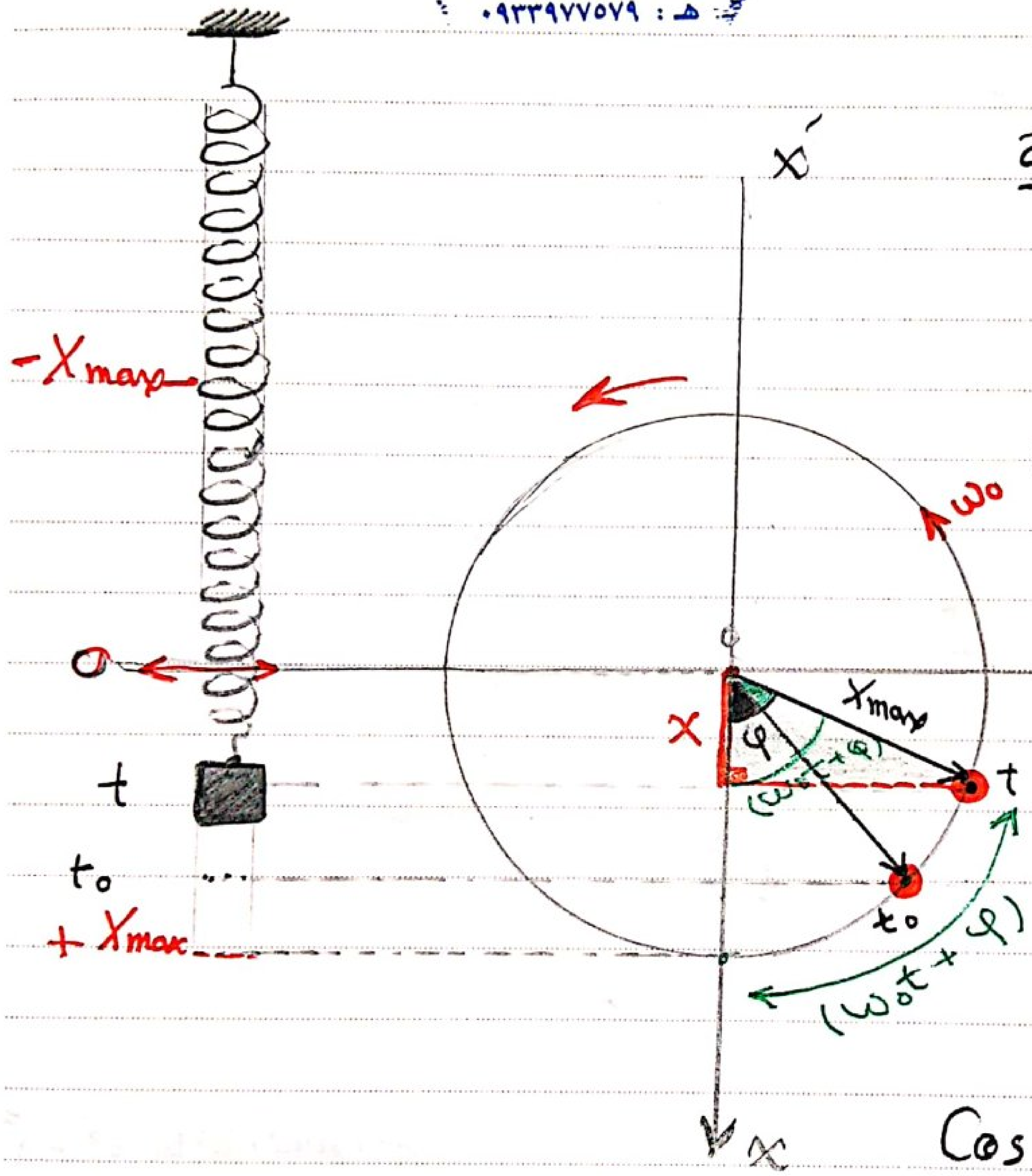
العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة

« تمثيل فرينل »

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
ه : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

يمثل شعاع فرينل $\overrightarrow{OM}$.



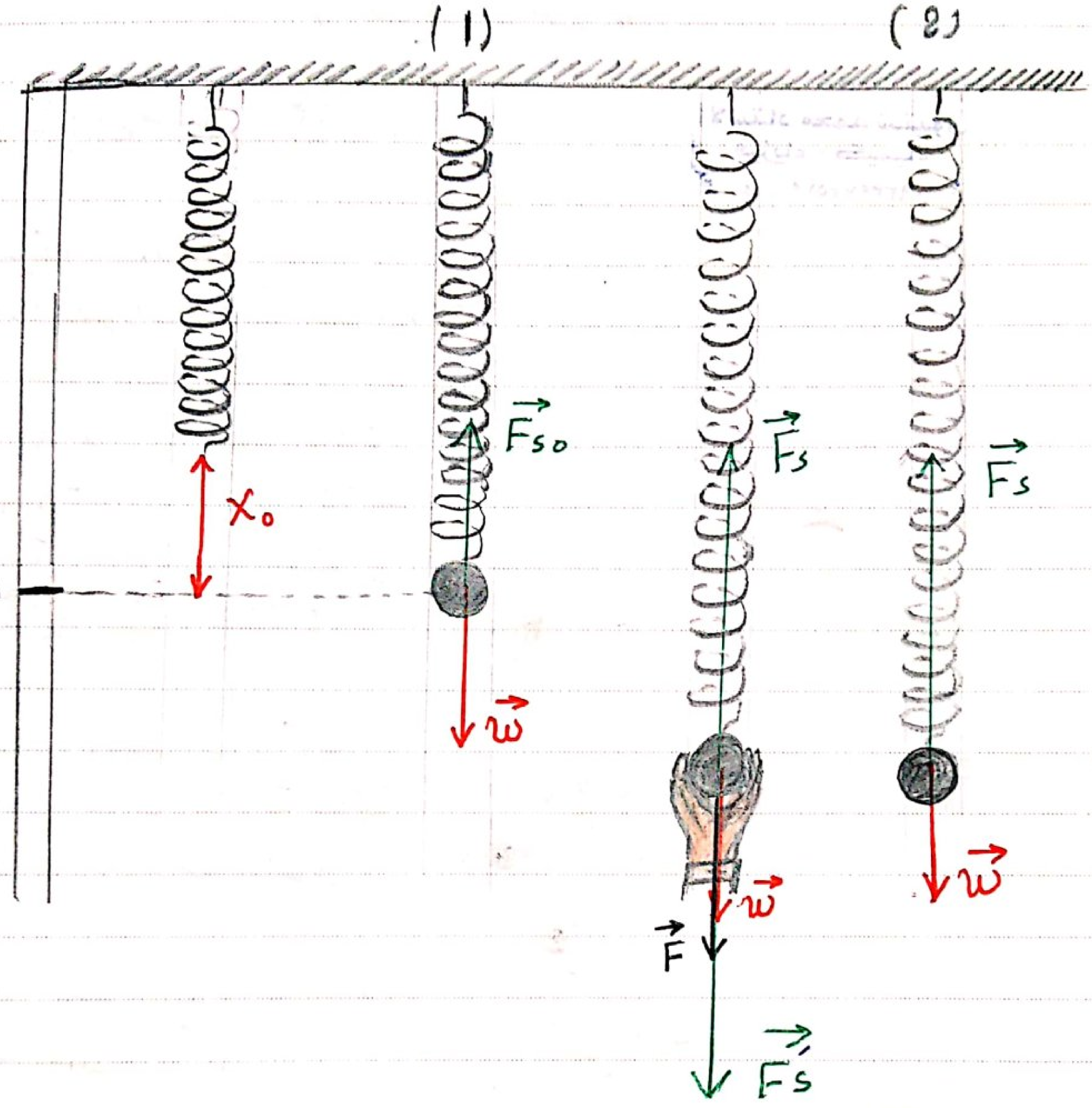
- طويلته X_{max}
- φ: الطور الابتدائي هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة $t=0$
- طور الحركة هو $(\omega_0 t+\varphi)$ الزاوية الكائنة بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة t
- ω_0 النبض الخاص للحركة يقابل السرعة الزاوية الثابتة الذي يدور بها الشعاع
- x هو مسقط الشعاع على المحور $\overrightarrow{x'x}$

$$\cos(\omega_0 t+\varphi) = \frac{x}{X_{max}}$$

$$x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t+\varphi)$$

التابع الزمني للحركة وهو تابع جيبي لذلك تسمى الحركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة

س) برهن أن محصلة القوى المؤثرة على الجسم المهتز في النواس المرن هي قوة إرجاع من الشكل $F = -KX$



أ- في حالة السكون :

القوى المؤثرة في الجسم :

$\vec{w}$: ثقل الجسم $\vec{F}_{s0}$ قوة توتر النابض .

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{s0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه للأسفل .

$$w - F_{s0} = 0 \Rightarrow w = F_{s0}$$

$$F_{s0} = F'_{s0} = K X_0 \Rightarrow w = K X_0 \quad \text{---- (1)}$$

ج- حالة الحركة

نزيح الجسم شاقولياً نحو الأسفل مسافة x ونتركه دون سرعة البدائية.

القوى المؤثرة على الجسم: $\vec{w}$ قوة ثقل الجسم

$\vec{F_s}$ قوة توتر النابض

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F_s} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه للأسفل:

$$w - F_s = m.a \quad ----- (2)$$

ولكن:

$$F_s = F_s' = k(x + x_0) \quad ---- (3)$$

نعوض (1) و (3) في (2) نجد:

$$k x_0 - k(x + x_0) = m.a$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$k x_0 - k x - k x_0 = m.a$$

$$m.a = -kx$$

$$\Rightarrow F = -kX$$

الاستطالة (المطال) (m)

قوة الإرجاع

ثابت صلابة النابض $(N.m^{-1})$

نستنتج أن قوة الإرجاع تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة

ومحصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هو قوة إرجاع لأنها تعيد الجسم الى مركز الاهتزاز.

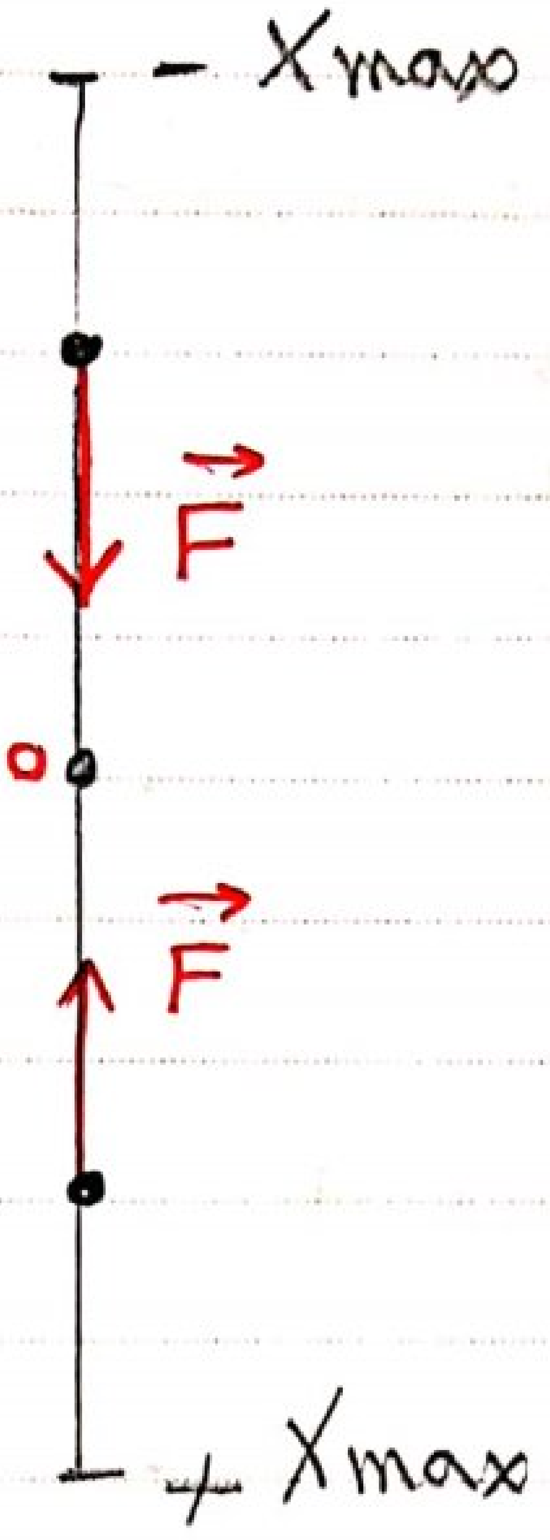
ملاحظة:

لحساب قوة الإرجاع نكتب.

$$F = -Kx$$

أما إذا طلب منا حساب شدة قوة الإرجاع نحسب $F = -Kx$ ونأخذ الجواب بالقيمة المطلقة.

ووحدتها (N).



المعادلة التفاضلية

س: إن محصلة القوى الخارجية التي يخضع لها مركز عطالة الجسم هي $F = -Kx$. برهن أن طبيعة حركة النواس المرن هي جيبية انسحابية توافقية بسيطة.

$$F = -Kx$$

$$m \cdot a = -Kx \Rightarrow m \cdot (x)''_t = -Kx$$

$$(x)''_t = -\frac{k}{m} \cdot x \quad \text{-----} \quad (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)'_t = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{x}$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \cdot x \quad \text{-----} \quad (2)$$

بمطابقة (1) مع (2) نجد

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن K و m موجبات ⇐
أن حركة النواس المرن هي جيبية انسحابية . (توافقية بسيطة)

س1: استنتج علاقة الدور الخاص T_0 للنواس المرن

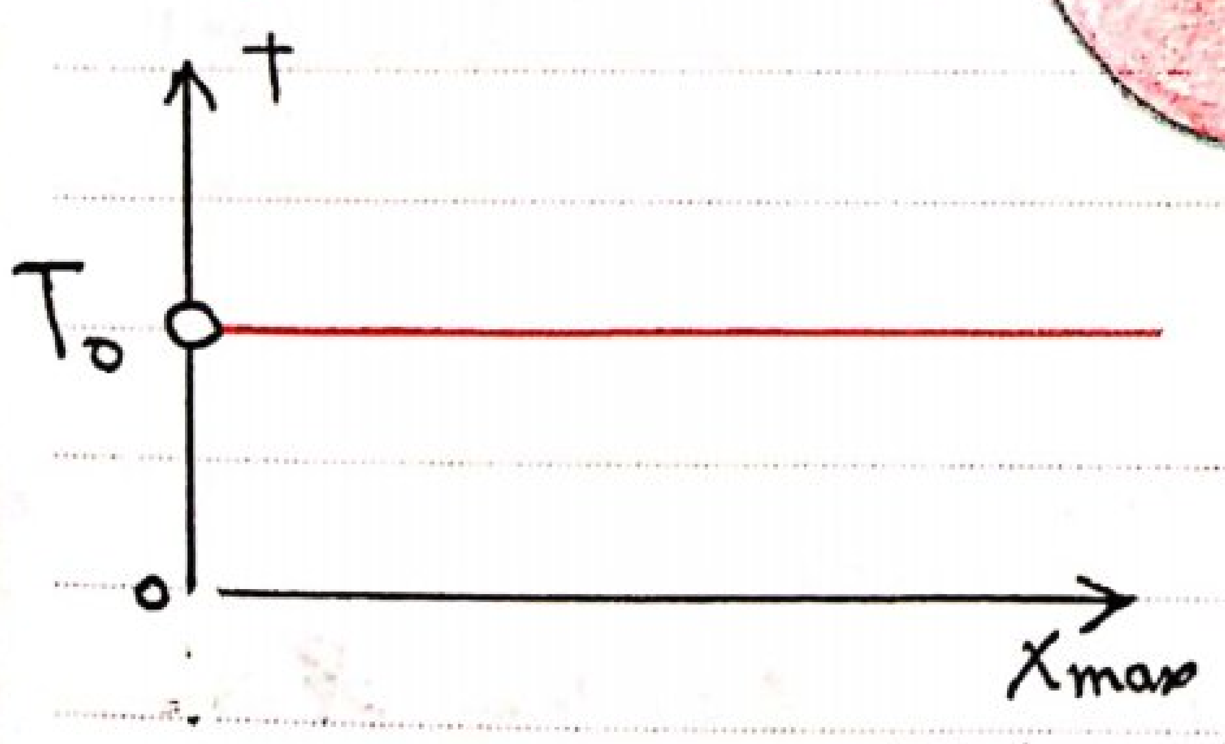
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad ، \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

T_0 ← الدور الخاص (s)
m ← كتلة الجسم المهتز (kg)
K ← ثابت صلابة النابض ($N.m^{-1}$)



نستنتج أن T_0

أ- لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}

ب- يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m (kg)

ج- يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض K ($N.m^{-1}$)

توابع حركة النواس المرن :

1 : تابع المطال :

الشكل العام للتابع الزمني للمطال : $X = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ما شكل هذا التابع بفرض $t = 0$ $x = +X_{max}$

نعوض في الشكل العام

$$X_{max} = X_{max} . \cos(0 + \varphi) \Rightarrow X_{max} = X_{max} . \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 rad.$$

ويكون شكل التابع مختزلاً .

$$X = X_{max} . \cos\omega_0 t .$$

نعوض $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$X = X_{max} . \cos\frac{2\pi}{T_0} . t .$$

أكمل الجدول الآتي :

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

* عندما $t = 0$ $x = X_{max} . \cos\frac{2\pi}{T_0}(0) \Rightarrow X = X_{max} \cos(0)$

$$X = +X_{max}$$

* $t = \frac{T_0}{4}$ $X = X_{max} . \cos\frac{2\pi}{T_0} . \frac{T_0}{4} \Rightarrow X = X_{max} . \cos\frac{\pi}{2}$

$$X = X_{max} (0)$$

$$X = 0$$

$$X = X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2} \qquad \Leftarrow t = \frac{T_0}{2} \quad *$$

$$X = X_{max} \cdot \cos \pi \Rightarrow X = X_{max}(-1) \Rightarrow X = -X_{max}$$

$$X = X_{max} \cdot \cos \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{4} \qquad \Leftarrow t = \frac{3T_0}{4} \quad *$$

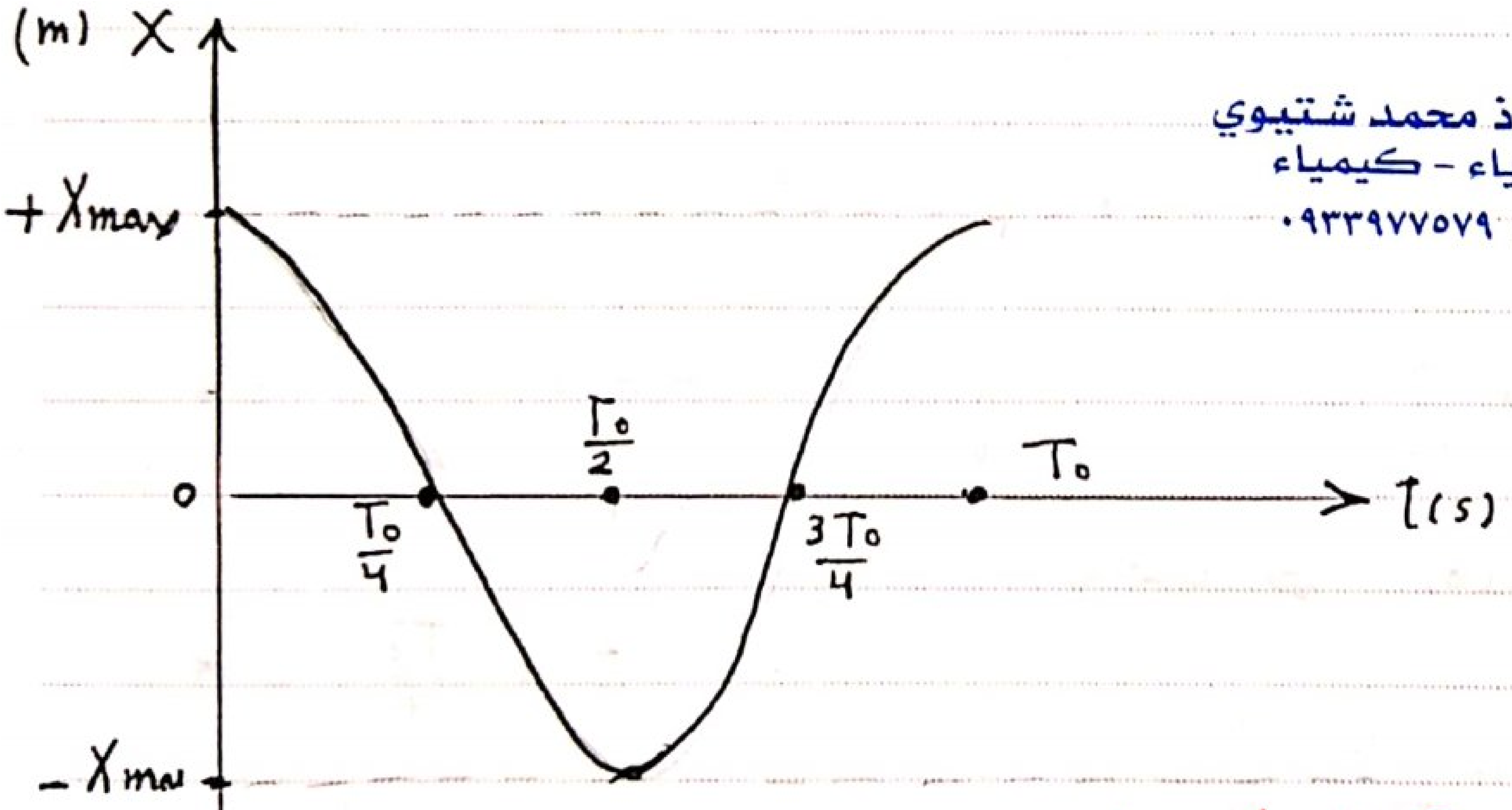
$$X = X_{max} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} \Rightarrow X = X_{max}(0) \Rightarrow X = 0$$

$$t = T_0 \quad *$$

$$X = X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_0 \Rightarrow X = X_{max} \cdot \cos 2\pi$$

$$X = X_{max}(+1) \Rightarrow X = +X_{max}$$

١ـ ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور



2ـ حدد المواضع التي يأخذ فيها المطال

a ـ قيمة عظمى طويلة.

تكون المواضع التي يأخذ فيها المطال قيمة عظمى طويلة $X = |\pm X_{max}|$

b ـ قيمة معدومة.

تكون قيمة المطال معدومة $X = 0$ في مركز الاهتزاز.

② : تابع السرعة :

س : انطلاقاً من علاقة تابع المطال في النواس المرن .

$$x = X_{max} \cdot \cos \omega_0 t$$

1 - استنتج علاقة تابع السرعة :

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin \omega_0 t .$$

نعوض : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$v = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} . t .$$

2 - اكمل الجدول الآتي :

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$3\frac{T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

* : $t = 0$

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} \cdot (0)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(0) \Rightarrow v = 0$$

* $t = \frac{T_0}{4}$:

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4}$$

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} .$$

* $t = \frac{T_0}{2}$

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} (-1)$$

$$v = +\omega_0 X_{max} .$$

* $t = \frac{3T_0}{2}$

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{2}$$

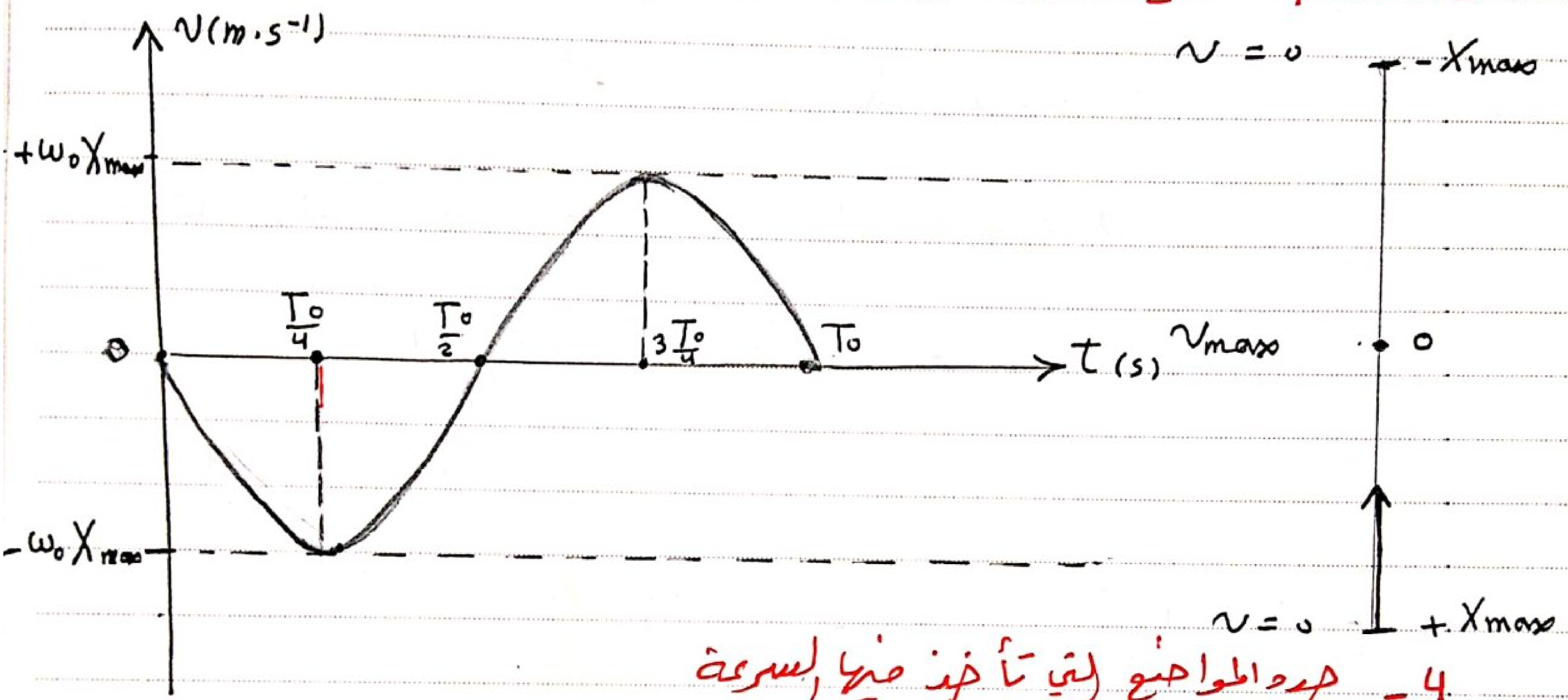
$$v = -\omega_0 X_{max} \sin \frac{3\pi}{2} = \cancel{+} \omega_0 X_{max}$$

$t = T_0$ *

$$v = -\omega_0 X_{max} . \sin \frac{2\pi}{T_0} . T_0$$

$$v = -\omega_0 X_{max} . \sin(\pi) \Rightarrow v = 0$$

3 ـ ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور .



4 ـ حدد المواضع التي تأخذ فيها السرعة

a . قيمة عظمى (طويلة). لحظة المرور في مركز الاهتزاز $X = 0$

$$v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}|$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

b . قيمة السرعة معدومة. لحظة المرور في المطالين الأعظمين (الموضعين الطرفيين).

$$X = \pm X_{max}$$

3 : تابع التسارع .

س- انطلاقا من علاقة تابع السرعة في النواس المرن

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin \omega_0 t$$

1-1 استنتج علاقة تابع التسارع :

$$(\bar{a}) = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$$

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{X_{max} \cdot \cos \omega_0 t}$$

تابع التسارع بدلالة المطال . $a = -\omega_0^2 \cdot x$.

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot t$$

2-1 أكمل الجدول الآتي -

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$+\omega_0^2 \cdot X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$

• $t = 0$

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos(0) \Rightarrow a = -\omega_0^2 \cdot X_{max}$$

• $t = \frac{T_0}{4}$

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

• $t = \frac{T_0}{2}$.

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2} = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \pi$$

$$\Rightarrow a = +\omega_0^2 \cdot X_{max} .$$

• $t = \frac{3T_0}{4}$.

