// التعبير عن المتتالية //

1. إعطاء الحد العام u_n بدلالة n

$$\boxed{u_n = f(n)}$$

2. إعطاء صيغة تدريجية $u_n = ...$

$u_{n+1} = f(u_n)$

سلسلة يعطى u_n بشكل مجموع

$u_n = ... + ... + ...$

// دراسة اطراد المتتالية //

هناك أربعة طرق

1. نوجد الفرق $u_{n+1} - u_n$ ونقارنه مع الصفر. أكبر من الصفر ← متزايدة

أصغر من الصفر ← متناقصة

يساوي الصفر ← ثابتة

2. نوجد النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارنها مع الواحد

أكبر من الواحد ← متزايدة

أصغر من الواحد ← متناقصة

تساوي الواحد ← ثابتة

بشرط: جميع حدود المتتالية موجبة.

3. إذا كانت معطاة بالحد العام

$u_n = f(n)$

ندرس اطراد التابع $f(x)$ على المجال $[a, \infty[$ فيكون اطراد المتتالية مثل اطراد التابع

4. إذا كانت معطاة بالصيغة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$ نوجد حدود أولى منها ونأخذ فكرة عنها متزايدة أو متناقصة ثم نثبت اطرادها بالتدريج

متزايدة نثبت $u_{n+1} \geq u_n$

متناقصة نثبت $u_{n+1} \leq u_n$

// الإثبات بالتدريج //

لإثبات علاقة من أجل $n \geq n_0$ نستخدم الإثبات بالتدريج وفق:

1. العلاقة $E(n)$ هي «نكتب العلاقة المطلوب إثباتها»

2. نثبت $E(n_0)$: نعوض في العلاقة n بـ n_0 فتكون محققة.

3. نفرض $E(n)$ صحيحة ونثبت صحة $E(n+1)$

ننطلق من $E(n)$ حتى نحصل على $E(n+1)$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

	// المتتالية الحسابية //	// المتتالية الهندسية //
التعريف	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت r أساس المتتالية $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, u_{n+1} \dots$	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بضربه بعدد ثابت q أساس المتتالية $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, u_{n+1} \dots$
الشرط	$u_{n+1} - u_n = r \rightarrow$ عدد ثابت	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \rightarrow$ عدد ثابت
الحد العام u_n بعلاقة u_0	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \cdot q^n$
العلاقة بين حدين u_m و u_p	$u_m - u_p = (m-p)r$ $u_m = u_p + (m-p)r$	$\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$ $u_m = u_p \cdot q^{m-p}$
مجموع n حداً	$S = n \cdot \frac{a+l}{2}$ حيث: n: عدد الحدود a: الحد الأول l: الحد الأخير	$S = a \frac{1-q^n}{1-q}$ حيث a: الحد الأول n: عدد الحدود q: الأساس

مسائل a ، b ، c المتوالية من المتتالية

حسابية	هندسية
$a + c = 2b$	$a \cdot c = b^2$
$b = a + r$	$b = a \cdot q$
$c = a + 2r$	$c = a \cdot q^2$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين الأول : (نموذج وزاري)

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق

$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ و $x_0 = 4$

في حالة $n \geq 0$

نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

واكتب y_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n$

الحل:

$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6$

$= \frac{3}{4}(x_n - 8) = \frac{3}{4}y_n$

وهي متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $y_0 = x_0 - 8 = -4$ وبالتالي:

$y_n = y_0 \cdot q^n = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ولأن $-1 < q < 1$ فإن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y_n = -4 \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

التمرين الثاني : (نموذج وزاري)

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:

$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ و $x_0 = 5$

1- احسب x_1 و x_2 و x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية.

2- نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

3- اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + y_3 + \dots + y_{10}$ بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$

الحل:

1- $\boxed{x_1} = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

$\boxed{x_3} = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1344}{125} + \frac{100}{125} = \frac{1444}{125}$

$\boxed{x_2} = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{204}{25} + \frac{20}{25} = \frac{224}{25}$

نبين لنا أن المتتالية متزايدة نرمز الخاصة

$E(n): x_{n+1} > x_n$

ولنبرهن صحة $E(0)$ $\quad \frac{34}{5} = x_1 > x_0$

والخاصة صحيحة

نفرض صحة $E(n)$ أي أن $x_{n+1} - x_n \geq 0$

ولنبرهن صحة $E(n+1)$ أي نبرهن أن $x_{n+2} > x_{n+1}$

من الفرض $x_{n+1} > x_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن:

$f(x_{n+1}) > f(x_n) \Longrightarrow$

$\frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} > \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \Longrightarrow$

$x_{n+2} > x_{n+1}$

والعلاقة $E(n+1)$ صحيحة:

وبالتالي مما سبق العلاقة $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ والمتتالية u_n متزايدة

2- والمتتالية y_n هندسية

$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4 =$

$\frac{6}{5}(x_n + 4) = \frac{6}{5}y_n$

3- $y_n = y_0 \cdot q^n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$ أساسها $q = \frac{6}{5}$ وحدها الأول $y_0 = 9$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$y_2 + y_3 + \dots + y_{10} = y_2 \frac{1-q^9}{1-q} =$

$9\left(\frac{6}{5}\right)^2 \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}} = -45\left(\frac{6}{5}\right)^2\left[1-\left(\frac{6}{5}\right)^9\right]$

التمرين الثالث: (نموذج وزاري)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$

1- أثبت أن $0 < u_n < 1$ أياً كان $n \in N$

2- نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

3- اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

1- لنفرض التابع $f(x) = \frac{x}{2-x}$ بحيث

بالتالي: $u_{n+1} = f(u_n)$

$f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$

فالتابع f متزايد تماماً.

