+b-\frac{lnx}{x}$

❶ عين العددين الحقيقين a و b أذا علمت أن :
المماس للخط البياني C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x$

❷ من أجل $a=4$ و $b=-4$ أثبت أن :
المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C وΔ

الحل :

❶
$$f'(x)=a-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-(1)lnx}{x^2}=a-\frac{1-lnx}{x^2}$$

$$f(1)=0\Rightarrow a(1)+b-\frac{ln1}{1}=0\Rightarrow a+b=0\ldots(1)$$

$$f'(1)=3\Rightarrow a-\frac{1-ln1}{(1)^2}=3\Rightarrow a-1=3\Rightarrow a=4$$

نعوض قيمة $a=4$ في المعادلة (1) نجد أن $b=-4$

❷
$$f(x)=4x-4-\frac{lnx}{x}\Rightarrow f(x)-y_\Delta=\left(4x-4-\frac{lnx}{x}\right)-4x-4=-\frac{lnx}{x}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x}\right)=0$$

لدراسة الوضع النسبي بين C و Δ ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_\Delta=-\frac{lnx}{x}$

عندما $x\in]0,1[$ يكون $f(x)-y_\Delta>0$ يكون C قوق Δ

عندما $x\in]1,+\infty[$ يكون $f(x)-y_\Delta>0$ يكون C قوق Δ

عند النقطة $(1,0)$ يكون $f(x)-y_\Delta=0$ أي C يقطع Δ

السؤال الرابع :

أثبت أن $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > -1$

الحل :

$$ln(x+1) < \sqrt{x+1} \Rightarrow ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

ليكن التابع f المعرف والمستمر والاشتقاقي على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة التالية :

$$f(x) = ln(x+1) - \sqrt{x+1} \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \quad x = 3 \Rightarrow f(3) = ln(4) - 2 < 0$$

x	-1		3		$+\infty$
f'	||	$+$	0	$-$	
f	||	$\nearrow$	$ln(4)-2$	$\searrow$	

ومن جدول الاطراد نلاحظ ان $f(x) < 0$ وذلك مهما تكن $x \in I$ أي $0 > ln(x+1) - \sqrt{x+1}$

$ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ محققة أياً كان $x > -1$

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$ وفق $f(x)=ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب:

❶ أثبت أن f تابع فردي

❷ ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$

❸ اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$

❹ في معلم متجانس ارسم الخط البياني C

❺ استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=ln(2-x)-ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$

الحل :

❶ أياً كانت x من المجال $]-2,2[$ كانت $-x$ من المجال $]-2,2[$

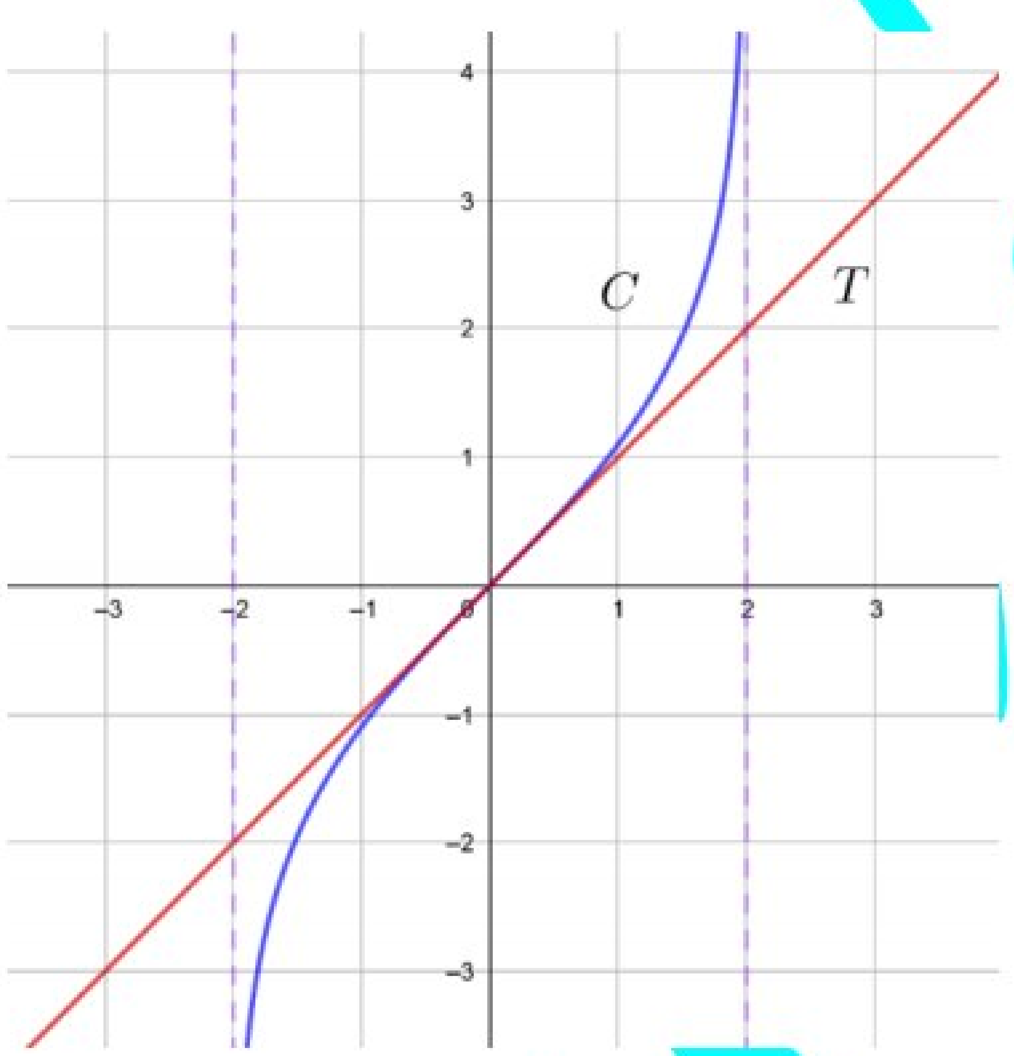
$f(-x)=ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)=-ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)=-f(x)$ أي التابع f فردي