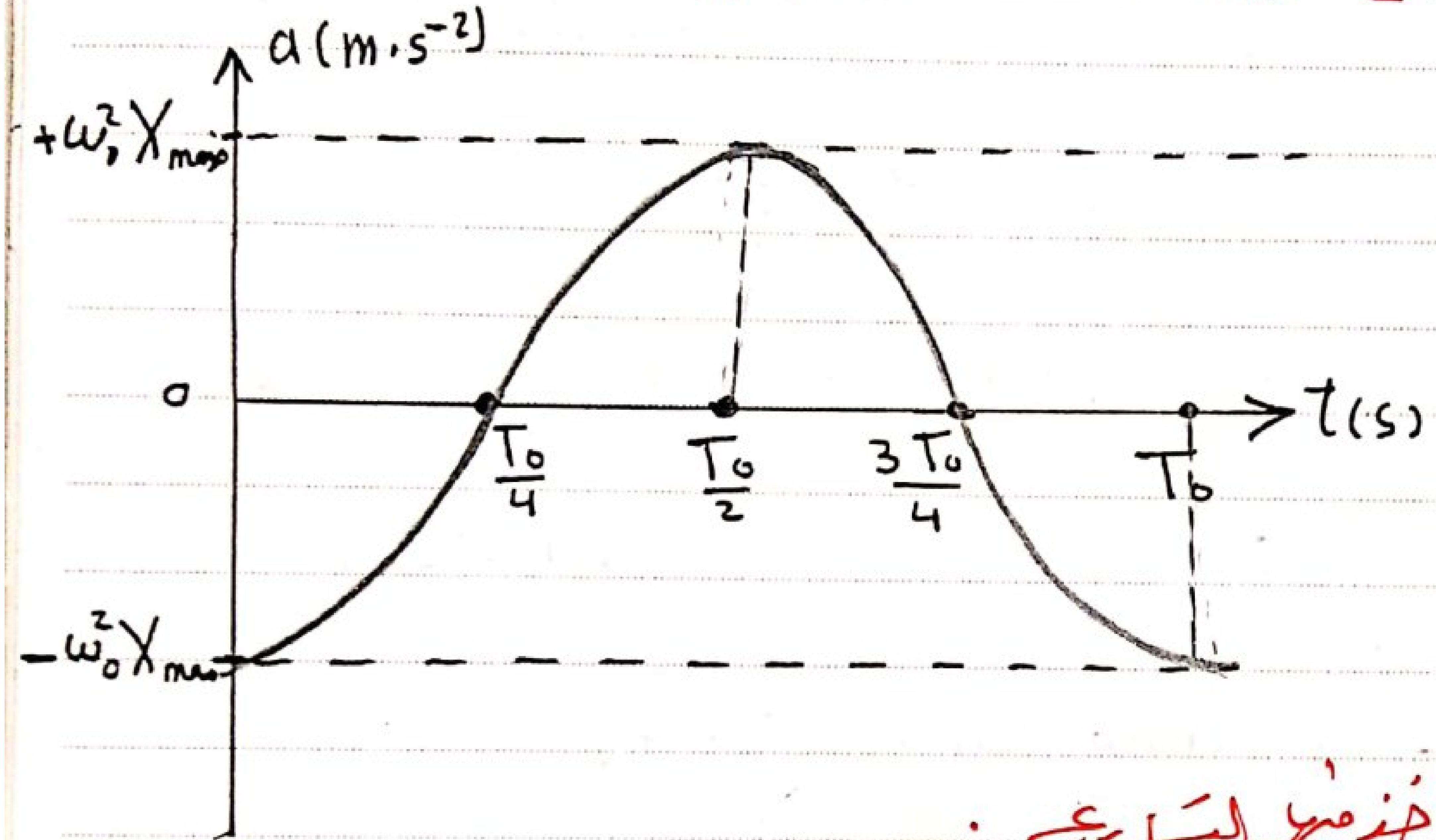
$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{4} = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$t = T_0$ •

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_0 = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos 2\pi$$

$$a = -\omega_0^2 \cdot X_{max}$$

3 - أرسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور.



الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

4 - حدد المواضع التي يأخذ فيها التسارع.

a. قيمة عظمى طويلة.

عندما يكون الجسم في الوضعين الطرفين $X = \pm X_{max}$

$$a_{max} = |\pm \omega_0^2 X_{max}|$$

b. قيمة معدومة.

عندما يكون الجسم في مركز الاهتزاز $X = 0$

$a = 0$

ملاحظة:

التسارع غير ثابت تتغير قيمته بتغير المطال

* الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة :

ا ستنتج علاقة الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة .

$$E_{tot} = E_p + E_k \quad ---- (1)$$

طاقة كامنة مرونية . $E_p = \frac{1}{2} K x^2$

$$x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot X_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad ---- (2)$$

الطاقة الحركية $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$$v = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \cdot X_{max}^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \omega_0^2 \cdot m$$

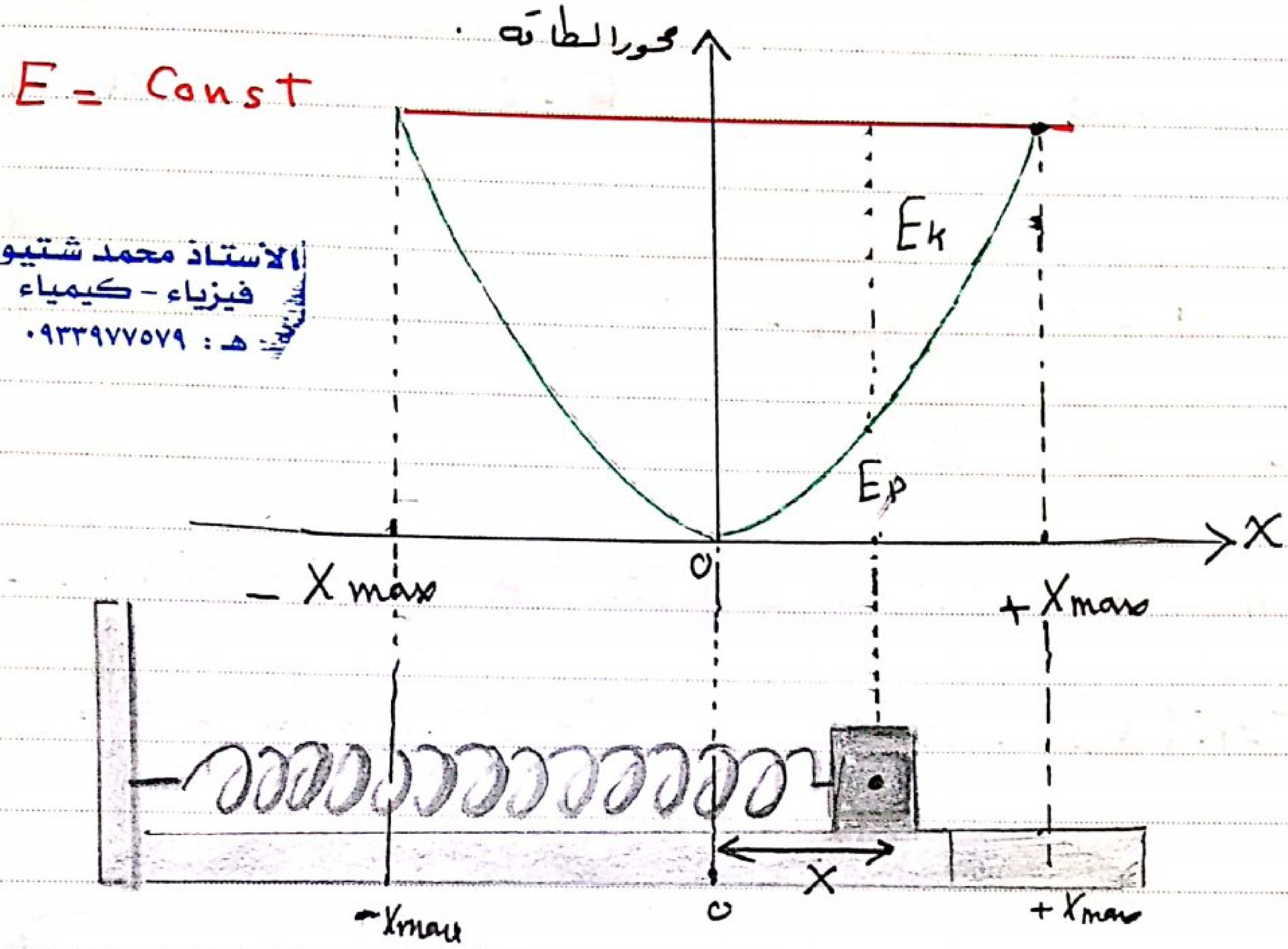
$$E_k = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad ---- (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1)

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

$$\boxed{E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 = Const}$$



الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

• في الوضعين الطرفين تكون الطاقة على شكل الطاقة الكامنة المرونية

$$E = E_p$$

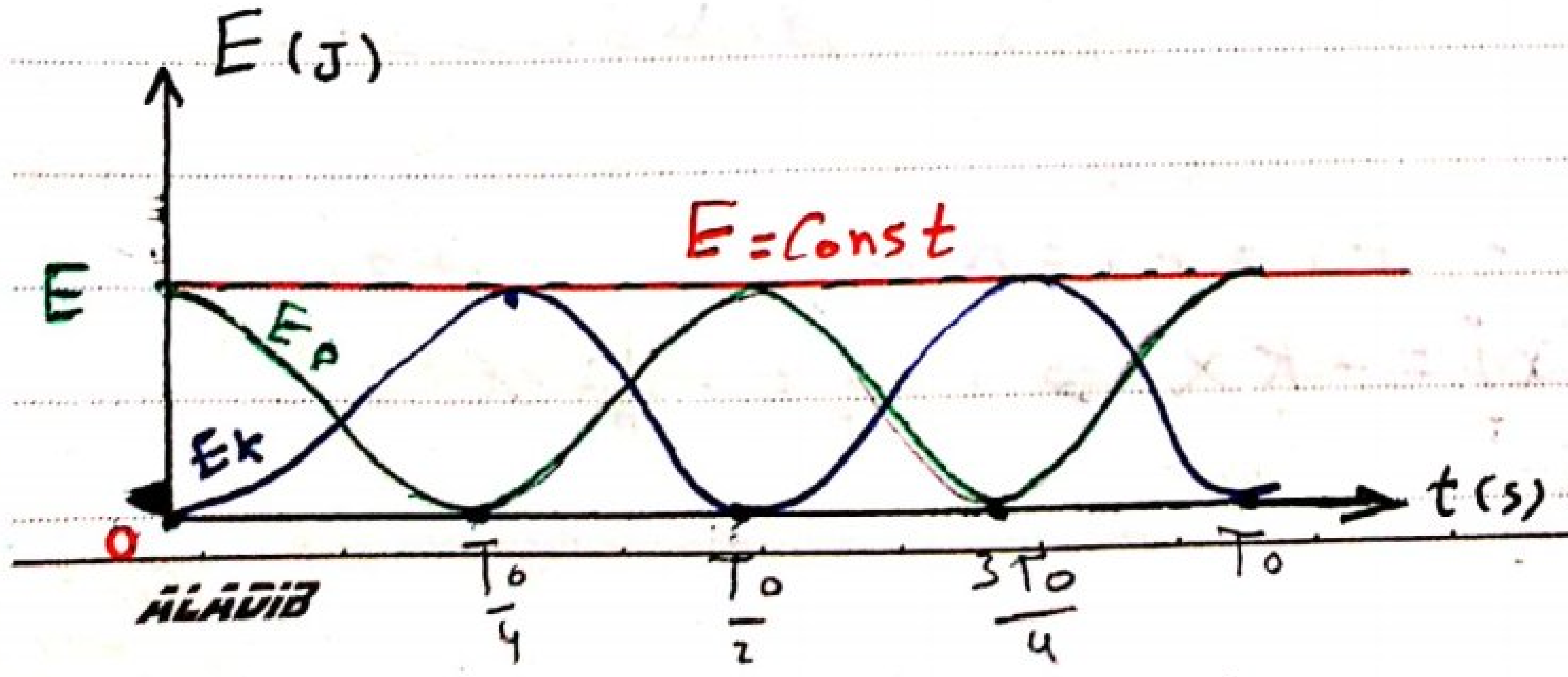
وتنعدم الطاقة الحركية لأن $v = 0$

• في المركز للاهتزاز . تكون الطاقة الكلية على شكل طاقة حركية

$$E = E_k$$

وتنعدم الطاقة الكامنة المرونية $E_p = 0 \Leftarrow x = 0$

• ارسم الخط البياني لتغيرات الطاقة الكامنة والحركية خلال دور لجسم يهتز ومعتمداً معادلة المطال $x = X_{max} \cdot \cos \omega t$ خلال دور



$$\overline{X} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi}) \quad , \quad \overline{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$\overline{a} = -\omega_0^2 \, \overline{X}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\overline{F} = -k \overline{X}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k X^2 \quad , \quad E = \frac{1}{2} k X_{max}^2$$

$$E_k = E - E_p$$

الأسئلة والتدريبات:

أولاً.

1- a   2- C   3- d.

ثانياً.

①

$$\upsilon = \omega_0 \cdot \sqrt{X_{max}^2 - X^2}$$

$$E_k = E - E_p$$

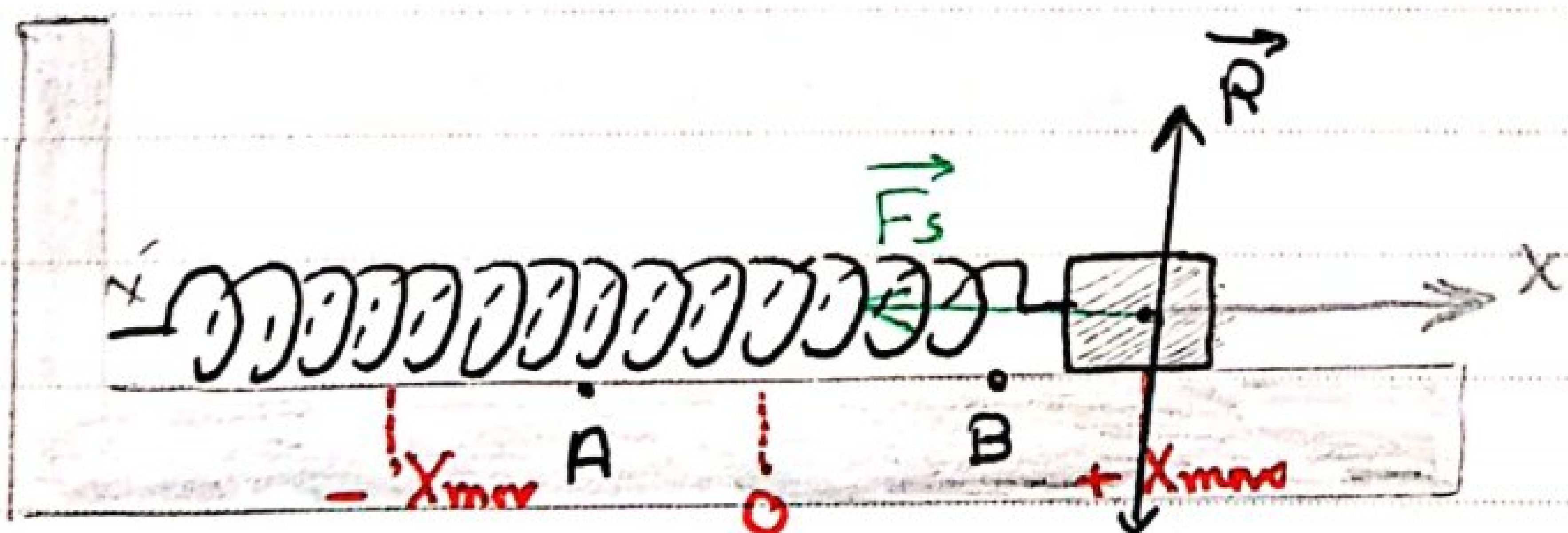
$$\frac{1}{2} m \upsilon^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 - \frac{1}{2} k X^2 \Rightarrow m \upsilon^2 = k X_{max}^2 - k X^2$$

$$m \upsilon^2 = k (X_{max}^2 - X^2) \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{k}{m} \cdot (X_{max}^2 - X^2)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\upsilon^2 = \omega_0^2 (X_{max}^2 - X^2) \Rightarrow \boxed{\upsilon = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - X^2}}$$

②



ⓐ . القوى المؤثرة

$\vec{W}$ ثقل الجسم

$\vec{R}$ رد الفعل

$\vec{F_s}$ قوة توتر النابض

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالاسقاط على محور $\overrightarrow{x'x}$

$$0 + 0 - F_s = m \cdot a$$

ولكن $F_s = F_s' = k X$ ، F_s' : هي القوة التي سببت الاستطالة x

$$-kX = m \cdot a \Rightarrow m (x)''_t = -k x \Rightarrow (x)''_t = -\frac{k}{m} \cdot X$$

$$(x)''_t = -\frac{K}{m} \cdot x \quad ---- ①$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل :

$$(\bar{x})'_t = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \cdot X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \cdot \bar{x} \quad ---- ②$$

بمقارنة ① و ②

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$ محقق لأن K ، m موجبان .

حركة الجسم جيبية انسحابية وتابع مطالها : $x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ط) استنتاج علاقة الطاقة الحركية بدلالة X_{max} .

$$E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2} K X_{max}^2 - \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} K (X_{max}^2 - x^2)$$

$$\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

$$E_{k_A} = \frac{1}{2} K \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} K X_{max}^2\right] = \frac{3}{4} E_{tot}.$$

$$\bar{x}_B = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$E_{k_B} = \frac{1}{2} K \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} K X_{max}^2\right] = \frac{1}{2} E_{tot}$$

النتيجة . تنقص الطاقة الحركية للجسم بازدياد مطاله وبالتالي تزداد الطاقة الكامنة .

3- لحظة الانفصال يخضع الجسم لقوة ثقله :

$$\vec{W} = m \cdot \vec{g} \qquad \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{Const}.$$

a- قذف شاقولي للأعلى لأن الجسم يمتلك سرعة ابتدائية تكون حركته مستقيمة متغيرة بانتظام متباطئة في الطور الأول ، وفي الطور الثاني . سقوط حر : متسارعة بانتظام

b- سقوط حر : لأن الجسم حركته محدودة في $+X_{max}$ والحركة مستقيمة متسارعة .

ثالثاً : حل المسائل .

المسألة الأولى :

$$K = 10\ N \cdot m^{-1}, \qquad \bar{x} = 0.1 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

1- بالمطابقة نجد :

$$X_{max} = 0.1\,m, \quad \omega_0 = \pi\ rad \cdot s^{-1}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} rad.$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s,$$

2- حساب الكتلة :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10} = 1\,Kg$$

3-

$$v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2} \Rightarrow v = \pi \sqrt{10^{-2} - 25\times10^{-4}}$$

$$v = \pi \sqrt{100\times10^{-4} - 25\times10^{-4}} = \pi \sqrt{(100-25)\times10^{-4}} = \pi\sqrt{75\times10^{-4}}$$

$$v = \pi\sqrt{25\times 3 \times 10^{-2}} = \pm 5\pi\sqrt{3}\times 10^{-2}\, m.s^{-1}$$

$v = 5\pi.\sqrt{3}\times 10^{-2} m.s^{-1}$ بالاتجاه الموجب

④ $t = 0$

$$\Rightarrow x = 0.1 \cos(\pi(0) + \frac{\pi}{2}) = 0.1 \cos\frac{\pi}{2} = 0.1\times 0 = 0$$

في مركز الاهتزاز.

المسألة الثانية:

$m = 0.4\, kg$ ، $E_{tot} = 5\times 10^{-2} (J)$ ، $X_{max} = 10\times 10^{-2} = 10^{-1} m.$

① حساب K:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \Rightarrow K = \frac{2E_{tot}}{X_{max}^2} = \frac{2\times 5\times 10^{-2}}{(10^{-1})^2} = 10\, N.m^{-1}$$

② .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\times 10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{4\times 10^{-2}} = 4\pi.10^{-1} s$$
$$= 0.4\pi\, s$$

③ عندالمرور في مركز الاهتزاز تكون $v = v_{max}$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.4\pi} = 5\, rad.s^{-1}$$
$$v = \pm\omega_0 X_{max} = \pm 5.10^{-1} = \pm 0.5\, m.s^{-1}.$$

أو: عند مركز الاهتزاز $x = 0 \Rightarrow E_p = 0$

$$E_{tot} = E_k \Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 0.05}{0.4}} = \sqrt{\frac{0.1}{0.4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5\, m.s^{-1}.$$

المسألة الثالثة

$m = 1\,kg$ ، $\left(n = 10 \quad t = 8s \quad T_0 = \frac{t}{n} = \frac{8}{10} = 0.8\,s. \right)$ $T_0 = \frac{4}{5}s$

$2X_{max} = 24 \times 10^{-2}\,m \Rightarrow X_{max} = 12 \times 10^{-2}\,m.$

1) في حالة السكون:

القوى المؤثرة على الجسم $\vec{w}$ ثقل الجسم

$\vec{F}_{s_0}$: قوة توتر النابض

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي نحو الأسفل.

$$w - F_{s_0} = 0 \Rightarrow w = F_{s_0}$$

ولكن $F_{s_0} = F'_{s_0} = K x_0$

$$\Rightarrow w = K x_0 \Rightarrow m \cdot g = K x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{m \cdot g}{K} = \frac{1 \times 10}{K}$$

طلب K: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}\,rad \cdot s^{-1}$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \omega_0^2 \cdot m = \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{25\pi^2}{4} = \frac{250}{4}$$

$$K = 62.5\,N \cdot m^{-1}$$

$$X_0 = \frac{1 \times 10}{62.5} = \frac{10}{62.5} = 0.16\,m.$$

② حساب شدة السرعة العظمى طويلة

$$v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}| = |\pm 5\frac{\pi}{2} \times 12\times 10^{-2}| = 3\pi \times 10^{-1} = 0.3\pi\, m.s^{-1}$$

③ $x = 10\times 10^{-2} = 10^{-1} m$

$$a = -\omega_0^2 . x = -(\frac{5\pi}{2})^2 \times 10^{-1} = -\frac{250}{4}\times 10^{-1} = -6.25 m.s^{-2}$$

④ $x = -4\times 10^{-2} m$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 62.5 (-4\times 10^{-2})^2 = 5\times 10^{-2} J.$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \frac{1}{2} 62.5 (12\times 10^{-2})^2 = 45\times 10^{-2} J.$$

$$E_k = E_{tot} - E_p = 45\times 10^{-2} - 5\times 10^{-2} = 40\times 10^{-2} J.$$

المسألة الرابعة

$K = 16 N.m^{-1}$ ، $T_0 = 1 m$ ، $X_{max} = 0.1 m.$

$t = 0 ; x = \frac{X_{max}}{2}$ ، $v < 0$

① $\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$X_{max} = 0.1 m$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\, rad.s^{-1}$

• $t = 0$ $x = \frac{X_{max}}{2}$ ، $v < 0$

$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} . \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$

$$\varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3}\ rad \\ \frac{5\pi}{3}\ rad. \end{cases}$$

نقبل φ التي تجعل $v<0$ في $t=0$

$$\bar{v} = -\omega_0 \cdot X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة $t=0$

$$\bar{v} = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin\bar{\varphi}$$

إما $\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad$

$$\bar{v} = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$ ، $\sin\frac{\pi}{3} > 0$

$\Rightarrow \bar{v} < 0$ مقبول.

أو: $\varphi = \frac{5\pi}{3}\ rad$

$$\bar{v} = -\omega_0 \cdot X_{max} \cdot \sin\frac{5\pi}{3}$$

$\sin\frac{5\pi}{3} < 0$

$\Rightarrow \bar{v} > 0$ مرفوض

$$\Rightarrow x = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$$

2 - عند المرور في وضع التوازن $x=0$

$$0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow (2\pi t + \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$2t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k \Rightarrow 2t = \frac{3-2+6k}{6}$$

$$2t = \frac{1+6K}{6} \Rightarrow t = \frac{1+6K}{12}$$

المرور الثاني

$K = 0 \, , \, 1 \, , \, 2 \, ,$

المرور الأول

المرور الثالث

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

لحظة المرور الأول: $K = 0$

$$t_1 = \frac{1+6(0)}{12} = \frac{1}{12}\ s$$

لحظة المرور الثالث $K = 2$

$$t_3 = \frac{1+6(2)}{12} = \frac{13}{12}\ s.$$

• حساب شدة قوة الإرجاع ، في $X = 0.1\ m$

$$F = -KX = -16 \times 0.1 = -1.6\ N$$

تكون شدة قوة الإرجاع

$$F = 1.6\ N.$$

3 - حساب كتلة الكرة :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{16}{(2\pi)^2} = \frac{16}{40} = 0.4\ kg$$

" مسائل عامة "

المسألة الأولى :

$K = 10\ N.m^{-1}$ ، $m = 0.1\ kg$

$t = 0$ $\quad x = 0$ $\quad v = -3\ m.s^{-1}$

① . $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10\ rad.s^{-1}$.

② الشكل العام للتابع الزمني :

$$\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}).$$

طلب X_{max}، عند مرور الجسم في مركز الاهتزاز تكون السرعة عظمى.

$v_{max} = -\omega_0 X_{max} \Rightarrow -3 = -\omega_0 X_{max}$

• $X_{max} = \frac{3}{10} = 0.3\ m.$

• $\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}$

• $t = 0$ $\quad x = 0$ $\quad v < 0$

$0 = X_{max} \cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$

أو. $\varphi = \frac{3}{2}\pi\ rad.$

نختار φ التي تجعل $v < 0$ في اللحظة $t = 0$

$v = -\omega_0 X_{max} . \sin\varphi$

عندما $\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow v < 0$ مقبول

$\varphi = \frac{3\pi}{2}\, rad. \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} . \sin\frac{3\pi}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{2} < 0 \Rightarrow v > 0$ مرفوض

تكون التابع الزمني للمطال :

$$\bar{X} = 0.3 \cos(10t + \frac{\pi}{2}).$$

3- $X = 3\times10^{-2}\, m$ حسب شدة قوة الإرجاع

$F = -KX$

$F = -10 \times 3\times10^{-2} = -3\times10^{-1}\, N$

تكون شدة قوة الإرجاع $F = 0.3\, N$.

المسألة الثانية :

$m = 0.5\, kg$ ، $T_0 = 4\, s$ ، $X_{max} = 8\times10^{-2}\, m.$

$t = 0 \quad X = \frac{X_{max}}{2} \quad v < 0$

1 التابع الزمني :

$$\bar{X} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

. $X_{max} = 8\times10^{-2}\, m$

. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\, rad.s^{-1}$

طلب φ:

$t = 0 \quad X = \frac{X_{max}}{2} \quad , \quad v < 0$

$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} . \cos(\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2}$

$\varphi < \begin{cases} \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ \frac{5\pi}{3} \text{ rad.} \end{cases}$

، $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad.

$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin\frac{\pi}{3} \quad , \sin\frac{\pi}{3} > 0$

$\Rightarrow v < 0$

مقبول: لأن السرعة سالبة.

$\varphi = \frac{5\pi}{3}$ rad

$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin\frac{5\pi}{3}$

$\sin\frac{5\pi}{3} < 0 \Rightarrow v > 0$

مرفوض

$$\bar{X} = 8\times10^{-2} . \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

2 - لحظة المرور الأول والثالث في وضع التوازن.

