بسم اللّه الرحمن الرحيم

أوراق ذهبية في الرياضيات ...

المنهاج كُلّه 14 وحدة كل القوانين

وأفكار كل تمرين ونشاط

بشكل سهل وبسيط وجميل ..

عمل: مجد الدين مقرش

0994900629

① • وحدة المتتاليات :

1- طرق عرض المتتالية : $\cdot U_n = 5n+1$

... $\cdot U_{n+1} = 5U_n + 1$

2- • المتتالية الثابتة تُعدّ مطردة ..

3- طرق معرفة اطراد متتالية :

• $U_{n+1} - U_n$. لا تنسَ أن تكتب بالشرط $(U_n)_{n \geq n_0}$ ---- $n \geq n_0$

وعالطالب تكون عامةً ...

• $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ونقارنها مع الواحد (لا تنسَ) كتابة : كل الحدود موجبة تماماً . ... وأيضاً $(U_n)_{n \geq n_0}$ و $n \geq n_0$ ..

• دراسة تابع $f(x) = U_n$ ... ونعرف إشارة مشتقه (لا تنسَ) أن تكتب مجال الدراسة لهذا التابع $[5,+\infty[$ كمثال أو غيره .. ولا تنسى أن تقول : f متزايد تماماً إذاً U_n متزايدة تماماً أياً كان $n \geq$

4- إن $\sqrt{a} > \sqrt{b} \Leftarrow a^2 > b^2 \Leftarrow a > b$ بشرط أن $a > 0$, $b > 0$ ..

• عطالب U_{n+1} بدلالة U_n مثلاً : $U_{n+1} = 5U_n + 1$ ..

• عطالب U_n , وطالب اطراد .. بس جرّب أو انقلب ...

(لا تنسَ) : عند التجربة تقول : بما أن الحدود موجبة تماماً .

• في حالة التابع f لا تنسَ أن تقول : f هو اشتقاقي معرّف ومستمر على $]0,10[$

5- المتتالية الحسابية : « $U_{n+1} = U_n + r$ » ...

• r أساس المتتالية ./ $U_n = U_0 + nr$.

• $U_n - U_m = (n-m)r$ ./ $b = \frac{a+c}{2}$ ...

⟸ كل حد هو متوسط حسابي لمجاوريه « وبالعكس » ...

⟸ إذا كان متوسط حسابي هو منتصف عددين ...

• $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ .. a : الحد الأول , l : الأخير

6- المتتالية الهندسية : $U_{n+1} = qU_n$; $q \neq 0$

• $U_n = U_0 q^n$ ./ $U_n = U_m q^{n-m}$ ...

• $b^2 = a.c$ ، كل حد منها هو وسط هندسي لمجاوريه « وبالعكس » ⟸ وسط هندسي ؟! هو الـ وسط ...

• $S_n = a . \frac{1-q^n}{1-q}$ ... a : الحد الأول ... q الأساس ...

• انتبه هام : إذا كانت المتتالية هندسية أساسها (3) مثلاً وطالب كتب مجموع $U_1+U_2+ ...$ معناها ضمناً $q = 3$ ...

• إذا كانت $U_2+U_4+ ...$ معناها ضمناً $q = 9$.

• إذا كانت $U_3+U_6+ ...$ معناها ضمناً $q = 27$

• إذا كانت إيش ما كانت $\boxed{q = (3)^{\text{الفرق بين حدين}}}$ ...

• عمل : محي الدين مقرشين

0994900629

• ملاحظة : n : $n =$ الأخير − الأول $+1$

$n = \frac{\text{الأخير} - \text{الأول}}{(2)\ \text{الشيء المشترك}} + 1$

• حالات خاصة : مثلاً : $U_2+U_4+ ... +U_{2n}$ ...

مثلاً : $U_3+U_6+ ... +U_n$; $n = \frac{\text{الأخير} - \text{الأول}}{(3)\ \text{الشيء المشترك}} + 1$

7- ويريد حسابية ؟! أو هندسية ؟! إذا طلع عدد ثابت مهما حصل

② • هام : في المتتالية الهندسية يعطيك حدان مثلاً U_5 , U_7 ويطلب U_{10} ... هنا ممكن $q = \pm 2$ انتبه تعاملوا هيك مضيع U_{10} حيث ...

8- البرهان بالتدريج :

آ- نبرهن صحة $E(n_0)$ ... ب- نفرض صحة $E(n)$

ج- نبرهن صحة E_{n+1} .. (لا تنسَ) : أن تكتب : E_{n+1} صحيحة وبالتالي E_n صحيحة من أجل $n \geq n_0$ ...

• عندك $\boxed{\ } = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ عندما نبرهن E_{n+1} نكتب $l_1 = E_n + (n+1)^3$ ...

• عندك متراجحة مثل $(1+x)^n \geq 1+nx$, لنبرهن E_{n+1} ننطلق من $l_1 = (1+x)^n (1+x) \geq (1+x)(1+nx)$ الأيسر من الطرف الأول للـ E_n ونضرب بـ (نفسه) لهوة والطرف الثاني من الـ E_n .

9- هام جداً : يعطيك U_{n+1} بدلالة U_n أو إيش ما كان ويطلب أو يطالب إثبات صحة متراجحة $U_n > 0$ .. نفكر فوراً بالتدريج ..

10- المتطابقة الشهيرة ١١٤ ... حيث ١٥ ... احفظوها بصم نتيجة

آ- متتالية هندسية $q \neq 1$ وحدها الأول $a = 1$, المجموع نكتبه ،

ب- المتطابقة محققة عند $x = a$, $n = 0$ وبدلاً منه $q = \frac{a}{x}$. في هذه المجموع S :

ج- نضرب بـ $x^{n-1}(x-a)$ ونختزل العلاقة ثم نقلب محققة ..

11- يعطيك 3 حدود متوالية من متتالية هندسية مع علاقتين ويطلب حسابها .. تذكر الوسط الهندسي .. $\sqrt{19} = 4.35$ ،

12- • عطالب $U_n = (-\frac{1}{5})^n$ ليس تدريج .. وبدون مطردة .. عطالب كم حد وكل حد مطردة « بدون تدريج » ..

• هام : عطالب متتالية بعلاقة تدريجية $U_{n+1} = aU_n + b$ ويطلب اطراد .. لسبب أول كم حد لنعرف ↗ أم ↘ ثم نبرهن ذلك بالتدريج حصراً .. « $U_{n+1} - U_n > 0$ » أو « $U_{n+1} - U_n < 0$ »

13- هام قانون التحويل : $U_n = (U_0 + \frac{b}{a-1})(a)^n - \frac{b}{a-1}$

تظهر لي الحدود الخمسة الأولى ونفرض علاقة U_{n+1} ثم نعطيها ونبرهنها بالتدريج .. وبأن نعوض U_n بعلاقة U_{n+1} المعوضة ،

14- 3 حدود من متتالية هندسية : a, b, c : a, aq, aq^2

3 حدود من متتالية حسابية : $3a, 2b, c$: $2b = \frac{3a+c}{2}$

ثم نحل فيظهر لنا الـ q المطلوبة ...

15- تعيين a ثابت الدرجة الثانية حيث ... عمل : محي الدين مقرشين .

0994900629

وعندك $P_n = t_n$: $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ ...

آ- نعوض $t_n = an^2 + bn + c$ ثم t_{n+1} ونعوض بـ $n+1$

ب- تظهر لنا علاقة تفضلها ثم ندرج مع $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ لنبدأ ونبرهن علاقة t_n صحيحة لنجد الطالب بالمطابقة ...

16- نقسم العدد والعدد $10^n + 1 = 10^n + 1$ مضاعف للعدد 9

17- لنبرهن متراجحة $U_{n+1} \geq U_n$ .. نفرض $f(U_n)$ ونوجد مشتقه f متزايد أم متناقص ؟! بعد ذلك نقول : بما أن f متزايد تماماً : $f(U_{n+2}) \geq f(U_{n+1}) \Leftarrow U_{n+1} \geq U_n$ فالعلاقة صحيحة

تذكر : $\sin(2a) = 2\sin(a) . \cos(a)$.

نهاية المتتاليات ..

• وحدة الاشتقاق :

① - • أوجد العدد المشتق = أثبت أنه اشتقاقي
• أوجد القيمة التقريبية لـ $f(x)$ عند 4.1 حيث :

$f(a+h) = f(a) + f'(a).h \quad ; a = 4 , h = 0.1$

• $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

② - • ولنفرض : $I =]-\infty , +\infty[$ ولنلاحظ أن (1) قيمة عظمى كبرى : $J \cap I = [0 , 2]$ ومنه بما أن : $f(x) \leq f(1)$ فإن $x \in J \cap I \subset R$: أي أن $1 \in I$
• والصغرى بنفس الطريقة ... ومثلها السابقة تماماً
إذاً أصبح 8

③ - • ولنفرض الدرس ص 22 ...
• نستخدم المشتق عند القيم (الحدية) ...
• إذا طلب أوجد f' وبين المجموعة التي يقبل المشتق عليها يجب تبيان المجال المدروس ، لذلك إن كان جذر $[0,+\infty[$ بالصحائف هون بدك تدرس الاشتقاقية عند (0)
• لا تنسى عند الاشتقاق تقول : f اشتقاقية وهو شرط
• مثال : $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ بـ a و b وعطاك معطيات تعطي لا مقتنع وخلص منتظر لنا .. للتأكد نعوض النقطة A المعطاة ونتأكد أن ميل المماس هو $(\frac{1}{2})$ بالتعويض f'

• ص 16 المثال المعطى لهم الأهم يشعي ...

• اشتقاقية عند (0) من اليمين ... تقني أن هناك نصف مماس ...

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$$

④ - لإثبات أن نصف قطر مماس متعامدان ... أو : بما أن مماس فهو يعامد نصف القطر $m_{A} . m_{t} = -1$

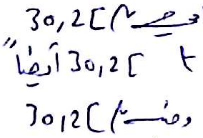
⑤ - • هل هناك تقاطع بين الرسم وما أوجدته ؟
آ - بما أنه زوجي له $y = x$ فله $y = -x$.
ب - $f'(0) = 0$ من الدراسة فهو يقبل مماس أفقي ،

⑥ - • أثبت أن $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$ اشتقاقي على $]0,2[$
بما أن $x(2-x)$ هو اشتقاقي على R فهو كذلك $]0,2[$ أيضاً
ونعلم أن $\sqrt{x(2-x)}$ اشتقاقي عندما $x(2-x) > 0$ ومنه على $]0,2[$

⑦ - مقارنة : $f'(x) \leq g'(x)$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0)$

⑧ - من تعريف العدد المشتق : إذا طلب إثبات نفسك ... الجواب فوراً . أما إذا كان اشتقاقي لا يجوز يجب أن نصل إلى ...



⑨ - مثال ص 22 : الرسمة هكذا تذكر : نصف مماس يمين

⑩ - رقم ⑦ لها إثبات كالآتي :
آ] نفرضها $h(x)$ عند $[0,+\infty[$ نعوض الـ 0 فقط ونحسب $h'(x)$ ونرى أنه متناقص (أو متزايد) من الطرف ثم نرسم جدول ونؤكد أنه متناقص بحسب الحالة ،

• عمل الحبيب الدب معرش ، 0994900629 !!!

⑪ - البرهان $x \leq \sin x$ أو أي ...، ننقل الطرف ونفرض تابع ... ولنفرض $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$
نستفيد من قانون : $f'(x) \leq g'(x)$ حيث : $f(x) - f(x)$
$g'(x)$ و $g(x)$ وبالفرض $\sin x \leq x$ أي أن $f'(x) \leq g'(x)$
وتكمل بحسب الحالة ...

⑫ - لإيجاد معادلة المماس اكتبها كليشه للامتحانات

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

⑬ - هل يقبل المماس موازياً لـ ... ؟ استفدنا من الميل

⑭ - إذا لا نهايات عم تحسب عند الـ (0) وطلع معك عدد ... نهايتي من اليسار واليمين ، وطلعوا مختلفين تقبل ليس له نهاية / أما إذا $+\infty$ و $-\infty$ تخرس ،

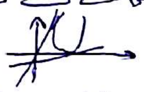
⑮ - حلوة : عطاك $f(x)$ وبده مشتق لتوابع مشكلة بدلالته مثلاً : $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ ، يريد : $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$
آ] حدد مجموعة اشتقاقية : $V(x) = \sqrt{x}$ ومنه $g(x) = (f \circ V)(x)$
ومنه هي اشتقاقية على $]0,+\infty[/ \{1\}$ (هذه نظرها بعد الاشتقاق)
ب] - وهنا نضع مكان x مي $g'(x) = V'(x) f'(u(x))$
$f'(x)$ نضع x فقط ، ونشتق $V(x)$ ولنترك له الجواب ..

⑯ - استثناء ! طلب $h(x) = (V \circ f)(x)$ فيكون المشتق :
$h'(x) = f'(x) . V'(f(x))$ ... تعني البعد الدوري 0 لتحصل

⑰ - ودائماً كالعادة أن اشتقاقي على مجال ...
$\Rightarrow$ يجب أن تذكر f اشتقاقي على ... ، $\sin x$ اشتقاقي على ... ومنه $f(\sin x)$ اشتقاقي عندما $R \setminus \{x : \sin(x) = 1\}$
أي عندما $x \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\}$ ، فهو مشتق على I ،
أي نعني نستفيد من المشتق لإظهار شرط الاشتقاقية ،

⑱ - عين a , b من f ليكون $y = 4x + 3$ مماساً له في (0)
نستفيد من : آ] - أن $f'(0) = 4$ ، ب] - لمعرفة ترتيب النقطة نعوض في $y = 4(0) + 3$ فتكون $(y = 3)$

⑲ - • هام جداً : طريقة إيجاد المماسات لـ C المارة بالمبدأ
هاد مثال ←



" عين المماس بالمبدأ " ،
آ] - نفرض نقطة $A(a, f(a))$ ونكتب معادلة مماس عام عندها فتظهر $y - y_a = m(x - x_a)$ ...
ب] - الآن نعوض $y = 0$, $x = 0$ ونظهر قيم (a) !!!