لنفرض $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$

والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$ ولنبرهن صحة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من الفرض $0 \leq u_n \leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

2- $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2-2u_n}{u_n} = 2\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2v_n$

وهي متتالية هندسية أساسها $q = 2$

و $v_0 = 2 - 1 = 1$ بالتالي $v_n = v_0 q^n = 2^n$

3- $v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n+1} = \frac{1}{2^n+1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$

التمرين الرابع: (نموذج وزاري)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تراجعياً بالشكل $u_0 = e^3$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $v_n = \ln(u_n) - 2$

1- أثبت أن v_n هندسية وعين q و v_0

2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$

الحل:

1- $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e \cdot \sqrt{u_n}) - 2 =$

$\ln e + \ln\sqrt{u_n} - 2 = \frac{1}{2}\ln(u_n) =$

$\frac{1}{2}\left[\ln(u_n) - 2\right] = \frac{1}{2} v_n$

وهي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول:

$v_0 = \ln(u_0) - 2 = 3 - 2 = 1$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK
إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

2. $v_n = v_0 . q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. $v_n + 2 = \ln(u_n) \Longrightarrow u_n = e^{v_n+2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}\right) = e^{0+2} = e^2$

التمرين الخامس:

لتكن المتتالية $u_n = 4n+1$ أثبت أن المتتالية حسابية واحسب $u_0+u_1+---+u_{10}$

الحل:

$u_{n+1} = 4n+5 \Longrightarrow u_{n+1} - u_n = 4$

وهي متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$S = \frac{n(a+l)}{2}$ $\quad n = 10-0+1 = 11$

$a = u_0 = 1$ و $l = u_{10} = 41$

$u_0+u_1+u_2+---+u_{10} = \frac{11.(1+41)}{2} =$

$11 \times 21 = 231$

التمرين السادس:

لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ و $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

الحل:

$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1} =$

$\frac{(4n^2+13n+9)-(4n^2+13n+10)}{(n+1)(n+2)}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ x_n متتالية متناقصة

$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2} =$

$\frac{(4n^2+13n+10)-(4n^2+13n+3)}{(n+2)(n+3)}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{7}{(n+1)(n+2)} > 0$ y_n متتالية متزايدة

$\lim(x_n - y_n) = \lim\left(\frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+5}{n+1}\right) = 4-4 = 0$

والمتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان

التمرين السابع: (نموذج وزاري)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة كما يأتي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

المطلوب:

1. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$
2. أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة
3. علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ واحسب نهايتها

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

الحل:

1- لنفرض التابع $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ حيث

$u_{n+1}=f(u_n)$

بالتالي $f'(x)=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}>0$

فالتابع f متزايد تماماً لنضع $E(n): 0\le u_n\le 1$

لنبرهن صحة $E(0)$ ؛ $0\le u_0=0\le 1$

والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0\le u_n\le 1$

ولنبرهن صحة $E(n+1): 0\le u_{n+1}\le 1$

من الفرض $0\le u_n\le 1$ وبما أن f

متزايد تماماً فإن

$f(0)\le f(u_n)\le f(1)\Rightarrow 0\le\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة

من أجل كل عدد طبيعي

2- $n\ge 0$ لنضع: $E(n): u_{n+1}>u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1=\frac{1}{2}>u_0=0$

إذاً $E(0)$ صحيحة.

لنفرض صحة $E(n): u_{n+1}>u_n$ ونبرهن

صحة: $E(n+1): u_{n+2}>u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1}>u_n$ وبما أن f متزايد

تماماً فإن: $f(u_{n+1})>f(u_n)\Rightarrow u_{n+2}>u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة

من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ فالمتتالية

$(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة تماماً

3- مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$

متزايدة ومحدودة من الأعلى فالمتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$

متقاربة ولإيجاد النهاية،

نحل المعادلة $f(l)=l$

$\frac{2l+1}{l+2}=l\Rightarrow l^2+2l=2l+1\Rightarrow l^2=1$

$\Rightarrow l=1\ ,\ l=-1$

المتتالية متزايدة وحدها الأول 0

لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها

سالبة بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

التمرين الثامن:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة عند كل $n\ge 1$

وفق $u_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$

أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$

أثبت أن $u_n<2$ ثم استنتج أن u_n متقاربة

الحل:

1- لنضع الخاصة $E(n): \frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$

في حالة $n\ge 1$ من أجل $n=1$ نجد:

$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\le\frac{1}{2^1}$ فالخاصة $E(1)$ صحيحة،

نفرض صحة الخاصة $E(n): \frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1): \frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^{n+1}}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$$\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)!} =$$

$$\frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$n \ge 1 \Rightarrow n+2 \ge 3 \Rightarrow n+2 \ge 2 \Rightarrow$$

$\frac{1}{n+2} \le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد $n \ge 1$

-2

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \le 1 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_n \le 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \le 2 - 2\left(\frac{1}{2^n}\right) \le 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \le 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n \ge 0}$

-3

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n \ge 0}$ متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

التمرين التاسع:

لتكن $(u_n)_{n \ge 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

1. أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \ge 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. لتكن S_n المجموع المعرف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n \to +\infty} S_n$

الحل:

1- نفرض الخاصة $E(n): u_n > 0$

لنرى صحة $E(0)$ أن $u_0 = 2 > 0$ والخاصة صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n): u_n > 0$ ولنرى صحة الخاصة $E(n+1): u_{n+1} > 0$

من الفرض $u_n > 0$ وبالتالي: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$

لأنها قسمة عددين موجبين تماماً

وبالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة مما سبق
نجد أن الخاصة $u_n>0$ صحيحة أياً كان n من N

② نلاحظ أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة على النحو:

$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+4u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}+4$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n+4 \Rightarrow$

$v_{n+1}-v_n=4$

وبالتالي v_n متتالية حسابية أساسها

$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$ و $r=4$

وبالتالي: $v_n = v_0+nr = \frac{1}{2}+4n = \frac{8n+1}{2}$

و $u_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{8n+1}$

③- $S_n = v_0+v_1+\dots+v_n = \frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$

$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{8n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)(8n+2)}{4}$

$S_n = \frac{1}{4}(8n^2+10n+2) \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}(8n^2+10n+2) = +\infty$

التمرين العاشر: (دورة 2 وزارية)

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين وفق العلاقتين: $v_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $u_n = -\frac{1}{n}$

1. ادرس اطراد كل من $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$
2. أثبت أن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

الحل:

1- بفرض $u_n=f(n)$ حيث $f(x)=-\frac{1}{x}$ بالتالي $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ والتابع متزايد تماماً وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

2- بفرض $v_n=g(n)$ حيث $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ بالتالي

$g'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0$

$;x\in[1,+\infty[$

والتابع متناقص تماماً على $[1,+\infty[$ وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

3- $\lim_{x\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{n}\right) =$

$0+0=0$

التمرين 11:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2 \quad ; \quad u_0=1$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n=u_n+3$

1- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية وأوجد أساسها.
2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n.
3- ليكن في حالة عدد طبيعي n:

$S_n = v_0+v_1+\dots+v_n$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

الحل:

1- $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

2- $q = \frac{1}{3}$, $v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4 \Longrightarrow$

$v_n = v_0 q^n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$

$v_n = u_n + 3 \Longrightarrow u_n = v_n - 3 \Longrightarrow$ ومن ثم

$u_n = \frac{4}{3^n} - 3$

3- $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$= 4 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$, -1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Longrightarrow$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 0 = 6$

التمرين 12:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

2- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

1- $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \Longrightarrow$

$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$

من أجل $n \geq 0$ فإن $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$

ومنه $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

والمتتالية متناقصة

$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

2- من أجل $n \geq 0$ فإن:

① $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 0$

أو من أجل $n \geq 0$ فإن:

① $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq 0$

② $n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$

$\Longrightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1$

من ① و ② نجد $0 \leq u_n \leq 1$

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

التمرين 13:

لتكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان وفق: $u_n = 5-\frac{1}{n}$ و $v_n = 5+\frac{1}{n^2}$

1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة

2- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة

3- هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان؟ علل إجابتك.

الحل:

1- بفرض $u_n=f(n)$ حيث $f(x)=5-\frac{1}{x}$ والتابع $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ بالتالي متزايد تماماً وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

2- بفرض $v_n=g(n)$ حيث $g(x)=5+\frac{1}{x^2}$ والتابع $g'(x)=\frac{-2}{x^3}<0$ بالتالي متناقص تماماً وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً.

3- $\lim_{x\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=0+0=0$
والمتتاليات متجاورتان.

التمرين 14:

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $q=2$ و $u_0=1$
احسب u_3 ثم احسب المجموع

$S=u_3+u_4+u_5+u_6+$

الحل:

1- $u_m=u_n.q^{m-n} \Rightarrow u_3=u_0.q^{3-0}$

$\Rightarrow u_3=1(2)^3 \Rightarrow u_3=8$

$n=5$ عدد الحدود

$S=u_3\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=8\times\frac{1-2^5}{1-2}=-8(1-32)=248$

التمرين 15:

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

2- أثبت أن S_n يكتب بالشكل وفق $S_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصر راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبين أنها متقاربة.

الحل:

1- $S_{n+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}$

$=S_n+\frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow S_{n+1}-S_n=\frac{1}{3^{n+1}}>0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً.