عند المرور في وضع التوازن، $X = 0$

$0.08 . \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + K\pi \Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + K \Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{3-2+6K}{6}$

$\frac{t}{2} = \frac{1+6K}{6} \Rightarrow t = \frac{1+6K}{3}$

$$t = \frac{1+6k}{3}$$

↓ المرور الثالث ، ↓ المرور الأول

$k = 0 , 1 , 2 , 3$

↓ المرور الثاني

لحظة المرور الأول $k=0$

$$t = \frac{1+6(0)}{3} = \frac{1}{3}\,s$$

لحظة المرور الثالث $k=2$

$$t = \frac{1+6(2)}{3} = \frac{13}{3}\,s.$$

3 - تكون محصلة شدة القوة عظمى في الوضعين الطرفيين

$$x = \pm X_{max}.$$

$$F = |-k\,x| = |-\omega_0^2 \cdot m \cdot x| = |\pm\omega_0^2 \cdot m\, X_{max}|$$

$$F = \frac{\pi}{2} \times 0.5 \times 8\times10^{-2} = (\frac{\pi}{2})^2 \times \frac{1}{2} \times 8\times10^{-2}$$

$$= \frac{10}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\times10^{-2} = 0.1\,N.$$

تنعدم شدة محصلة القوى في مركز الاهتزاز $x=0$

$$F = -k\,x = 0$$

4 - $$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 \cdot m$$

$$k = (\frac{\pi}{2})^2 \times 0.5 = \frac{10}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\ N.m^{-1}$$

لا تتغير قيمة ثابت صلابة النابض بتغيرا لكتلة ؛ لأن قيمته تتعلق بطول النابض وعدد حلقاته ونوع المادة المصنوع منها :

عند تغير m تتغير ω_0 ويبقى $k = \omega_0^2 \cdot m = Const = \omega_0^2 \cdot m$

5. $T_0 = 1s$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{K}$$

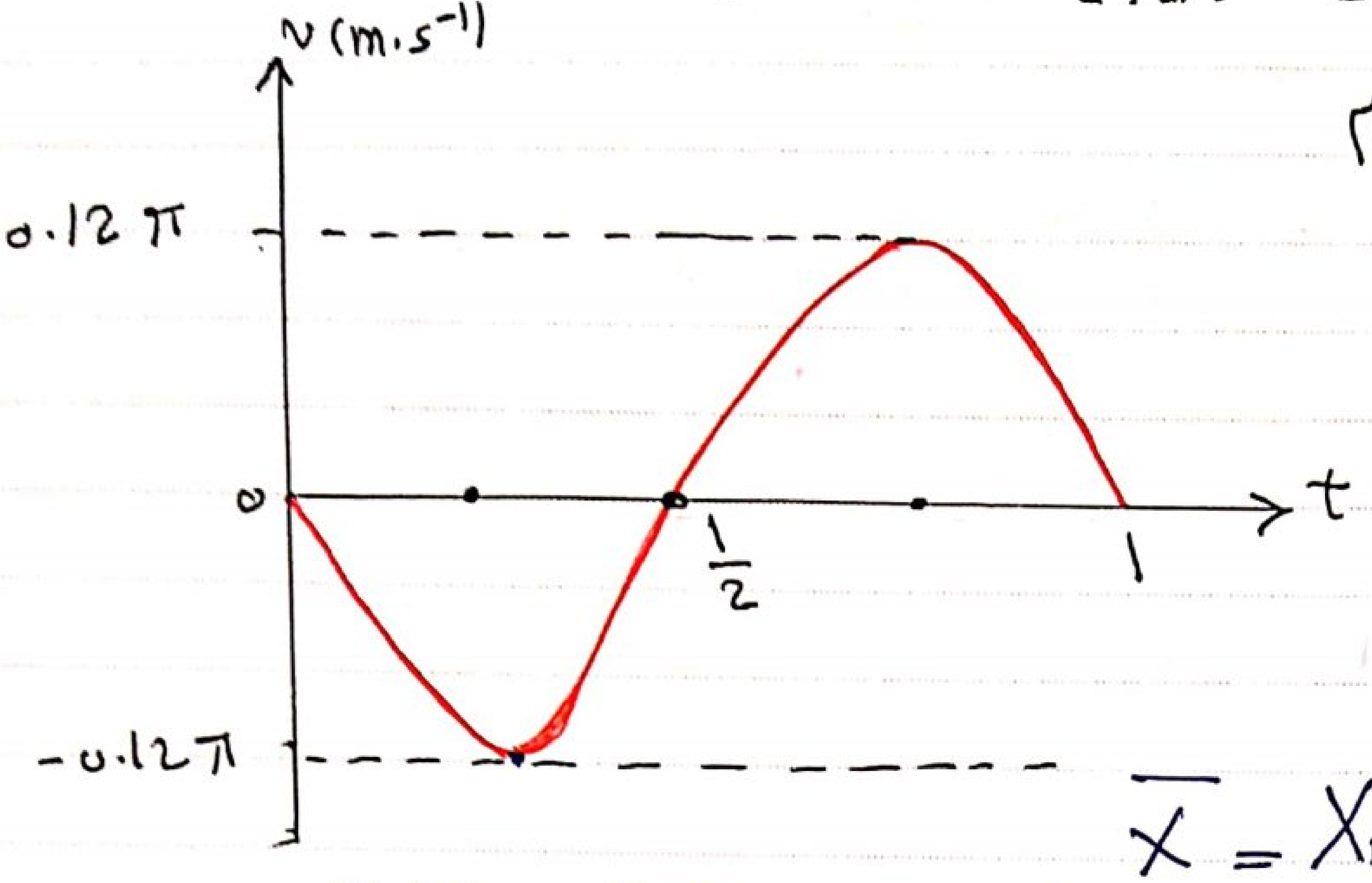
$$m = \frac{T_0^2 \cdot K}{4\pi^2} = \frac{1 \times \frac{5}{4}}{40} = \frac{5}{160} = \frac{1}{32}\ Kg.$$

⊙ في الرسم البياني جانباً تمثل تغيرات السرعة مع الزمن، لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة جيبية توافقية بسيطة

والمطلوب:

1- انطلاقاً من الشكل العام للتابع المطال

استنتج التابع الزمني للمطال.



1) الشكل العام:

$$\bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

تحديد الثوابت:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ rad.s^{-1}$$

$$X_{max} = ? \quad . \quad \omega_0 \cdot X_{max} = 0.12\pi \Rightarrow X_{max} = \frac{0.12\pi}{\omega_0}$$

$$X_{max} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06 \ m.$$

$$\varphi: \quad t = 0 \quad \Rightarrow v = 0 \quad \Rightarrow x = \pm X_{max}$$

وبما أن الجسم يبدأ حركة بالاتجاه السالب ⇐ $x = + X_{max}$

$$X_{max} = X_{max} \cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \ rad.$$

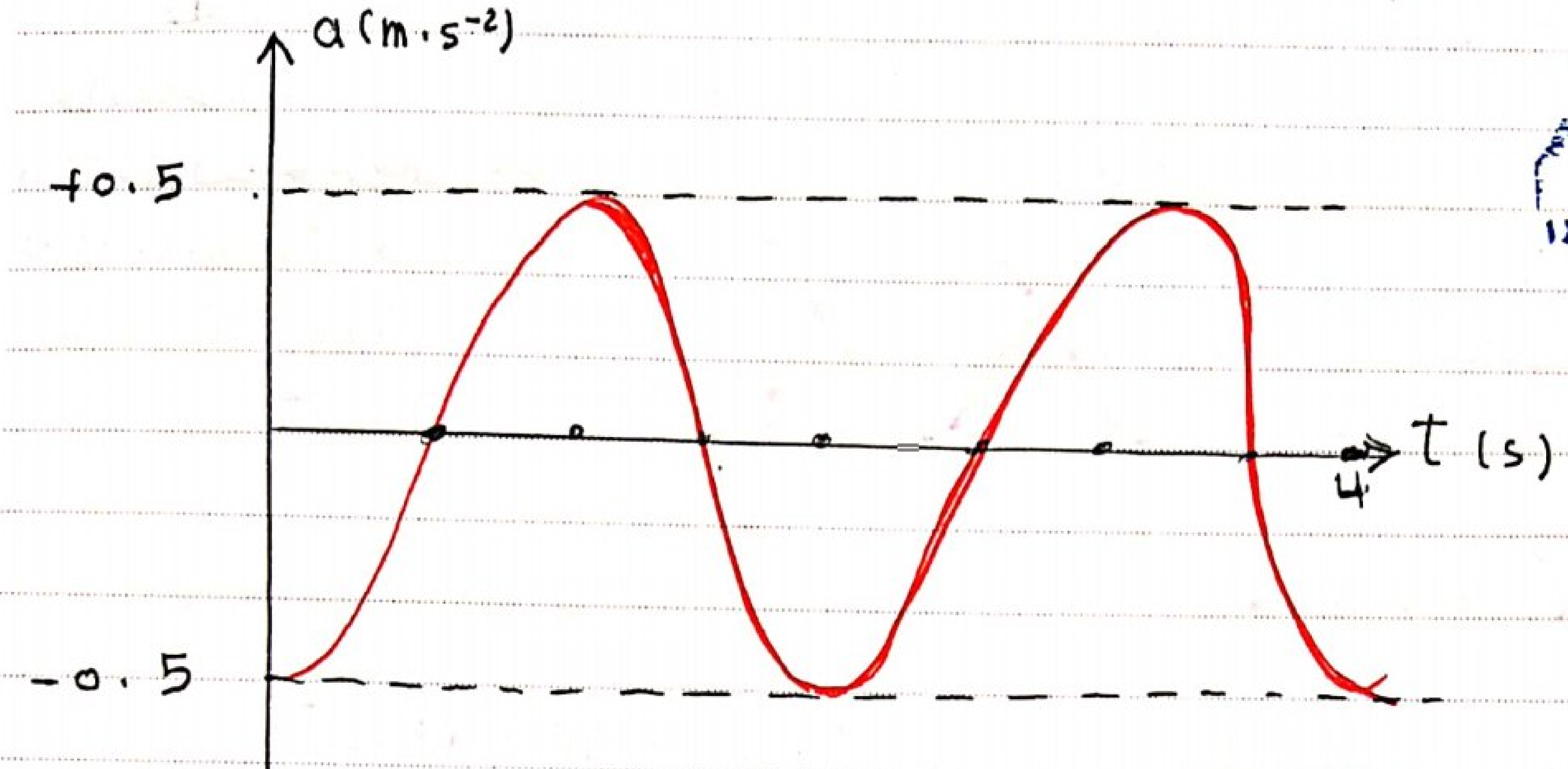
$$\bar{x} = 0.06 \cos(2\pi t).$$

$$\varphi: \quad t = 0 \quad v = 0$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \qquad t = 0$$

$$0 = -\omega_0 X_m \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ rad.$$

س ، من الرسم البياني الذي يمثل تغيرات التسارع بدلالة الزمن .
استنتج تابع المطال انطلاقاً من شكله العام .



نلاحظ أن :

$$2T_0 = 4\ s$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{4}{2} = 2\ s$$

الشكل العام :
$$\overline{X} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_0^2 . X_{max} = 0.5 \Rightarrow X_{max} = \frac{0.5}{\omega_0^2} = \frac{0.5}{\pi^2} = 5 \times 10^{-2} m.$$

$$a = -\omega_0^2 . X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a = -a_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ع $t = 0$ $a = -a_{max}$

$$-a_{max} = -a_{max} . \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad.$$

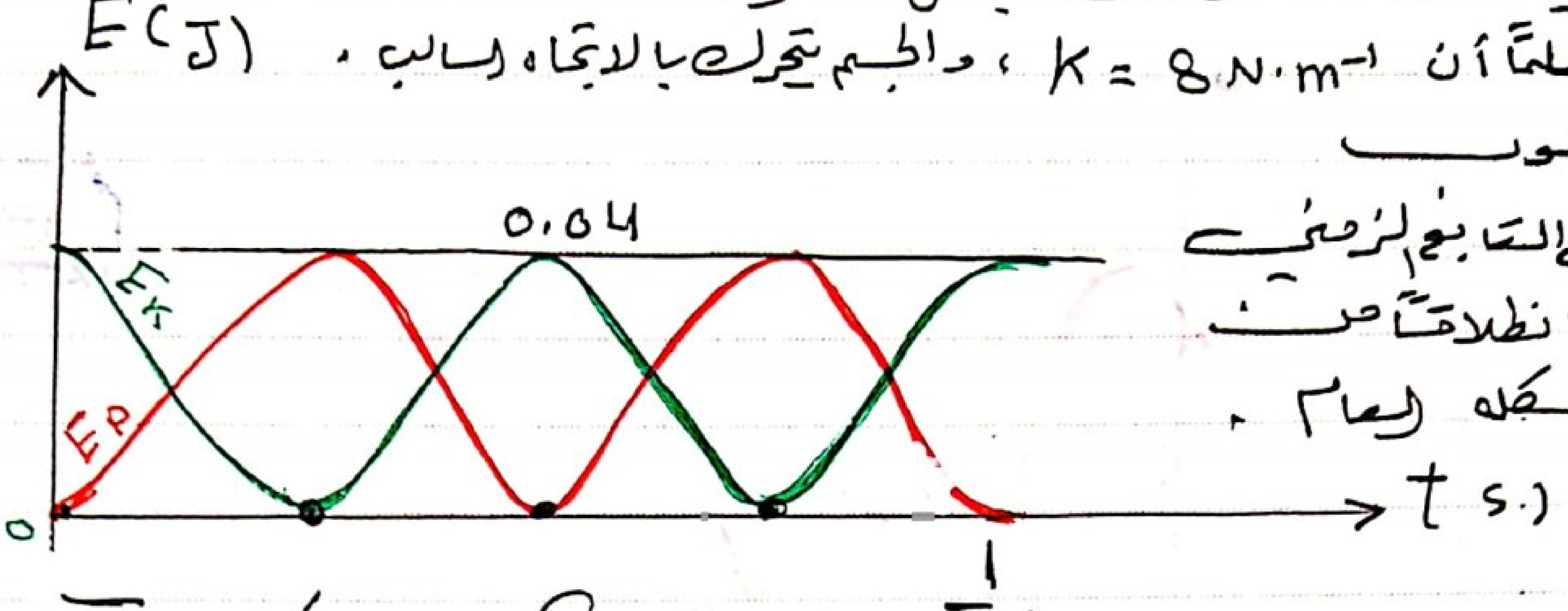
$$\overline{X} = 0.05 \cos(\pi t).$$

س: الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات الطاقة الكامنة المرونية والطاقة الحركية في النواس المرن بدلالة الزمن.

علماً أن $K = 8\ N.m^{-1}$ ، والجسم يتحرك بالاتجاه السالب.

والمطلوب

استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام.



$$\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

$$E = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \Rightarrow X_{max}^2 = \frac{2E}{K}$$

$$X_{max}^2 = \frac{2 \times 4 \times 10^{-2}}{8} = 10^{-2} \Rightarrow X_{max} = 0.1\ m$$

طلب φ : من شروط البدء.

$$t = 0 \quad E_p = 0 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow x = 0$$

$$t = 0 \quad x = 0$$

$$0 = X_{max} . \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0$$

$$\varphi < \begin{matrix} \frac{\pi}{2}\ rad \\ \frac{3\pi}{2}\ rad \end{matrix}$$

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

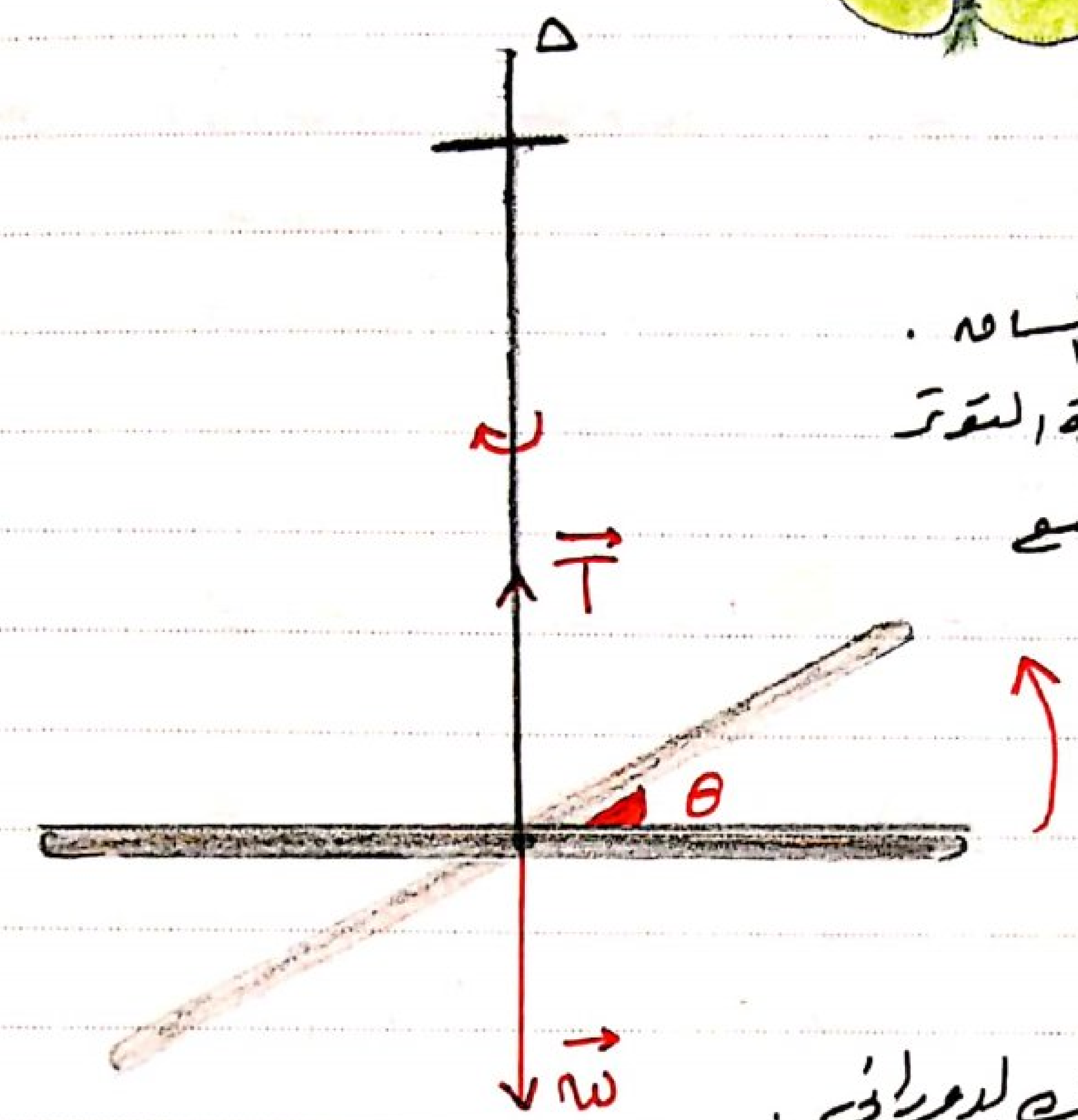
$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\varphi \qquad t = 0$$

عندما $\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0 \Leftarrow v < 0$ مقبول

$\varphi = \frac{3\pi}{2}\ rad$ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1 < 0 \Leftarrow v > 0$ مرفوض

$$x = 0.1 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$$

نواس الفتل



القوى المؤثرة في الساق : $\vec{w}$ ثقل الساق .
$\vec{T}$: قوة التوتر

. عندما ندير الساق بزاوية θ عن وضع توازنها . في مستوٍ أفقي.
تنشأ مزدوجة الفتل $\vec{\eta}$
عزمها هو عزم الارجاع

$$\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\bar{\theta}$$

بتطبيق العلاقة الاساسية في التحريك الدوراني ،
حول محور Δ.

$$\boxed{\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}}$$

التسارع الزاوي $rad.s^{-2}$

عزم عطالة الساق حول محور الدوران $Kg.m^2$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} \quad ---- (1)$$

لأن حامل كل منهما منطبق على محور الدوران Δ . $\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0 \quad ... (2)$

$$\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\bar{\theta} \quad ... (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) .

$$0 + 0 - K\bar{\theta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} = -K\bar{\theta} \Rightarrow I_{\Delta} \cdot (\bar{\theta})''_{t} = -K\bar{\theta}$$

$$(\overline{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta} \cdot \overline{\theta}$$

س: انطلاقاً من العلاقة: $(\overline{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta} \cdot \overline{\theta}$ برهن أن حركة نواس الفتل هي حركة جيبية دورانية ... ثم استنتج علاقة دوره الخاص T_0.

$$(\overline{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta} \cdot \overline{\theta} \quad \text{.....} \quad (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل.

$$\overline{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$\overline{\omega} = (\overline{\theta})'_t = -\omega_0 \cdot \theta_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$ تابع السرعة الزاوية

$$\overline{\alpha} = (\overline{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$ تابع التسارع الزاوي

$$(\overline{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \overline{\theta} \quad \text{....} \quad (2)$$

بموازنة العلاقتين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهنا محققة لأن K ، I_Δ موجبان.

أي أن حركة نواس الفتل هي جيبية دورانية تابعها الزمني

$$\overline{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$\overline{\theta}$: المطال الزاوي في لحظة t. واحدته rad

θ_{max} المطال الزاوي الأعظمي (السعة الزاوية) واحدته (rad)

ω_0 : النبض الخاص. $rad.s^{-1}$ ، $\overline{\varphi}$ الطور الابتدائي واحدته rad

1 استنتاج علاقة دور الخاص.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} \Rightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

نستنتج أن : T_0 :

1- لا علاقة له بـ θ_{max}

2- يتناسب طرداً مع I_Δ عزم عطالة النواس ($kg.m^2$)

3- يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك

ثابت يتعلق بمادة السلك المصنوع منها

ثابت فتل السلك ($m.N.rad^{-1}$)

$$K = k' \frac{(2r)^4}{l}$$

قطر السلك

طول السلك

نلاحظ أن K يتناسب عكساً مع طول السلك.

أي T_0 يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لـ K

← أن T_0 يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي l طول السلك.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'\frac{(2r)^4}{l}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \cdot l}{k'(2r)^4}}$$

$$T_0 = Const.\sqrt{l}$$

	المطال	السرعة	التسارع	العطالة	الثابت	الإرجاع	طبيعة الحركة
النواس المرن	$\bar{x}$ m	$\bar{v} = (\bar{x})'_t$ $m \cdot s^{-1}$	$\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$ $m \cdot s^{-2}$	m الكتلة kg	K ثابت صلابة النابض $N \cdot m^{-1}$	$F = -kx$ قوة الإرجاع N	جيبية انسحابية $\bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
نواس الفتل	$\bar{\theta}$ مطال زاوي rad	$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t$ سرعة زاوية $rad \cdot s^{-1}$	$\bar{\alpha} = (\bar{\omega})'_t = (\bar{\theta})''_t$ التسارع الزاوي $rad \cdot s^{-2}$	I_Δ عزم العطالة $kg \cdot m^2$	K ثابت فتل السلك $m \cdot N \cdot rad^{-1}$	$\Gamma_\Delta = -k\theta$ عزم الإرجاع $N \cdot m$	جيبية دورانية $\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

	النواس المرن	نواس الفتل.
الطاقة الكلية.	$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$	$E_{tot} = \frac{1}{2} k \theta_{max}^2$
الطاقة الكامنة	$E_p = \frac{1}{2} k X^2$	$E_p = \frac{1}{2} k \theta^2$
الطاقة الحركية	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

الأسئلة.

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة.

1. c
2. c
3. d

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية.

1:

لاستنتاج علاقة السرعة الزاوية.

$$E_k = E - E_p$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2} k \theta_{max}^2 - \frac{1}{2} k \theta^2$$

$$I_\Delta \omega^2 = k(\theta_{max}^2 - \theta^2)$$

$$I_\Delta \omega^2 = I_\Delta . \omega_0^2 (\theta_{max}^2 - \theta^2)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 (\theta_{max}^2 - \theta^2) \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{\theta_{max}^2 - \theta^2}$$

- لإثبات أن حركة نواس الفتل جيبية دورانية:

$$E = E_p + E_k$$

نزل ← خفض ← اشتق

$$(\theta^2)' = 2\theta^{2-1}.\omega$$

$$\frac{1}{2} k \theta_{max}^2 = \frac{1}{2} k \theta^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \qquad (\omega^2)' = 2.\omega^{2-1}.\alpha$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن.

$$0 = \frac{1}{2} k (2\theta\omega) + \frac{1}{2} I_\Delta (2\alpha.\omega)$$

$$I_\Delta . \alpha \omega = -k\theta\omega \Rightarrow I_\Delta . \alpha = -k\theta$$

$$I_\Delta (\theta)''_t = -k\theta$$

$$\Rightarrow (\theta)''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\cdot\theta \text{ ---- } (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = (\theta)'_t = -\omega_0\cdot\theta_{max}\cdot\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\cdot\theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\cdot\bar{\theta} \text{ ---- } (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

وهنا نحقق لأن I_Δ , K موجبان ⇐ حركة نواس الفتل جيبية دورانية

(2):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{\frac{K'(2r)^4}{\ell}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta\cdot\ell}{K'(2r)^4}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K'(2r)^4}}\cdot\sqrt{\ell}$$

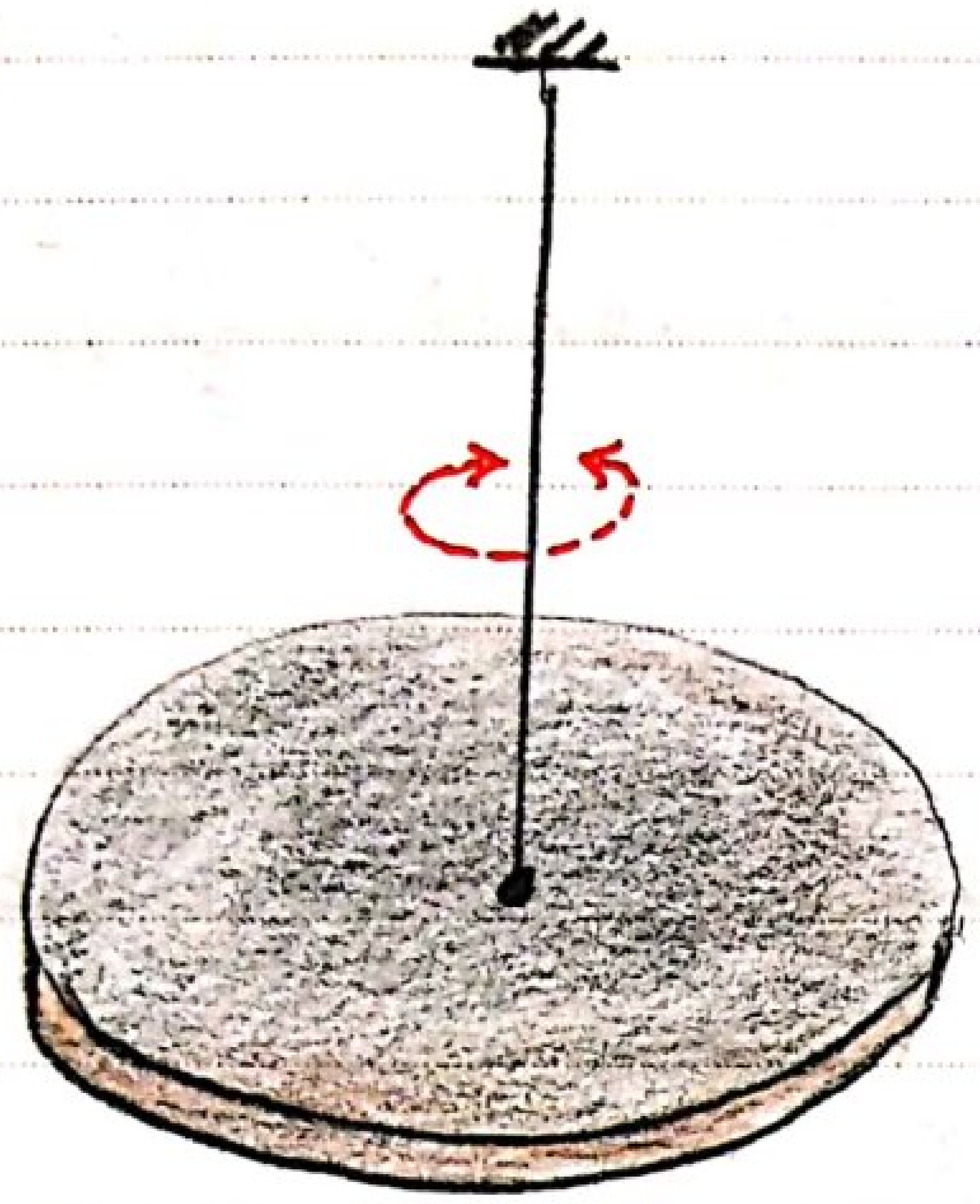
$$T_0 = Const.\sqrt{\ell}.$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{Const.\sqrt{\ell_1}}{Const.\sqrt{\ell_2}} \Rightarrow \frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

$$4 = \frac{\ell_1}{\ell_2} \Rightarrow \ell_1 = 4\ell_2.$$

ثالثاً: حل المسائل.

المسألة الأولى:



$m = 2\,kg$. $r = 4\times10^{-2}\,m$.

$K = 16\times10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$

$t=0 \quad \theta = +\frac{\pi}{4}\,rad$، دون سرعة.