❷ التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-2,2[$ $\quad f(0)=0\ ,\ lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$

أي $x=2$ مقارب شاقولي للخط البياني C

$$f'(x)=\frac{\frac{(1)(2-x)-(-1)(x+2)}{(2-x)^2}}{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)}=\frac{2-x+x+2}{(2-x)^2}\times\frac{2-x}{x+2}=\frac{4}{(2-x)(2+x)}>0$$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖



❸ معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

$f'(0)=1$ و $f(0)=0$

$T:\quad y=f'(0)(x-0)+f(0)\Longrightarrow$

$y=(1)(x-0)+(0)\Longrightarrow\ \ y=x$

$f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

$a=0\quad ,\quad h=0.1$

$f(0+0.1)\approx f(0)+(0.1)f'(0)\Longrightarrow f(0.1)\approx 0.1$

❹ الرسم :

❺ $g(x)=ln(2-x)-ln(x+2)=ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)=-ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)\Longrightarrow g(x)=-f(x)$

C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

او $g(x)=f(-x)$ و C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب:

❶ احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.

❹ في معلم متجانس ارسم الخط C

❺ استنتج C_1 رسم الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$

الحل :

❶

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ فيكون $x = 0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ فيكون $y = 0$ مقارب أفقي

❷

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - n\,x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
f'	|	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

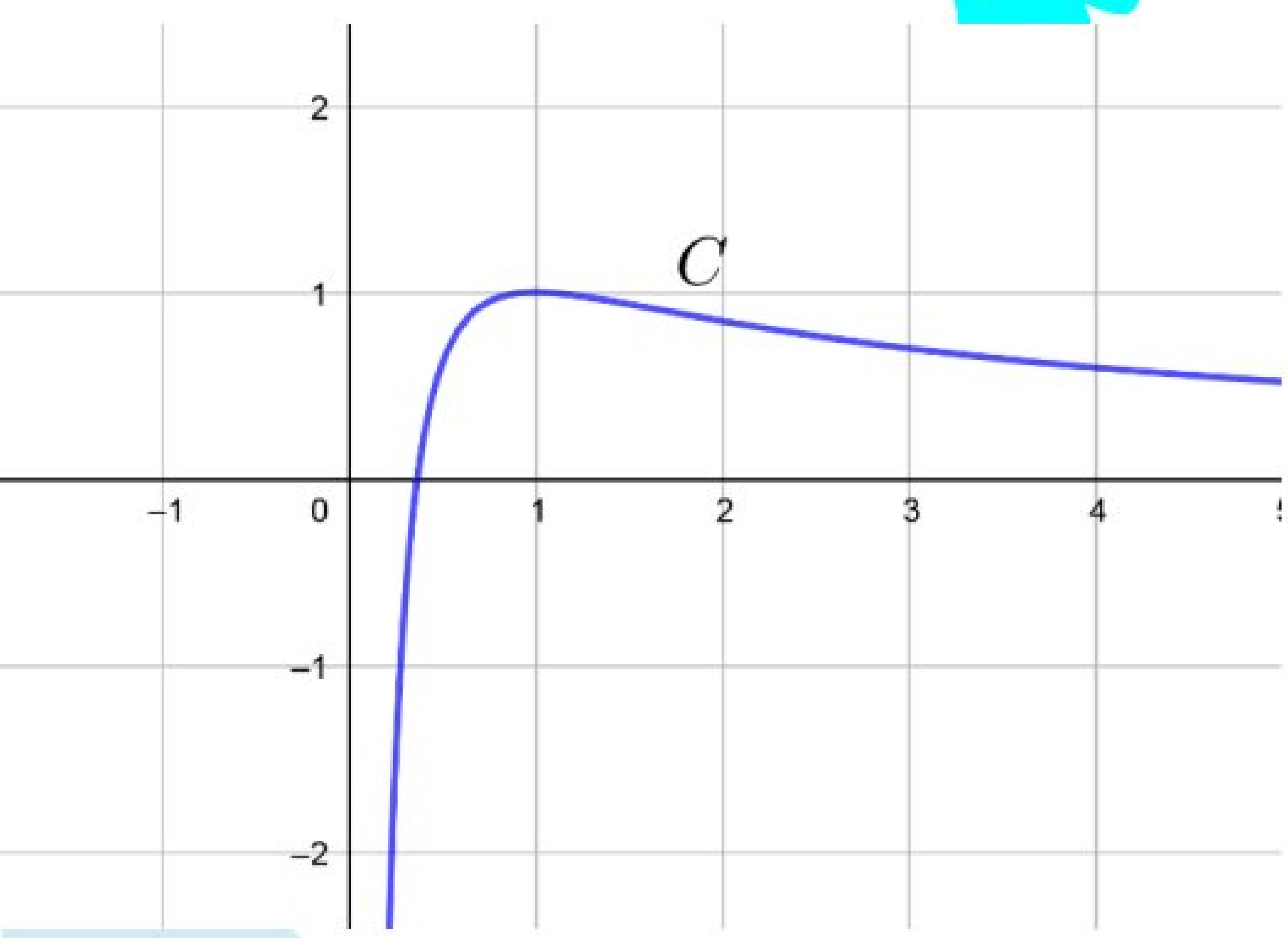
❸ التابع مستمر ومتزايد تماما على المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2 > 0 \text{ و } f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 3\ln 3 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.