⑳ - هام جداً : قانون مركز التناظر :
① $2x_0 - x \in D_f$ فإن : $x \in D_f$ مبرهنات
$\Rightarrow$ ② $y_0 = \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2}$

• هام جداً : قانون محور التناظر : نفس ① ; ② $f(x) = f(2x_0 - x)$

㉑ - تمرين 34 ص 111 ص 64 المعطى لهم أحمد ...،
آ] - f اشتقاقي n مرة على R .
ب] - $f^{n}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

• عمل : مجد الدين معرش
0994900629

نهاية الاشتقاق !!

• وحدة النهايات : (1)

① - إذا طلب $x > A$ ... طلب العدد A ... نعتمد هذه القاعدة : $|f(x) - a| < r$ حيث :

$a = \frac{a+b}{2}$ مركز المجال ، $r = \frac{b-a}{2}$ نصف قطر المجال ، $L = b - a$ طول المجال

فإذا كانت : $x \to +\infty$ فالقيمة المطلقة تبقى كما هي ...

أما إذا كانت : $x \to -\infty$ نقلب القيمة المطلقة ...

② - أما إذا طلب مجالاً مركزه [ ] فنتبع هذه القاعدة :

$|f(x) - a| < r \Rightarrow -r < f(x) - a < +r$ ...

• إذا احتجنا للقيمة التقريبية نقوم بها ...

• اقرأ ص 7 وتفكر ب ...

• احفظ ... $\sqrt{16025} = 126.5$

③ - • تابع الجزء الصحيح : عند حساب النهايات له يجب كتابة استنتاج العلاقات لأن عليها علامات ..

• $E(x) \leq x \quad ; \quad x < E(x) + 1$ عند القيمة بالإضافة اكتب $x > 0$

حيث : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

ومنه : $x - 1 < E(x)$ ومنه يتم الحصر :

• تفيد لحساب النهايات : $x - 1 < E(x) \leq x$ طلوع ورا

④ - • عندما بالإحاطة : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ إحاطة

• عندما بالإحاطة : يظهر لنا : $\mp\infty$ مقارنة وميز حالتينا :

1 - إذا كان الجواب $+\infty$ نشطب الطرف الأكبر .

2 - إذا كان الجواب $-\infty$ نشطب الطرف الأصغر .

⑤ - • إذا طلب دراسة سلوك التابع يجب توابع ثم نقول : أ - سلوك : إن الخط البياني له محصور بين [ ] و [ ]

2 - القيمة التقريبية له $\frac{x}{2}$ بخطأ قدره 2+ ، 2- «مثلاً» :

⑥ - • قاعدة ثابتة : تقول لنا الإحاطة :

$|f(x) - l| \leq g(x) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ • نحل : نجد الحد بشكل تقريبي

فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

⑦ - • هام جداً : عند حساب نهاية تابع مركب مثلاً $\frac{1}{x-1}$ يجب كتابة النهاية الداخلية وبعدين الخارجية .

• اقرأ ص 17 مجرداً طلاع ...

• ملاحظة هامة جداً : لا تنس كتابة : "نقطة مشتركة عند دراسة الوضع مع المقارب ..."

• تأويل هندسي يلي : عندما x تقترب من [ ] فإن f تتجمع حول [ ]

(2)

⑧ - هام جداً والله : عند دراسة الوضع مع أ مع مقارب ...

في الجدول : نعوض العدد 5 نعوضه بالمعتبر (0) أما عندما نريد أن نقول نقطة مشتركة نعوض (5) في g أو f ، فنطلع بالنقطة هذه هي النقطة المشتركة ...

⑨ - • شرط الاستمرار : $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

• معرف ⟵ مستمر ⟵ اشتقاقي ، تؤدي ، تؤدي ، الشاملة

• لمعرفة دور أي تابع : $\frac{2\pi}{x \text{ أمثال}}$ ...

• ولاختبار الدور ما علينا إلا أن نعوض : الدور + x ,,, سهلة ...

• شرط الاشتقاقية : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$ عدد حقيقي

• لكن انتبه : عند حساب النهايات بطريقة تعريفه العدد المشتق حسب المشتق وصور أثرت له الجواب

أما : بإثبات أنه اشتقاقي فلا يجوز ويجب أن نحله كما هو لنصل للناتج ... اقرأ ص 20 .

⑩ - مبرهنة القيمة الوسطى : لها شروط : له حل وحيد؟

1 - $f(a) . f(b) < 0 \quad ; \quad f(b) = [\;] < 0 , \; f(a) = [\;] > 0$

2 - المستقر = $0 \in f($مجموعة التعريف$)$ ...

3 - التابع معرف ومستمر ومطرد تماماً على مجال ما ،،

⑪ - إذا طلب : برهن أن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن يحقق المجال كذا : $]0, 1[$: نعوض حاسب القيمتين ونقلب السؤال مبرهنة قيمة وسطى الـ 3 شروط

⑫ - • $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

• $\sin(3x) = -4\sin^3 x + 3\sin x$ ...

⑬ - • عندما نأخذ $x \to [\;]$ ويظهر لدينا : $f(x) = \mp l$

نقول أن التابع ليس له نهاية لأنه عندما تقترب x من [ ] فإن قيم $f(x)$ لا تتجمع حول قيمة معينة ...

• أما عندما $x \to [\;]$ ويظهر لنا : $f(x) = \mp\infty$ لا نقول شيء أبداً" ... / • الصيغة القانونية = مربع كامل

⑭ - • كل التابع مستمر على R؟ لأنه مكون من جداء تابعين كل منهما مستمر ...

⑮ - هام جداً : أثبت أن لـ f محور تناظر؟ دراسة زوجية التابع

الزوجي : متناظر بالنسبة لـ $y'y$ ...

الفردي : متناظر بالنسبة لـ O • عند تعريف القيمة المطلقة

,,, انتبه : $x \neq 1$

• حل : نجد المركز بشكل تقريبي ... المركز ...

• وحدة الاحتمالات : ①

① - مثلاً $P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{6}{10}$ •

والعكس صحيح ... $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ •

$P(A \cap B)' = P(A' \cup B')$, $P(A \cup B)' = P(A' \cap B')$ •

قانون دي مورغان ... ثم نكمل بالنقاط السابقة ...

② - هام : ما احتمال أن يدرس إحدى اللغتين على الأقل تعني $F \cup R$: إما F أو R أو F مع R ...

③ • سحب الإعادة دون الإعادة : لا ننسى أن نضرب بالتباديل : مثلاً $\frac{3!}{1! \times 1! \times 1!}$ ...

• التوافيق الكبير دائماً فوق والصغير تحت ... $\binom{15}{2}$.

• عندما نجد لك : B_2 ظهورها بالمرة الثانية : فهو عدد لذلك لا نضرب بالتباديل لو اختلفت الطابات ...

④ .. قانون العقد : مجموع جميع الاحتمالات لا الفردي الصادرة من العقدة يساوي (1) ...

⑤ • بس كانت في المسألة بشر ، وهناك مثلاً نريد تشكيل لجنة مكونة من n شخص بشكل عشوائي ... " توافيق " ...

⑥ • الاحتمال الشرطي : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

⑦ • بالاحتمال الشرطي : دائماً نحسب احتمال الحدث المعطى أولاً بعدين احتمال التقاطع ...

⑧ - فكرة الزوجي والفردي :

• بطاقتين : ف ف مجموعي ز ضربي ف
ز ز مجموعي ز ضربي ز
ز ف مجموعي ف ضربي ز
ننتبه للترتيب للضرب ب 2 ...

• 3 بطاقات :
ف ف ف مجموعي ف ضرب ف
ف ز ز مجموعي ف ضرب ز
ف ف ز مجموع ز ضرب ز
ز ز ز مجموع ز ضرب ز
ننتبه للترتيب بأن نضرب ب 3 ...

• عمل : مجد الدين مقرش

⑨ - إذا كان لدينا صندوقين وتم سحب عشوائياً كرة من أحدهما : فهي مسألة مخطط شجري وزنيه ونضرب لكل فرع $(\frac{1}{2})$ لكل صندوق ... ②

⑩ • اقرأ من 20 تمرين : عند رمي قطع النقود نتذكر القانون $(2)^n$ حيث : n عدد القطع أو عدد الرميات ...

• دائماً عند النقود نكتب الـ ح كلها ثم نحل المسألة .

⑪ - لدينا خانات [| | |] وعددين $+1$, -1

هام مكررة : يطلب أن يكون المجموع صفر لكل ثابت نحسب ح الكلي : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ ...

ثم بعد ذلك نحسب احتمال $(+1)$ عن طريق التوافيق

ثم الـ (-1) عادي حسب الوضع ... لأنه ما بتفرق

• أما ألا يظهر العدد نفسه مرتين متجاورتين : $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$: $\frac{2}{16}$

⑫ • تذكر : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$ ... •

ثم بعد ذلك : وهكذا ... $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$,

⑬ • سهلة : يعطي احتمال كلي " 30% يمارسون كذا " ، ويعطي للذكور ... لكن لا يعطي شيئاً عن الإناث نفرض P , $1 - P$ ونكمل سهلة ... صفحة 23 ت 6

⑭ - المتوقع ... $E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \text{———} = \sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i$ •

التباين ... $V(x) = \sum_{i=1}^{i=m} x_i^2 p_i - (E(x))^2$ •

الانحراف المعياري ... $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$ •

⑮ • لدينا $2R$, $2W$ وتم سحب عشوائي 3 كرات معاً وهناك متحول عشوائي يدل على عدد R المسحوبة تكون قيمه مثلاً : $I = \{2, 1\}$ لا يوجد صفر ...

⑯ • عند حجر النرد ... رمي $(+1)$ H وعند (-1) T ، عندئذ نكتب ح ونشترك ( ) $\frac{1}{8}$ ... وليس الشجرة ، أما إذا كانت القطع متوازنة فإننا نستعمل الشجرة ...

⑰ • السحب معاً يعطي نفس نتائج السحب دون إعادة

⑱ • بالنرد : $(6)^n$. اكتب الجدول قبل البدء بالحل مهم جداً ...

⑲ • التجربة البرنولية : تجربة تكررت n مرة ...

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ ... | $E(x) = np$ •

$V(x) = npq$ ... • اقرأ صفحة 31 تمرين ①

⑳ - في لعبة (9) أدوار ، ليربح أحد اللاعبين يجب أن $X \geq 5$ أي 5 وفوق ...

• عمل : مجد الدين مقرش ...

㉑ • عندما الحدثان متنافيان : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ •

⑥ • حدث لو كانت احتمالات P , P , $1-P$ لا تتغير بالضرب بالتبادلية ... مساحة الطائرات حسب المعطيات إذا اختلفوا بالضرب بتبادلية ... (4)

• حول مساحة الطائرات لعرض أي طائرة لها رصيد ذو ... أكبر، ندرس فرق احتمال متابعة كل من الطائرتين ... وندرس إشارة ... المعنى إذا انتقل نصف حركات الأولى ونصف حركات الثانية حيث يمكن نتوصل أكثر من الثانية ؟؟ ...

⑦ • يومان :

اليوم الأول		اليوم الثاني	
نسي المفتاح	$E(n)$	نسي المفتاح	$E(n+1)$
لم ينساه	$E'(n)$	لم ينساه	$E'(n+1)$
$P_n \longrightarrow E(n) : P(E_n)$		نساه في n : $P(E_{n+1}) = \frac{1}{10}$	
$q_n \longrightarrow E'(n) : P(E'_n)$		وهنا $P(E'_{n+1}) = \frac{9}{10}$	
		لم ينساه في n : $P(E_{n+1}) = \frac{4}{10}$	
		وهنا : $P(E'_{n+1}) = \frac{6}{10}$	

فكرة ثابتة ومهمة ومكررة

• مسائل أساسية الرياضيات ...

⑧ • أتسلق ثلاث متتاليات بحدها : P_1 مثلاً ؟ إذا حسبنا الثالث وطلع P_1 تتعلق إذا لا لا تتعلق .

⑨ • نلقي قطعتين نقود ... احتمال الحصول على وجهين H هو : $\frac{1}{4}$ ، احتمال H و T : $\frac{1}{2}$ ، واحتمال وجهين T هو $\frac{1}{4}$ ؛ ركز ... اكتب دائماً ...

⑩ • سحب كرة وإعادتها ومضاعفة عدد الكرات من لونها : مخطط شجري حصراً ...

⑪ • عند سحب كرة وإعادتها للصندوق ومضاعفة عدد الكرات من لونها ثم نسحب 3 كرات معاً : فقط نحدد على الرسم عدد الكرات الممكن نسحبها ... "كلا المهم انتبه ومخطط تجريبي" ... "المهم الكرة كم كرة حمراء تكون تطلع معك" ...

ثم نعوض بالقانون ...

• شاملة لكل فئة شاملة بالاحتمالات ...

• تحليل الطالب : مجد الدين معرشي

0994900629

• أنشطة الاحتمالات : ③

• النشاط الأول سهل ...

• النشاط الثاني : دقق الخطط التجريبية وكذلك الجهاز موثوق يعني : + بين شقلتين سلبي وإيجابي

• أما النشاط الثالث فيه نكتة ...

• مفيد (0) ولا زبون اشترك بزبونيه للتدهي (0 , 1)

• التمارين ...

① • حدث الطفل الثالث أنثى $(\frac{1}{2})$ لأن الأحداث مستقلة احتمالياً ...

② • طفلان ذكران وطفلان أنثيان : يعني البنت الثانية مدركون تشغل 3 مواقع لذلك $3 \times$ ...

③ • حدث بدها إنجاز 3 أيام أو أقل ... قد تقول لك 4 أو 5 أيام ...

• بنفس المسألة $P(E) = (X_A + X_B) \leq 3$ وهذا يعني أنني نرفض 3 ، 4 من المرحلتين لا تتأثر بمجموع الأيام ≥ 3 لذلك : وهكذا .. $PE = P(X_A = 1 \wedge X_B = 1)$

④ • مسألة الـ 10 ص 42 : $I = \{2, 3, 4\}$ ...

3 ← 3 زرقات
- ز ، ح ، ح
- ح ، ز ، ز ، ح

4 ← ~~ح ح ح ز ز ز~~
- ز ز ، ح ، ح
- ز ح ، ز ، ح
- ح ، ز ، ز ، ح
- ز ، ز ، ح ، ز
- ز ، ح ، ز ، ز
- ح ، ز ، ز ، ز

• تحليل : مجد الدين معرشي

⑤ • لتقسيم أعداد على (4) : الذي يقبل الـ 4 باقيه مستمة عليها هو ذاته : ذا الـ 4 باقيها (0) والذي بعده يزيد واحد واحد ...