2- نلاحظ أن S_n عبارة عن مجموع n+1 حد من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1

$S_n=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=1\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^n} < \frac{3}{2}$

بالتالي $\frac{3}{2}$ عنصر راجحاً

المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين 16:

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$؛

$u_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$

1- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة

2- استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

3- أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$

الحل:

1- $u_{n+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}} \Longrightarrow$

$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \Longrightarrow$

$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{2^n} =$

$\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \Longrightarrow$

$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$

المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

2- $v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) =$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن

$-1<q=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً و

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

3- $u_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right)$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) =$

$\frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}$

لأن $-1<q=\frac{1}{5}<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

وبما أن المتتاليتين متجاورتان فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين 17:

$u_0 = \frac{1}{2}$ $\quad u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$

1. ادرس تغيرات f على R

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

وأثبت أن f متزايد تماماً على $[0,3]$

2. أثبت بالتدريج $u \leq u_{n+1} \leq 3$

3. استنتج التقارب المتتالية واحسب نهايتها

الحل:

1. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -2 \Rightarrow$

$x = \frac{-2}{\frac{-2}{3}} \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} = 3 \Rightarrow$

$f(3) = -\frac{1}{3}(3)^2 + 2(3)$

$f(3) = -3 + 6 \Rightarrow f(3) = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$		3	$-\infty$

f تابع متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 3]$

f تابع متزايد تماماً على المجال $[0,3]$

2. $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة $E(0)$

$E(0) : u_0 \leq u_1 \leq 3$

$n = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{3}u_0^2 + 2u_0$

$u_1 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 1$

$u_1 = -\frac{1}{12} + 1 \Rightarrow u_1 = \frac{11}{12} \Rightarrow$

$u_0 = \frac{1}{2} \leq u_1 = \frac{11}{12} \leq 3$

محققة نفرض صحة العلاقة $E(n)$

نبرهن على صحة $E(n+1)$

$E(n+1) = u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

$u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

وبما أن f متزايد تماماً على المجال $[0,3]$

$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$

$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

$E(n+1)$ صحيحة و $E(n)$ محققة

3) من الطلب الثاني $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

نجد أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة إلى L نهايتها:

$f(L) = L \Rightarrow -\frac{1}{3}L^2 + 2L = L$

$L^2 - 6L = -3L \Rightarrow L^2 - 6L + 3L = 0$

$L^2 - 3L = 0 \Rightarrow L(L-3) = 0$

إما $L = 0$ مرفوض

أو $L - 3 = 0 \Rightarrow L = 3$ مقبول

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

إذاً المتتالية متقاربة من 3

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين 18:

ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\{-1\}$ وفق

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

1- أثبت أن f متزايد تماماً

2- نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

$u_0 = 2 \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$

a) أثبت أن $1 < u_{n+1} < u_n$

b) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

الحل:

1- f اشتقاقي على $]-1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$

$$f'(x) = \frac{(2)(x+1)-(1)(2x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

إذاً f تابع متزايد تماماً على $]-1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$

2- $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$

a: $1 < u_{n+1} < u_n$

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة $E(0)$

$E(0): 1 < u_1 < u_0 \Rightarrow n=0 \Rightarrow u_1 = \frac{2u_0}{u_0+1}$

$u_1 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{4}{3}}$

$1 < u_1 = \frac{4}{3} < u_0 = 2$

محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$

$E(n+1): 1 < u_{n+2} < u_{n+1}$

$1 < u_{n+1} < u_n$

بما أن f تابع متزايد تماماً على $]-1,+\infty[$

$f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$1 < u_{n+2} < u_{n+1}$

$E(n+1)$ صحيحة ، $E(n)$ محققة

b: نستنتج مما سبق أن المتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فهي متقاربة.

التمرين 19:

احسب نهاية: $S_n = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^n}$

الحل:

لدينا مجموع $n+1$ حداً من متتالية هندسية حدها الأول $a=4$ وأساسها $q=\frac{1}{3}$

ومنه $S_n = \frac{a(1-q^{n+2})}{1-q}$

$$S_n = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

أي: $S_n = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{\frac{2}{3}}$

ومنه: $S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

وبما أن: $-1 < \frac{1}{3} < 1$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S_n = 6(1-0) = 6$$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين 20 :

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل:

لنسمي الخاصة $E(n)$ وهي:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

① لنثبت صحة $E(1)$

$$\left.\begin{array}{l} l_1=1^3=1 \\ l_2=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow l_1=l_2$$

② لنفرض صحة $E(n)$ أي أن:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

مهما كانت $n\geq 1$

③ برهن صحة $E(n+1)$ أي:

$$1^3+2^3+\dots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$E(n+1): 1^3+2^3+\dots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

لنختار الطرف الأول:

$$l_1=1^3+2^3+\dots+(n+1)^3=1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \Rightarrow$$

$$\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=l_2$$

ملاحظة: نعلم أن $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

بتربيع الطرفين $(1+2+3+\dots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

وقد برهنا أن $1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ومنه نستنتج أن

$$1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$$

التمرين 21

أثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n.

1) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

الحل:

لنسمي الخاصة $E(n)$ وهي: $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

① لنثبت صحة $E(0)$: $2^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 7

② لنفرض صحة $E(n)$ أي أن:

$2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 مهما كانت $n\geq 0$

لنثبت صحة $E(n+1)$ أي: $2^{3n+3}-1$ مضاعف للعدد 7

$E(n+1)$: $2^{3n+3}-1$ مضاعف للعدد 7

$$2^{3n+3}-1=2^3\times 2^{3n}-1=8\times 2^{3n}-1=$$

$$8\cdot(2^{3n}-1+1)-1=8\cdot(2^{3n}-1)+7$$

وهو مضاعف للعدد 7

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين 22:

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$

المعرف على $]0,+\infty[$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم خطه البياني ومقارباته.

2- أثبت أنه إذا انتمى n إلى $[\sqrt{5},5]$ فإن $f(x)$ ينتمي $[\sqrt{5},5]$

3- تعرف المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 5 \end{cases}$

باستخدام منصف المربع الأول مثل الحدود الأولى للمتتالية ثم اثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق $\sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$ واستنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$f(x) = \frac{1}{2}\left(n + \frac{5}{n}\right)$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{0+5}{0^+}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$x=0$ مقارب للخط البياني ينطبق على yy'

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

إذا وضعنا $\frac{1}{2}x$ = لا مقارب مائل

$h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$
$= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2}x$

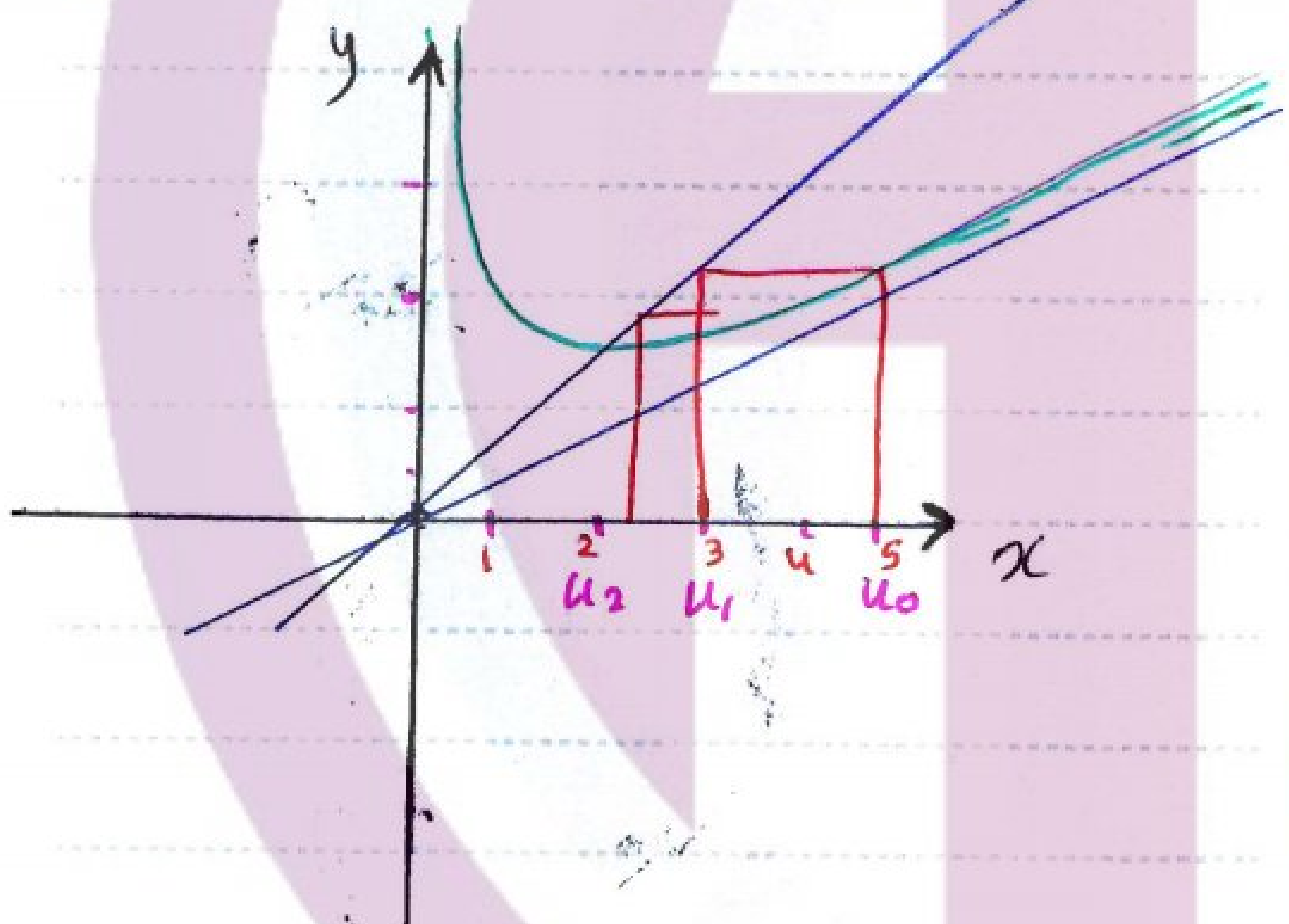
$h(x) = \frac{5}{2x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-5}{x^2}\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5$
$\Rightarrow x = \sqrt{5}$

$f(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$



$f(x)$ مستمر ومتزايد تماماً على $[\sqrt{5},+\infty[$
فهو مستمر ومتزايد تماماً على $[\sqrt{5},5]$

$f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} \Rightarrow f(5) = 3$

$f([\sqrt{5},5]) = [\sqrt{5},3] \subset [\sqrt{5},5]$

ملاحظة: تمثيل حدود متتالية على الرسم

1- نحدد u_0 على محور الفواصل.