المطلوب.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

(1):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

حساب I_Δ:

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}2(4\times10^{-2})^2 = 16\times10^{-4}\,kg.m^2$$

نعوض:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\,s$$

(2):

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}).$$

تحديد الثوابت:

- $t=0$ ترك دون سرعة ابتدائية $\Rightarrow \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{4}\,rad.$

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,rad.s^{-1}$

- تحديد φ من شروط البدء:

$t=0 \Rightarrow \theta = \theta_{max}$

$$\theta_{max} = \theta_{max}.\cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\bar{\varphi}=1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad.$$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}.\cos(\pi t)\ (rad)$$

3. $\theta = \frac{\pi}{8}\ rad.$

الطاقة الكامنة $E_p = \frac{1}{2} K \theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} \cdot 16 \times 10^{-3} \left(\frac{\pi}{8}\right)^2$

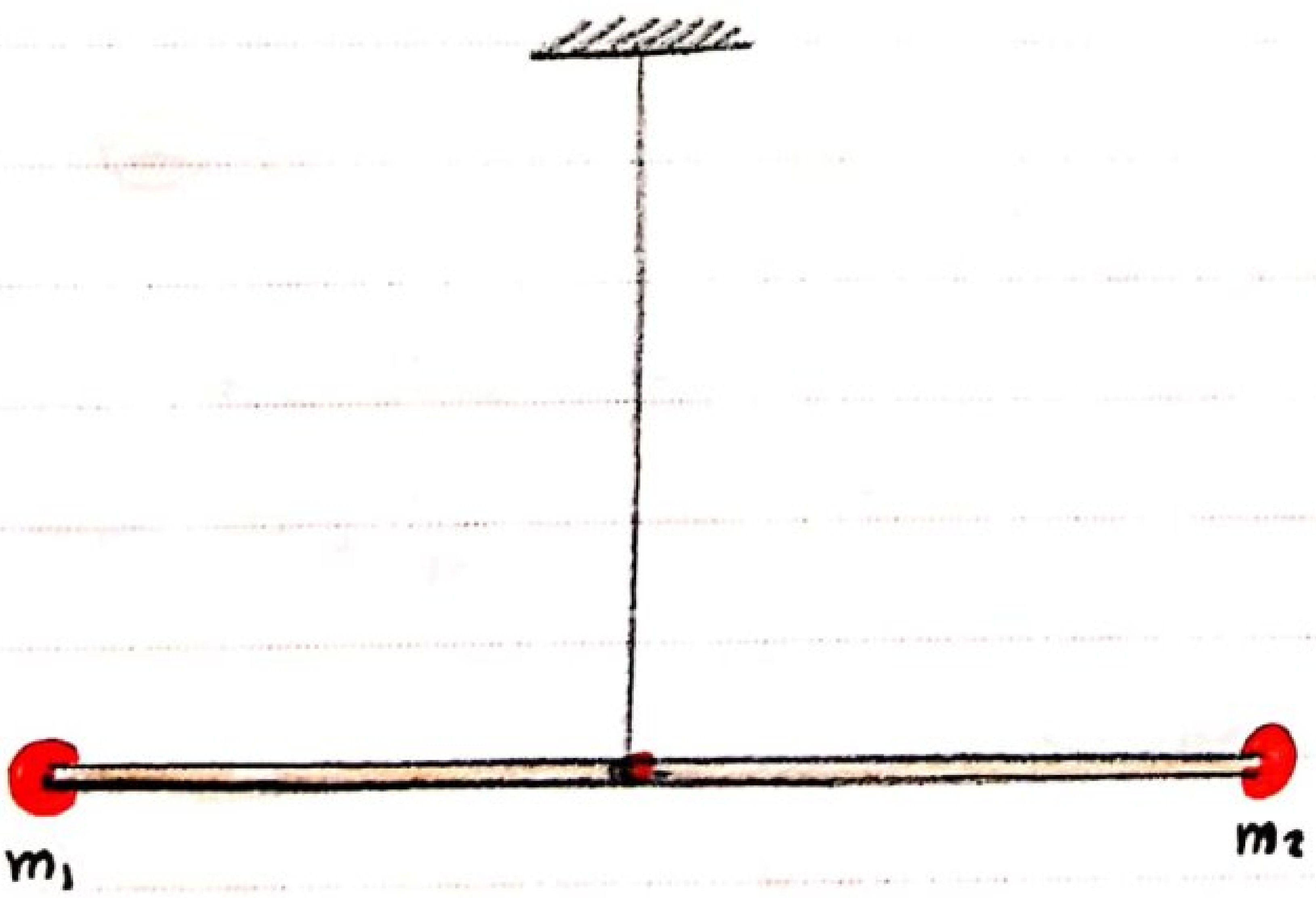
$E_p = 8 \cdot 10^{-3} \frac{10}{64} = \frac{1}{8} \times 10^{-2}\ J.$

طلب الطاقة الحركية: حسب مصونية الطاقة :

$E_k = E_{tot} - E_p.$

$E_{tot} = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \times 10^{-3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10}{16}$

$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 10^{-2}\ J \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} - \frac{1}{8} \cdot 10^{-2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-2} J.$



المسألة الثانية :

$m_1 = m_2 = 125 \times 10^{-3} kg.$

$K = 16 \times 10^{-3}\ m \cdot N \cdot rad^{-1}$

$t = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{3}\ rad.$

$T_0 = 2.5 = \frac{5}{2}\ s.$

1. $\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$t = 0$ تترك دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad.$

اينه

- $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}$
- $t = 0 \quad \theta = \theta_{max}$.

$$\theta_{max} = \theta_{max} . \cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}} = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad.$$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3} . \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

2

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\frac{4\pi}{5} . \frac{\pi}{3} . \sin\frac{4\pi}{5} t$$

$$\bar{\omega} = -\frac{8}{3} . \sin\frac{4\pi}{5} t$$

ونكون عند المرور الأول .

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8}\ s.$$

$$\bar{\omega} = -\frac{8}{3} . \sin\frac{4\pi}{5} . \frac{5}{8} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{8}{3} . \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\bar{\omega} = -\frac{8}{3}(1) = -\frac{8}{3}\ rad.s^{-1}$$

تدل على أن الجسم يتحرك بالاتجاه السالب

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

3. حساب طول الساق l نحسب I_Δ.

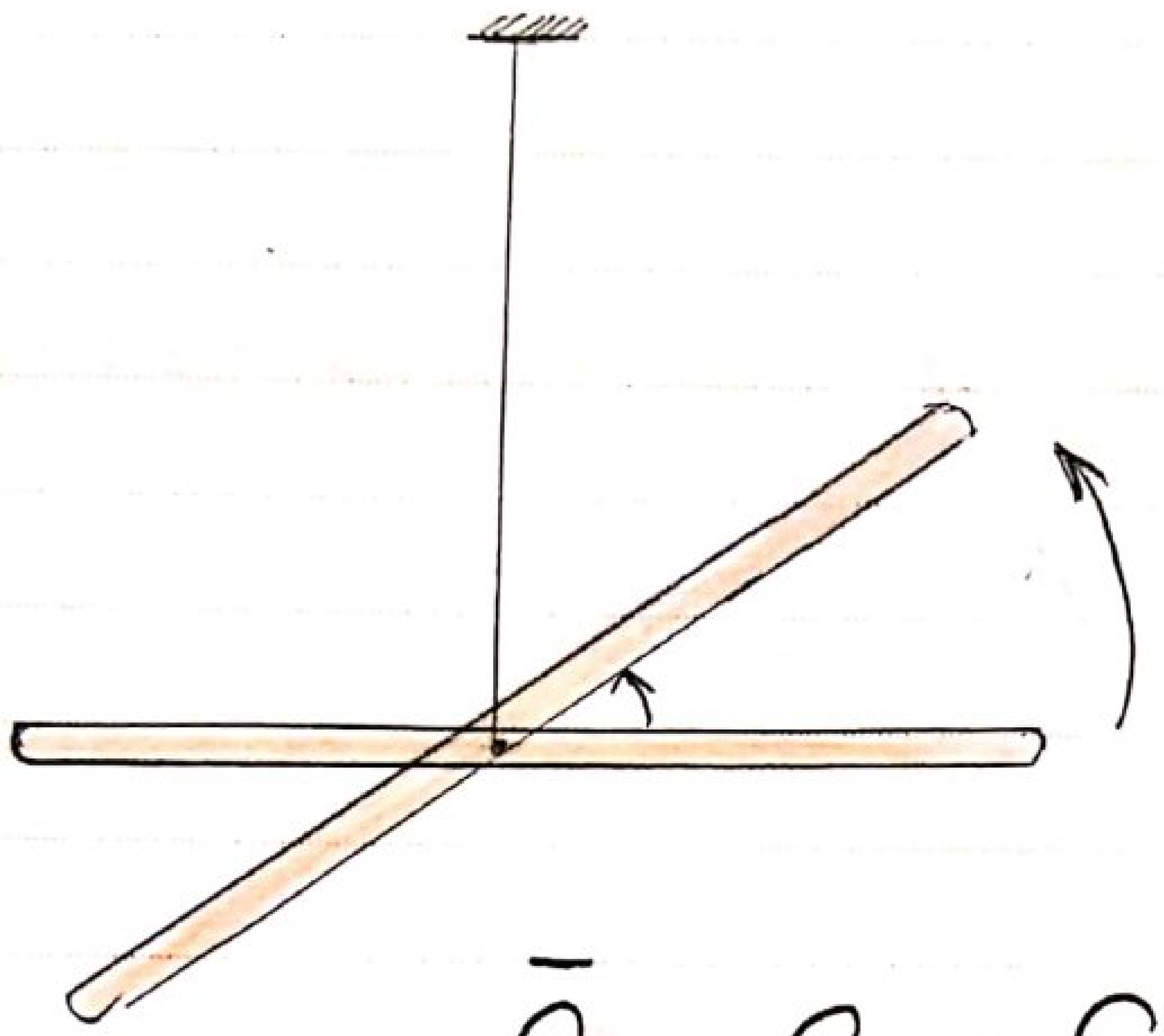
$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow I_\Delta = \frac{K}{\omega_0^2}$$

$$I_\Delta = \frac{16\times10^{-3}}{\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2} = \frac{16\times10^{-3}}{\frac{160}{25}} = \frac{16\times25\times10^{-3}}{160} = 25\times10^{-4}\ kg.m^2$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2 I_{\Delta/m_1} \Rightarrow I_\Delta = 0 + 2m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow 25\times10^{-4} = 2\times125\times10^{-3}\frac{l^2}{4}$$

$$l^2 = \frac{50\times10^{-4}}{125\times10^{-3}} = \frac{1}{25} \Rightarrow l = \frac{1}{5} = 0.2\ m.$$

المسألة الثالثة :



ساق $\ell = 40 \times 10^{-2} m.$

ⓐ. $\theta = \frac{\pi}{3} rad$

$t = 0$ دون سرعة ابتدائية.

$T_0 = 1 s \qquad I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3} kg.m^2$

والمطلوب :

① .

$$\bar{\theta} = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

• $t = 0$ تركه دون سرعة $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad.$

• $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ rad.s^{-1}$

• $t = 0 \quad \theta = \theta_{max} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max} . \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1$

$\varphi = 0 \ rad.$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3} . \cos 2\pi t$$

② .

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -2\pi . \frac{\pi}{3} . \sin 2\pi t .$$

$$\bar{\omega} = -\frac{20}{3} . \sin 2\pi t$$

عند المرور الثاني في وضع التوازن :

$$t = \frac{3T_0}{4} = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4} s$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{20}{3} . \sin 2\pi . \frac{3}{4} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{20}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{20}{3}(-1)$$

$$\bar{\omega} = \frac{20}{3} rad.s^{-1}$$

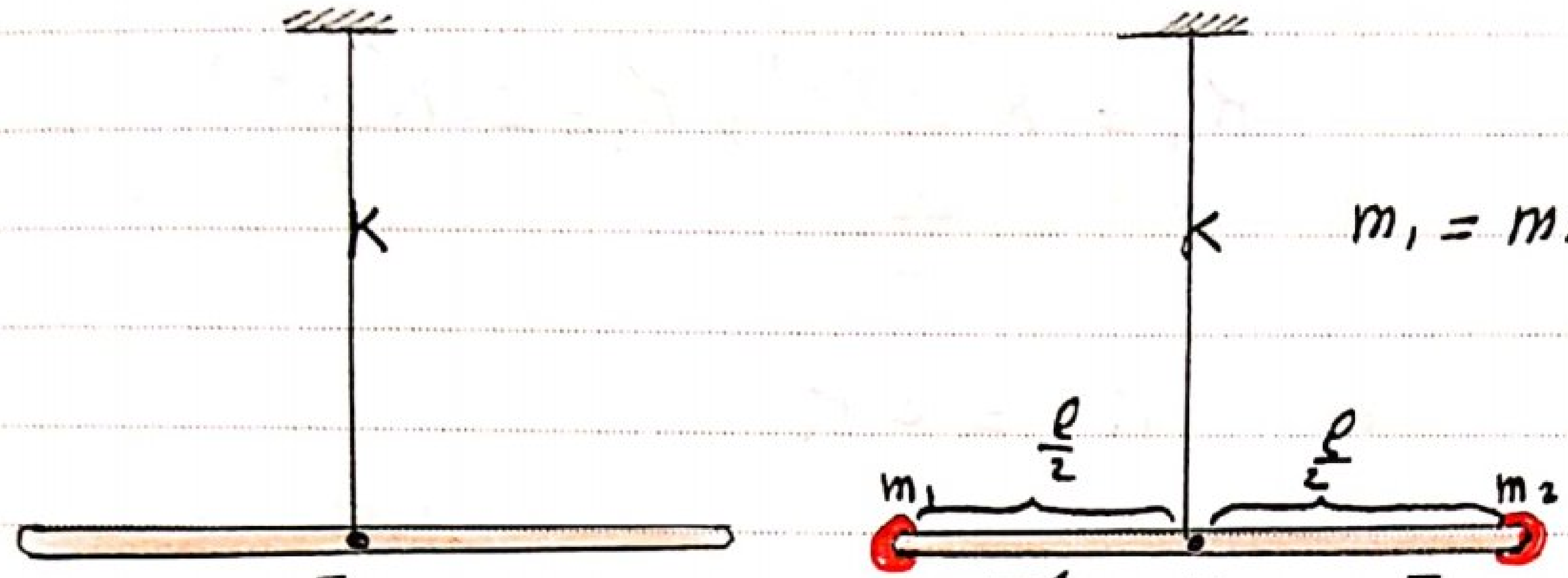
صفو الحضارة

$$\theta = -\frac{\pi}{6}\ rad.$$ -3

$$\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta} \Rightarrow \bar{\alpha} = -(2\pi)^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{40\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}\ rad.s^{-2}$$

b

$m_1 = m_2 = 75\times10^{-3}\,kg$



$I_{\Delta/C}$

$$I'_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$T_0 = 1\,s$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/C}}{K}} \quad , \quad T'_0 = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}}$$

$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/C}}{K}}} \Rightarrow \frac{T'_0}{T_0} = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{I_{\Delta/C}}} \quad ★$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

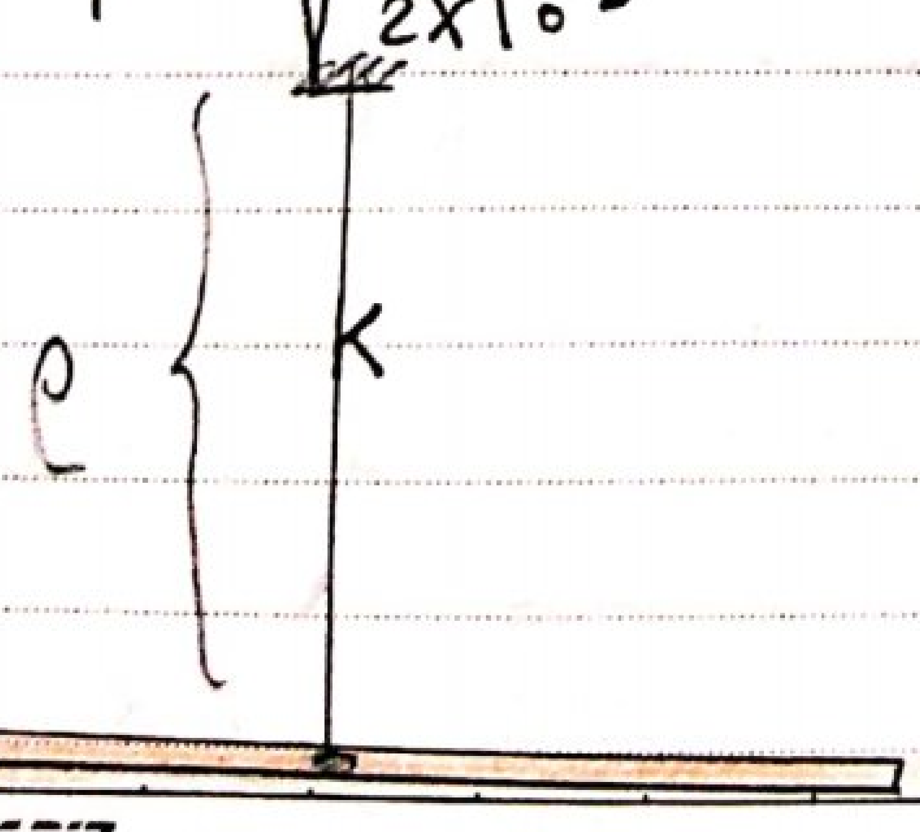
طلب I'_Δ :

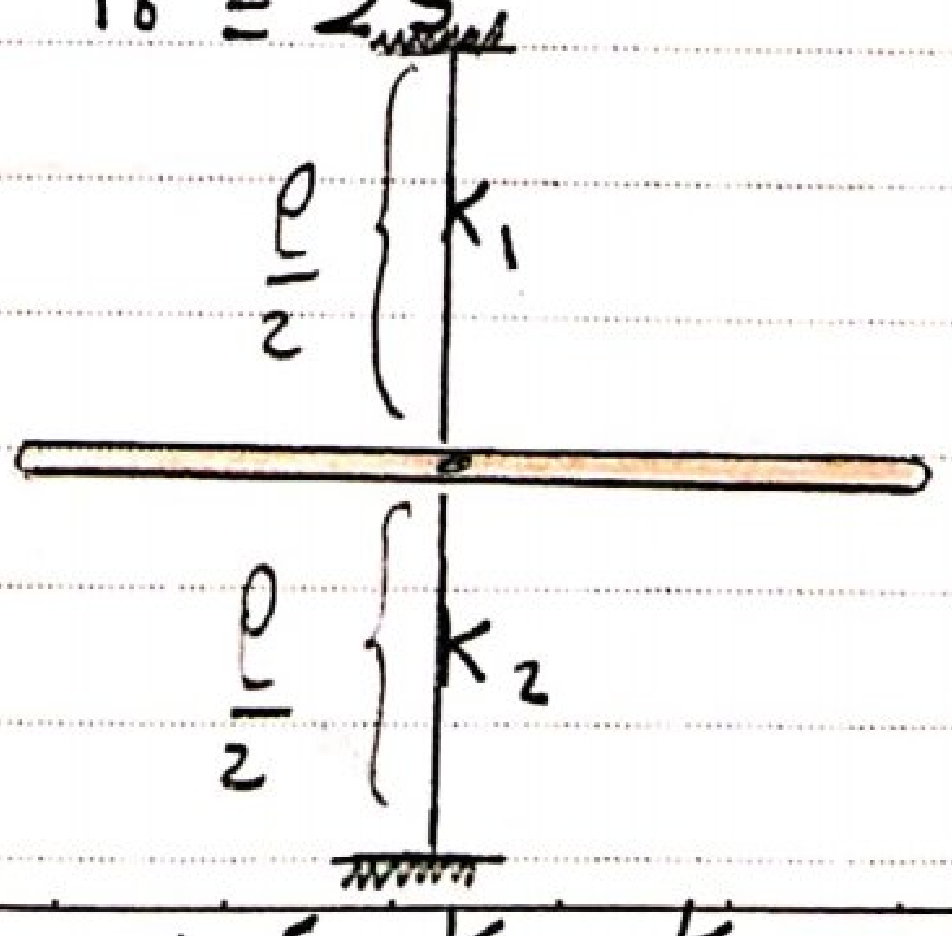
$$I'_\Delta = 2\times10^{-3} + 2m_1\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2\times10^{-3} + 2\times75\times10^{-3}\cdot(20\times10^{-2})^2$$

★ بالتعويض $\quad I'_\Delta = 8\times10^{-3}\,kg.m^2.$

$$\frac{T'_0}{1} = \sqrt{\frac{8\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} \Rightarrow \frac{T'_0}{1} = 2 \Rightarrow T'_0 = 2\,s$$

c





$T_0 = 1\,s$ $\quad K' = K_1 + K_2$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'}}$$

طلب K' بحسب K_1 و K_2 .

$$K = k'\frac{(2r)^4}{\ell} \quad , \quad K_1 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow K_1 = 2\cdot k'\frac{(2r)^4}{\ell}$$

$$K_1 = 2K \quad , \quad K_2 = 2K$$

$$K' = 2K + 2K = 4K.$$

نعوض في علاقة T_0' .

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4K}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} = \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}s.$$

طلب K ثابت الفتل .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2\frac{I_\Delta}{K}$$

$$\Rightarrow K = \frac{4\pi^2 I_\Delta}{T_0^2} = \frac{40 \times 2\times 10^{-3}}{1} = 8\times 10^{-2}\, mN\, rad^{-1}$$

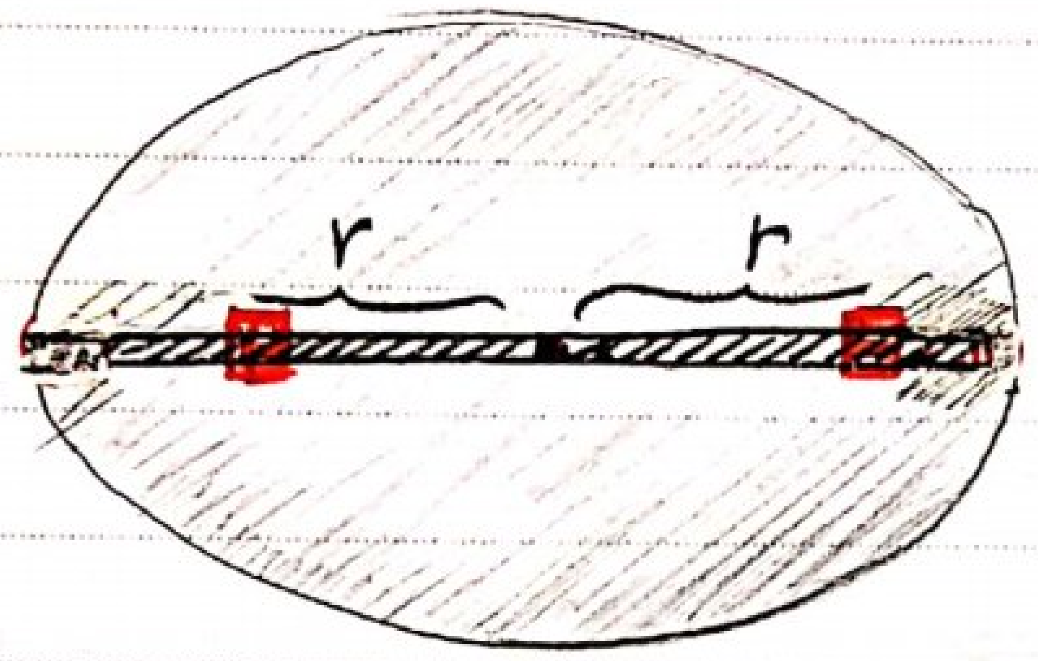
المسألة الثالثة :

قرص: $M_1 = 0.12\,kg$ ، $R = 0.05\,m.$

ساق: $M_2 = 0.012\,kg$ $L = 0.1\,m$

الكتل. $m_1 = m_2 = 0.05\,kg$ ، $(2r = 0.04\,m)$

$K = 8\times10^{-4}\,m.N.rad^{-1}$



(1)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

$$I_\Delta = \underbrace{I_{\Delta/c}}_{\text{قرص}} + \underbrace{I_{\Delta/c}}_{\text{ساق}} + \underbrace{2I_{\Delta/m_1}}_{\text{كتل.}}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$I_\Delta = \frac{1}{2}M_1.R^2 + \frac{1}{12}M_2.L^2 + 2m_1(r)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}.0.12(0.05)^2 + \frac{1}{12}.0.012(0.1)^2 + 2(0.05)(0.02)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}\times12\times10^{-2}\times25\times10^{-4} + \frac{1}{12}\times12\times10^{-3}\times10^{-2} + 2\times5\times10^{-2}\times4\times10^{-4}$$

$$I_\Delta = 15\times10^{-5} + 1\times10^{-5} + 4\times10^{-5} = 2\times10^{-4}\,kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}} = 2\pi.\frac{1}{2} = \pi\,s.$$

(2) . الدور الجديد :

$$T'_0 = (T_0 + 0.86) = (\pi + 0.86)s$$

نحسب I'_Δ :

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}}$$

$$T_o'^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I'_\Delta}{K} \Rightarrow I'_\Delta = \frac{T_o'^2 \cdot K}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$I'_\Delta = \frac{(\pi + 0.86)^2 \times 8 \times 10^{-4}}{40} = \frac{(3.14 + 0.86)^2 \times 8 \times 10^{-4}}{40}$$

$$I'_\Delta = \frac{\cancel{16}^{4} \times 8 \times 10^{-4}}{\cancel{40}} = 32 \times 10^{-5}\ kg.m^2$$

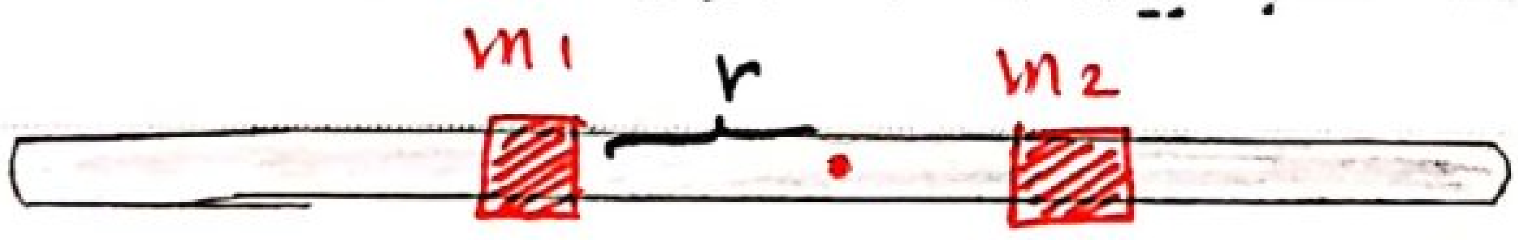
$$I'_\Delta = 2m_1 r'^2 + \underset{\text{ساق}}{I_{\Delta/c}} + \underset{\text{قرص}}{I_{\Delta/c}}$$

$$32 \times 10^{-5} = 2 \times 5 \times 10^{-2} \cdot r'^2 + 1 \times 10^{-5} + 15 \times 10^{-5}$$

$$32 \times 10^{-5} = 10^{-1} \cdot r'^2 + 16 \times 10^{-5} \Rightarrow 10^{-1} \cdot r'^2 = 32 \times 10^{-5} - 16 \times 10^{-5}$$

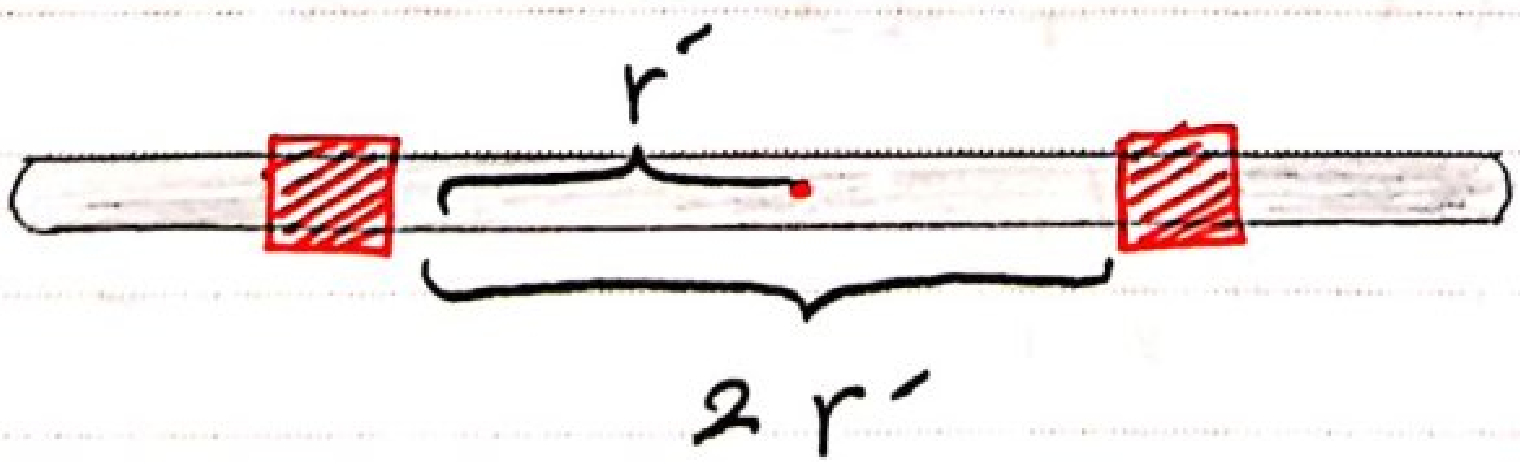
$$10^{-1} \cdot r'^2 = 16 \times 10^{-5} \Rightarrow r'^2 = \frac{16 \times 10^{-5}}{10^{-1}} = 16 \times 10^{-4}$$

البعد بين الكتلة ومركز الدوران $r' = 4 \times 10^{-2}\ m$



البعد بين الكتلتين $2r' = 2 \times 4 \times 10^{-2}$

$$= 8 \times 10^{-2} = 0.08\ m$$

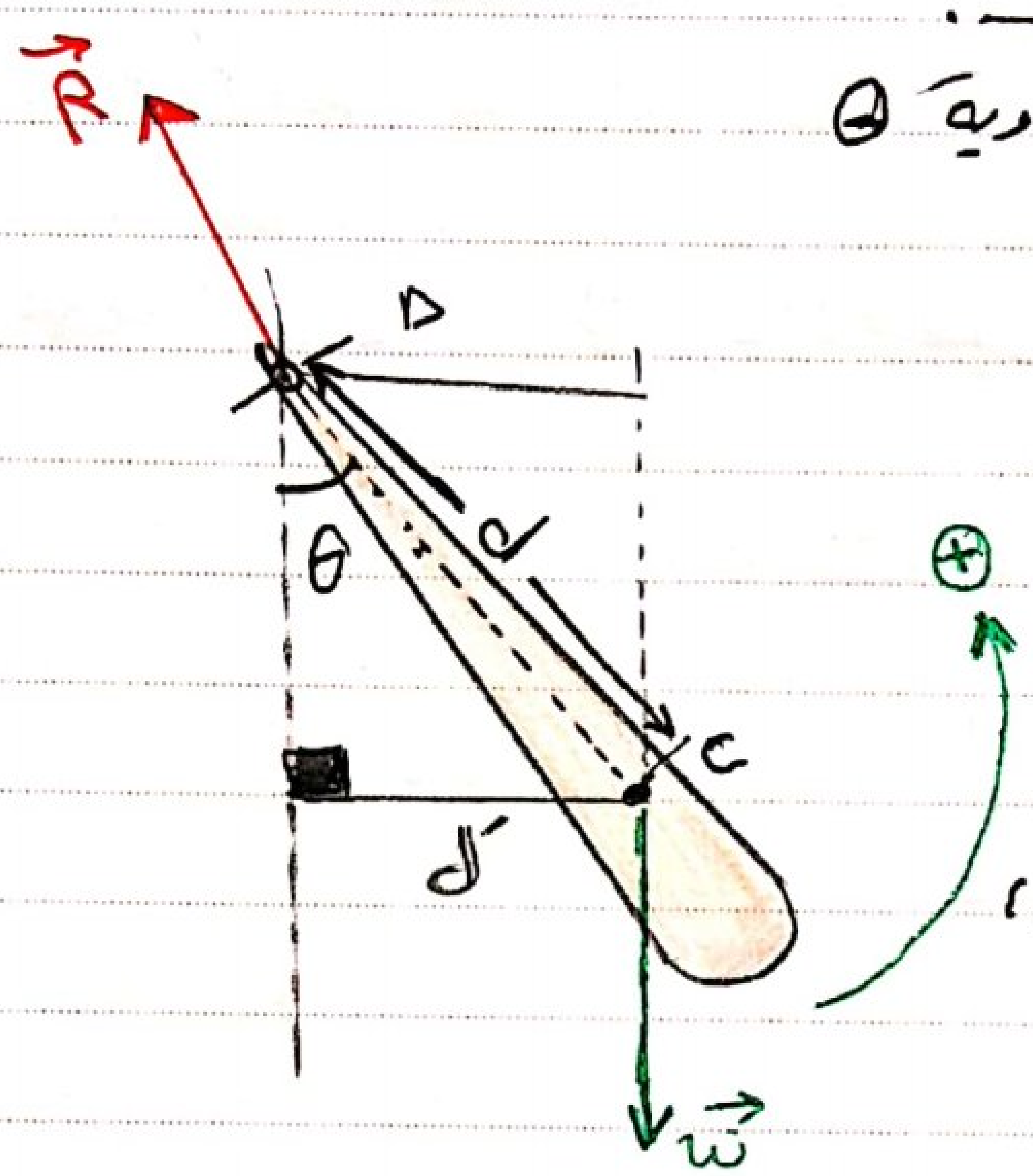


النواس الثقلي

كل جسم صلب يهتز تحت تأثير ثقله حول محور أفقي عمودي على مستويه ولا يمر من مركز عطالته.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

1- الدراسة الحركية للنواس الثقلي.