- قسمة 1 على 4 : 1
- قسمة 2 على 4 : 2
- قسمة 3 على 4 : 3
- قسمة 4 على 4 : 0
- قسمة 5 على 4 : 1
- قسمة 6 على 4 : 2
- قسمة 7 على 4 : 3
- قسمة 8 على 4 : 0

• طريقة حل تمرين ص 43 وهو الـ ⑪ ...
1- $36 = (6)^2$ ...
2- قيم S المجموع $12 \longrightarrow 2$ ،
3- نكتب جدول S ...
4- باقي القسمة للمجموع على 4 ، 2
5- جدول X ...
6- جدول Y ...
والمطلوب 7- جدول المشترك لـ X ، Y ...

• وهذه الفروق فكرة تجريبية الزرد ومجموع النتائج تقسيم مع أعداد محددة ... ولكن عدد صحوك شيء

تطبيقات الأعداد العقدية : (1)

① - في تمثيل الأشعة بأعداد عقدية نعتمد معلماً متجانساً $(O, \vec{u}, \vec{v})$ في المستوي العقدي .

• العدد العقدي $Z = a + bi$ ⟵ $\vec{w}(a, b)$ ،

• $Z_A \to A$ ، • $Z_B \to B$ ، $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$

$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ ....

• تساوي شعاعين ⟸ تساوي العددين العقديين .

• مركز أبعاد متناسبة : $Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

• منتصف قطعة : $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

• مركز ثقل المثلث : $Z_G = \frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$

• "هاااام جداً جداً" : قبل البدء بالحل دااائماً افرض معلم متجانس واكتب له : a, b, c أعداد العقدية الممثلة لـ A, B, C هاااام

② - إذا كانت O هو المركز : $\vec{OM} = \vec{AB} \Rightarrow Z_M = Z_B - Z_A$.

طويلته $|Z_M| = OM = AB \Rightarrow AB = |Z_B - Z_A|$.

$\arg(Z_{AB}) = \arg(Z_B - Z_A)$ ......

$\arg(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{\vec{CD}}{\vec{AB}}\right) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)$ ، $\frac{CD}{AB}$

• يعني باختصار أنا ما بقلك : $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

هذا يعني : $\arg(\vec{CD}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{3}$ ، $\frac{AB}{CD} = 4 \Rightarrow AB = 4CD$

• وكمان مثال ترسخ : $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} = Z_M = re^{i\theta}$

$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = r \longrightarrow \arg\left(\frac{\vec{CD}}{\vec{AB}}\right) = \theta$

• فوائدها : 1- حساب طويلة $\frac{DC}{AB}$ / 2- حساب قياس الزاوية عندما : متعامدان $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$ ، ارتباط خطي $\Leftarrow$ $\theta = 0$ ، $\theta = \pi$

* $A \leftarrow Z_1$ ، $M \leftarrow Z$ وحيث : $|Z - Z_1| = r$

M تمثل دائرة مركزها $A(Z_1)$ ونصف قطرها r : $\Rightarrow |Z_{AM}| = r \Rightarrow AM = r$

* $A \leftarrow Z_1$ ، $B \leftarrow Z_2$: $M \leftarrow Z$: $|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$

فالنقاط M تمثل محور القطعة المستقيمة AB . : $\Rightarrow AM = BM$

• فكرة ثابتة : عندما يطلب إثبات ABC قائم : نرسم لنعلم من الرأس القائم "إذا ما علمنا" ولنفرضه B : فنطرحه من الرأسين الباقيين حصراً ⟵ ولا ما بيطلع قائم أو بيطرح طرح ... $\frac{a-b}{c-b} \longrightarrow \arg : \frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$

• فكرة ثابتة : لإثبات ABCD متوازي أضلاع يكفي إثبات أن : $Z_{\vec{AB}} = Z_{\vec{CD}}$ "العفي عابده حساب طويلات"

• فكرة ثابتة : إذا كانت O مركز الدائرة المارة برؤوس $\overset{\triangle}{ABC}$ وكانت مركز ثقله ⟸ فإن هذا المثلث متساوي أضلاع ..

• عمل : محي الدين مقرش

• فكرة جهنمية ② : $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e} \Rightarrow \frac{Z_{\vec{EA}}}{Z_{\vec{ED}}} = \frac{Z_{\vec{EC}}}{Z_{\vec{EA}}}$

زاويتين متساويتين $\Rightarrow \arg(\vec{ED}, \vec{EA}) = \arg(\vec{EA}, \vec{EC})$

تشتركان بضلع مستقيم ... ⟸ فهو المستقيم EA منصف للزاوية $(\vec{ED}, \vec{EC})$ ...

③ - الكتابات العقدية للتحويلات الهندسية

1- الانسحاب : $\vec{w}$ شعاع يمثل العدد العقدي b : ⟸ هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ ... $Z' = Z + b$ ...

2- التحاكي : Ω يمثلها العدد العقدي w ، k عدد حقيقي ،

H هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k : $Z' - w = k(Z - w)$

3- الدوران : Ω نقطة يمثلها العدد العقدي w ...

θ عدد حقيقي ≠ 0 ، R هو الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ :

$Z' - w = e^{i\theta}(Z - w) \xrightarrow[\Omega = 0]{\text{حالة خاصة}} Z' = e^{i\theta} Z$ ...

• M' صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ ...

• M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه Ω(w) نسبته k ...

• M' صورة M بالدوران الذي مركزه Ω(w) وزاويته θ ...

* لطيفة : إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $+\frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين ...

$b - a = i(c - a) \Rightarrow \frac{b-a}{c-a} = i$

• $R(G) = H \Rightarrow$ H صورة G وفق دوران ...

* لطيفة : إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $+\frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

$b - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \Rightarrow \frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

فيه AB = AC وزاويته 60° ...

* لطيفة : تناظر مركزه نقطة هو دوران زاويته π ...

* لطيفة : تناظر محوري محوره (ox) هو أن نعكس التراتيب ، تناظر محوري محوره (oy) هو أن نعكس الفواصل ...

* لطيفة : $\frac{Z_{\vec{AM}}}{Z_{\vec{BM}}} = \frac{m-a}{m-b} =$

a ⟵ فالنقاط على استقامة واحدة

ib ⟵ تمثل مثلث قائم ، أما إذا كانت 1 = b فمتساوي الساقين ...

• آخر فكرة قبل الدخول بالأنشطة والتمارين :

* لإثبات وقوع A, B, C على استقامة واحدة :

$c - a = k(b - a)$

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0$ أو π

$\frac{c-a}{b-a} =$ عدد حقيقي

• عمل : محي الدين مقرش

* لإثبات تعامد المستقيمين (AB), (CD) :

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

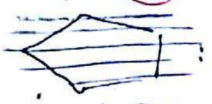
$\frac{c-a}{b-a} =$ عدد تخيلي بحت

ملاحظة : أقسم بالله ورقة ذهبية تشرب بماء العين ادرسها بهم وإن شاء الله الرهدة $\frac{1}{2}$ ساعة بايدك ما بتقول ...

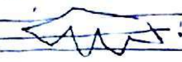
(3)

• أنشطة تطبيقات المقدمة :

* الرباعي المحدب : هو الذي عندرسمه نقطعه خط واحد :



* الرباعي المقعر : هو الذي نقطعه عشرات :



• النشاط (1) : الزاوية + : الجوا مباشر/ الزاوية نغير ← : لبرا مباشر

بالمختصر : دورانات نحاول نعزل p, q, r, s لحالن

بعد ذلك كما ذكرنا سالفاً : $\vec{PQ} = \vec{SR}$ تؤدي $(p-q) = (r-s)$

يجب أن يساووا بعضهم فيكون الشكل متوازي أضلاع ...

• النشاط (2) : الجذور التكعيبية للعدد (1) ⇐ تعيين حلول $Z^3 = 1$

نعوض $r^3 = 1 \rightarrow (r e^{i\theta})^3 = e^{i2\pi k} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{3}$ $k = 1, 2, 3$ نظهر ثلاث حلول

• هذه الحلول واحد حقيقي واثنان عقديان أحدهما مرافق الآخر، ممثلات الحلول تشكل مثلث متساوي الأضلاع ... ومجموع هذه الحلول يساوي الصفر... $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ..."هي بالأخير" ...

• تمارين الوحدة (1) : • هنا نُنشأ خارجي مربعين ومتوازي أضلاع بينهما ... لإثبات تعامد المستقيمين : 1ً- نكتب نقطتين من نقاط المتوازي الأضلاع بدلالة نقطتي المثلث ... دورانات

2ً- نكتب $\vec{OR}$ بدلالة $\vec{ON}$ و $\vec{OQ}$ حسب خاصية متوازي الأضلاع ثم بالتعبير العقدي / 3ً- نكتب $\vec{AB}$ أيضاً بالتعبير العقدي .

4ً- بعد ذلك نستنتج أن $\vec{OR}$ ، $\vec{AB}$ متعامدان ..

(2) - فكرة ثابتة : عندما يعطيك $Z' = \frac{Z+2}{Z-i}$ ويبدأ يقول لك ماذا تمثل المجموعة كذا ... حصراً يجب أن نفرض :

$Z = x + iy$, $Z' = X + iY$ ...

(3) - • في المثلث المتساوي الساقين : المتوسط للقاعدة هو منصف للزاوية الرأس ..

(4) - عندما يطلب مجموع زوايا : نكتب إحداثيات كل نقطة بشكلها الجبري والأسي : ثم نقارب الأشكال الجبرية بالأشكال الأسية ..

(5) - فكرة ثابتة : بس تعطيك Z' بدلالة Z وتسألك عن انتماء Z' شرط لانتماء Z لدائرة .. : 1ً- إذا Z' تنتمي لدائرة نصف قطرها 1 ومنه : $|Z'| = 1$ ⇐ $|Z'|^2 = 1$ ..

نكمل الحل نظهر : $|Z|^2 = 1$ ...

• عمل : مجد الدين قريشي

(6) : تعامد مستقيمين = تعامد المرافقين لهما ..

• المستقيم المار من منتصف ضلع من مثلث موازياً ضلع آخر يكون ماراً من منتصف الثالث أيضاً

(4) أفكار المسألة ص 44 : 1ً- برهان مرافق a المطلوب ومرافق k - h المطلوبين ... لأننا نريد (OA) ، (HK) متعامدان ..

2ً- من الفرض $\vec{AM}$ عمودي على $\vec{BC}$ فهو عمودي على $\vec{OB}$ ..

3ً- بالتالي تعامد الشعاعين $\vec{AM}$ ، $\vec{OB}$ يعني تعامد مرافقيهما الشعاعين : $\vec{OA}$ ، $\vec{HK}$ وهو المطلوب ..

(7) - • عندما يكون هنالك دورانات كثيرة دقيقة ، حل بهدوء

• المستطيل قطراه متساويان وليسا متعامدان ...

(8) - التمرين ص 45 تحت (11) نفس النشاط الأول نحاول نعزل m, n, p, q ... لحالن بواسطة الدورانات : ومن نظهرها ش ما بدك ...

* حل بهدوء وتركيز ...

التمرين الأخير من الوحدة ...

للكتاب ...

ملاحظة : أوراق شرح عباد العيس ...

ادرسهم وإن شاء الله الوحدة ما بتطول بإيدك $\frac{1}{2}$ ساعة ...

...

• عمل : مجد الدين قريشي

0994900629

لا تنسونا من صالح الدعاء

• الأعداد العقدية : $(i^2=-1)$,

①- قوانين : $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

• الشكل الجبري ... $Z = a + bi$

حيث : ① $Re Z : a$, $Im Z : b$,

تخيلي بحتاً ; $Z = 0 + bi$; حقيقي : $Z = a + 0i$

$r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2}$ طويلة عدد عقدي

هام جداً ← $r^2 = |Z|^2 = Z\cdot\bar{Z} = a^2 + b^2$

$\bar{Z} = a - bi$ مرافق عدد عقدي

$-Z = -a - bi$ معاكس عدد عقدي ...

• اقرأ ص 3 رقم ⑩ ...

$Z + \bar{Z} = 2a$, $Z - \bar{Z} = 2bi$

$\bar{Z} = Z$ فالعدد حقيقي ...

$\bar{Z} = -Z$ فالعدد تخيلي بحت ...

②- لحل المعادلات في العقدية مثل : $Z - 2\bar{Z} = 2$

$Z = x + yi$

نفرض الزوائد ونحلها ونساوي مع الطرف الآخر ...

③- • الشكل المثلثي : $Z = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$

نرمز للسعة : $\arg Z = \theta$ ...

حيث : 1- $r > 0$, 2- $\theta_1 = \theta_2$, 3- $+\sin$, $+\cos$

4- $\sin$ القسم التخيلي (معها i) و $\cos$ حقيقي (دون i)

• $\bar{Z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

مرافق العدد العقدي بشكل مثلثي ...

• $-Z = r(-\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta))$

معاكس عدد عقدي بشكل مثلثي ...

• تساوي عددين عقديين بالشكل المثلثي : $r_1 = r_2$

وأيضاً : $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi k$ حيث k إشارات ...

• يكون Z حقيقياً : $\arg Z = \pi(2\pi)$ سالب ; $0(2\pi)$ موجب

ويكون Z تخيلياً : $\arg Z = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ تخيلي موجب ; $-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ تخيلي سالب ...

• عمل : مجد الدين معرش .

④- هام جداً : معالجة الإشارات في الشكل المثلثي ...

أ- $Z = r(+\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ ②

$\theta_1 \xrightarrow{\text{ربع أول}} \theta = \theta_1$

ب- $Z = r(-\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$\theta_1 \xrightarrow{\text{ربع ثاني}} \theta = \pi - \theta_1$

ج- $Z = r(-\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$

$\theta_1 \xrightarrow{\text{ربع ثالث}} \theta = \pi + \theta_1$

د- $Z = r(+\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$

$\theta_1 \xrightarrow{\text{ربع رابع}} \theta = -\theta_1$

• حالات خاصة :

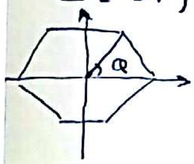
• $Z = a \; ; a > 0 \Rightarrow Z = a e^{i0}$

• $Z = a \; ; a < 0 \Rightarrow Z = |a| e^{i\pi}$

• $Z = bi \; ; bi > 0 \Rightarrow Z = b e^{i\frac{\pi}{2}}$

• $Z = bi \; ; bi < 0 \Rightarrow Z = |b| e^{-i\frac{\pi}{2}}$

⑤- • ثابت : من خواص المسدس : $\theta = \frac{\pi}{3}$



• اقرأ تمرين ص 7 موقت ...