2- نسقط من u_0 على C_f ومن C_f إلى $\Delta: y = x$

ومن $\Delta : y = x$ إلى محور الفواصل منظوم u_1

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

الخاصة المطلوبة

$E(n) : \sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$

نثبت صحة $E(0)$ $\sqrt{5} \leq u_1 \leq u_0$

$u_0 = 5 \quad , \quad u_1 = 3$

$\sqrt{5} \leq 3 \leq 5$

محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$\sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$

f متزايد $f(\sqrt{5}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$\sqrt{5} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

و $E(n+1)$ محققة

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي

متقاربة f مستمر نبحث عن نهاية

$f(x) = x$

$\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right) = x$

$\frac{x^2+5}{x} = \frac{2x}{1} \Rightarrow x^2 + 5 = 2x^2$

$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{5}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين 23 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً بالعلاقة :

$u_{n+1}=(u_n-1)^2+1$ $\quad$ $u_0=a$

1- عين قيم العدد الحقيقي a حتى تكون u_n متتالية ثابتة

2- من أجل $a=\frac{3}{2}$ أثبت أن $1<u_n<2$ أياً كان العدد الطبيعي n.

3- أثبت أن u_n متناقصة واستنتج أنها متقاربة ثم جد نهايتها

4- لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة $v_n=\ln(u_n-1)$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، عين أساسها q وحدها الأول v_0

5- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل :

(1) حتى تكون المتتالية ثابتة يجب أن

$u_{n+1}=u_n=u_0$ $\quad$ $n\in N$

$u_0=(u_0-1)^2+1 \Rightarrow u_0=u_0^2-2u_0+1+1 \Rightarrow$

$u_0^2-3u_0+2=0 \Rightarrow \boxed{u_0=a}$

$a^2-3a+2=0 \Rightarrow (a-2)(a-1)=0$

إما $a=2$ أو $a=1$

(2) نرمز للقضية بالرمز $E(n): 1<u_n<2$

نبرهن صحة العلاقة من أجل

$E(0): 1<u_0=\frac{3}{2}<2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من $E(n)$ ونبرهن على صحتها من أجل

$E(n+1): 1<u_{n+1}<2$

$1<u_n<2 \Rightarrow 0<u_n-1<1 \Rightarrow$

$0<(u_n-1)^2<1 \Rightarrow 1<(u_n-1)^2+1<2$

$\Rightarrow 1<u_{n+1}<2$ محققة

$E(n+1)$ صحيحة و $E(n)$ صحيحة $n\in IN$.

(3) حتى تكون المتتالية متناقصة $u_{n+1}\leq u_n$

نرمز للقضية بالرمز $E(n): u_{n+1}\leq u_n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(0)$

$I_1: u_1=(u_0-1)^2+1=\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+1$

$=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4} \Rightarrow u_1=\frac{5}{4}$

$I_2: u_0=\frac{3}{2}$

$u_1\leq u_0$ محققة

نفرض صحة العلاقة من $E(n)$

ونبرهن على صحتها من أجل $E(n+1)$

$u_{n+2}\leq u_{n+1}$

$u_{n+1}\leq u_n$ من الفرض

$u_{n+1}-1\leq u_n-1$

$(u_{n+1}-1)^2\leq(u_n-1)^2$

$(u_{n+1}-1)^2+1\leq(u_n-1)^2+1$

$u_{n+2}\leq u_{n+1}$

نجد أن $E(n+1)$ صحيحة فإن $E(n)$ صحيحة فالمتتالية متناقصة.

وبما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة إلى L.

$f(L)=L \Rightarrow (L-1)^2+1=L \Rightarrow$

$L^2-2L+1+1=L \Rightarrow$

$L^2-3L+2=0 \Rightarrow (L-2)(L-1)=0$

إما $L=1$ مقبول أو $L=2$ مرفوض

$\lim_{n\to+\infty} u_n=1$ فهي متقاربة إلى العدد (1)

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

4) $w_n = \ln(u_n-1)$

$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln((u_n-1)^2+1-1)$

$= \ln((u_n-1)^2) = 2\ln(u_n-1)$

$w_{n+1} = 2w_n \Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = 2 = q$

إذاً المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q=2$

$w_0 = \ln(u_0-1) = \ln(\frac{3}{2}-1) = \ln(\frac{1}{2})$

$w_0 = -\ln 2$

5) $w_n = w_0 \cdot q^n \Rightarrow w_n = (-\ln 2)(2)^n \Rightarrow$

$w_n = \ln(u_n-1) \Rightarrow e^{w_n} = u_n-1$

$u_n = e^{w_n}+1 \Rightarrow u_n = \boxed{e^{(-\ln 2)2^n}+1}$

التمرين 24: دورة 2023

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_{n+1} = 3+\sqrt{u_n-1}$ ، $u_0=2$