نزيح الجسم عن وضع توازنه بزاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية.

تؤثر في الجسم قوتان هما:

- قوة ثقله $\vec{w}$
- قوة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

الحركة دورانية.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك (نظرية التسارع الزاوي)

$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} \quad ...(1)$$

، أختار الجهة الموجبة للحركة عكس دوران عقارب الساعة.

$$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0 \quad ...(2)$$

لأن حامله يمر من محور الدوران.

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -d' \cdot w$$

ذراع قوة الثقل (البعد بين حامل القوة ومحور الدوران)

$$d' = d \cdot \sin\theta$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -d \sin\theta \cdot w \quad ...(3)$$

نعوض (3) و (2) في (1) نجد

$$-w\, d \sin\theta + 0 = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} \Rightarrow I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} = -w\, d \sin\theta$$

$$I_\Delta . (\theta)''_t = -mg.d.\sin\theta$$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} . \sin\theta$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لاتقبل حلاً جيبياً ،
لأنها تحوي $\sin\theta$ بدل θ .

كيف تكون العلاقة السابقة من أجل السعات الزاوية الصغيرة

من أجل السعات الزاوية الصغيرة $\theta < 0.24 \text{ rad}$ تصبح العلاقة

$$\sin\theta = \theta .$$

$$\Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} . \bar{\theta} \quad --- \ (1)$$

برهن أن حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي جيبية دورانية .

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} . \bar{\theta}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل .

$$\bar{\theta} = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0 . \theta_{max} . \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 . \underbrace{\theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}_{\theta}$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 . \theta \quad --- \ (2)$$

بمقارنة ① مع ② نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن جميع المقادير m ، g ، I_Δ ، d موجبة

⇐ حركة النواس الثقلي في السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية

١ استنتج علاقة دوره الخاص من أجل السعات الزاوية الصغيرة .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \quad , \quad \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} .$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} .$$

T_0 : دور النواس الثقلي (s) ،

I_Δ : عزم عطالة النواس الثقلي ($Kg.m^2$)

d : هي البعد بين مركز عطالة النواس الثقلي ومحور الدوران (m)

m : كتلة النواس الثقلي . (Kg)

أولاً:

إذا كان النواس الثقلي دون تثبيت كتل عليه.

(ساق فقط، قرص فقط)

d: تستنتج من نص المسألة.

I_Δ: عزم العطالة تحسب حسب هايغنز

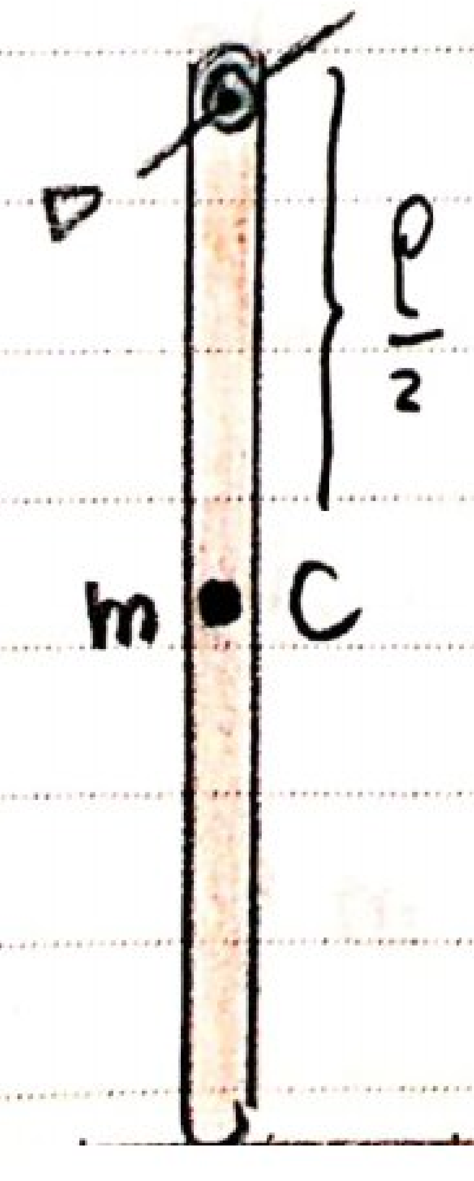
$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2$$

d: بعد مركز العطالة عن محور الدوران

I_Δ: عزم عطالة الجسم حول محور لا يمر من مركز عطالته.

$I_{\Delta/c}$: عزم عطالة الجسم حول محور يمر من مركز عطالته (ونعطى بنص المسألة)

m: كتلة الجسم



مثال: ساق متجانسة كتلتها m وطولها ℓ تهتز حول محور أفقي يمر من طرفها العلوي

استنتج علاقة دور النواس بدلالة ℓ .

انطلاقاً من دور النواس الثقلي من أجل السعات الصغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} .$$

$$d = \frac{\ell}{2}$$ من نص المسألة.

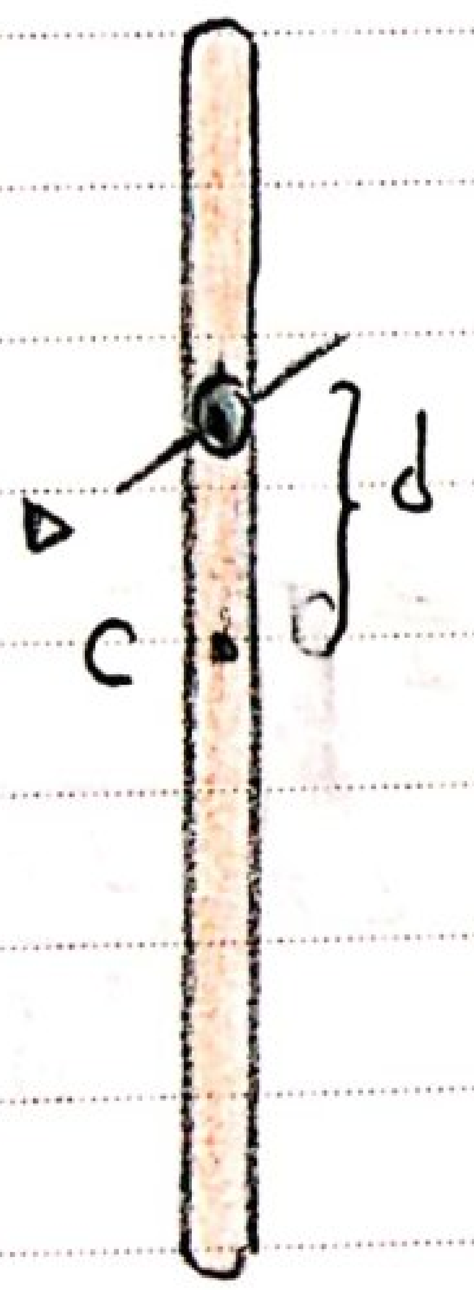
$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{1}{4} m \ell^2$$

$$I_\Delta = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m \ell^2 = \frac{4}{12} m \ell^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} m \ell^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m \ell^2}{m g \frac{\ell}{2}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

ملاحظة: إن دور النواس الثقلي في هذه الحالة لا يتعلق بكتلة الجسم.



مثال: ساق متجانسة كتلتها m طولها ℓ تهتز حول محور أفقي عمودي على مستويها ويمر بنقطة تبعد $\frac{\ell}{6}$ من مركز عطالتها. استنتج علاقة دور النواس بدلالة طوله انطلاقاً من علاقة دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}} \qquad d = \frac{\ell}{6}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d^2$$

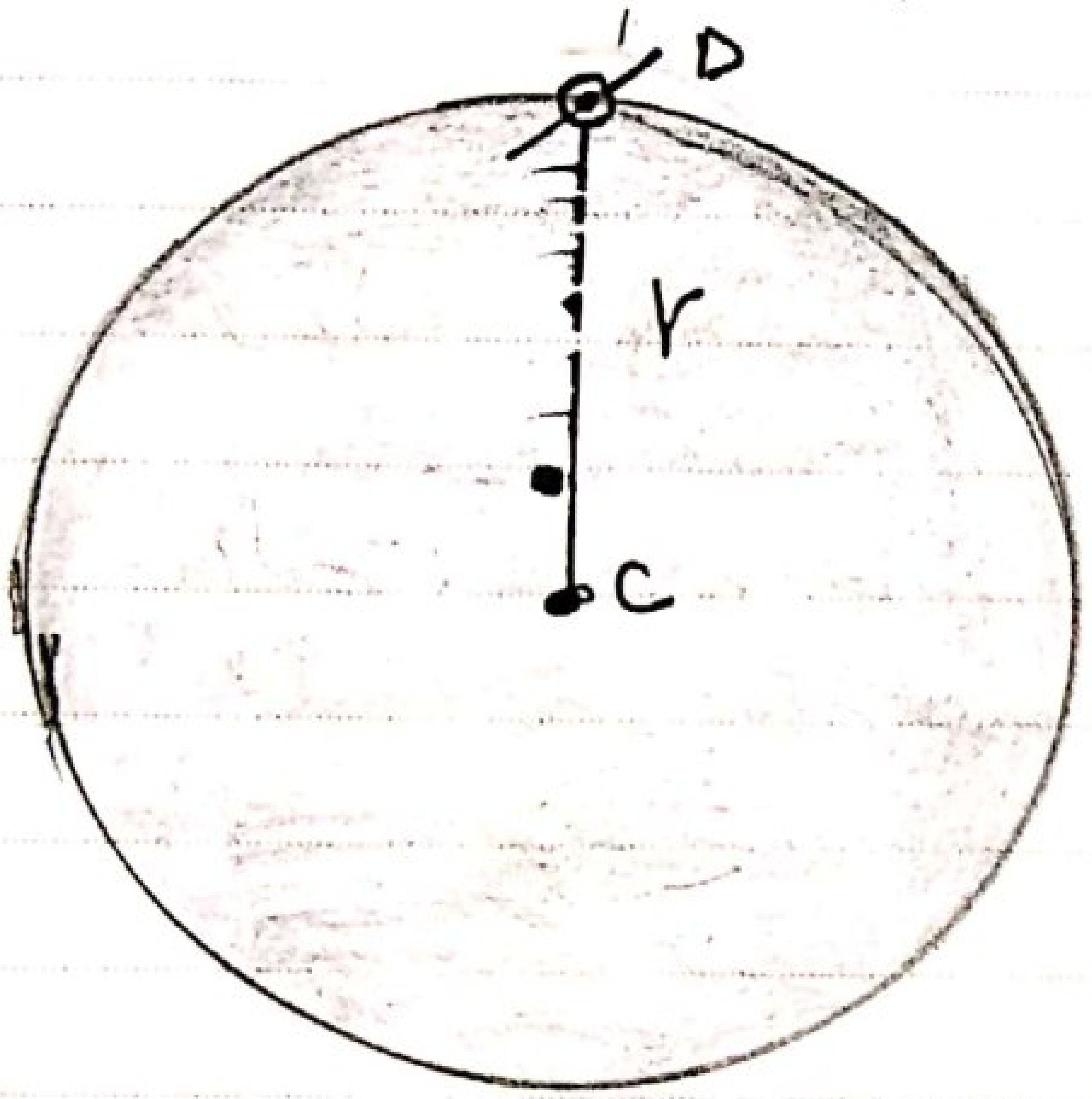
$$I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{1}{36} m \ell^2$$

$$I_\Delta = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right) m \ell^2 = \frac{1}{9} m \ell^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{9} m \ell^2}{mg \frac{\ell}{6}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}.$$

مثال: قرص متجانس كتلته m نصف قطره r نجعله شاقوليا ويهتز حول محور أفقي عمودي على مستويه ويمر في نقطة من محيطه.

انطلاقا من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة، استنتج علاقة دور النواس بدلالة r.



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$d = r ,$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cdot mr^2}{mgr}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

ملاحظة: لإيجاد علاقة السرعة الزاوية للنواس لحظة المرور بالشاقول

الوضع (1) $\theta_1 = \theta_{max}$ سكون

الوضع (2) $\theta_2 = 0$ شاقول.

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$ نقطة تأثيره لاتنتقل

$E_{K_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية

$$E_{k_2} = W_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgh \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}}$$

الانتقال الشاقولي : $h = d(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيميـاء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

إيجاد السرعة الخطية لنقطة من النواس.

$$v = \omega . r$$

ω : السرعة الزاوية للنواس $rad.s^{-1}$

r : بعد النقطة عن محور الدوران.

ثانياً: في حالة تثبيت كتل على النواس.

تحسب d: من القانون $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$$d = \frac{m_1 \bar{r_1} + m_2 \bar{r_2} + \dots m_i \bar{r_i}}{m_1 + m_2 + \dots m_i}$$

تكون r موجبة اذا كانت الكتلة تحت محور الدوران
تكون r سالبة اذا كانت الكتلة فوق محور الدوران

تحسب I_Δ: مجموع عزوم عطالة مكونات النواس.

مسألة إضافية:

نواس ثقلي يتكون من ساق مهملة الكتلة طولها $l = 1m$ نجعلها شاقولية ونثبت على طرفيها كتلتين: $m_1 = 0.4 kg$ (الطرف العلوي) وعلى الطرف السفلي $m_2 = 0.6 kg$، ونجعله يهتز حول محور أفقي عمودي على مستويه مار بنقطة تبعد $20 cm$ عن الطرف العلوي

والمطلوب:

A أ- احسب دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة

ب- احسب دوره من أجل $\theta_{max} = 0.4 rad$

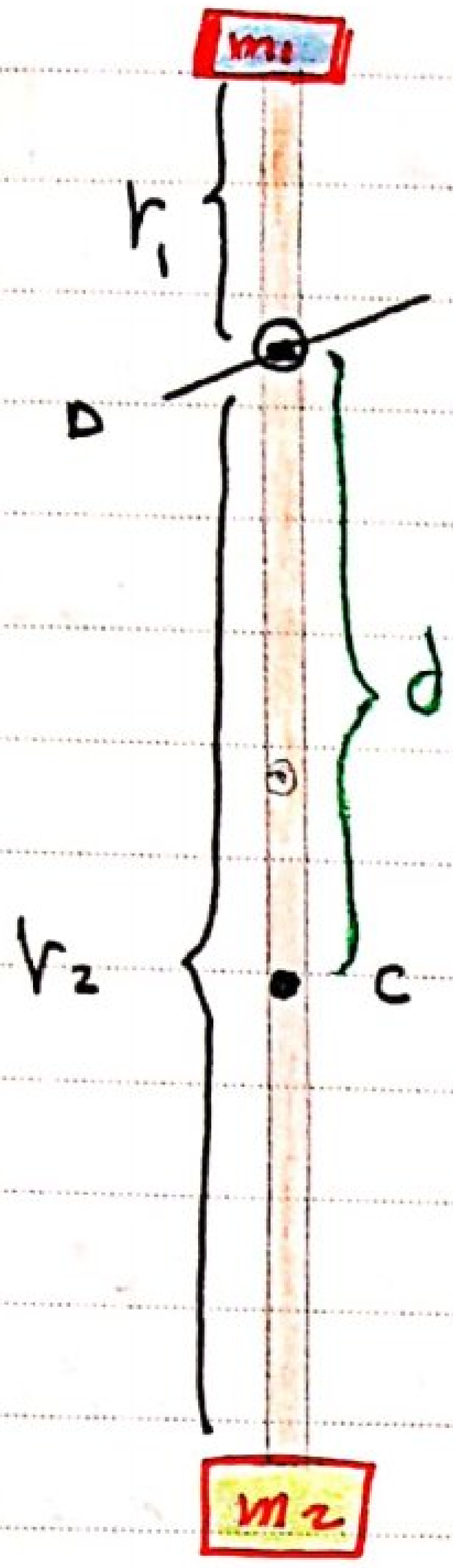
B نزيح النواس عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = 60°$ ونتركه دون سرعة ابتدائية والمطلوب:

أ- استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعته الزاوية لحظة مروره بالشاقول

ب- احسب قيمة السرعة الخطية لمركز عطالته. والسرعة الخطية للكتلة m_2 عند المرور بالشاقول.

تعطى: $g = 10 m.s^{-2}$

$\pi^2 = 10$.



A) أ -

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$$

طلب d :

$$d = \frac{m_2 \cdot r_2 - m_1 r_1}{m_2 + m_1} = \frac{0.6(0.8) - 0.4(0.2)}{0.6 + 0.4}$$

$$d = \frac{48\times10^{-2} - 8\times10^{-2}}{1} = 0.4\,m$$

$$r_1 = 20\times10^{-2} = 0.2\,m$$

$$r_2 = 1 - 0.2 = 0.8\,m$$

طلب I_Δ :

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$I_{\Delta/c} = 0$. لأن الساق مهملة الكتلة

$$I_\Delta = 0 + m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2$$

$$I_\Delta = 0.4(0.2)^2 + 0.6(0.8)^2$$

$$I_\Delta = 16\times10^{-3} + 384\times10^{-3} = 400\times10^{-3} = 0.4\,kg.m^2$$

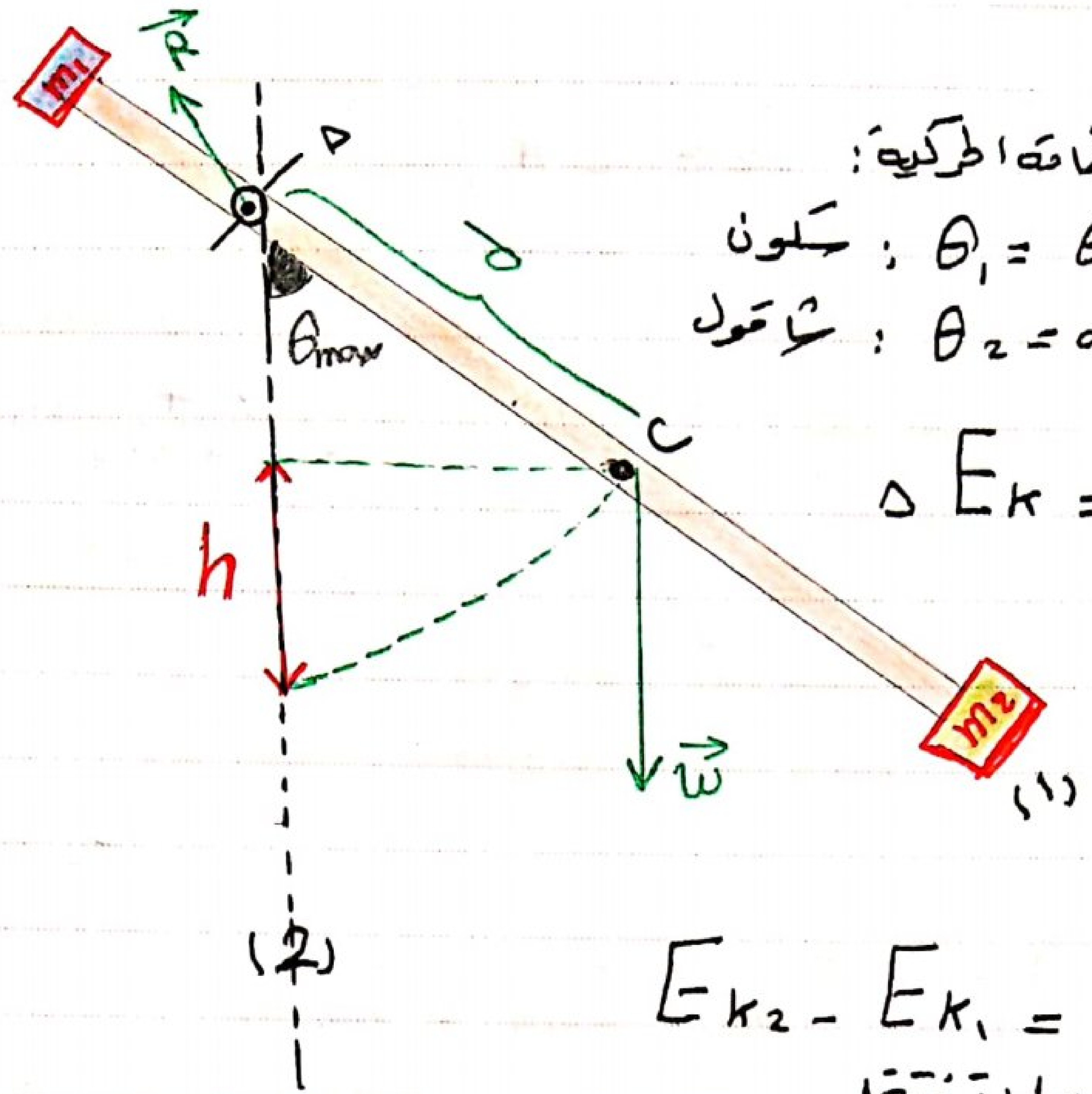
$$m = m_1 + m_2 = 0.4 + 0.6 = 1\,kg$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{1\times10\times0.4}} = 2\,s$$

$\theta_{max} = 0.4\,rad$ - 2

$$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$$T_0' = 2\left(1 + \frac{0.16}{16}\right) = 2(1 + 0.01) = 2(1,01) = 2.02\,s$$



B نطبق نظرية الطاقة الحركية:

1- الوضع (1) : $\theta_1 = \theta_{max}$: سكون

الوضع (2) : $\theta_2 = 0$: شاقول

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$ نقطة تأثيره لا تنتقل.

$E_{K_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية.

$$E_{K_2} = W_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgh.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}} . \qquad h = d(\cos(0) - \cos\theta_{max})$$

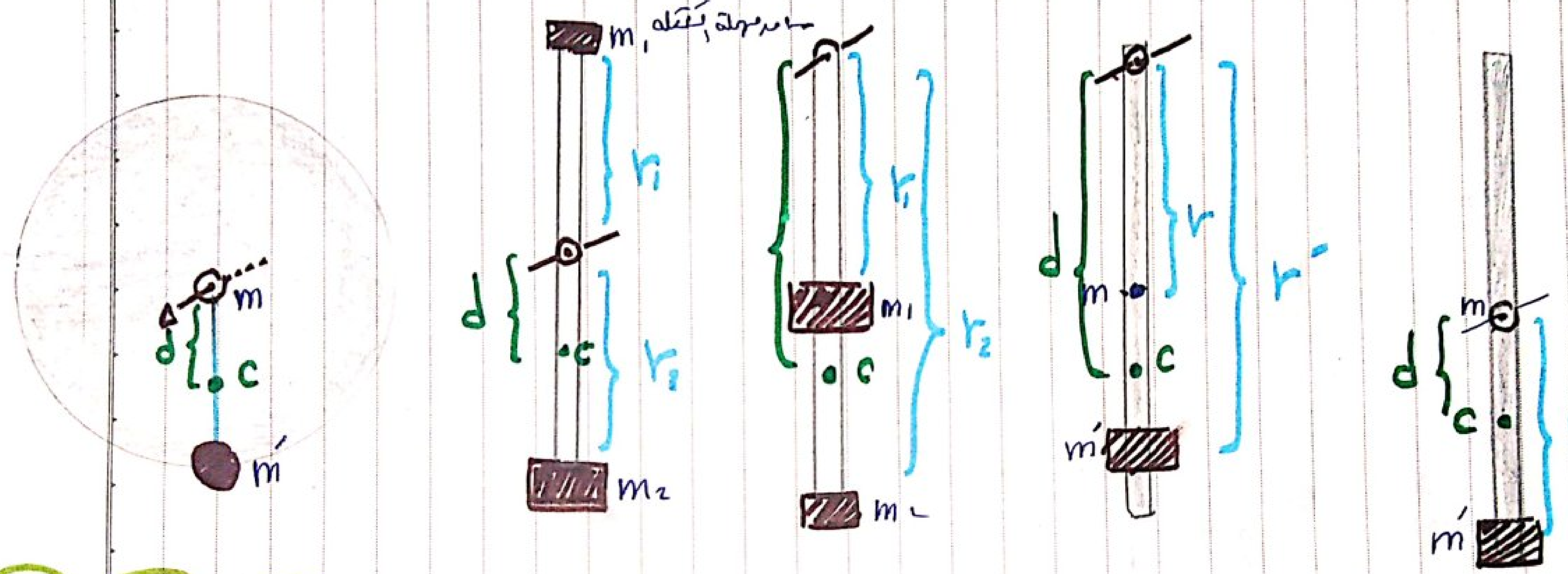
$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,d(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2\times 1\times 10\times 0.4(1-\frac{1}{2})}{0.4}}$$

$$\omega = \sqrt{10} = \pi\ rad\cdot s^{-1}.$$

$$v_c = \omega . d = \pi\times 0.4 = 4\pi\times 10^{-1} = 1.25\ m.s^{-1}$$

$$v_2 = \omega . r_2 = \pi\times 0.8 = 8\pi\times 10^{-1} = 2.5\ m.s^{-1}.$$



$$d = \frac{m'r + m(0)}{m + m'}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + m'r^2$$

$$d = \frac{m_2r_2 - m_1r_1}{m_1 + m_2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$I_\Delta = 0 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$

$$d = \frac{m_2r_2 + m_1r_1}{m_1 + m_2}$$

$$I_\Delta = \underset{\text{ساق}}{I_\Delta} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$I_\Delta = 0 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$

$$d = \frac{m'r' + mr}{m + m'}$$

$$I_\Delta = \underset{\text{ساق}}{I_\Delta} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = (I_{\Delta/c} + mr^2) + m'r'^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}mL^2 + mr^2 + m'r'^2$$

$$d = \frac{m'r' + m(0)}{m + m'}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m'}$$

نظرية

$$I_\Delta = \frac{1}{12}mL^2 + m'r'^2$$

النواس الثقلي البسيط

نظرياً: نقطة مادية تهتز تحت تأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت.