⑥- • خواص طويلة زاوية العدد العقدي :

• $\arg(Z\cdot Z') = \arg Z + \arg Z'$

• $\arg(Z)^n = n\arg(Z)$ ...

• $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg Z - \arg Z'$

• اقرأ ص 9 …الأ… 2017

• دستور دوموافر : $r(\cos\theta + i\sin\theta)^n =$

$\rightarrow r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ ...

بطلع $Z\cdot Z' \Rightarrow r_1 \times r_2$: كما : $\theta_1 + \theta_2$ =>

• ال (i) كالجذر لا يجوز أن تبقى في المقام ...

⑦- • اقرأ ص 10 ② ③ ④ أفكار جديدة وحلوة ...

• $(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

• $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

• ملاحظة : بالنسبة للعقدية احفظ الجدول ادرسهن نصم أقسم بالله وقراءة سريعة للتمارين تخلص بنفس سهلة ..

• عمل : مجد الدين معرش .

• تكملة الأعداد العقدية :

⑧ - الشكل الأسي : ③

• $Z = r \cdot e^{i\theta}$ ...

والخواص :

• $Z_1 Z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

• $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$; • $\bar{Z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

• $Z_1 = Z_2 \Rightarrow r_1 = r_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$

اقرأ صـ 11

• دستور دوموافر بالشكل الأسي : المثالث ...

• $(re^{i\theta})^n = r^n e^{i\theta n}$ ...

• دستور أولر : $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

⑨ - • دساتير مضاعف زاوية :

الصيغة : $\rightarrow 1+\cos(2x) = 2\cos^2(x)$ ...

$(1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\rightarrow 1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$ ...

$\rightarrow 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \sin(2\theta)$ ...

• انتبه لعمليات الإرجاع لعدد الكتابة بالشكل المطلوب :

• $256\, e^{i\frac{11\pi}{6}} = 256\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $\pi \rightarrow -$

⑩ - المعادلة من الدرجة الثانية في الأعداد العقدية :

① - $\Delta > 0$: حلان حقيقيان : $Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

② - $\Delta = 0$: $Z = \frac{-b}{2a}$ حل حقيقي مضاعف ...

③ - $\Delta < 0$: للمعادلة حلان عقديان مترافقان :

$Z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $Z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

اقرأ صـ 16 تمرين (4)

⑪ - • وللك دالالغاً : $Z^2 + qZ + p = 0$ سيكون جذراً :

$x_1 \cdot x_2 = p$, $x_1 + x_2 = -q$

أنشطة ...

⑫ - نشاط (1) : قضية إقليدية سهل به انتبه لأن تثبت مثلث متساوي الأضلاع أما : مثلاً فأول طلب بهم أما الباقي سهل ... هلال جداً جداً قاعدة :

• عندما لدينا 4 نقاط : A , B , C , D ولها (x,y) ثنائية ، نريد أن نظهر إحداثيات مركزها وحساب نصف قطرها : للدائرة

$AM^2 = BM^2 \Rightarrow y = \square$ نظهر لنا

$AM^2 = CM^2 \Rightarrow$ علاقة فيها x و y <= نعوض y

$AM = r$ نصف القطر ؛ x فنظهر : M(x,y) هي المركز و :

لأن : $AM = BM = CM = DM$ ...

• عمل : مجد الدين مقرش .

⑬ - نشاط (2) : الجذران التربيعيان لعدد عقدي : ④

$Z^2 = W \Rightarrow \sqrt{W} = \pm Z$ ... $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

• $x^2 - y^2 = a$ —— ①

• $2xy = b$ —— ②

• $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ —— ③

• دائماً : نجمع ① مع ③ ثم نعوض في ②

⑭ - إيجادهما بالشكل الأسي : $Z^2 = W$

$\Rightarrow r^2 e^{i2\theta} = r_0 e^{i\theta_0} \Rightarrow r = \sqrt{r_0}$, $2\theta = \theta_0 + 2\pi k$ ؛ $r = \sqrt{r_0}$, $\theta = \frac{\theta_0 + 2\pi k}{2}$

ثم نعوض : $k=0$, $k=1$

⑮ - • احفظ دساتير صـ 18 أول ...

• المعين : شكل رباعي تساوت أضلاعه أو تعامد قطراه ...

• المستطيل : رباعي تناصف قطراه وتساويا بالطول ...

الخ : هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة .. اقرأ (2) صـ ...

⑯ - تبسيط عدد عقدي؟! فكرة ثابتة : عندما يكون مجهول في مثلثية ... طول ... tan , cos , sin بطريقة ما : ثم نسحب عامل مشترك (الأسي لتبسيطه) بالاختصار ...

• $\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}} = \frac{e^{-ix}(e^{ix}+1)}{e^{ix}+1} = e^{-ix}$ ...

⑰ - فكرة ثابتة : في مثلث : $\sin A = \sin(B+C)$ وكذلك ومنه خلال لها نثبت أنه متساوي الساقين صـ 21 .

• فكرة ماذا المثل الجبرية : $Z^2 - \bar{a}^2 = \bar{Z}^2 - a^2$ سهلة .

⑱ - فكرة ثابتة : عندما يعطي معادلة من الدرجة فوق الثانية ؛ ويريد حلها بإجراء القسمة الإقليدية لكن يطلب "يقول" : أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً $(Z = ai)$ أو حقيقياً $(Z = a)$ نعوض ثم نعزل Real لحال و Imag لحال ونوجد منها قيمة لنا الـ a ثم نكمل قسمة إقليدية ...

⑲ - ______________________

مثال صـ ...

• ملاحظة : أقسم بالله اقرأ هدول والحفظون بهم وإن شاء الله اقرأ الوحدة والتمارين ساعة بتطلع طالب منها إن شاء الله وأكثر ...

0994900629

• عمل : مجد الدين مقرش .

Scanned by CamScanner

• الأشعة في الوحدة الأولى :

1

① - إثبات 3 نقط على استقامة واحدة :

أ- بطريقة تحليلية نثبت أن شعاعين من هذه النقط مرتبطة خطياً : $\vec{DG}=\frac{2}{3}\vec{DJ}$ ...

ب- شعاعياً : بأن نحاول إظهار علاقة بين شعاعين منهم من خلال اللعب بالأشعة .

② - الموشور القائم : مجسم فيه وجهان متقابلان مضلعات متوازيان وأوجهه الجانبية مستطيلات ..

• متوازي السطوح : موشور قائم قاعدته متوازي أضلاع ...

مهم ...

• متوازي مستطيلات : موشور قائم قاعدته مستطيل .

• بالنسبة للأشعة : إقرأ الجدول واعمل قراءة سريعة للتمارين .

• تحمل : تجد الدنيا مفرشة

• مكعب : موشور قائم تساوت أبعاده الثلاث والأوجه مربعات متطابقة ...

③ - فائدة الارتباط الخطي لـ 3 أشعة :

أ- تفيد في وقوع عدة نقاط في مستوي واحد والأشعة كذلك ..

ب- لإيجاد معادلة لهذا المستوي ..

④ - A , B , C , E , F تقع في مستوٍ واحد ... $\vec{BE}=4\vec{BC}$, $\vec{AF}=4\vec{AE}$

⑤ - انتبه : أ- في الارتباط الخطي لـ 3 أشعة أن تذكر أن $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ غير مرتبطان خطياً ...

ب- في مركز الأبعاد المتناسبة : $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

ج- في المعادلات الوسيطية : $\lambda \in \mathbb{R}$

د- إثبات d , d' متقاطعان : $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً ...

⑥ - نقطة تلاقي المتوسطات = مركز ثقل المثلث التقليدي (إثباته)

⑦ - $A(2,3,0)$, $B(3,2,1)$, $M(a,b,2)$

إيجاد a , b : تناسب مركبات حصراً ...

⑧ - إيجاد مثلث قائم ؟ حسب عكس فيثاغورث ..

• معادلة كرة تمس xoy ؟ معناها : $Z=R$,

• A , B , C تنتمي للمستوي المحوري لـ EF ؟؟

يجب : $CE=CF$ / $AE=AF$, $BE=BF$ وهكذا ...

• علاقات مركز الأبعاد المتناسبة ..

2

• في رباعي الوجوه : مركز ثقل رباعي الوجوه يبعد عن رأسه : $\frac{3}{4}$ وعن القاعدة : $\frac{1}{4}$ والمتوسط المرسوم هو متوسط رباعي الوجوه ..

ص 38

$V=\frac{1}{3}Sh$ هرم

$V=Sh$ موشور

⑨ - إثبات وقوع نقط على استقامة واحدة :

أ- مراكز أبعاد متناسبة ... أحدها مركز للآخرين ...

ب- أن نكون علاقة ومنها نستنتج ... العلاقات ...

ج- إيجاد علاقة تربط هذه النقط ... (قاعدة متوازي الأضلاع)

⑩ - هام : إثبات نقطة تقع على المستوي :

يجب أن نكون k ← ABC مراكز أبعاد متناسبة لنقاطه ... يكون عامينا علاقة أو كنت منشكل علاقة ...

ص 15 حتى ... ص 20

• تفيد مركز الأبعاد أيضاً بإثبات أن نقط تقع بمستوي واحد ...

⑪ - ادرس ص 21 أشعة هام ... ص 22

⑫ - أسطوانة : $x^2+y^2=R^2 ; (O,\vec{k}) ; z_1 \le z \le z_2$

مخروط : $x^2+y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0 ; (O,\vec{k}) ; z_1 \le z \le z_2$

← عدم ارتباط خطي لـ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ...

⑬ - • إثبات d , d' متقاطعان وتعيين نقطة تقاطعهما : مع معادلات وسيطية لكل من d , d' هام

⑭ - لإثبات مستقيم يوازي مستوي : يجب إثبات الارتباط الخطي لـ 3 أشعة منهم هذا المستقيم ... ص 31 وص 35

• اقرأ ص 32 : ⑧ / • اقرأ ص 33 ص 34 ⑪ ② ،

⑮ - انتماء نقطة لمستوي M ← (ABC : (هام) ارتباط خطي لـ 3 أشعة ..

وكذلك العلاقة بين ... أو لكي تكون A , B , C , D بمستوي واحد

⑯ - لحساب بعد نقطة عن مستقيم : أ- نكتب المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم

ب- المعادلات تمثل نقطة عامة / ج- ولنفرض K أصغر الأبعاد نكتب MK^2

د- نفرض $f(x)=MK^2$ ومن جدول التغيرات نجد أصغر قيمة لها .

إقرأ ص 38 وص 39 .

ص 9

⑰ - $MA=MB$ مستوي محوري / $MA=2MB$ كرة ... $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ كرة

$\|\vec{MG}\|=3$ كرة / أي شعاعين مرتبطين خطياً فهما مرتبطان مع أي شعاع ثالث : $\vec{AB}=3\vec{AG}+0\vec{HK}$ ...

⑱ - M منتصف [IJ] و N منتصف [LK] لإثبات IJKL هي نقطة تقاطعهما ... المنصفتين في الشكل هو متوازي أضلاع ... والنقط الأربع بمستوٍ واحد ..

• تحمل : تجد الدنيا مفرشة

• الأسئلة المهمة الثانية :

① - 1" ③

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$:

• $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha$

• $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

2" - $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان ؟ جداؤهما السلمي صفر : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

3" - • الكاشي : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

• علاقة التوسط : ... $2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

② - إيجاد معادلة d' العمودي على d ومار بنقطة A :

1" - ناظم d هو شعاع توجيه d' ومنه $(-b, a)$ هو ناظم لـ d' ...

2" - نوجد ميل d' : $m \cdot m' = -1$ ونعوض بـ : $y - y_A = m(x - x_A)$

③ - نستخدم : $2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

$(AB)^2 = (\vec{AB})^2$ ...

④ - بعد نقطة عن مستوي : $dist = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

• اقرأ ص 46 ص 47

⑤ - متعامدان ؟ إذا كان جداؤهما السلمي صفر ... أو أشعة الترجيه

⑥ - $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ مرتبطان خطياً ← المستويان متوازيان

• $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ غير " " ← " متقاطعان .

• $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ متعامدان ← المستويات متعامدان .

⑦ - • في رباعي وجوه المنتظم كل حرفان متقابلان متعامدان وكل مستقيم يصل بين منتصفيهما عمود عليهما ... اقرأ ص 51

• في رباعي الوجوه المنتظم الارتفاع النازل من A عمودي على المستوي لأنه عمودي على مستقيمين منه ... ص 52

1" - $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}(\vec{CA} + \vec{AD}) = -\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}\cdot\vec{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \boxed{0}$

2" - $\vec{AG}\cdot\vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BG})\vec{CD} = \vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{BG}\cdot\vec{CD} = \boxed{0}$

$\vec{AG}\cdot\vec{BD} = (\vec{AC} + \vec{CG})\vec{BD} = \vec{AC}\cdot\vec{BD} + \vec{CG}\cdot\vec{BD} = \boxed{0}$

⑧ - • معادلة مستوٍ مار بالمبدأ : $ax + by + cz = 0$

• معادلة مستوٍ يوازي $x'x$: $by + cz + d = 0$

• معادلة مستوٍ يوازي $y'y$: $ax + cz + d = 0$

• معادلة مستوٍ يوازي $z'z$: $ax + by + d = 0$

• معادلة مستوٍ يوازي xoy : $cz + d = 0$

• معادلة مستوٍ يوازي xoz : $by + d = 0$

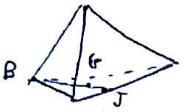
• معادلة مستوٍ يوازي yoz : $ax + d = 0$

...

تحل : محمد الدين مقرش ..