المطلوب:

1- أثبت أن $2\leq u_n\leq5$ أياً كان $n\geq0$

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً واستنتج تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

1- لتكن القضية $E(n): 2\leq u_n\leq5$

القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $u_0=2 \Rightarrow 2\leq u_n\leq5$

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2\leq u_n\leq5$

ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2\leq u_{n+1}\leq5$

$2\leq u_n\leq5 \Rightarrow 2-1\leq u_n-1\leq5-1$

$\Rightarrow 1\leq u_n-1\leq4 \Rightarrow$

$1\leq\sqrt{u_n-1}\leq2 \Rightarrow$

$3+1\leq3+\sqrt{u_n-1}\leq3+2 \Rightarrow$

$4\leq3+\sqrt{u_n-1}\leq5 \Rightarrow$

$\boxed{2\leq u_{n+1}\leq5}$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن $2\leq u_n\leq5$ مهما كان العدد الطبيعي n

2- لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً نبرهن صحة القضية $E(n): u_n<u_{n+1}$ مهما كان العدد الطبيعي n

من أجل $n=0$ لدينا

$u_0=2,\ u_1=3\sqrt{u_0-1}=3+\sqrt{2-1}=3+\sqrt{1}=$
$3+1=4 \Rightarrow u_0<u_1$

أي أن القضية $E(0)$ محققة.

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $u_n<u_{n+1}$ ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $u_{n+1}<u_{n+2}$

$u_n<u_{n+1}\Rightarrow u_n-1<u_{n+1}-1\Rightarrow$

$\sqrt{u_n-1}<\sqrt{u_{n+1}-1}\Rightarrow$

$3+\sqrt{u_n-1}<3+\sqrt{u_{n+1}-1}\Rightarrow$

$u_{n+1}<u_{n+2}$

أي أن القضية $E(n+1)$ محققة ومنه $u_n<u_{n+1}$ مهما كان العدد الطبيعي n أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

وبما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (5) فهي متقاربة من العدد l حيث $l\leq5$

وحدها البدء $u_0=2$ بالتالي $2\leq l\leq5$

بما أن التابع $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ مستمر على المجال $[1,\infty[$ فهو مستمر عند l حيث l هو حل المعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x \Rightarrow 3+\sqrt{x-1}=x \Rightarrow$

$\sqrt{x-1}=x-3 \Rightarrow x^2-6x+9=x-1$

$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ مرفوض

بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$

طريقة ثانية لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً نبرهن صحة القضية $E(n):\ u_{n+1}-u_n>0$ مهما كان العدد الطبيعي n من أجل $n=0$ لدينا

$u_0=2,\ u_1=3+\sqrt{u_0-1}=3+\sqrt{2-1}=3+\sqrt{1}$

$=3+1=4 \Rightarrow u_1-u_0>0$

أي أن القضية $E(0)$ محققة.

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $u_{n+1}-u_n>0$

ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $u_{n+2}-u_{n+1}>0$

$u_{n+2}-u_{n+1}=3+\sqrt{u_{n+1}-1}-(3+\sqrt{u_n-1})=$

$\sqrt{u_{n+1}-1}-\sqrt{u_n-1}=$

$\frac{(\sqrt{u_{n+1}-1}-\sqrt{u_n-1})(\sqrt{u_{n+1}-1}+\sqrt{u_n-1})}{(\sqrt{u_{n+1}-1}+\sqrt{u_n-1})}=$

$\frac{u_{n+1}-u_n}{(\sqrt{u_{n+1}-1}+\sqrt{u_n-1})}>0 \Rightarrow$

$u_{n+2}-u_{n+1}>0$

أي أن القضية $E(n+1)$ محققة ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ مهما كان العدد الطبيعي n أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

التمرين 25:

$u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\dots+\frac{n}{n^2+n}$

1- أثبت أن $\frac{n^2}{n^2+n}\leq u_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$

2- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج تقاربها.