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط خفيف لا يمتط طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

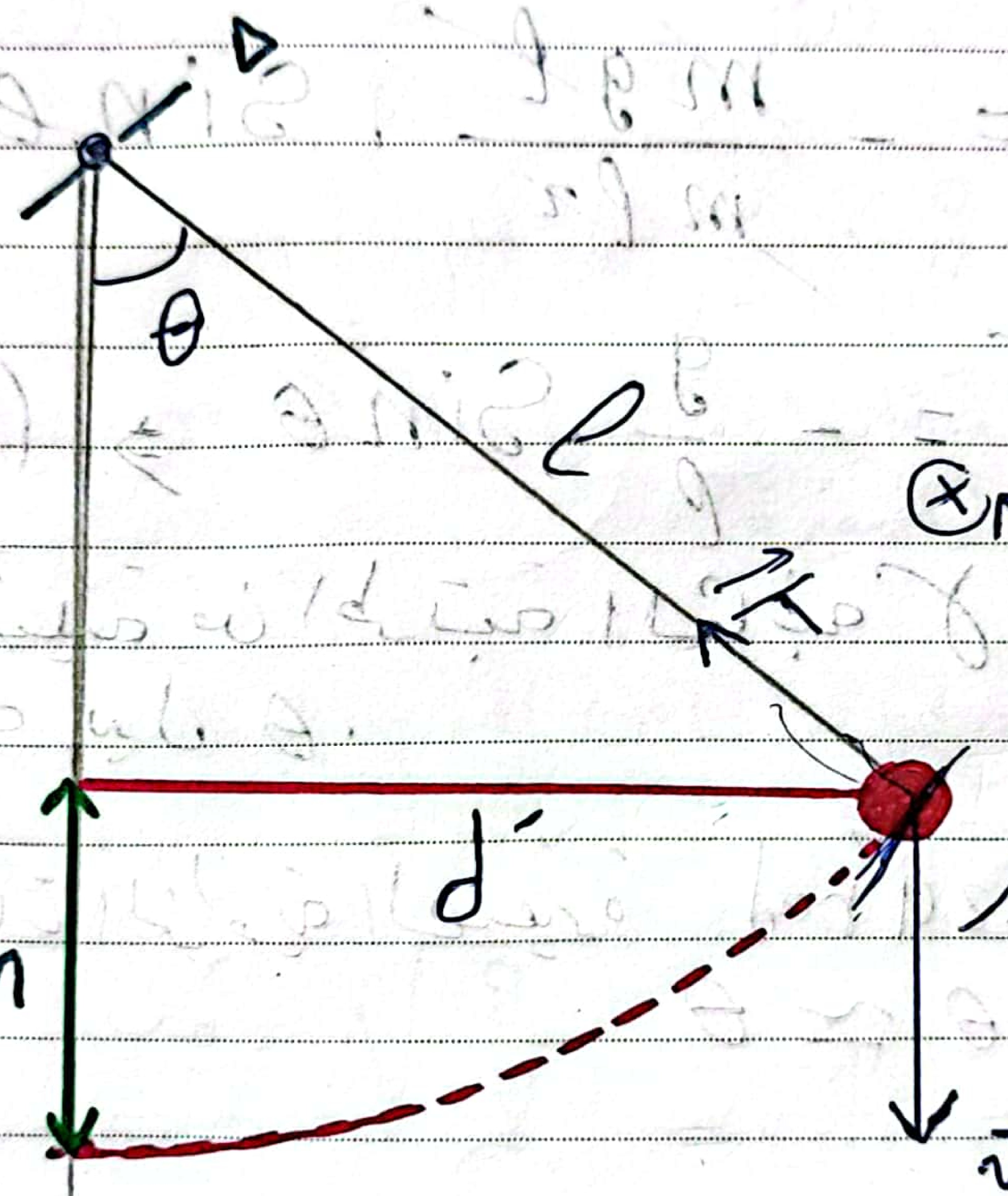
الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

الدراسة التحريكية:

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{w}$: ثقل الكرة.

$\vec{T}$: توتر الخيط.



$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \alpha \Rightarrow \Gamma_{\vec{w}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = I_{\Delta} \alpha$$

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامله يلاقي محور الدوران.

الاتجاه الموجب للدوران عكس دوران عقارب الساعة.

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -d \cdot w$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -l \cdot \sin\theta \cdot w$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -mg \cdot l \cdot \sin\theta$$

$$-mgl\sin\theta + 0 = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{mgl}{I_\Delta} \cdot \sin\theta$$

$$I_\Delta = m \cdot l^2$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{\cancel{m}g\cancel{l}}{\cancel{m}\, l^{\cancel{2}}} \cdot \sin\theta$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta \Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا تقبل حلاً جيبياً لوجود $\sin\theta$ بدل θ.

من أجل السعات الزاوية الصغيرة $\theta < 0.24\ rad$
$\sin\theta \simeq \theta$

تصبح المعادلة:

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l} \cdot \bar{\theta} \quad \text{---} \ (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتأكد من صحة الحل: باشتقاقه مرتين بالنسبة للزمن

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\, \theta_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

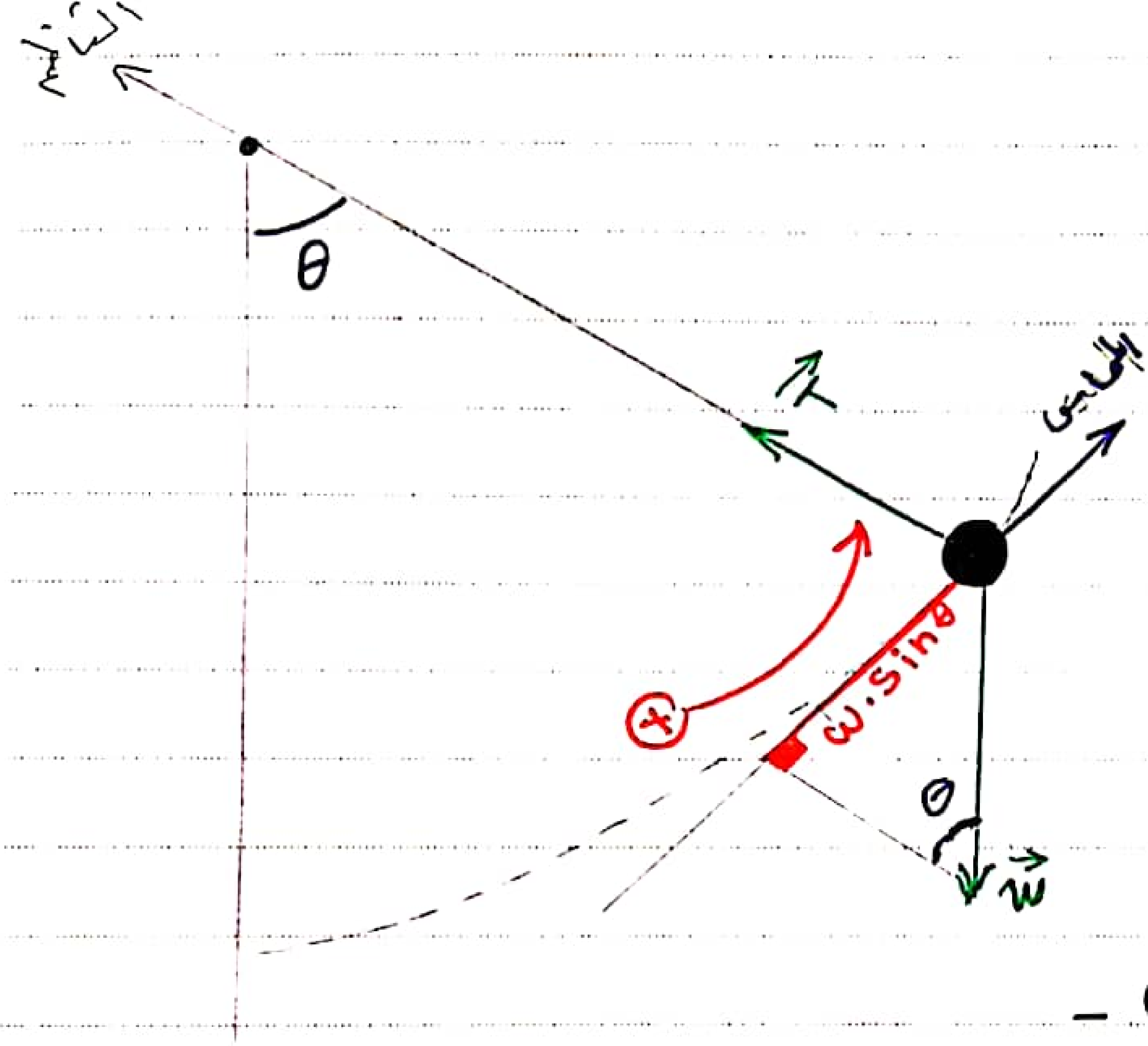
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta} \quad \text{---- } (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقق لأن g ، l موجبان

⬅ حركة النواس الثقالي البسيط هي جيبية دورانية من أجل السعات الزاوية الصغيرة.



* الدراسة التحريكية.

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{W}$: ثقل الكرة.

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط

$$\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة.

$$-w\cdot\sin\theta + 0 = m\cdot a_T$$

$$-mg\sin\theta = m\cdot a_T$$

$$\bar{a}_T = L\cdot\bar{\alpha} = L(\bar{\theta})''_t .$$

$$a_T = -g\cdot\sin\theta \Rightarrow L(\bar{\theta})''_t = -g\cdot\sin\theta$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\cdot\sin\theta$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة

$\theta < 0.24\ rad$. $\sin\theta = \theta$.

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\cdot\theta$$

س. انطلاقاً من العلاقة: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\cdot\theta$ ..1 . برهن أن حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي جيبية دورانية ثم استنتج علاقة دوره الخاص T_0.

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\cdot\theta_{max}\cdot\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\cdot\underbrace{\theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

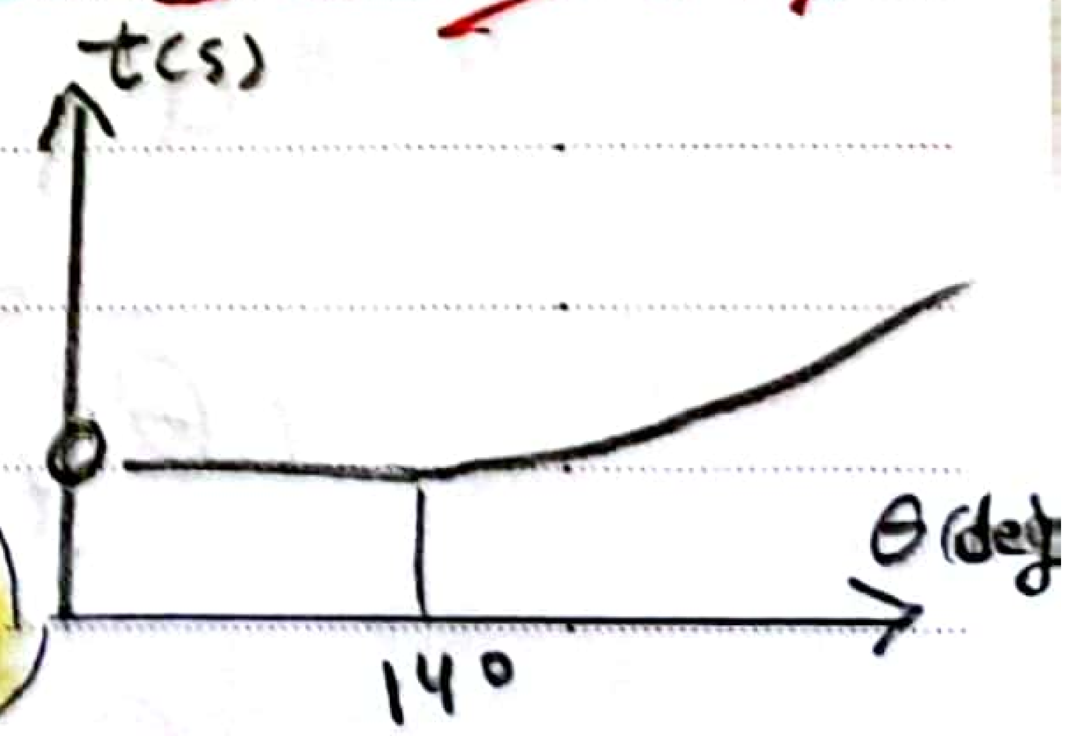
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\cdot\theta \quad ...2$$

بالمقارنة بين 1 و 2 نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} > 0$$

وهذا محقق لأن g ، L موجبان ⇐ حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي جيبية دورانية

* استنتاج علاقة دوره الخاص T_0



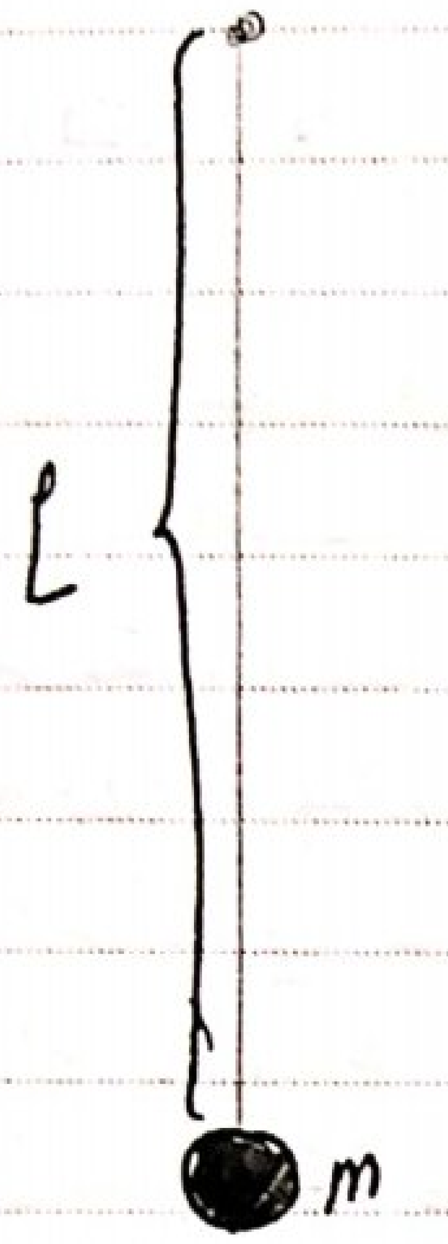
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة، ونلاحظ أن الدور يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لطول النواس

" " " عكساً " " " للتسارع الجاذبي

س: استنتج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل النوسات صغيرة السعة انطلاقاً من دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$$

$$d = \ell \ ، \ I_\Delta = m\ell^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{m g \ell}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

* علاقة دور النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الكبيرة،

$$T'_0 = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

T'_0: الدور من أجل السعات الكبيرة

T_0: الدور من أجل السعات الصغيرة.

θ_{max}: السعة الزاوية الكبيرة (rad).

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

نستنتج أن دور النواس الثقلي البسيط:

١- لا يتعلق بكتلته ولا بنوع مادة كرته.

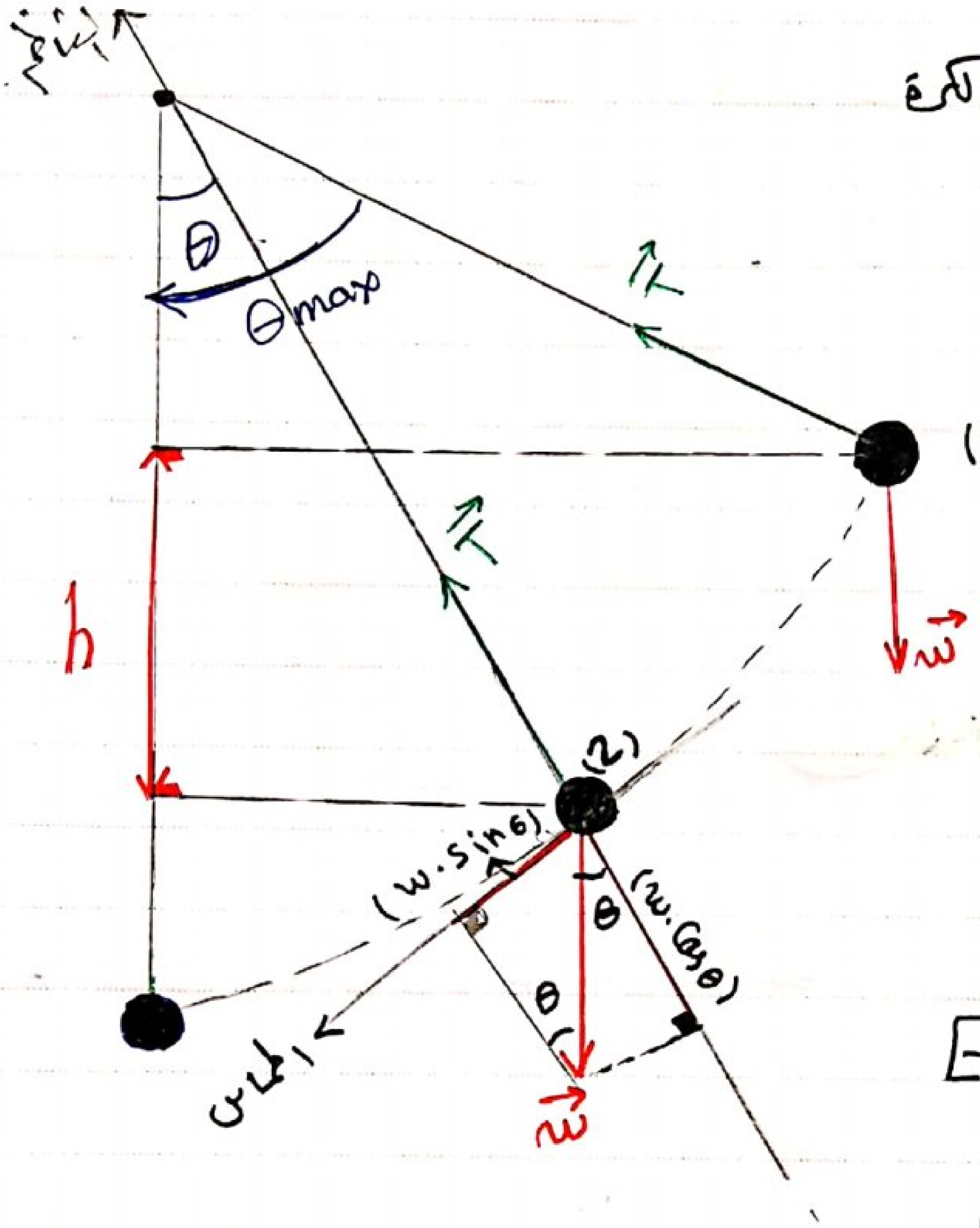
٢- النوسات صغيرة السعة لها الدور نفسه. $\theta \leq 0.24\ rad$

$\theta \leq 14°$

ويتناسب: طرداً مع الجذر التربيعي لطول خيطه ℓ ،

عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية g.

استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس في نقطة من مسارها.



القوى الخارجية المؤثرة في الكرة

$\vec{w}$ ثقل الكرة،

$\vec{T}$ توتر الخيط.

لحساب السرعة الخطية لكرة النواس (1) في الوضع (2) نطبق نظرية الطاقة الحركية في الوضعين

الوضع الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$.سكون

الوضع الثاني: $\theta_2 = \theta$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

$W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامله عمودي على الانتقال في كل لحظة.

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة البدائية.

$$E_{k_2} = W_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g h$$

$$v^2 = 2 g h \quad , \quad h = \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2 g \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2 g \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

حالة خاصة . عند المرور بالشاقول $\theta = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$

$$v = \sqrt{2 g \ell (1 - \cos \theta_{max})}$$

١ـ استنتاج علاقة توتر خيط التعليق في نقطة من مسار الكرة .

القوى الخارجية المؤثرة في كرة النواس : $\vec{w}$: ثقل الكرة
$\vec{T}$: توتر الخيط .

$$\Sigma \vec{F} = m . \vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m . \vec{a}$$

بالاسقاط على محور محمول على $\vec{T}$ وبجهته (الناظم) .

$$-w . \cos \theta + T = m . a_c$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$T = mg . \cos \theta + m \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = mg \cos \theta + m . \frac{2 g \ell}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

$$T = mg . \cos \theta + 2 mg (\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

$$T = mg (\cos \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos \theta_{max})$$

$$T = mg (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_{max})$$

حالة خاصة : عند المرور بالشاقول . $\theta = 0$

$$T = mg (3 \times 1 - 2 \cos \theta_{max})$$

$$T = m . g (3 - 2 \cos \theta_{max})$$

* استنتج علاقة التسارع المماسي في نقطة من مسار الكرة.

القوى المؤثرة على الكرة: $\vec{w}$: ثقل الكرة.

$\vec{T}$: توتر الخيط.

$$\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$$

بالاسقاط على المماس.

$$+w\cdot\sin\theta + 0 = m\cdot a_T$$

$$mg\cdot\sin\theta = m\cdot a_T \Rightarrow \boxed{a_T = g\cdot\sin\theta}$$

* الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط

* $E = E_k + E_p = ConsT.$

وهي مقدار ثابت

الأسئلة:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة:

1- الطيقاتية نواس ثقالي، فهي تقدم أي تنقص دورها.
ولتصحيح الطيقاتية يجب زيادة دورها.

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ: ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

نلاحظ أن الدور تيناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم العطالة، ولزيادة الدور نعمل على زيادة عزم العطالة أي خفض القرص بمقدار ضئيل.
الخيار a.

2- الدور يتناسب عكساً في الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية

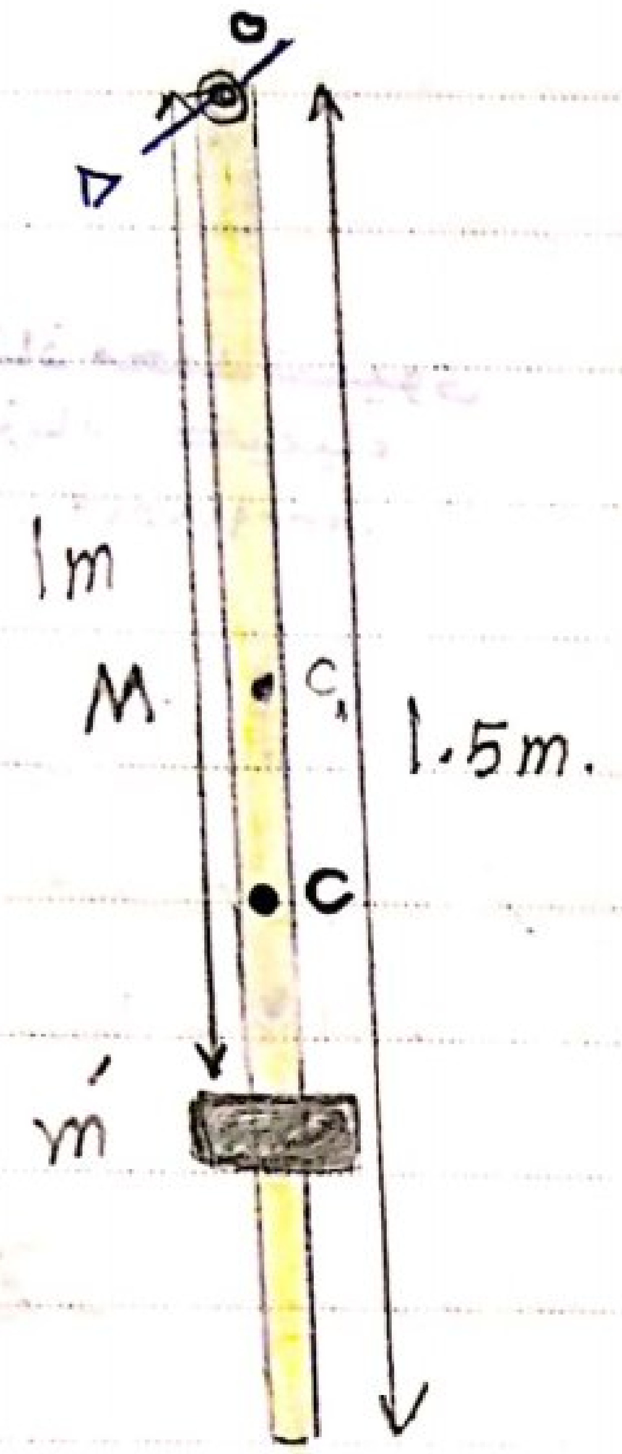
$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

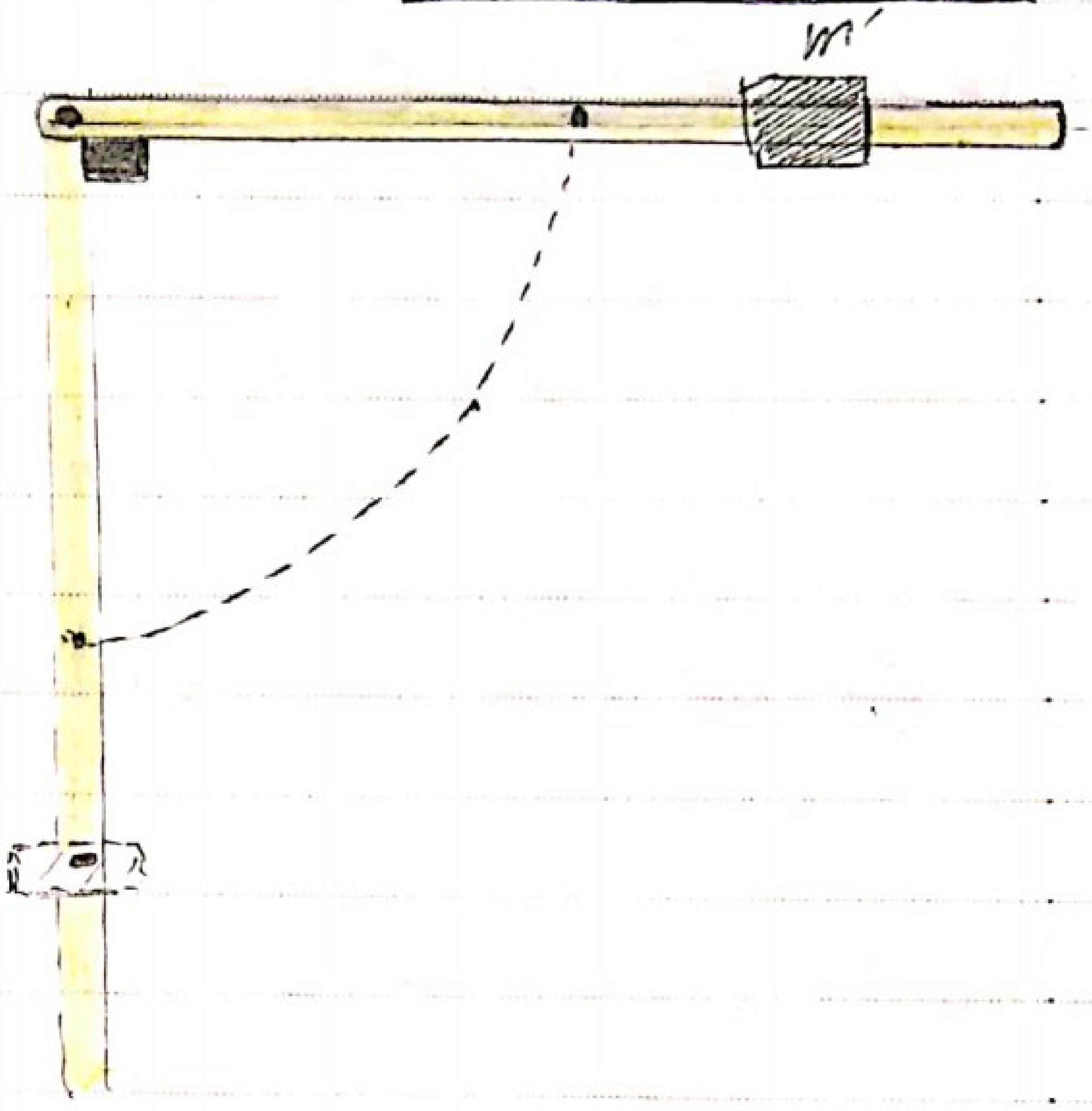
وعند الارتفاع تنقص قيمة g فيزداد الدور وتؤخر الطيقاتية.
c.