تابع ⑦ : • في رباعي الوجوه المنتظم ، O مركز هذا الرباعي هو مركز أبعاده المتناسبة : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ ومنها نقوم بإثبات أن A , O , G على استقامة واحدة ... ④

• لحساب AG : نحسب BG من المثلث القائم السفلي : $BG = \frac{2}{3}BJ$



حيث : طول المتوسط في مثلث متساوي الأضلاع هو : $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ...

ثم فيثاغورث لحساب AG ثم $AO = \frac{3}{4}AG$ ...

• نعلم أن OA = OB ... ومنه نحسب OI من فيثاغورث ...

⑨ - • هام جداً : حالات إيجاد معادلة المستوي :

1" - يكون لدينا نقطة وناظم الحل مباشر ...

2" - 3 نقاط ليست على استقامة واحدة ومنه : نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ يعامد شعاعين وحل المعادلتين الظاهرتين نفرض أحد الأعداد عدا الـ (0) ومنه يظهر لنا : $\vec{n}$.

3" - نقطة من المستوي وشعاعي توجيه للمستوي : نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ يعامدهما ونحل كما بالحالة السابقة ...

4" - مستوي P المطلوب يعامد مستوي Q لكنه يحوي نقطتين : نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ يعامد $\vec{n_Q}$ ويعامد $\vec{AB}$ ونكمل الحل ...

5" - من علاقة مثل $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ ...

⑩ - حساب بعد نقطة عن مستقيم بالفراغ : نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم - ثم نفرض نقطة K ومنه نحسب AK^2 ونفرض $F(\lambda)$ ونحسب أصغر قيمة فتكون البعد ...

⑪ - حساب الإيجاد " معادلات الوسيطية لفصل مشترك لمستويين متقاطعين : من خلال معادلات المستويين نوجد نقطة (N_1) من خلال تعويض قيم والـ (0) مقبول ... ونظهر (N_2) ويعود ذلك نظهر (N_1N_2) وبالتالي نستطيع كتابة المعادلات الوسيطية .

ملاحظة : تأكد أول شيء إذن هنالك متقاطعين " $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ " ...

⑫ - لإيجاد إحداثيات تقاطع مستقيم مع مستوي : نثبت أنهما متقاطعان ثم نقوم بإيجاد المعادلات الوسيطية للمستقيم d ونعوضها بعد ذلك في معادلة المستوي فنظهر (λ) نعوضها فنظهر (x, y, z) .

⑬ - إيجاد المسقط القائم لنقطة D على مستوي ABC : نبرهن أن $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ليسا مرتبطان خطياً ، ثم نقوم بأن نفرض $\vec{n}$ للمستوي يعامد $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ فيظهر لنا الناظم ومنه نقوم بإظهار معادلة المستوي ، بعد ذلك نقوم بإظهار المعادلات الوسيطية لـ DD' من خلال $\vec{n}$ و D ، وبعد ذلك نعوضها في معادلة المستوي فيظهر لنا (λ) ثم نعوضها في المعادلات فيظهر لنا : $D'(x, y, z)$ ...

تحل : محمد الدين مقرش .

0994900629

• أنشطة الوحدة الثانية: 1". رباعي الوجوه المنتظم ...

1" • إثبات أن كل حرفين متقابلين متعامدين:

نبرهن:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) =$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ (6)

$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \boxed{0}$

• إثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفيهما عمودي على كل منهما:

نبرهن:

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$

ومنه: $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}) \dots$

$= \frac{1}{2}AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^2}{2} + 0 = \boxed{0}$

وهكذا الثاني نفس الشيء ...

2" - لإثبات أن الارتفاع النازل من A عمودي على المستوي:

نبرهن: هو عمودي على مستقيمين من هذا المستوي،

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = 0$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$

3" - (a) - سهلة حسب مركز الأبعاد المتناسبة A, O, G على استقامة واحدة ...

(b) - لحساب AG نحسب BG من المثلث القائم BCJ أن:

خاصية المتوسط: $BJ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; $BG = \frac{2}{3}BJ$

ومنه نحسب AG من المثلث AGB القائم في G ...

وبعد ذلك: $AO = \frac{3}{4}AG$ ...

(b) - ببساطة سهلة ... حسب مركز الأبعاد المتناسبة ..

(c) - $OB = OA$ نعيّن بأن ... وبعدها IO من القائم OAI

حسب فيثاغورث ...

4" - لحساب $\widehat{AOB}$ حسب التكوشة (الكاشي)

نحسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ بطريقتين أحدهما الكاشي ومنه

نقارن بينهما وتظهر لنا $\cos(\alpha)$ ...

حاول حسب ...

• عمل: مجد الدين مقريش

2" - رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة ...

(a) - حساب إحداثيات المسقط H ... حسب الورقة السابقة ...

(b) - نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث: (6)

نبرهن: نقطة تلاقي الارتفاعات الثلاث ومنه حاول حسب ...

• $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} = 0$

• $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$

• $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$

(a) - نحدد (CH) فيقطع AB في K مسقط C على AB حيث

CH يعامد AB ، وبما أن OC يعامد OB , OA فهو

يعامد المستوي ABO الذي يحويهما ومنه OC يعامد

AB ومنه $OK \perp BA$ حسب الأعمدة الثلاث ...

"حيث وجدنا أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$ " ...

ولإيجاد إحداثيات K سهلة حسب المثلث القائم ...

حسب الورقة السابقة ...

3" - خواص المكعب:

(1) - انتبه أنها a وليست (1) ...

(2) - احسب إحداثيات H ؟! من $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC'} = 0$

نظهر علاقة أولى ... ثم $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AC'}$ فتظهر

علاقة ثانية ... ثم نحلهم فتظهر λ ثم نبدل في

الإحداثيات ... لحساب إحداثيات مسقط

رأس مكعب على قطر رئيسي فيه " ...

(3) - (4) - ببساطة ... والباقي سهل ...

... دمتم في أمان الله ...

• عمل: مجد الدين مقريش

0994900629

لا تنسونا من صالح الدعاء

• تكملة الوحدة الثانية: أشعة ...

(7)

(14)- لحساب محور قطعة AB ولدينا A، B:

1: $MA^2 = MB^2$ أو: 2- I منتصف + $\vec{AB}$ ناظم لهذا المحور:

$ax + by + c = 0$; $\vec{AB} = \vec{n}(a, b)$ ...

(15)- لحساب أي زاوية في مكعب سواء "داخلية ... ناتجة عن تقاطع قطرين مركزيين أو غيره ... نفرض معلماً متجانساً" ثم نحسب الإحداثيات: ثم نحسب أطوال الأضلاع، ثم علاقة الكاشي لنحسب $\cos\theta$ لها ...

• للمرة العاشرة: الفصل المشترك لمستويين: لإظهاره يجب قبل ذلك أن نقول: $\vec{n_1}$، $\vec{n_2}$ غير مرتبطان خطياً ...

(16)- هذه: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ تمثل كرة ...

• اقرأ ص 70 ت 23 قطر الكرة ...

• اقرأ ص 72 تمرين 27 في فترة حلوة ...

(17)- تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة إذا كانت كل ناظمين منها غير مرتبطات خطياً "مثنى مثنى" ...

* الوحدة الثالثة: أشعة ...

(1)- طريقة الحذف بالتعويض: هي أن نقوم: $x = \frac{z+5}{2}$ و $y = \frac{2z+10}{4}$ ثم نعوضها فيظهر لنا الـ z ...

• $x + y + z + 6 = 0$

• $2x + 4y + z - 10 = 0$

• $4x + y - 5z + 15 = 0$

(2)- الحذف بالجمع: هي أن نجمع ونطرح بالمعادلات فتظهر لنا المجاهيل ... • اقرأ مثال 2 ص 75 • اقرأ مثال 2 ص 76 ومثال 3

(3)- طريقة غاوس: هي أن نلعب بـ (1) ونجمع أو نطرح مع (2)، (3) فيترك الواحد؛ ثم نلعب بـ (5) ونجمعه ونطرحه مع (6) ... بعد ذلك نثبت (4)، (5) وهكذا ...

• $x + y + z - 7 = 0$ (1)

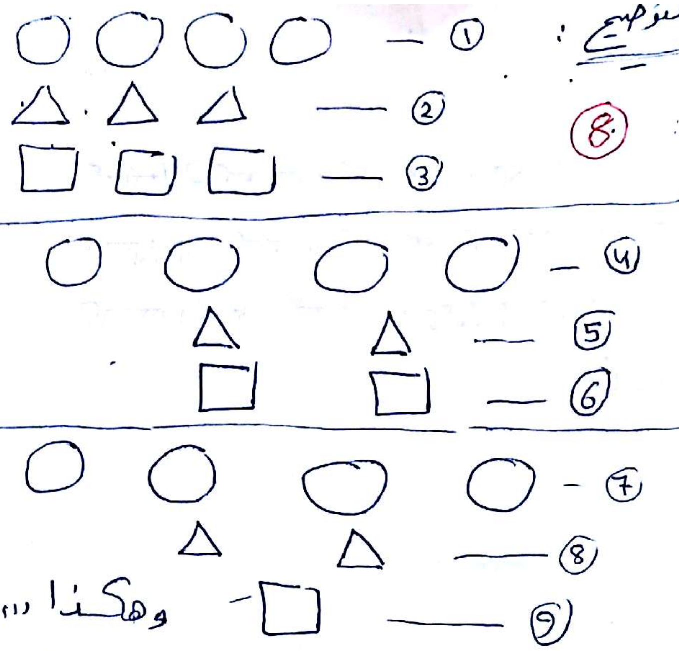
• $2x + 4y + 7z = 0$ (2)

• $7x + 9y + 7 = 0$ (3)

• ملاحظة: عندما يظهر لك عدد غير منتهٍ من الحلول اكتب هذا الكلام لأن عليه علامات ...

• عمل: محمد الدين مقرش.

• للتوضيح:



(4)- • لإثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أن أحدها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الأخريين

• لإثبات أربع نقاط في مستوٍ واحد يكفي إثبات أن أحدها مركز أبعاد متناسبة للثلاث الأخرى،

• إذا كانت التثقيلات للنقطتين $\alpha > 0$، $\beta > 0$ فإن مركز الأبعاد المتناسبة تقع بينهما ...

• بسبب عقلك فقط شكل: نستخدم: $\frac{\vec{AB}}{\vec{AC}} = \frac{1}{1}$

• اقرأ ص 80 ت 6+7 هام إيجاد لا، α، β بعلاقة بينهم،

(5)- $[AB]$ يكون تمثيل الوسيطي: $\lambda \in [0,1]$ و $[AB)$ يكون تمثيل الوسيطي $\lambda \in [0,+\infty[$ و $(AB]$ يكون: $\lambda \in]-\infty, 0]$، (AB): $\lambda \in R$ ...

(6)- المستوي

متوازيان: $\vec{n_1}$، $\vec{n_2}$ ارتباط خطي

متقاطعان: $\vec{n_1}$، $\vec{n_2}$ غير مرتبطات خطياً

متعامدان: $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$ متعامدان جداؤهما السلمي صفر،

المستقيم ...

متوازيان: $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطات خطياً ...

متقاطعان: $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطات خطياً ... والمعادلة الثالثة محققة، يجب لإيجاد الثالثة

متخالفان: $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطات خطياً والمعادلة الثالثة غير محققة ... لا تحقق المعادلة الثالثة

• بالمعادلات الوسيطية: $\vec{AB}$ شعاع التوجيه: $[AB) \to [0,+\infty[$ و $(AB] \to]-\infty, 0]$

" $\vec{BA}$ شعاع توجيه: $[AB) \to]-\infty, 0]$ ، $(AB] \to [0,+\infty[$ "

• هل يقطع المستقيم للمستوي؟ 1- نقطة ✓ / 2- أكثر ✗ / 3- لا يوجد ✗

• في المستوي يكفي إثبات عدم الارتباط الخطي لـ $\vec{n_1}$، $\vec{n_2}$ أنهما متقاطعان

أما المستقيم لا يكفي بل يجب أيضاً حل المعادلتين ليظهر ما يحقق الثالثة،

* دراسة وضع مستقيمين بالفضاء:

أ- متوازيان؟! 1- نعم: نبحث عن نقطة فيهما منطبقان ...

2- لا: نبحث عن نقطة إن وجدت فهما متقاطعان إن لم توجد فهما متخالفان.

وكذلك نتأكد من التعامد لضرب المركبات ...

• عمل: محمد الدين مقرش.

0994900629

كمالة الوحدة الثالثة :

16 • وضع مستقيم مع مستوي :

1- $\vec{n_1}$ ، $\vec{u}$ متعامدان ؟ 1- نعم : في نقطة تقاطع معناته هو منطبق عليه ، لا يوجد فهو يوازيه فقط ..

2- لا : في نقطة تقاطع فهو قاطع له ما في نقطة فهو تخالف ..

• وضع ثلاث مستويات معاً : نحل المعادلات :

1- نقطة وحيدة ؟ ← متقاطعون حتماً .

2- ظهرت نفس المعادلة ؟ ← فصل مشترك ..

3- ظهرت معادلة متناقضة ؟ ← لا يشتركون بشيء ،

• لا تنسَ : أن تقول : يوجد عدد غير منته من الحلول ..

• النشاط للوحدة الثالثة : ①

1- ثابت : برهان أن مركز الأبعاد المتناسبة لرباعي الوجوه أنه نقطة تلاقي كل المتوسطات الـ4 فيه ...
نبرهن أن G مركز لـ الرأس A ومركز ثقل المثلث BCD المقابل له ..
" " G " " الرأس B " " المثلث ACD ...
وهكذا أي يكون هو نقطة تلاقي المتوسطات ..

2- ثابت : أن G هي منتصف القطع كلها الواصلة بين أحرفين متقابلين هي مركز لـ A , B , C , D منتصف لـ I , J أيضاً منتصف بالمنتصف وهكذا ..

• النشاط الثاني : ② تلاقي = تقاطع ..
(RS) (PQ)

1- لإثبات تلاقي مستقيمين يجب إثبات أن G يقع على (RS) ويقع على (PQ) "باعتباره مركز أبعاد لـ D , C , B , A" ومنه هو نقطة تقاطعهما ..

• وأما النشاط الثالث قراءة ...

⑦- اقرأ ص 96 التدريب 3 ... الغاية وسر هذا التدريب هو أن يبقى لدينا $\vec{MA}$ بالأخير لوحدها يعني M وحدة بس ... وهو بأن ندخل A أو B في الأشعة الأخرى ... اقرأ ص 97 ④ . فكرة هام

النظير لنقطة في مركز الأبعاد المتناسبة ..