❹



❺

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} = f(x) + 1$$

C_1 هو انسحاب للخط C بمقدار واحد للأسفل

دورة 2021 الأولى

التمرين الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-4+ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

❶ أثبت أن f متزايد تماما على I واستنتج $f(I)$

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d

الحل :

❶ في حالة $x\in]0,+\infty[$ فإن $f(x)=2x-1+ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=2x-1+ln\,x-ln(x+1)$

$$f'(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x+1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{(2x+1)(x+1)-x}{x(x+1)}=\frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}>0$$

والتابع متزايد تماما

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ \Rightarrow f(I)=f(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$

❷ $$g(x)=\ f(x)-y_\Delta=ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\Rightarrow lim_{x\to+\infty}\,g(x)=\ \lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

❸ في حالة $0<x$ فإنّ $x<x+1\Rightarrow\frac{x}{x+1}<1\ \Rightarrow ln\left(\frac{x}{x+1}\right)<0\Rightarrow g(x)<0$

دورة 2022 الأولى

التمرين الثاني :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-ln\,x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$ والمطلوب :

❶ أثبت أن f مستمر عند الصفر

❷ أدرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسيا

❸ بين أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقاربا أفقيا عند $+\infty$ جد معادلته

❹ أكتب معادلة المماس للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$

واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل :

❶

$$\lim_{x\to0^+}(x-ln\,x)=+\infty\Rightarrow\ \lim_{x\to0^+}f(x)=0\ \ ,\ \ f(0)=0$$

بالتالي $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ فالتابع f مستمر عند الصفر

❷

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{x-ln\,x}-0}{x}=\frac{1}{x-ln\,x}\ \ \Rightarrow \lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-ln\,x}=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$ بالتالي لخط التابع مماس أفقي عند الصفر

❸

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-ln\,x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{ln\,x}{x}}\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

بالتالي $y=1$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$

❹ في حالة $x > 0$ يكون

$$f'(x) = \frac{x - \ln x - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1 - 0} = 1 \quad , \quad f'(1) = 1$$

معادلة المماس $y = f(1) + f'(1)(x - 1) \Rightarrow y = x$

$$f(a + h) \approx f'(a).h + f(a)$$
$$a + h = 1.1 \Rightarrow a = 1 ,\ h = 0.1 \quad , \ f(1) = 1 ,\ f'(1) = 1 \ \Rightarrow$$
$$f(1.1) \approx f'(1).(0.1) + f(1) \approx 1(0.1) + 1 \Rightarrow f(1.1) \approx 1.1$$

طريقة ثانية :

لحساب القيمة التقريبية نعوض في معادلة المماس للخط في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ فنجد $f(1.1) \approx 1.1$

دورة 2022 الثانية

السؤال الثالث :

ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = \ln(2 + \sin x)$ والمطلوب :

❶ أحسب $g'(x)$ و $g'(0)$

❷ استنتج $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(2+\sin x) - \ln(2)}{x}$

الحل :

❶ التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ و $g'(0) = \frac{\cos(0)}{2 + \sin(0)} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$

❷ g اشتقاقي عند الصفر و $g(0) = \ln(2 + \sin(0)) = \ln(2)$ بالتالي :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2 + \sin x) - \ln(2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{1}{2}$$

السؤال الرابع :

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(6) \\ \ln(x + y) = \ln(5) \end{cases}$

الحل :

شرط الحل $x > 0$ و $y > 0$ ،

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(6) \\ \ln(x + y) = \ln(5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x.y) = \ln(6) \\ \ln(x + y) = \ln(5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x.y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

نبحث عن عدد مجموعهما 5 وجداؤهما 6 بالتالي : $x = 2\ ,\ y = 3$ أو $x = 3\ ,\ y = 2$