ثانياً: حل المسائل.

المسألة الأولى:

$\ell = 1.5\,m$ ، $M = 0.5\,kg$.





١) حساب: الدور T_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}.$$

$$d = \frac{m'(r') + M(r)}{m' + M} = \frac{0.5\times 1 + 0.5(0.75)}{0.5+0.5} = \frac{0.5(1.75)}{1}$$

$$d = 0{,}875\ m$$

$$I_\Delta = \underbrace{I_\Delta}_{\text{ساق}} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = \left(I_{\Delta/c} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + m'\cdot r'^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 + m'\cdot r'^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}Ml^2 + m'.r^2 = \frac{1}{3}\times 0.5(1.5)^2 + 0.5(1)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}\times 0.5 \times 2.25 + 0.5 = (0.75 + 1)\,0.5$$

$$I_\Delta = 0.5(1.75) = 0.875\ Kg.m^2.$$

$$m = m' + M = 0.5 + 0.5 = 1\,kg$$

بالتعويض :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.875}{1\times 10\times 0.875}} = 2\,S$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

2. القوى المؤثرة : $\vec{w}$: ثقل الجملة ، $\vec{R}$ رد فعل محور الدوران ،
بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :
الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$ ، حالة سكون .
الشاقول ، $\theta_2 = 0$.

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثيره لا تنتقل .
$E_{k_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية .

$$E_{k_2} - 0 = W_{\vec{w}} + 0$$
$$\Rightarrow E_{k_2} = W_{\vec{w}}$$

$$E_{k_2} = mgh.$$ ، $h = d(1 - \cos\theta_{max})$

$$h = 0.875\,(1 - \cos\tfrac{\pi}{2}) = 0.875\,m.$$

$$E_k = 1\times 10\times 0.875 = 8.75\,J.$$

حساب السرعة الخطية υ يلزمنا حساب ω .

$$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta . \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \times 8.75}{0.875}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \ (rad.s^{-1})$$

حساب السرعة الخطية للكتلة m' .

$$v = \omega . r \longrightarrow$$ بعد الكتلة m' عن محور الدوران

ω : السرعة الزاوية للنواس

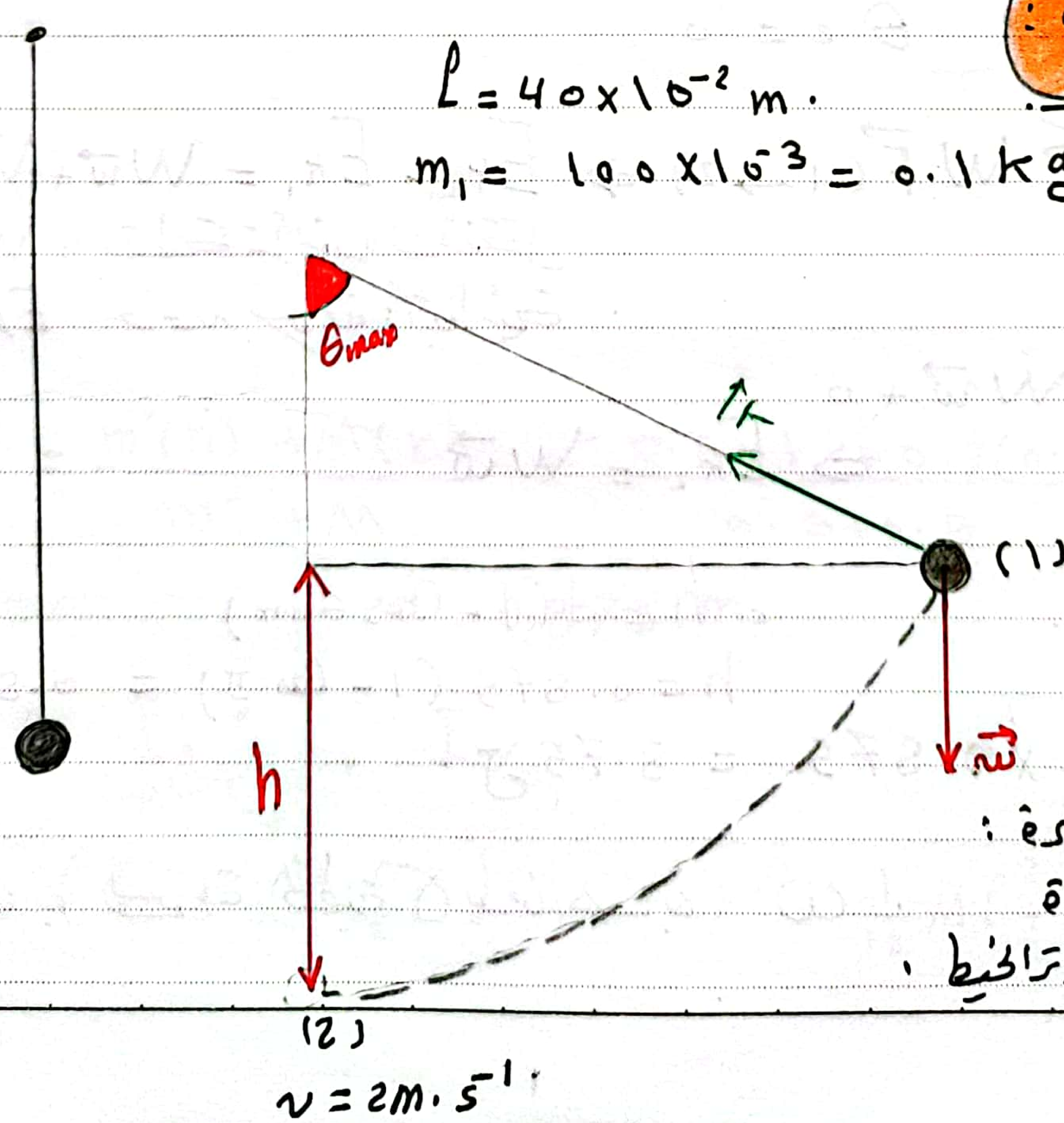
$$v = 2\sqrt{5} \times 1 = 2\sqrt{5} \ m.s^{-1}$$

المسألة الثانية :

$$l = 40 \times 10^{-2} \ m.$$

$$m_1 = 100 \times 10^{-3} = 0.1 \ kg.$$

-1



القوى المؤثرة في الكرة :

$\vec{W}$: ثقل الكرة

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط .

تطبيق نظرية الطاقة الحركية :

الوضع الأول : سكون . $\theta_1 = \theta_{max}$

الوضع الثاني : شاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامله عمود على الانتقال في كل لحظة .

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية :

$$E_{k_2} - 0 = \overline{W}_{\vec{w}} + 0$$

$$E_{k_2} = \overline{W}_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g h.$$

$$h = \ell(1 - \cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2 g \ell (1 - \cos\theta_{max})$$

$$(2)^2 = 2 \times 10 \times 4\times 10^{-1} (1 - \cos\theta_{max})$$

$$4 = 2 \times 4 (1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow 1 = 2(1 - \cos\theta_{max})$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

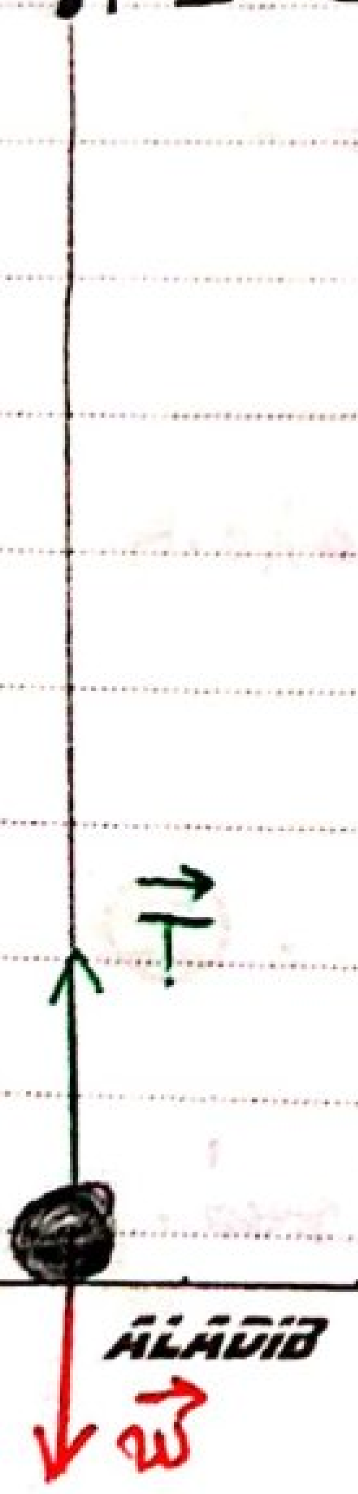
$$\Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\, rad.$$

2) القوى المؤثرة في الكرة : $\vec{w}$ ثقل الكرة ، $\vec{T}$: توتر الخيط .

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

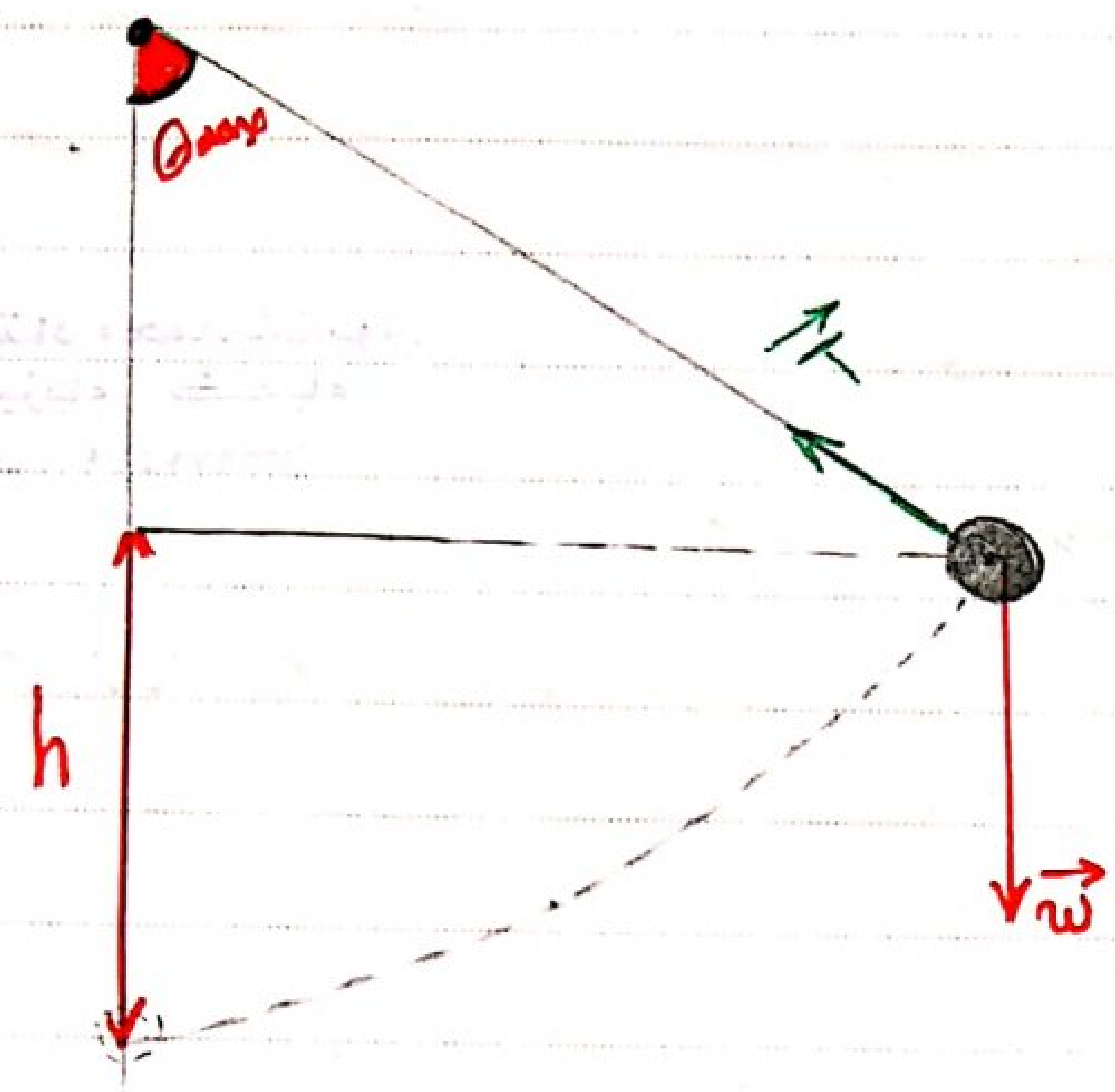
بالإسقاط على محور محمول على $\vec{T}$ وجهته نحو الناظم ا

$$-w + T = m . a_c \Rightarrow T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$



$$T = m(g + \frac{v^2}{\ell}) = 0.1(10 + \frac{4}{4\times 10^{-1}}) = 2N.$$

المسألة الثالثة :



$m = 0.5\ kg$

$L = 1.6\ m.$

$h = 0.8\ m.$

① ١. استنتاج العلاقة المحددة لسرعة الكرة عند المرور بالشاقول.

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

$\vec{w}$: ثقل الكرة.

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط

نطبق نظرية الطاقة الحركية.

الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$. السكون.

الوضع الثاني : $\theta_2 = 0$ الشاقول.

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}}\ (1 \rightarrow 2)$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

$W_{\vec{T}} = 0$: حامله يعامد الانتقال في كل لحظة.

$E_{k_1} = 0$: دون حركة ابتدائية.

$$E_{k_2} - 0 = W_{\vec{w}} + 0 \Rightarrow E_{k_2} = W_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.8}$$

$$\Rightarrow v = 4\ (m.s^{-1})$$

②

$$h = \ell(1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow 0.8 = 1.6(1 - \cos\theta_{max})$$

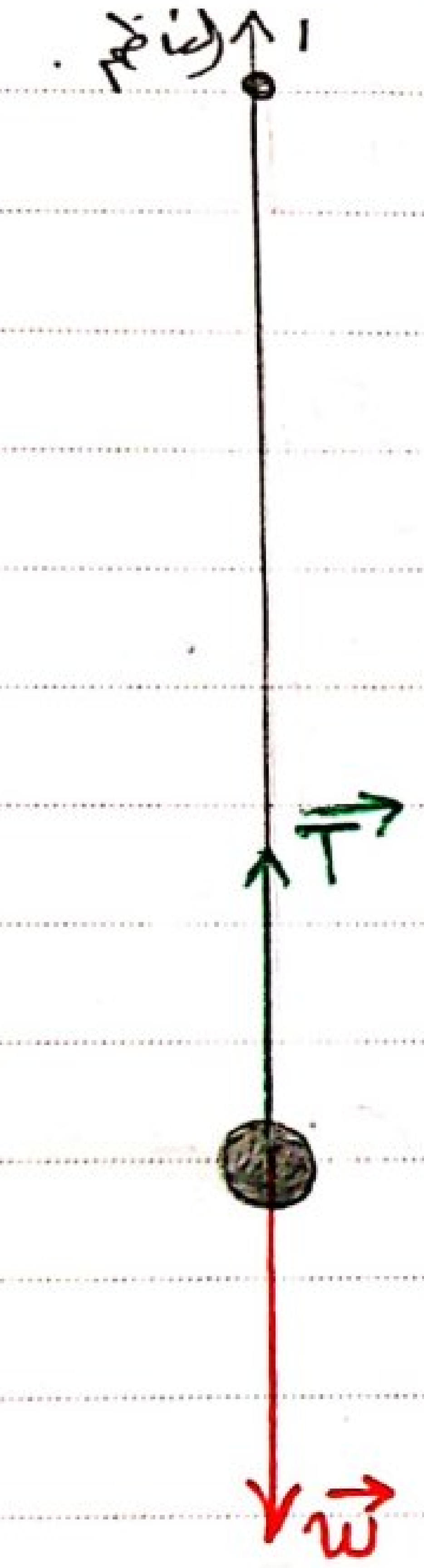
$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{max} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad.$$

③ . $T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}} = 0.8\pi\ s$$

$$T_0' = 0.8\pi\left(1 + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{16}\right) = 0.8\pi\left(1 + \frac{10}{144}\right)$$

$$T_0' = 2.68\ (s)$$



④ . القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

$\vec{w}$: ثقل الكرة .

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط .

$$\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$$

بالإسقاط على محور محمول على $\vec{T}$ وجهته (الناظم)

$$-w + T = m\cdot a_c$$

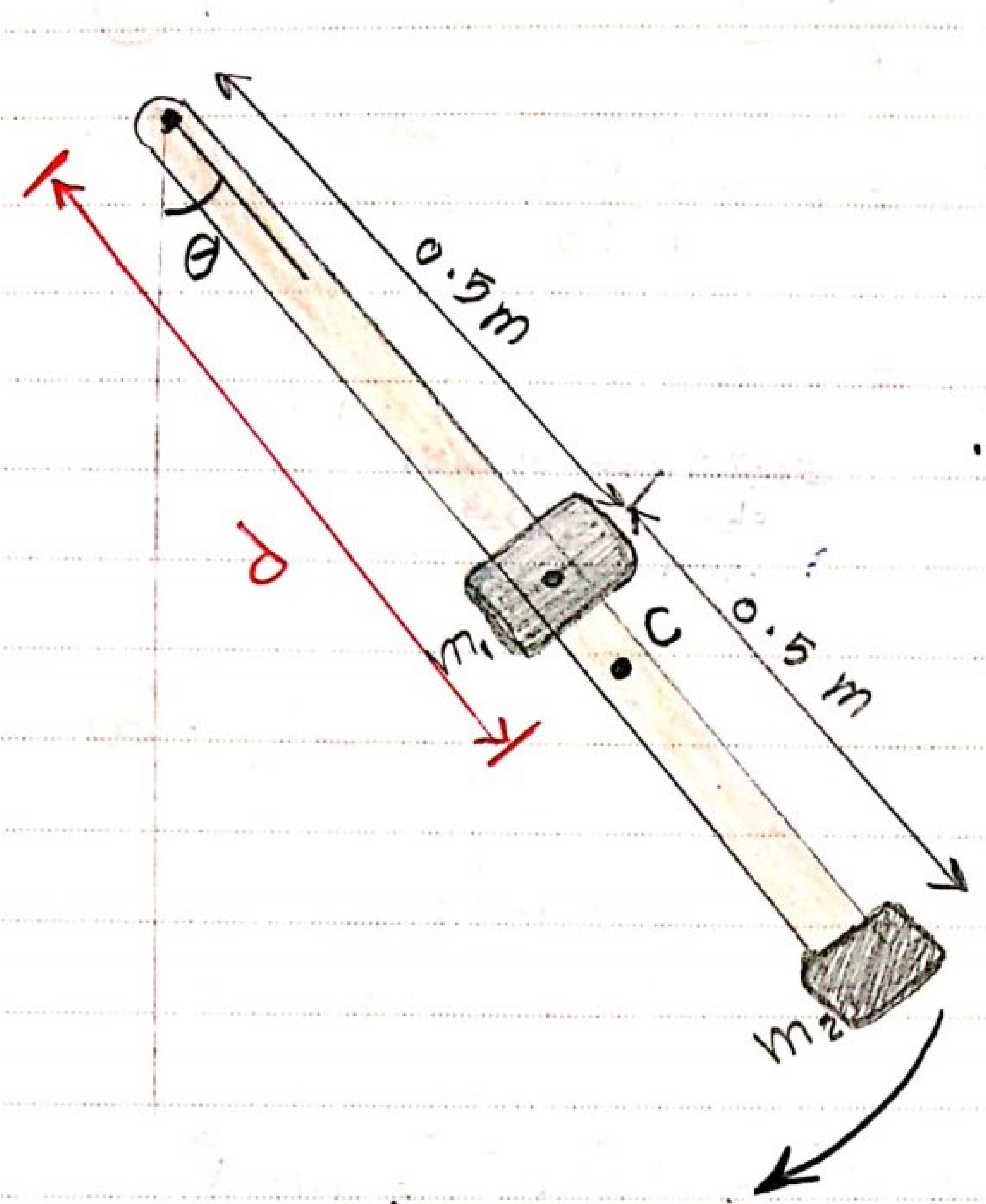
$$T = mg + m\cdot\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

حساب قيمة التوتر :

$$T = 0.5\left(10 + \frac{16}{1.6}\right) = 0.5(10 + 10) = 10\,N.$$

المسألة الرابعة :



$L = 1\,m \,,\; m_1 = 0.4\,kg \,,\; m_2 = 0.2\,kg .$

① : حساب T_0 للتذبذبات صغيرة السعة :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{0.4\times0.5 + 0.2\times1}{0.4 + 0.2}$$

$$d = \frac{0.2 + 0.2}{0.6} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}\,m .$$

$$m = m_1 + m_2 = 0.4 + 0.2 = 0.6\,kg .$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$ لأن ساق مهملة الكتلة .

$$I_\Delta = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 0.4(0.5)^2 + 0.2(1)^2$$

$$I_\Delta = 4\times25\times10^{-3} + 0.2 = 1\times10^{-1} + 2\times10^{-1} = 0.3\,kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{0.6\times10\times\frac{2}{3}}} = \sqrt{3}\,s$$

الاستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

② . $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\ m.s^{-1}$ طرف العطالة :

حساب السرعة الزاوية طرف العطالة .

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\times4\pi}{2\times3\sqrt{3}} \quad (r = d)$$

السرعة الزاوية للنواس هي ⇐ : $\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad.s^{-1}$

a . حساب السرعة الخطية للكتلة m_2

$$v_2 = \omega . r_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m.s^{-1}$$

b . تطبيق نظرية الطاقة الحركية :

الوضع الأول : $\theta_1 = \theta_{max}$ سكون .

الوضع الثاني : $\theta_2 = 0$ شاقول

$$\Delta E_k = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$\overline{W}_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثيره لا تنتقل .

$E_{k_1} = 0$: دون سرعة ابتدائية .

$$E_{k_2} - 0 = \overline{W}_{\vec{w}} + 0 \Rightarrow E_{k_2} = \overline{W}_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} I_0 \omega^2 = mgh. \Rightarrow h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

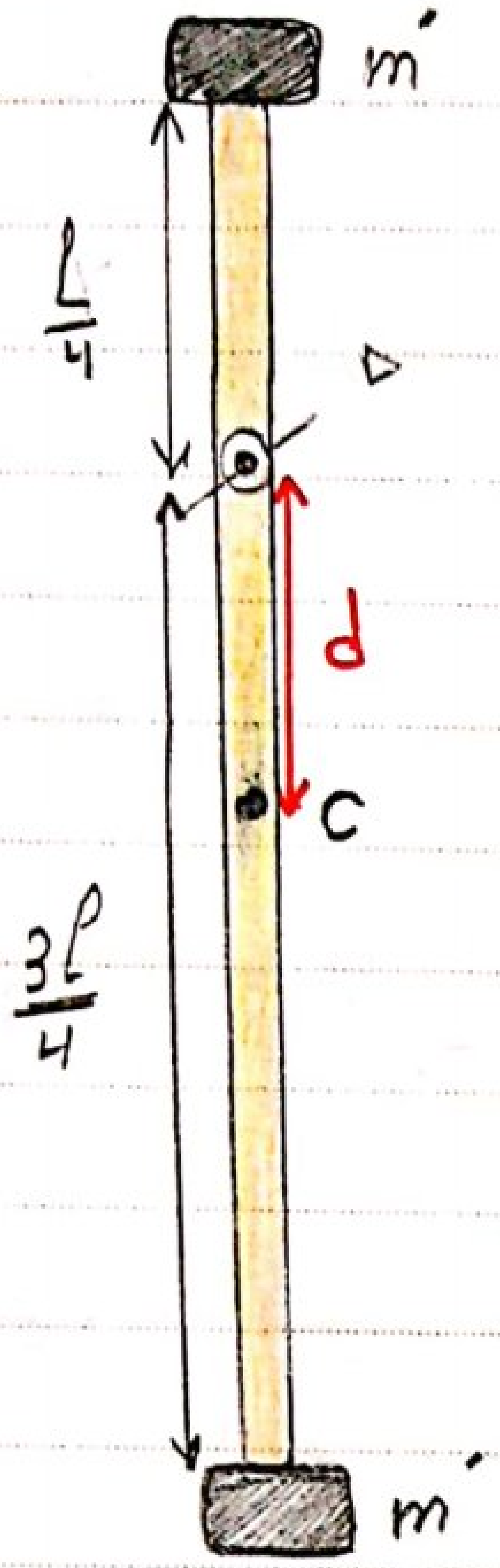
$$\frac{1}{2} I_0 . \omega^2 = mgd(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} . 0.3 \times \frac{4\pi^2}{3} = 0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}(1 - \cos\theta_{max})$$

$$2 = 4(1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow 1 - \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad.$$

المسألة الخامسة :



$$\theta = \frac{1}{2\pi}\ rad. < 0.24\ rad.$$

$$T_0 = 2.5\ s = \frac{5}{2}\ s$$

① .

$$\bar{\theta} = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

. $t = 0$ تركت دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = \frac{1}{2\pi}\ rad$

. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \frac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}.$

. $t = 0 \quad \theta = \theta_{max}$: بالتعويض في الشكل العام

$$\theta_{max} = \theta_{max} \cos(\omega_0(0) + \bar{\varphi})$$

$$\theta_{max} = \theta_{max} . \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}} = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ rad.$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2\pi} . \cos \frac{4\pi}{5} t}.$$

② : طول الساق . توجد طول الساق في علاقة I_Δ ، ومن علاقة الدور الخاص .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}.$$

$$d = \frac{m'\frac{3\ell}{4} - m'\frac{\ell}{4}}{m' + m'} = \frac{m'(\frac{3\ell}{4} - \frac{\ell}{4})}{2m'} = \frac{2\frac{\ell}{4}}{2} = \frac{\ell}{4}.$$

$$I_\Delta = m'(\frac{L}{4})^2 + m'.(\frac{3L}{4})^2 = m'(\frac{L^2}{16} + \frac{9L^2}{16}) = \frac{10m'L^2}{16}$$

$\odot \quad m = m' + m' = 2m'.$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{10}{16} m' \cdot L^2}{2m' \cdot \frac{L}{4} \cdot g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{5L}{4g}}$$

بتربيع الطرفين :

$$T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{5L}{4g} \Rightarrow L = \frac{T_0^2 \cdot 4g}{4\pi^2 \cdot 5}$$

$$L = \frac{T_0^2 \cdot g}{\pi^2 \cdot 5} = \frac{\frac{25}{4} \cdot 10}{10 \times 5} = 1.25\,m.$$

③ .