0994900629

• عمل : مجد الدين ...

⑧- هام جداً والله : عندما يفرض نقطة مركز ثقل مثلث في مكعب ... ويطلب إثبات 3 نقاط استقامة واحدة حصراً : نفرض معلم ! ثم نظهر مركبات للشعاع
بد دأمل ملاحظة مراكز الأبعاد المناسبة لنظهر DF أنها : $\vec{DF} = 3\vec{DI}$
أي : علاقات I مركز أبعاد متناسبة : $\vec{AI}+\vec{HI}+\vec{CI}=\vec{0}$
نظهر مركبات كل شعاع ؛ ثم نظهر إحداثيات I من 11
ص 97 ...

⑨- مكرر وهام : عندما يطلب إثبات تلاقي 3 مستقيمات في نقطة واحدة : يجب إثبات أن نقطة G تقع على كل مستقيم على حدة ... من خلال أنها مركز لـ A , B , C , D
منتصفي مركز لـ Q , S منتصف عليهما / لـ P , R منتصف عليهما /
لـ M , N منتصف عليهما وهكذا (هي مع المستقيمات الثلاث)
ومنه هي نقطة تلاقي ...

• نقطة تقع على مستقيمين ؟! هي نقطة تقاطعهما ... المستقيمات المتقاطعات تقعان في مستو واحد ..

• في متوازي الأضلاع : كل نقطة هي مركز أبعاد متناسبة للثلاث الباقية (حيث المقابل (-1) والباقي (+1)) ..

$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD} \Rightarrow \vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD}=\vec{0}$

A مركز لـ (D,-1) , (C,1) , (B,1) ...

ص 99

⑩ فكرة هامة : إثبات تلاقي 3 مستقيمات حيث أنه أعطانا 3 متوازيات أضلاع ؛ فكرة متوازي الأضلاع :

I هي لـ : (A,-1) , (B,1) , (C,1) , (D,1) ...

• P هي لـ : (A,-1) , (B,1) , (C,1) : I لـ D , P وهو منتصف DP

• Q هي لـ : (A,-1) , (B,1) , (D,1) : I لـ Q و C وهو منتصف QC

• R هي لـ : (A,-1) , (D,1) , (C,1) : I لـ R , B وهو منتصف BR

ومنه I هي نقطة تلاقي المتوسطات الثلاث ..

• أن تكون نقطة منتصف ضلع لا يعني بالضرورة أن هذه النقطة مركز أبعاد متناسبة لطرفي الضلع ..

نهاية الأشهش ... ☺ ...

• ملاحظة : ادرس من هالوراق بكفي والله أنا تعبت عليهم تذكر ... لتوفير الوقت ... بدونك إقرأ سريعاً التدريب بحيث ما تلحق تقرأ وإن شاء الله 100 % ...

• عمل : مجد الدين ...

• وحدة التكامل : ①

① - قد يكون لتابع واحد أكثر من تابع أصلي ولكن لكل تابع مشتق واحد فقط ...

② - تذكر :

• $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

• $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ ...

③ • قواعد التكامل :

• $a \longrightarrow ax$	• $1+\tan^2(x) \longrightarrow \tan(x)$
• $x^n \longrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} \longrightarrow \tan(x)$
• $\sin(x) \longrightarrow -\cos(x)$	• $1+\cot^2(x) \longrightarrow -\cot(x)$
• $\sin(ax) \longrightarrow -\frac{1}{a}\cos(ax)$	$\frac{1}{\sin^2(x)} \longrightarrow -\cot(x)$
• $\cos(x) \longrightarrow \sin(x)$	• $e^x \longrightarrow e^x$
• $\cos(ax) \longrightarrow \frac{1}{a}\sin(ax)$	• $e^{ax} \longrightarrow \frac{1}{a}e^{ax}$

• قواعد اللوغاريتم :

• $\ln(x) \longrightarrow x\ln(x) - x$

• $\frac{\ln x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \underbrace{\ln x}_{g} \longrightarrow \frac{(\ln x)^2}{2}$

• $\frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}\ g'}{\ln x\ g} \longrightarrow \ln|\ln x|$

وضح : $\ln|\ln x|$ $\longrightarrow \ln(\ln x)\ ;\ x>1$ ، $\longrightarrow \ln(-\ln x)\ ;\ x<1$

• قواعد الكسور :

(1) أن يكون : $\frac{g'}{g}$ فيصبح التابع الأصلي : $\ln|g|$ أو ...

(2) أن يكون $\frac{\text{عدد}}{(\ )^n}$ حيث ما يكون هناك ضرب وتطليع المقام للبسط ونكامل عادي حسب $x^n \longrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ،

(3) • $\frac{A(x)}{B(x)}$: أن يكون المقام من الدرجة الثانية وأمثال x^2 هو الواحد عندئذ نميز حالتين :

• الحالة الأولى : $deg(A(x)) \leq 1$ أي من الدرجة الأولى أو عدد عادي ... حيث نقوم بالتالي :

$$A(x) = \lambda_1(x - r_1) + \lambda_2(x - r_2)$$

حيث $B(x)$ هو الـ $(x-r_2),(x-r_1)$ بعد تحليله ...
ونعوض r_1 تحصل على r_2 ، ونعوض r_2 تحصل على r_1 ...

• عمل : مجد الدين معرش

• الحالة الثانية : $deg(A(x)) \geq 2$ أي درجة ثانية وفوق عندئذ نقسم حتى ما أصبحت وتكامل حسب الحالات الأولى أو حسب اللي يطلع ... ②

• ملاحظة : إذا أس المقام واحد لا تخيرك لك ترفعه لفوق لأنه رح يصير الأس = صفر ...

• قواعد الجداء :

• $g' \cdot g^n \longrightarrow \frac{g^{n+1}}{n+1}$

• $g'\cos(g) \longrightarrow \sin(g)$

• $g'\sin(g) \longrightarrow -\cos(g)$

• $g' \cdot e^g \longrightarrow e^g$ ...

• جداءات مثلثية :

• $\cos(ax)\cdot\sin(bx) \longrightarrow \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

• $\cos(ax)\cdot\cos(bx) \longrightarrow \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

• $\sin(ax)\cdot\sin(bx) \longrightarrow -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)]$

• $\sin(ax)\cdot\cos(bx) \longrightarrow \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

• بحدول الفوق حولنا لمجموع x إلى الجمع : $\times \longrightarrow +$ بعد ذلك نكامل ...

• $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ وبعد ذلك نكامل ...

• $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ وبعد ذلك نكامل ...

• حالة خاصة : عندما لا يكون هنالك : g, g', x نلجأ إلى التجزئة التي تعلمناها : مثال :

$F(x) = x\ln x \Rightarrow$ $u' = x \longrightarrow u = \frac{x^2}{2}$ ، $v = \ln x \longrightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$F(x) = \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]}_{\text{جاهز}}^{\text{بدون فقات}} - \underbrace{\int \frac{x}{2}\,dx}_{\text{نكامله}}^{\text{القسم الثاني}}$$

• وهكذا نحصل هيك ...

• $\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u}$ ...

• تذكر :

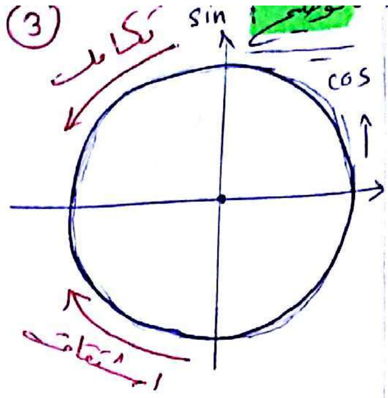
• $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

• $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ ...

• عمل : مجد الدين معرش

0994900629

(3) توضيح :



• هام : عند تكامل القيمة المطلقة : مثل التكامل بالتجزئة (اعملوا التكامل المحدد مثلاً $\int_{-1}^{2}$ نفك القيمة المطلقة بعد دراسة الإشارة ونقسم مجموع تكاملات ...

(4) • عندما يظهر لك قيمة مطلقة أثناء الحل مثلاً :

• $\frac{1}{x} \longrightarrow \ln|x|$; $]0,+\infty[$

وهنا تصبح $\ln(x)$ ... نعتمد على المجال ...

(5) • نعدد حدود كسر : $\frac{2x+1}{x-1}$ قسمة إقليدية ثم نكمل .

(6) • هام : لا يجوز أن نضرب أو نقسم متحول إنما عدد ذاتي ..

• $3x \times x^3 \longrightarrow \frac{1}{x} \times \frac{x}{...} \times 3x \times x^3$ ✗ خطأ

(7) • لما : $\frac{g'}{(g)^n}$ حيث $n \in N$ نرفع المقام للفوق فيصبح حسب قاعدة : $g' \cdot g^n$ ونكمل ...

(8) • انتبه يا فهيم : $(2x-1)^2$ ليست : $\frac{(2x-1)^3}{3}$

بل هي : $\frac{1}{2} \times 2(2x-1)^2$ ثم نكامل ...

(9) • التكامل المحدود وخواصه :

• $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

فوقه تعويض التحت ...

• $\int_a^b f = -\int_b^a f$, • $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

• $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

• $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ ... مثال ...

• عمل : مجد الدين نقرش

(10) • نعلم : • $\sqrt{2-2\cos(2x)} = \sqrt{4\sin^2 x} = 2|\sin x|$

لا تنسى القيمة المطلقة ...

(11) • في التكامل بالتجزئة دائماً نفرض e^x أو $\cos(x)$ أو $\sin(x)$ نفرضها u' ...

أما الـ $\ln x$ نفرضه u ...

• اقرأ صفحة 18 حالات استخدام التكامل بالتجزئة ،

وهام جداً رأس : أن $\ln(ax+b)$ هي تجزئة ،

$u = \ln(ax+b)$, $v' = 1$

(12) • عند تكامل e^x وتبعيته مثلاً : $e^x \cos x$ نعرف

(4) هنا $u = e^x$, $v' = \cos x$ ...

• اقرأ صفحة 20 رقم 5 , 6 هام جداً ...

وفي هذه الحالة فكرة ثابتة هامة : يظهر لنا تجزئة ثانية : $M = \int_0^x e^x \cos x$ ...

نحلها تظهر M ذاتها (ننقلها) تصبح $2M$ ثم نكمل ...

(13) • المرة الأولى عندما ى القيمة المطلقة اذكر أن كذا $x >$ واذكر المجال ...

(14) • عندما تكون درجة المقام أكبر من البسط "امع العلم أن المقام واحد" مثلاً : $\frac{2x-1}{(x+2)^2}$

نلاحظ أن $(x+2)(x+2)$ متماثل وهنا هنا لا نبحث عن λ_1 , λ_2 بل نلعب لعبة البسط :

أي : $2x+4-5$ ...

(15) • اقرأ ص 28 ... إثبات متراجحة ...

مثلاً : $\sin(b) \leq b$ الحل هكذا :

1- نفرض : $\cos(x) \leq 1$ أو حسب ...

2- نعلم أن $b > 0$

3- نأخذ تكامل الطرفين ... فتظهر معنا ...

(16) • تعليق : نشتقق للطرفين ونحفظ المراحل حكل ماهي بعد حيث البسط الـ $b>0$ أو غيره ...

(17) • اقرأ ص 29 و ص 28 حساب المساحة ..

• ملاحظة : عند حساب مساحة بين f و g دائماً

الفوق هو الـ + يعني : f فوق g وهنا :

$\int f - g \, dx$ أما أنتبه : $\int f - g \, dx$ ...

(18) • يريد مساحة ؟ ندرس إشارة ...

• عندما لا يذكر $x = a$, $x = b$ حدود التكامل هي نقاط التقاطع ... ويتم إيجادها بتعويض $y = 0$ بعلاقة التابع ...

0994900629

...

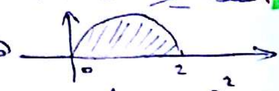
• عمل : مجد الدين نقرش

لا تنسونا من الدعاء

(5) : أنشطة التكامل

• النشاط الأول : لاتنسى تناقش $\lambda = 0$ ... حيث ،
يتقاطع الخطان عندما $e^{x} = e^{-x}$ أي $x = 0$ نقطة الفصل ...
• في حالة عدد نوعي λ : عدد حقيقي موجب تماماً ...
نفس الشيء مثل ما بدءه ...

• حساب الحجم : هام : عندما نقول دار دورة كاملة حول محور الفواصل مثلاً : هذا يكون



حجم الجسم : $A(x) = \int_0^2 \pi f(x)^2 \, dx$ ...

• خلاصة الحجم : مساحة مقطع محصور بين a و b أي محور لمقطع وبذلك نجد حجم هذا الجسم نقول : $V(x) = \int_a^b A(x)\, dx$; ... هو مساحة هذا $A(x)$ المقطعات a, b ...

• استنتاج حجم كرة نصف قطرها R : حساب r بفيثاغورث
R هي نصف قطر الكرة ... والـ Z هي الزيادات ...
لذلك نحن نحسب مساحة الدائرة المقطعية : πr^2
أي : $\pi(R^2 - Z^2)$ ونكامل حيث : $a = 0$, $b = R$.
لأننا أخذنا نقطة 0 وأخذنا نقطة R ...

• حجم جسم دوراني : (مجسم كسبة) ...
نفس الشيء نحسب $A(x)$ بدلالة x ... πr^2
حيث : $r^2 = x$ ... هو الحل كما ...

(1) • عندما يطلب تابع أصلي ويحقق الشرط المعطى : $F(1) = 0$ نضع بعد إيجاد التابع الأصلي (c) ثم نعوض ونوجد الـ (c) ...

(2) • وعند ذلك الشرط : $F(1) = 1$ أي موجب وهنا عند اللغارتم نحدد له مجالاً موجباً والعكس صحيح .

(3) • عندما : $F(x) = \min(0,0)$ ندرس إشارة الفرق ونحدد أيها أصغر فيكون تابع السقف : $E(x)$ ...
• المقطع المكافئ ندرك دوراً والمستقيم نذكر ميله .