الحل:

نلاحظ أن u_n هو مجموع n حداً أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ وأكبرها $\frac{n}{n^2+1}$

$u_n\leq n\times\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}$

$u_n\geq n\times\frac{n}{n^2+n}=\frac{n^2}{n^2+n}$

$\Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n}\leq u_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$

بما أنّ
$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1\end{cases}\qquad \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$$

حسب مبرهنة الإحاطة وهي متقاربة

تمرين 26: (التمرين دورة)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق

$$S_n = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$

1- احسب كلاً من S_1 و S_2 و S_3

2- ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

3- أثبت أنه أياً كان $n\geq 1$ فإن: $S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل:

1-

$S_1 = 1^3 = 1$

$S_2 = 1^3+2^3 = 1+8 = 9$

$S_3 = 1^3+2^3+3^3 = 1+8+27 = 36$

2-

$S_{n+1} = 1^3+2^3+3^3+\dots+(n+1)^3$

$S_{n+1}-S_n = (n+1)^3 > 0$

متزايدة تماماً

3 $E(n):\ S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

من أجل $n=1$

$L_1 = S_1 = 1$

$L_2 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

محققة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل n لنثبت صحتها من أجل $(n+1)$

$S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$L_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$

$= \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$S_{n+1} = \dfrac{n^2+(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = L_2$

$E(n+1)$ محققة فإن $E(n)$ محققة

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

التمرين 27:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \quad \text{و} \quad u_0=0$$

1- نعرف المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ وفق $x_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ وأثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

2- جد x_n بدلالة n واحسب نهايتها.

3 اكتب u_n بدلالة n واستنتج $u_n=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$ وجد نهايتها

الحل:

1-

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2}+1} =$$

$$\frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+1} = \frac{u_n-1}{3u_n+3} =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{1}{3}x_n$$

بالتالي المتتالية x_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول

$$x_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = -1$$

2_ حدها العام $x_n = x_0 \cdot q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$

بما أن $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

3_ من العلاقة $x_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ نجد

$x_n(u_n+1) = u_n - 1$ أي $x_n u_n - u_n = -x_n - 1$

وبالتالي: $u_n = \frac{-x_n - 1}{x_n - 1}$

$$u_n = \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{-\frac{1}{3^n} - 1} = \frac{\frac{1-3^n}{3^n}}{\frac{-1-3^n}{3^n}} = \frac{1-3^n}{-1-3^n} = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} u_n = \lim_{x\to\infty} \frac{-x_n - 1}{x_n - 1} = 1$$

بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

التمرين 28:
$$\begin{cases} u_0 = -1 \quad u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$$

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق العلاقة التراجعية:

1_ لنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

2_ لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ بملاحظة أن $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} u_n$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 2$ ثم اكتب عبارة w_n بدلالة n

3_ استنتج أن عبارة u_n بدلالة n هي $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

4_ المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ أثبت بالتدريج أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}$ $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

الحل:

1_ $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n} = \frac{\frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n}{u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n\right)}{u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n} = \frac{1}{2}$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول: $v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1$

ومنه $v_n = v_0 q^n$ ، $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

2_ $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{v_n + \frac{1}{2} u_n}{\frac{1}{2} v_n} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{2v_n + u_n - u_n}{v_n} = 2$$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r=2$

ومنه $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

$w_n = w_0 + rn = -1+2n$

3- لدينا $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ ومنه $u_n = v_n \times w_n$

بالتالي: $u_n = \frac{1}{2^n} \times (-1+2n) = \frac{2n-1}{2^n}$

لدراسة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n-1}{2^n} = \frac{2n+1-4n+2}{2^{n+1}}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2n+3}{2^{n+1}}$

نلاحظ أن إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-2n+3$ فندرس إشارة المقدار $-2x+3$ فنعدمه حيث نلاحظ أن $-2x+3=0$ عندما $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x+3$	+	0	−

نلاحظ أنه عندما $n \geq 2$ يكون $-2n+3 < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 2$

4) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الخاصة المطلوب اثباتها هي:

$E(n): S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

ونريد إثبات صحة الخاصة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة.

لأن $S_0 = u_0 = -1 = 2 - \frac{0+3}{1} = -1$ محققة

(II) لنفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$E(n+1): S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$

ومنه بالتالي $S_{n+1} = 2 + \frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}}$

$S_{n+1} = 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$ فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

التمرين 29:

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$v_n = u_n + 6$

1- أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية عين أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

2- نعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$w_n = \ln(v_n)$

أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية واحسب w_0 ثم احسب المجموع $S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

الحل:

$v_n = u_n + 6 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 6$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n+6)}{u_n+6} = \frac{1}{2} = q$

إذاً v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$v_0 = ?$ $\quad v_0 = u_0 + 6 \Rightarrow v_0 = 2 + 6$

$\Rightarrow v_0 = 8 \Rightarrow v_n = v_0 \cdot q^{n-0} \Rightarrow$

$v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

$w_{n+1} = w_n \Rightarrow$

$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$

$w_{n+1} - w_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = r$

إذاً المتتالية حسابية أساسها

$r = -\ln(2)$

$w_0 = ?$ $\quad w_0 = \ln(v_0)$

$w_0 = \ln 8 = \ln(2)^3 = 3\ln(2)$

$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$

$a = w_0 = 3\ln(2)$

$l = w_5 = ? \Rightarrow w_5 = \ln(v_5)$

$w_5 = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$

$w_5 = \ln\left(8\left(\frac{1}{32}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$

$-\ln(2)^2 = -2\ln(2)$

عدد الحدود $n = \frac{5-0}{1} + 1 = 6$

$S = \frac{a+l}{2} \cdot n$

$S = \frac{3\ln 2 - 2\ln 2}{2} \cdot 6^{3}$

$S = 3\ln 2$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954