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \theta_{max}$$

$$\omega_{max} = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{1}{2\pi} = 0.4\ rad.s^{-1}$$

الأستاذ محمد شتيوي
فيزياء - كيمياء
هـ : ٠٩٣٣٩٧٧٥٧٩

④ . بدء انفصال الكتلة السفلية تصبح :

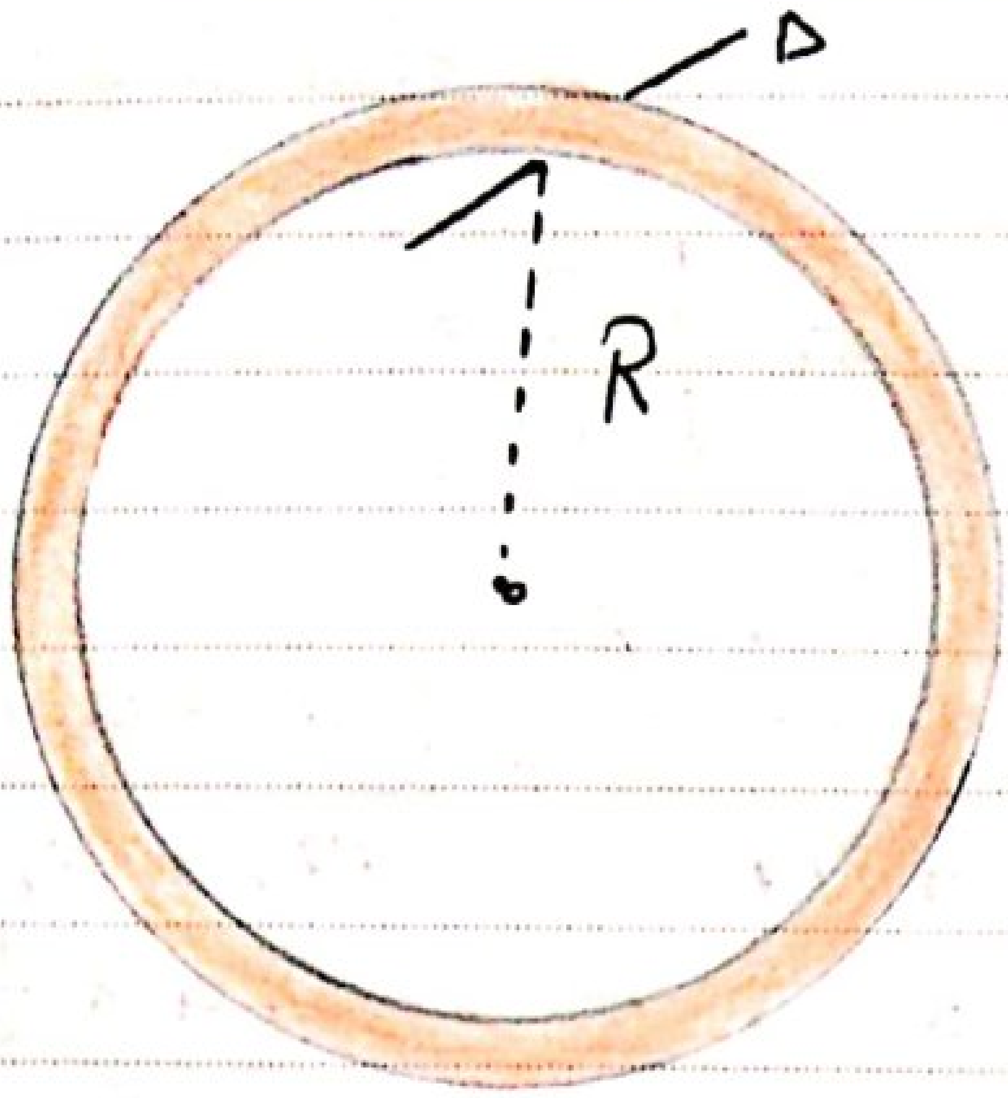
$m = m'$

$$I_\Delta = m' \frac{L^2}{16} \quad , \quad d = \frac{L}{4}.$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m' \cdot \frac{L^2}{16}}{m' \cdot g \cdot \frac{L}{4}}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{4g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1.25}{4 \times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ s$$

" مسائل عامة "



المسألة الرابعة:

$R = 12.5 \times 10^{-2} m.$

$M = 0.05 kg. \quad I_{\Delta/C} = MR^2.$

-1 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}.$

$d = r \quad ، \quad I_\Delta = I_{\Delta/C} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times12.5\times10^{-2}}{10}} \Rightarrow T_0 = 1 s$$

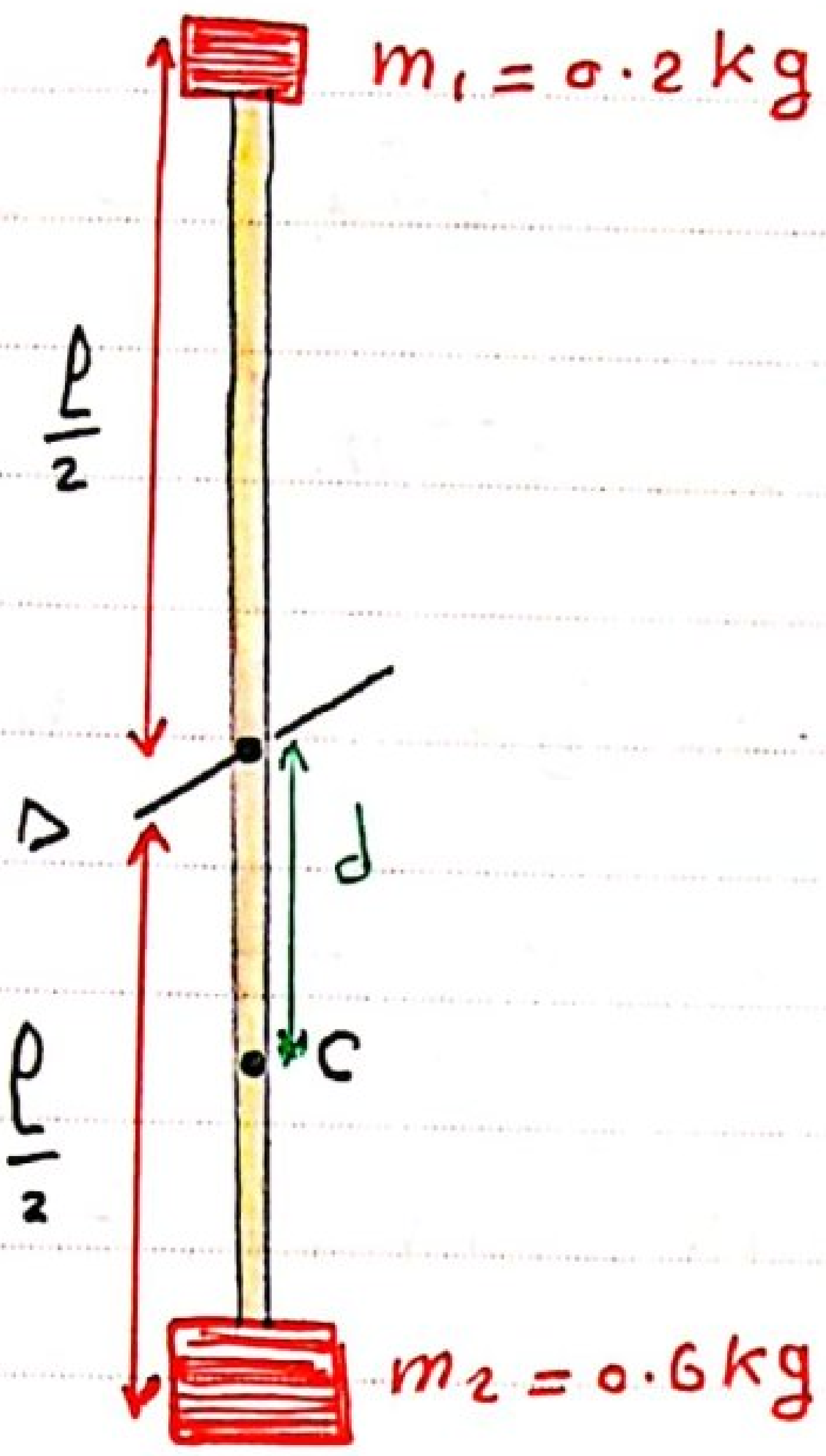
-2 T_0 بسيط $= T_0$ مركب $= 1 s$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}$$

$$1 = 4\ell \Rightarrow \ell = \frac{1}{4} m$$

طول النواس البسيط المواقت للنواس الموقت.

المسألة الخامسة:



1) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

• $$d = \frac{m_2\frac{\ell}{2} - m_1\cdot\frac{\ell}{2}}{m_2+m_1} = \frac{(m_2-m_1)\frac{\ell}{2}}{m_2+m_1}$$

$$d = \frac{(0.6-0.2)\cdot\frac{1}{2}}{0.6+0.2} = \frac{0.4\times\frac{1}{2}}{0.8}$$

$$d = \frac{1}{4}\, m.$$

• $$m = m_1 + m_2 = 0.6 + 0.2 = 0.8 kg.$$

• $$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$I_{\Delta/c} = 0$ لأن الساق مهملة الكتلة

$$I_\Delta = 0 + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = (m_1+m_2)\frac{\ell^2}{4}$$

$$I_\Delta = (0.2+0.6)\frac{1}{4} = 0.8 + \frac{1}{4} = 0.2 kg.m^2.$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8\times10\times\frac{1}{4}}} = 2\ S.$$

2. طول النواس البسيط الموافق لهذا النواس.

T'_0 بسيط $=$ T_0 مركب $= 2s$

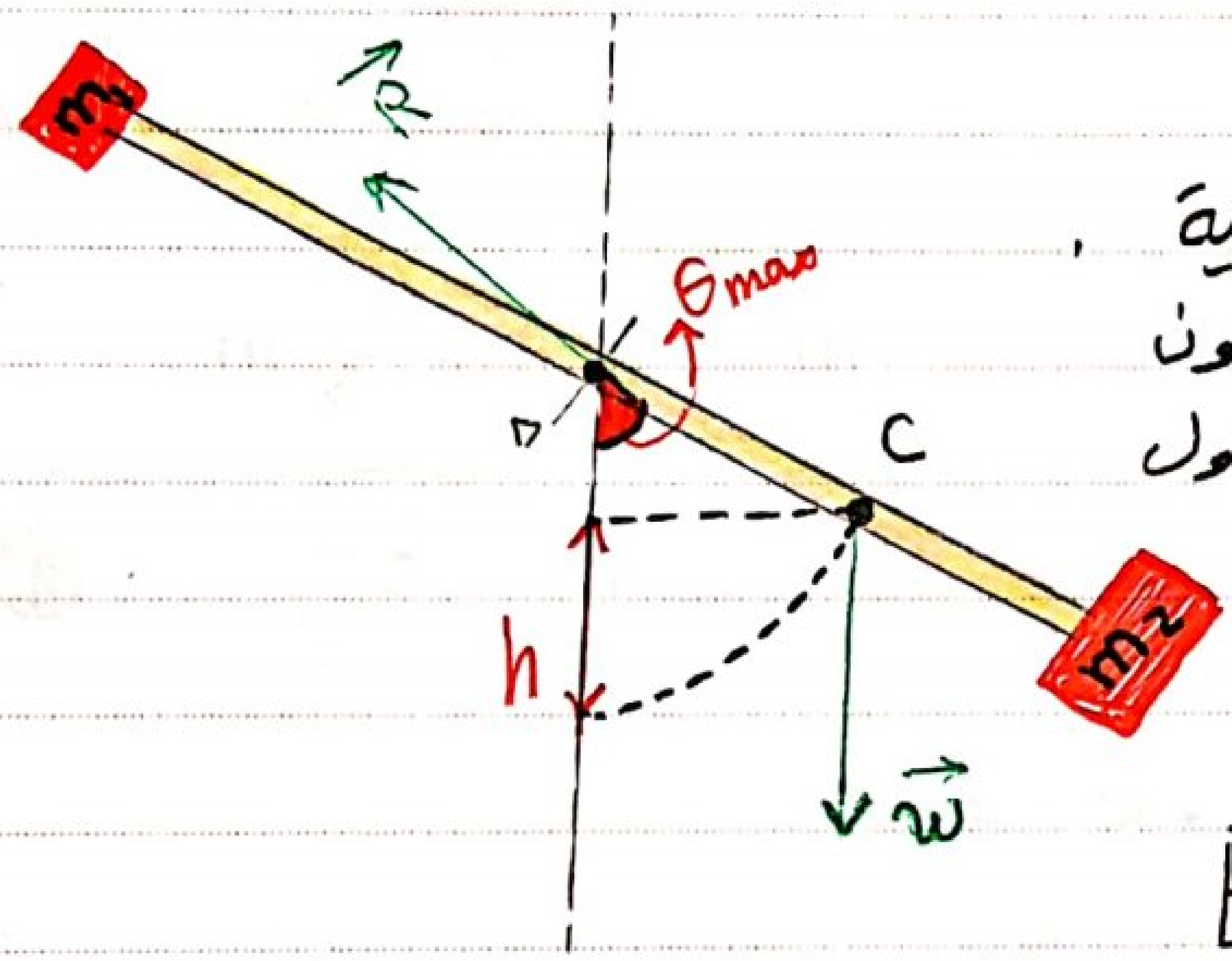
$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{10}} \Rightarrow \ell' = 1m.$$

3. $\theta_{max} = 0.4\ rad > 0.24$ سعات كبيرة

$$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$$T_0' = 2\left[1 + \frac{0.16}{16}\right] = 2(1 + 0.01) = 2,02\ s$$

4.



a. تطبيق نظرية الطاقة الحركية ،

الوضع (1) : $\theta_1 = \theta_{max}$ ، سكون

الوضع (2) : $\theta_2 = 0$ شاقول

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec F}(1 \to 2)$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec w} + W_{\vec R}$$

$W_{\vec R} = 0$: نقطة تأثيره لاتنتقل.

$E_{k1} = 0$ دون سرعة البدائية .

$$E_{k2} - 0 = W_{\vec w} + 0 \Rightarrow E_{k2} = W_{\vec w}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2 = mgh \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}}$$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1 - \cos\theta_{max})}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.8 \times 10 \times \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2})}{0.2}}$$

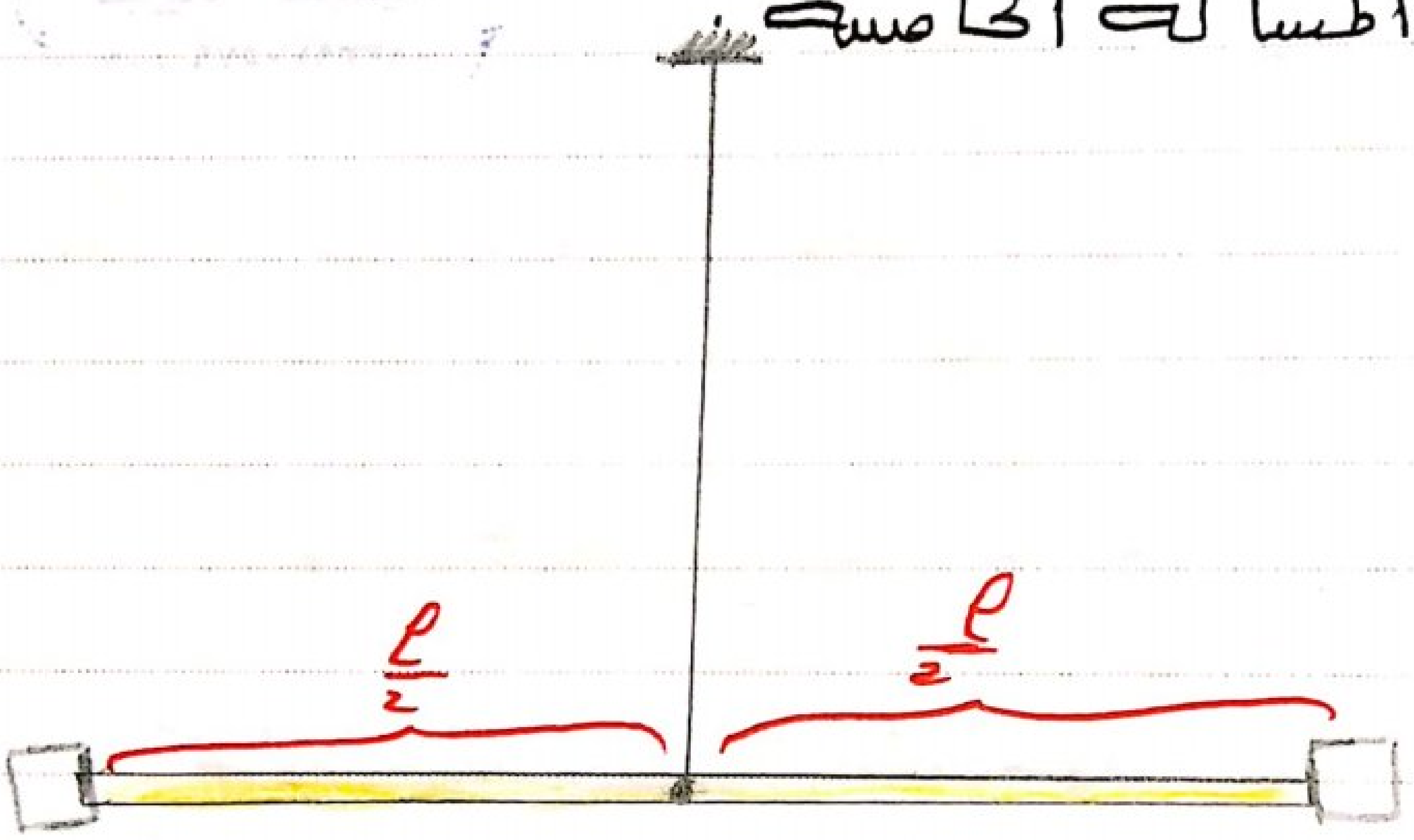
$$\omega = \sqrt{10} = \pi\ rad \cdot s^{-1}$$

b. السرعة الخطية لمركز عطالة النواس .

$v = \omega . r$ ← بعد مركز العطالة عن محور الدوران

$v = \omega . d = \pi . \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} m.s^{-1}$

تتمة المسألة الخامسة.



5. $m_1 = m_2 = 0.2\,kg$

$T_0 = 2\pi\,s$.

نواس فتل:

ط ب ثابت الفتل K

إما عن طريقة الدور T_0.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

أو :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow K = \omega_0^2 \cdot I_\Delta$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ \text{rad.s}^{-1}.$$

حساب I_Δ.

$$I_\Delta = \underbrace{I_{\Delta/C}}_{\text{ساق}} + 2\, I_{\Delta/m_1}$$

$$\underbrace{I_{\Delta/C}}_{\text{ساق}} = 0$$ لأنها مهملة الكتلة

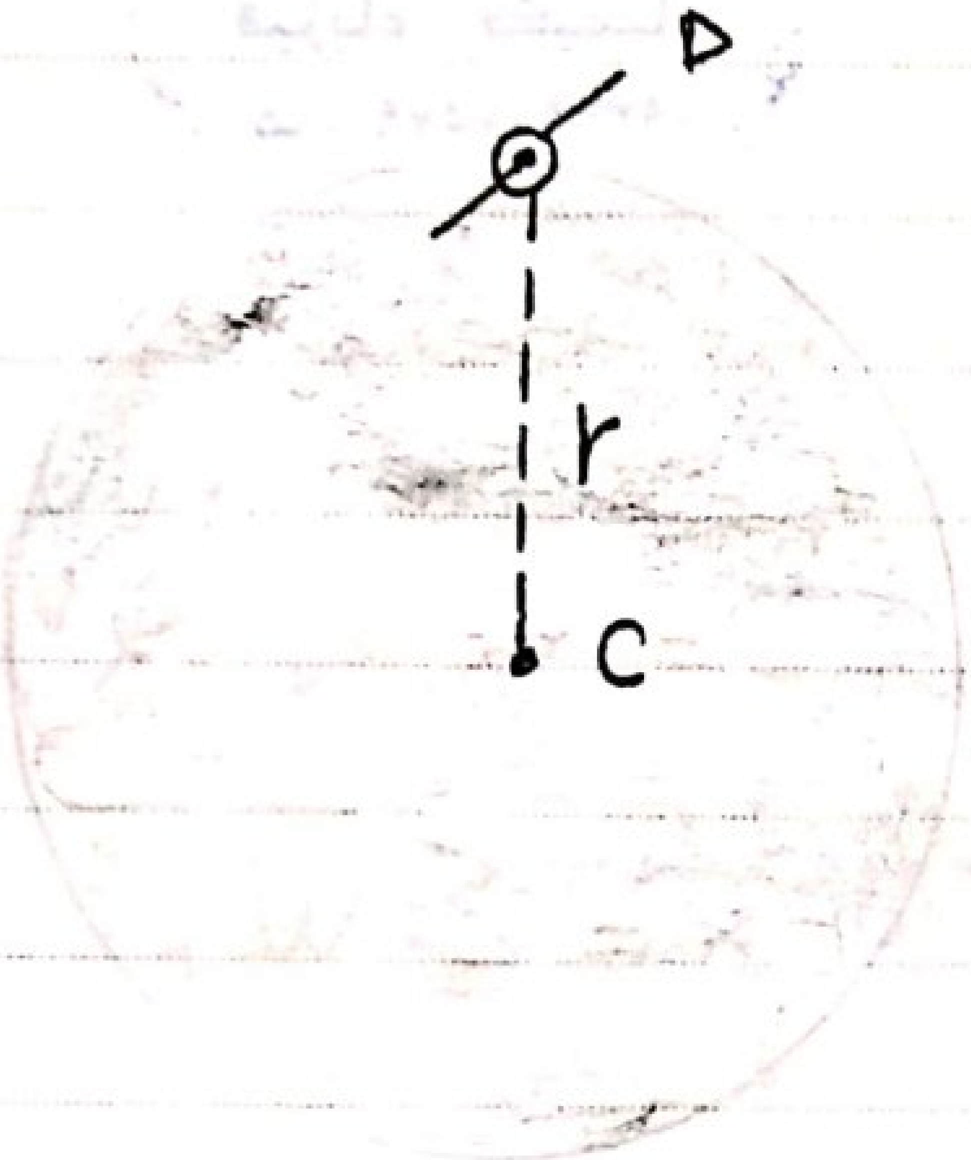
$$I_\Delta = 2 \cdot m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2 \times 0.2 \times \frac{1}{4} = \frac{0.4}{4} = 0.1\ \text{kg.m}^2$$

$$K = (1)^2 \cdot (0.1) = 0.1\ \text{m.N.rad}^{-1}.$$

6. $\theta = 0.5\ \text{rad}.$

$$\alpha = -\omega_0^2 \cdot \theta = -(1)^2 (0.5) = -0.5\ \text{rad.s}^{-2}$$

المسألة السادسة :



$m \ , \ r = \frac{2}{3} m .$

(1) $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

$d = r$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2 = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{mg \cdot r}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}$

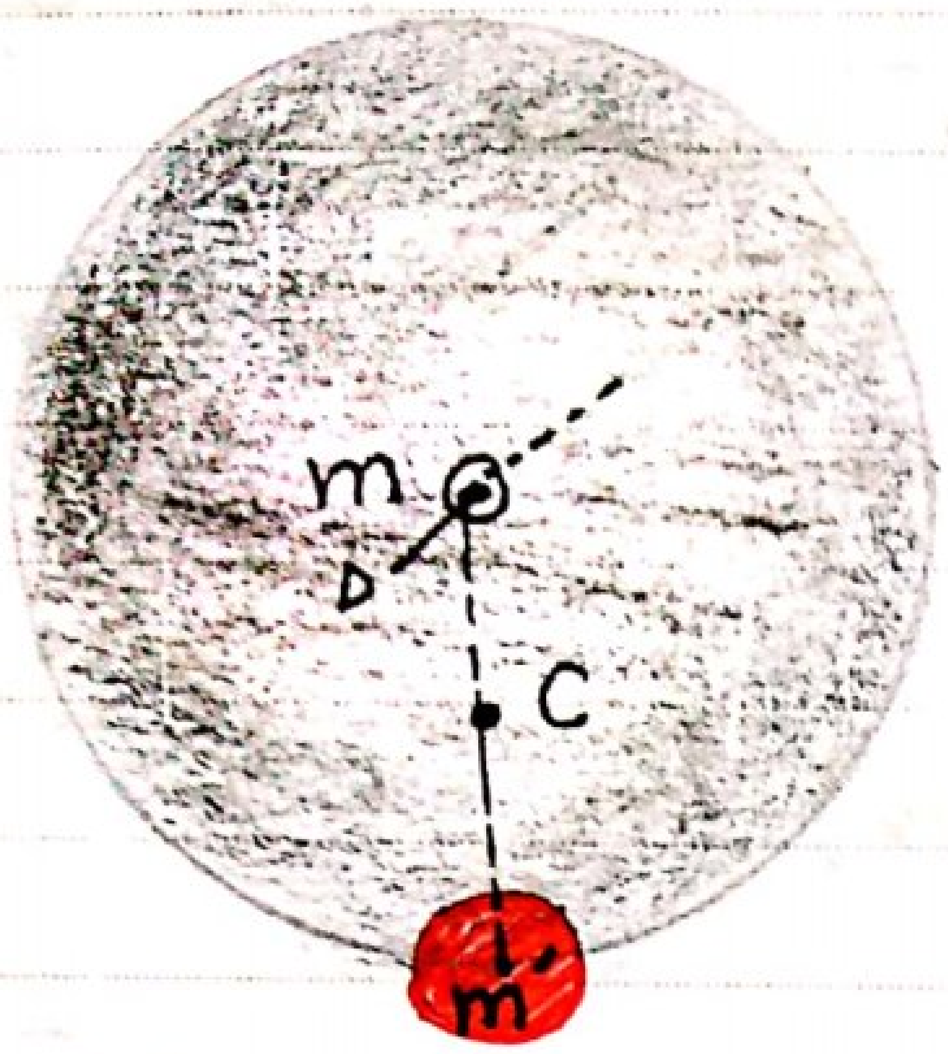
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3 \times \frac{2}{3}}{2 \times 10}} = 2 \ s .$

(2)

T_0 بسيط $= T_0$ مركب $= 2s$

T_0 بسيط $= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{10}} \Rightarrow 1 = \sqrt{\ell}$

$\ell = 1m .$



3. $m' = m$.

$$d = \frac{m'r - m(0)}{m' + m} = \frac{m'r}{2m'}$$

$$d = \frac{r}{2}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m'}$$

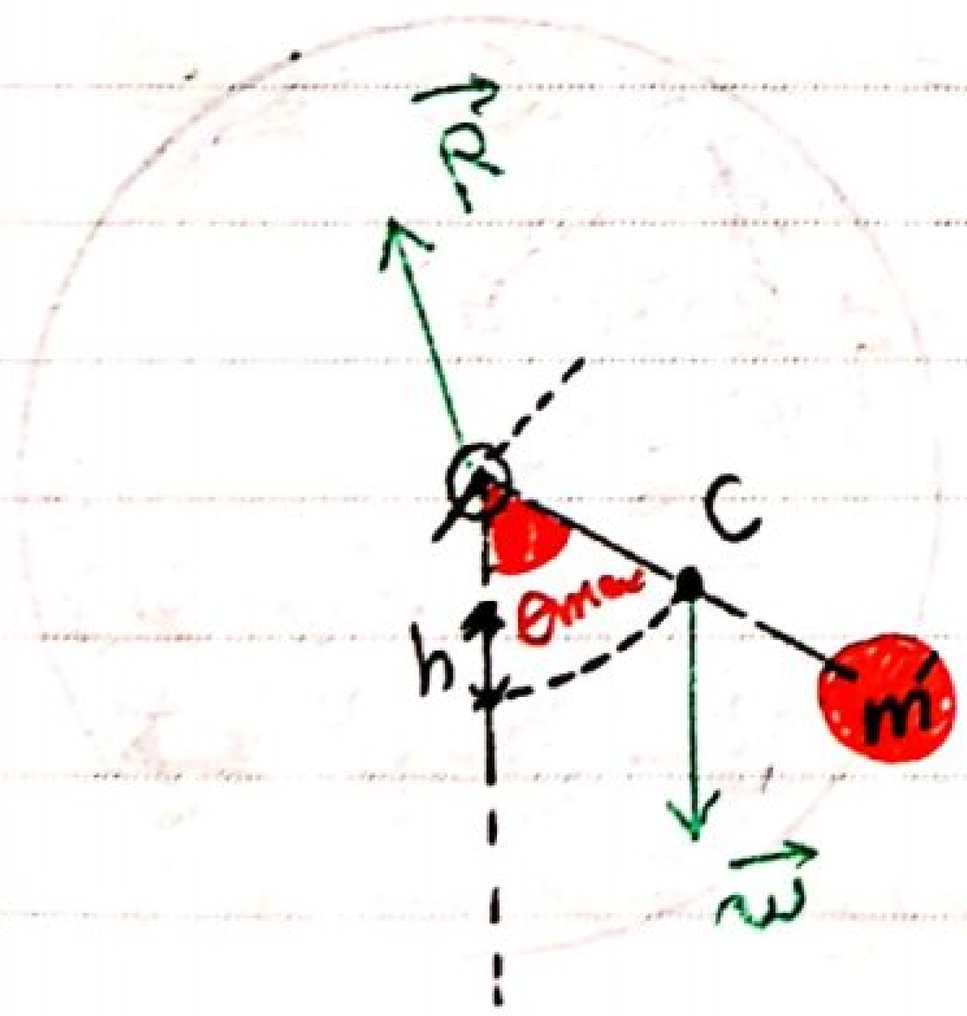
$$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + m'r^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m \cdot r^2}{2mg \cdot r}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3 \times \frac{2}{3}}{2 \times 10}} = 2\ s.$$

4. الوضع (1) $\theta_1 = \theta_{max}$

الوضع (2) $\theta_2 = 0$



$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1 \to 2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$ نقطة تأثيره لا تنتقل.

$E_{k_1} = 0$ دون سرعة ابتدائية

$$E_{k_2} = W_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta \omega^2 = \underline{m}g \cdot h$$

$$\frac{1}{2}I_\Delta \cdot \omega^2 = 2mg\frac{r}{3}(1 - \cos\theta_{max})$$

ω ، ب ف

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2}{3}} = \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cancel{m} r^2 \cdot \pi^2 = 2 \cancel{m} \times g \cdot \frac{r}{2} (1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{3}{4} \cdot r \cdot 10 = 10(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = (1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{ma}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$