(4) • فكرة ثابتة : لدينا تابع $f(x)$ و تابع $P(x)$ ثم نريد إثبات أنه : $F(x) = P(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ إذاً : $F'(x) = f(x)$ ، ونكمل ... بعد ذلك لإظهار $P(x)$ بالمساواة مع المرافق الثاني : $P(x) - P'(x) = x^n$ حسب الـ n يكون $P(x)$ درجته وهنا $P'(x)$ أصغر بدرجة ونفرض وهنا $P(x) = ax^n + bx^{n-1}$ وهنا $P'(x)$ أيضاً ونطابق ...

• تحمل : مجد الدين معرشي

(5) • $\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ ... (6)
محفظ بهم : • $1 = \cos^2 x + \sin^2(x)$
هذه الفكرة تلزمك للتابع الأصلي لـ $\frac{1}{\sin(2x)}$ ...

(6) • فكرة أساسية : عندما يكون هناك تكاملين بالتجزئة هذا يعني واحد منهم تركه لأنه الثاني بعد ما تكامله راح تختصره مع الأول ولاحظ ... ص 46

(7) • إذن : $f(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ ، لا تكامل المقام لفيد ولا بالتجزئة ولا شيء ، لذلك نضيف $x + 1 = t$ لنبسط البسط ... ولنقدر نختصر .
• احفظ بهم ص 41 ...

(8) • هام جداً والسؤال الطليم : تعلمنا سابقاً أنه عند جداء $\cos(ax)\sin(ax)$ نحول إلى مجموع ثم نكامل ...
لكن : في حالة : $\cos^n(ax)\sin^m(bx)$ ليس أس كذا واحد بل أكثر مثلاً 2 , 3 , 4 ... نستعمل ما نوجده ...
حصراً ما نستعمل غير هيك ... $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ص 48

(9) • إذن : $\int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$ يؤدي :
أي نعم ... $\Rightarrow \int_a^b f(x) + g(x) \, dx$

(10) • هام فكرة ثابتة : نريد حساب التابع الأصلي لـ I ، احسب التابع الأصلي لـ J ثم $I + J$ واستنتج I
عند حساب $I + J$ أسهل نستخدم البسط مع المقام
حصراً : وهنا نصير نشتغل ببسط صيغة الـ $I + J$.

(11) . $e^{2x}\cos x = e^{2x}[(2a+3)\cos x + (b-1)\sin x]$
بإضافة نعتبر لدينا : $\cos x = x$: $2a + 3 = 1$
لأنه مقابل $\sin x$ ما في شيء . $b - 1 = 0$

(12) • عندما : $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x)$ نكامل بالتجزئة حصراً : بس هالمرة : $u = \sin, \cos$

(13) • امتحانات هام جداً : عندما : $f(x) < g(x) < h(x)$ ونريد إثبات $F(x) < G(x) < H(x)$ بعد الفرض ونقول $a > 0$ هو نعين ثم نكامل : $\int_0^a$ أي حسب حدود التكامل . مبرهنة ...

(14) • عند حساب مساحة بين $f(x)$ ومحور $x'x$ الغالب من الرسم والتقارب هو إثبات C_f فوق $x'x$: $\int f(x)$ أو $-\int f(x)$

(15) • هام جداً فكرة ثابتة : احسب ، ومستقيم أفقي يقسم الرسمة لنصفين ، مساحتين متساويتين هل ممكن ؟!
1- نحسب مساحة الرسمة كلها - 2- نجد نقط التقاطع بين C و d
حيث : $C : x \to x^2$; $d : \sqrt{m}$ وهنا : $x = \pm\sqrt{m}$ ، وهنا : $\int_{-\sqrt{m}}^{+\sqrt{m}} d - c \, dx$
• نكمل نطلع لنا جواب معه m . 3- الآن نقسم مساحة الرسمة لنصفين ونساويها مع ما طلع معنا نطلع الـ m ...

• تحمل : مجد الدين معرشي

قواعد الأسي في التكامل :

- $\dfrac{e^x}{e^x \mp 1} \xrightarrow{\text{تكامل}} \ln|e^x \mp 1|$: لأن البسط مشتق المقام

- $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1+e^x-e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} \rightarrow$ ثم نكامل

- $\dfrac{1}{e^x-1} = \dfrac{1+e^x-e^x}{e^x-1} = -1 + \dfrac{e^x}{e^x-1} \rightarrow$ ثم نكامل

- $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{e^x-1+e^x-e^x}{e^x+1} = -1 + \dfrac{2e^x}{e^x+1} \rightarrow$ ثم نكامل

(طـ2)

- $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \longrightarrow$ ثم نكامل

$(e^{-x}) \times$ نضرب ب -1×-1

عمل : محمد الدين معرش

0994900629

لا تنسونا من صالح الدعاء

• التحليل التوافقي : (1)

① - مبدأ العدد الأساسي : مهمة P :
- مرحلة ① 5 طرق
- مرحلة ② 3 طرق
- مرحلة ③ 4 طرق
- مرحلة ④ 1 طريقة

$\Rightarrow P(p) = 5 \times 3 \times 4 \times 1 = \boxed{60}$

② - التباديل : هو تغيير أماكن العناصر ...
(a,b,c) : (a,c,b) هو تبديل لها ...

وقانون التباديل : $n(n-1)\cdots\times 2\times 1 = \boxed{n!}$

• الترتيب : هو أخذ مجموعة من مجموعة وتبديل عناصرها : (a,b,c) : (a,c) هو ترتيب منها

قانون : $\boxed{P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$ ...

• ملاحظة : هنا بالترتيب والتباديل العناصر مختلفة مش متشابهة يعني ما بصير (a,a,b) ...

• القوائم مع التكرار : يعني نفس الترتيب والتباديل بس هون في تكرار : قانون : $\underbrace{(n)(n)(n)\cdots(n)}_{r\text{ مرة}} = (n)^r$

• ملاحظة : يعني هون صار فيك تقول (a,a,b) أو إنه نفس العنصر يتكرر ...

• ملاحظة : إذا ما قلك "بدون التكرار" فأنت حر فيك بتكرار ؛ مثلاً : ما عدد الأعداد ---- $\{5,3,4\}$ المكونة من ثلاث خانات : آحاد : 3 / عشرات : 3 / مئات : 3 / ...

يعني مقصدنا قد يكون : 555 ، 444 ، 333 ، 345 - - إلخ

• ملاحظة : نتائج سباق : هو تباديل حصراً : لأنه كل اللاعبين رح يوصلوا لخط النهاية ، وهم واحد واحد ... $n! = 6\times 5\times\cdots\times 1$

• ملاحظة : ① - تتالي ؟! يعني ترتيب ...
② - تتالي مع إعادة ؟! يعني قوائم تكرار "ترتيب مع تكرار"
③ - تتالي دون إعادة ؟! يعني الترتيب نفسه ...
④ - معاً ؟! يعني توافيق ...

• هام جداً : الحالة الأولى : إذا لدينا : n حد : ونريد أن نخرج عامل مشترك من المجموع ونضرب بـ n :

مثال 1 : هذه 3 حدود $\leftarrow 10-3+11-3+12-3$

$\Rightarrow \Rightarrow \boxed{10+11+12-3(3)}$

• مثال 2 : هذه n حد $\leftarrow V_0-3+V_1-3+V_2-3+\cdots+V_n-3$

$\Rightarrow \boxed{V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n-3(n)}$

الحالة الثانية : إذا أردنا سحب عامل مشترك من n حد : نجعل الـ n أساً لهذا العامل :

مثال 1 : $2n(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 6\times 4\times 2$ هذه n حد ...

$\Rightarrow \boxed{2^n\left[n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1\right]}$

• عمل : مجد الدين مقرش
0994900629

③ - اكتب تباديل المجموعة : $\{4,3,2,1\}$:
الحل : $n! = 4! = 4\times 3\times 2\times 1$ لأنهم 4 أعداد ...

④ - • إذا قال : كم عدد زوجي ؟! منبلش تحليل من الآحاد
• إذا قال : كم عدد أكبر من 500 ؟! نبدأ من المئات ...

(2)

⑤ - إذا بدنا تشكيل مجلس : رئيس ، نائب رئيس ، محاسب
فالمسألة ترتيب : مثلاً 7 أشخاص فيكون : $() = 7\times 6\times 5$

⑥ - ميداليات : نفس الحكي !! ...

- هام : في الترتيب الترتيب مهم : يعني أكل محشي بعدين بقلاوة
• في التوافيق لا يهم الترتيب : إجا محمد وأحمد ... ما حدا إجا قبل التاني

⑦ - التوافيق : قانون : $\boxed{q = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$

⑧ - حالات خاصة

وأيضاً : $\binom{n}{n} = 1$ ، $\binom{n}{1} = n$ ، $\binom{n}{0} = 1$

لدينا : $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Leftarrow \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

⑨ - حل معادلات توافيق : $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow$ $r_1 = r_2$ أو $r_1 + r_2 = n$

⑩ - ثنائي حد نيوتن :
$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}.b + \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r} + \cdots + \binom{n}{n}b^n$

نسميه دستور الحد العام : ونستخدمه عندما يقول : أوجد الحد الخامس فيكون : $r=4$ أو أوجد r وحدد ما هو الحد
أو أوجد الحد الذي يحوي x^2 / الحد الثابت المستقل عن x .

⑪ - عندما يكون هناك أساس : نريد تشكيل لجنة مكونة من n شخص : فنحل بالتوافيق ...

⑫ - • لا تنسى تكتب شروط الحل لـ n ، r ...
• ما الشرط ل n ؟! يجب أن يكون $0 \leq r \leq n$ وأن n طبيعي

• عمل : مجد الدين مقرش .
0994900629

• الأنشطة :

(أ) النشاط الأول : بس آخر طلب : إن عدد طرق العدد (9) : $\binom{4}{2} = 6$
② - عدد طرق اختيار (5) : 2
③ - عدد طرق اختيار (1) : 1
$\Rightarrow$ الجواب : $6\times 2\times 1 = \boxed{12}$

• النشاط الثاني : وجع راس والحل هو ...

احفظ : $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ ، $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

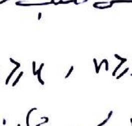
• التمارين :

① - • لا تنسى تكتب شروط الحل
مثلاً : $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$ يجب : $n \geq 3$ ، $n+2 \geq 4 \Leftarrow n \geq 3$

② - • التوافيق : $0 \leq r \leq n$ ممكن أن تكون مجموعة خالية

• الترتيب : $0 < r \leq n$ لا يجوز أن تكون مجموعة خالية

③

... إي نعم ... 

③ ④

③ - المصافحات دائماً "توافيق" ... لأنه : محمد صافح أحمد مثل أحمد صافح محمد نفس الشيء ... إذا 10 أشخاص $\binom{10}{2}$ وإذا n شخص : $\binom{n}{2}$ ...

④ - أسئلة الامتحانات[10] : توافيق لأن الاختيار عشوائي
إذا أول أدبية إجبارية : $\binom{4}{4}=1$ والباقية $\binom{6}{3}$

⑤ - **للمرة العاشرة** : تشكيل اللجنة دائماً "توافيق" ...

⑥ - • لم الأكثر ؟! مثلكم من أكثر شي ونحن نازلين للصفر (+)
• لم الأقل ؟! مثلكم من أول شيء ونحن طالعين للصفر (+)

⑦ - أوجد أمثال x^3 / أمثال x^5 / أمثال الحد المستقل عن x ؟؟؟
نعوض بعد الاختصار والاختزال : $r = 3, 5, 0$ حسب ...

⑧ - **• هام جداً** : ما أسس علاقة عدد أقطار مضلع ...
ولنفرض أنه لدينا n رأس ...
أ - $\binom{n}{2}$ هو عدد الأضلاع + عدد الأقطار ...
2 - $\binom{n}{2} - n$ هو عدد الأقطار المطلوب ...
حيث : عدد الأضلاع = عدد الرؤوس ...
• هام جداً : أوجد عدد المثلثات الممكن إنشاؤها ؟!
ولنفرض أن المضلع له n رأس ...
فالمثلث هو 3 نقاط مختلفة ... لذلك : $\binom{n}{3}$ ،

⑨ - • لتطبيق مربع جوانب مربعات صغيرة كثيرة ونقول : كم عدد المستطيلات (المربعات) ؟!
ثانياً : • نحسب عدد المستقيمات الأفقية ولنفرض 6
• نحسب عدد المستقيمات الشاقولية ولنفرض 6 ،
المستطيل 2 أفقيين و 2 شاقوليين : ◯ = $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}$

⑩ - • إمّا أن يترتب حسب "11" الترتيب 13 حسب 11

⑪ - توزيع 11 هدية على 10 طلاب ... "**هام جداً**" ...
أ - نوزع هديتين لأحد الطلاب : $(10)\binom{11}{2}$
طرق اختيار الولد
طرق اختيار الهدية

2 - نوزع الـ 9 الباقيات على باقي الطلاب : 9!
وحيث :
$$\boxed{9! \cdot (10)\binom{11}{2} = \text{عدد طرق التوزيع}}$$

⑫ نرتب حسب 167[15] وحيث حلها الخطوات :
1 - الآحاد تختار بـ 4 طرق "عدا الـ 5" : ④
والباقي 4! "باقي كل أعداد عدا رقم الآحاد"
$\Rightarrow 4 \times 24 = 96$
2 - نحسب عدد الأعداد أصغر من 20000 : عشرات الألوف طريقة واحدة هي (1) / الآحاد 3 طرق : "2, 3, 4" / وباقي المنازل 3! :
$\Rightarrow 1 \times 3 \times 6 = 18$
وحيث المطلوب هو : $96 - 18 = 78$

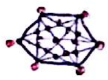
• عمل : مجد الدين مفرش . 0994900629

⑬ - طريقة التبادل والتراتيب :
العدد الكلي ! : $\Delta\Delta\Delta O \Leftarrow \frac{4!}{3! \times 1!}$ ...
جداء الجزئي !

⑭ - إما أن يترتب 18 حسب 167 حسب 13 .

⑮ - إثبات A_n عدد صحيح ... وهو متطابقة ... نستخدم نشر حد نيوتن ، وبعد ذلك نلعب بالعلامات مثيلاتها : • مجموع الأعداد الزوجية مختلفة الإشارة = 0
• مجموع الفرديات تظهر ضعف حدود الموقع ... صحيح عدد صحيح ...

⑯ - **هام جداً** : • حساب عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع بدلالة n ...
1 - • عدد المضلعات الرباعية = عدد نقاط تقاطع الأقطار داخل الشكل الأصلي .
2 - • عدد أضلاع الشكل = عدد رؤوسه التي تشكل نقاط تقاطع الأقطار خارج الشكل الأصلي ...
ـ ولحساب عدد نقاط تقاطع الأقطار الكلي :
المطلوب ... = عدد نقاط التقاطع خارجه + عدد نقاط التقاطع داخله
مثال : رباعي **حالة خاصة** : $1 = \cancel{4} + \binom{4}{4} \leftarrow$
هنا فقط يوجد نقطة واحدة ... أما باقي الأشكال تنطبق القاعدة ...
مثال : خماسي : $\binom{5}{4} + 5 = 10$

مثال : سداسي : $\binom{6}{4} + 6 = 21$

مثال : مضلع n ضلع : $\binom{n}{4} + n$ ...

• السؤال الأخير : علاقة مقصين صاحبي لا تدرس ...

• عمل : مجد الدين مفرش
0994900629

نهاية التحليل التوافقي ...

(1)

• نهايات متتاليات :

① : • $\lim_{n\to+\infty} U_n = l \; ; \; l \in \mathbb{R} \rightarrow$ وعندئذ U_n متقاربة من l

• $\lim_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty \rightarrow$ ... وعندها U_n متباعدة نحو $\mp\infty$

• متتالية هندسية : $1]- \; -1<q<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$2]- \; q>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ ، $3]- \; q<-1 \Rightarrow$ ليس لها نهاية

$4]- \; q=1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ ... ثابتة وكل حدودها $= 1$

• ملاحظة : $U_n \left(\frac{3}{5}\right)^n$ ... عندما توجد نهايتها اذكر السبب يلي علامات ... $-1 < \frac{3}{5} < 1$ ،

• هام جداً : لإثبات $W_n < U_n < V_n$ ... U_n أنها متقاربة

1- نقول له برهنت الإحاطة : $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$

وعندئذ يجب أن $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ حسب الإحاطة ...

2- ونذكر له أنها محدودة من الأعلى والأدنى ...

• هام جداً : عندما لدينا n حد ونريد إخراج رقم مشترك .. لتحقيقه ، لنأخذ مثلاً : $S_n = U_0 - 3 + U_1 - 3 + \text{———} + U_n - 3$

نريد إخراج المجموع الكلي للأعداد ثلاثات "" ... الحل !

نطرحها ونضرب بعدد الحدود "الأصلي" $n - 0 + 1$ "" $\Leftarrow n+1$

وعندئذ : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \text{—} + U_n + (n+1)(-3)$.

• ملاحظة : المتتالية U_n الهندسية أساسها $-1 < a < 1$ برهن أنها متقاربة ؟! هيه بأن $-1 < a < 1$ فرضاً فهي متقاربة !!

② : • هام : المتتاليات مثل $\frac{n^2+n+1}{2n^2+1}$ ، $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ و --- إلخ

نستطيع حساب نهايتها افرض تابع f على $]0, +\infty[$ وادرس نهايته ثم قل : بما أن $\lim_{n\to+\infty} f(n) = l$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ علامااااات ...

• نظرية ثابتة "مهمة" : $(U_n)_{n\geq1}$ ، $(V_n)_{n\geq1}$ ، $(W_n)_{n\geq1}$ ،

برهن أن U_n المعرفة بالعلاقة : $W_n \leq U_n \leq V_n$ متقاربة ؟! الحل $\Leftarrow$

$1- \; W_n \leq U_n \leq V_n$

$2- \; \lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$

اكتب له هالشرطان مشان الجواب هالالام ثابت ...

• مبرهنة ثابتة "مهمة" : $(U_n)_{n\geq1}$ ، $(V_n)_{n\geq1}$ ولنفرض $V_n < U_n$

برهن أن U_n المعرفة فوق $\Leftarrow$ متباعدة نحو $+\infty$ أو $-\infty$ ؟ وعندئذ : ———

$1- \; V_n < U_n$

← إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ متباعدة نحو $+\infty$ ـ [1]

← إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ متباعدة نحو $-\infty$ ،

③- إذا كان عندك : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ أي عادي ولو $(-1)^n$

يكون : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)$ ...

• عمل : نجل الدين حقريش ، ?

0994900629

(2)

④-- • $(U_n)_{n\geq0}$ محدودة من الأعلى ؟! $U_n \leq M \in \mathbb{R}$ ... $n \in \mathbb{N}$

← ونسمي M عنصراً راجحاً عليها ...

• $(U_n)_{n\geq0}$ محدودة من الأدنى ؟! $U_n \geq m \in \mathbb{R}$ ... $n \in \mathbb{N}$

← نسمي m عنصراً قاصراً عليها ..

• محدودة من الأعلى والأدنى ؟! $m \leq U_n \leq M$

• ملاحظة : 1- M راجح لـ U_n ؟! فإن الأكبر من M راجح لـ U_n أيضاً

2- m قاصر لـ U_n ؟! فإن الأصغر من m أيضاً قاصر عليها ...

⑤- $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ أثبت أنها محدودة ؟! نشتغل مخنا شوي ،

$n+1 > n \Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow U_n > 0$ محدودة من تحت ...

وإن : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$ وعندئذ : $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$ من فوق ...

⑥- • متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى ؟! ← تقول لـ $+\infty$

• متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى ؟! ← تقول لـ $-\infty$ ،

• متزايدة ومحدودة من الأعلى ؟! متقاربة ،

• متناقصة ومحدودة من الأدنى ؟! متقاربة ...

⑦-- • ملاحظة : * متتالية غير محدودة من الأعلى ليس بالضرورة تقول لـ $+\infty$

مثال : $U_n = n + n(-1)^n$ حدودها : $U_0 = 0$ ، $U_1 = 0$ ، $U_2 = 4$ ، $U_3 = 0$.

* إذا متتالية تسعى لـ $+\infty$ فما ضروري متزايدة ...

مثال : $U_n = 3n + n(-1)^n$ ...

• عمل : نجل الدين حقريش ، ?

0994900629

⑧ -• $U_n = 3^{n^2} + n + 3$ طبيعي : $U_n \geq 3n^2$ ، $U_n \geq n$ ، $U_n \geq 3$

• قانون الكمكم : $km \leq U_n \leq kM$ ... لإثبات محدودة ،

• إذا $a>0$ ، $b>0$ فإن $a \geq b$ تكافئ : $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ ...

• إذا $a>0$ ، $b>0$ فإن $a \geq b$ تكافئ : $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$.

• a ، b ، c ، d موجبة تماماً : $b \leq a$ ، $d \leq c$: $\frac{b}{c} \leq \frac{a}{d}$ ،

تفيد في إثبات محدودة ...

⑨- مثال : $U_n = \frac{3n^2+2n+1}{3n+2}$: • $n^2 \geq 1 \leftarrow 2n^2 \geq 2n \leftarrow 3n^2 \geq 2n+1 \leftarrow$ $6n^2 \geq 3n^2 + 2n + 1$

$3n+2 > 3n$ ...

$U_n \leq \frac{6n^2}{3n} \Rightarrow U_n \leq 2n$

⑩- • إذا أعطاك : $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 3$ وأعطاك الـ U_0 ... ادرس

وبدو منك احسب U_1 ، U_2 ، U_3 عادي ونرسم ... مسطك

⑪- إذا أعطاك $(U_n)_{n\geq1}$ حيث : $U_n = \frac{1}{n+2}$ وطلب أثبت أنها محدودة بإحدى نهايات : بين الـ (1) و الـ $(+\infty)$ بين حدك

⑫ متجاورتان ؟! الأولى متزايدة والثانية متناقصة ، ونهايتها $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ ... وعندئذ ———— :

1- يكون V_n ، U_n متقاربتين ولها النهاية ذاتها ...

⑬ - هون بالمتتاليات الإحاطة اسمها مقارنة ما في شي اسمه إحاطة ...

⑭ - أثبت أن جميع حدودها بدءاً من الحد U_{31} تحقق : $U_n \geq 2^n$ ؟! نبدأ دائماً من الشرط : $n \geq 31$ ...

... والحمد لله رب العالمين ...

2018/4/12 م

• ومع عبق الحزن والألم ... نصنع المستحيل ♡

① exp : التابع الأسي

1- مجموعة تعريفه : $x\in\mathbb{R}$; $y>0$

• كل تابع متزايد يكون تقابل متزايد مثله ...

• اللغاريتمي والأسي تابعان تقابلان متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول متزايدان تماماً .. $(a,b)\to(b,a)$ $C_{\ln}$ $C_{\exp}$

• بالغالب في حل معادلات ومتراجحات الأسي أو لوغاريتمي نشترط للحل ...

• $e^{\ln x}=x ; x>0$, • $\ln e^x=x ; x\in\mathbb{R}$

• $e^{|\ln x|}=\begin{cases} e^{+\ln x}=x ; & x>1 \\ e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x} ; & x<1\end{cases}$

• في حل معادلات ومتراجحات الأسي في مجموعة التعريف .. دائماً R إلا في مقام فيؤخذ مع عدا القيم التي تعدمه ..

2- $e^{a+b}=e^a\cdot e^b$ .. برهانها بـ $\ln(e^a e^b)$ ثم نكمل

وهكذا برهن المقال : $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$ باستبدال b بـ $-a$

وبرهان $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$ باستبدال b بـ $-b$,

3- قانون هام : $\ln(a)^x=x\ln a$ أو $a^x=e^{x\ln a}$

• عند حل معادلات أو متراجحات : مثل : $e^{2x}-5e^{-x}+3=0$ مثلاً نجعل e^- , e^+ نضرب فقط e^+ لنتخلص .. $e^x>0$

4- برهان : ① $1^u=1$, ② $a^u\cdot a^v=a^{u+v}$

③ $\frac{a^u}{a^v}=a^{u-v}$, ④ $(a\cdot b)^u=a^u\cdot b^u$

⑤ $(\frac{a}{b})^u=\frac{a^u}{b^u}$, ⑥ $(a^u)^v=a^{u\cdot v}$

كلهم يتم برهانهم حسب : $a^u=e^{u\ln a}$ ...

5- برهان $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$: عن طريق $\ln x\le x-1$

لتوضيح : $x=e^x$ في علاقة المقارنة لا إحاطة ..

• برهان $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$: عن طريق تعويض $x=-t$ ...

6- برهان $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$: ننطلق $e^x\geq x+1$

ومن $e^x\geq x$ في حالة $x>0 \Leftarrow e^x=\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1}\geq\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$

ومنه : $\frac{e^x}{x^n}\geq\frac{x}{(n+1)^{n+1}}$ ومنه إحاطة سهلة ..

7- $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0$, • $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}=0$ •

8- e^x : e , 1 , 0 , $-\infty$: $\ln x$

عمل : مجد الدين مقرش
0994900629

②

9- قانون هام جداً : $\lim_{x\to0}(1+\text{شيء})^{\frac{1}{\text{شيء}}}$

نلعب بالعلاقات حتى نتوصل لهذه معطيات لدينا : $\lim_{x\to0} e^{\ln\left(\frac{|x|+1}{|x|}\right)}=1$ $e^2=7.5$

بعد التعويض لازم تشوف : بالأس (x) وبالأساس (x) ...

10- إحداثيات نقطة الانعطاف : f'' تنعدم $(1,0)$ ... نأخذ $x=1$ نعوضها في f فيظهر لنا $y=2e$ ..

هذه النقطة $(1,2e)$ هي نقطة انعطاف ..

(فوق، تحت) ... لا مماس مشاطر ..

11- برهان $(e^x)'=e^x$: نستخدم نسبة التغير :

$t(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}$

$\lim_{h\to0}t(h)=e^{x_0}=f'(x_0)$ هو المطلوب.

12- فكرة ثانية : نقطة $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ تعدم $f''(x)$ ...

هي حل لـ $f(x)-y=0$ ونقطة الانعطاف : فوق - تحت ..

حيث d هو مماس لـ cf في هذه النقطة : فوق تحت

13- التابع $\exp_a$ هو تابع أسي أساسه (a)

وهو الحالة العامة، إذ e^0 هو حالة خاصة منه.

• مجموعة تعريف (a^u) هو : $]0,1[\cup]1,+\infty[$

• مشتقة : $\exp_a'=\ln a\cdot\exp_a$ ...

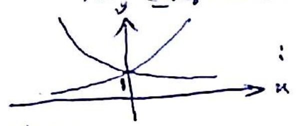
• اطراده : عندما $a>1 \Leftarrow \ln a>0$ وهو متزايد تماماً ..

• عندما $0<a<1$ فإن $\ln a<0$ وهو متناقص تماماً ..

$a^x=e^{x\ln a}=\exp_a=e^{ux}$; $ux=x\ln a$

• نهايات : حسب إشارة (a) تكون النهايات ...

وعندها الحالتين : $a>1$, $a<1$:



14- احفظها الفكرة : * $\exp_a$ تقابل عكسي لـ $\log_a$ وهما متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول

$\to \exp_a\circ\log_a=e^{\ln a\log_a}=e^{\ln a\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)}=x ; x>0$

$\to \log_a\circ\exp_a=\frac{\ln(\exp_a)}{\ln a}=\frac{\ln(e^{x\ln a})}{\ln a}=x ; x\in\mathbb{R}$

15- C_a , $C_{\frac{1}{a}}$ متناظران بالنسبة لمحور التراتيب لأن :

كذلك .. $a^{-x}=e^{-x\ln a}=e^{x\ln(\frac{1}{a})}=(\frac{1}{a})^x$

16- حل المعادلات التفاضلية : نحفظها لأنها كتابة : $k\in\mathbb{R}$

• $y'=ay \Rightarrow f_k(x)=ke^{ax}$ كيا كي $a\neq0$

• $y'=ay+b \Rightarrow f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$; $a\neq0 , b\in\mathbb{R}$

عمل : مجد الدين مقرش
0994900629

17 - >1 لأنه داخلها ; $\ln(1+\text{مشغلة}) > 0$ • ③

18 - هام: إيجاد وإثبات تقابل تابع:

• السؤال: أثبت أن f هو تقابل عكسي، وأوجد تقابله العكسي.

$$g(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

• الحل: أ- إن كل عنصر من y من المستقر $]0,1[$ تقابله عنصر واحد x من المنطلق $]-\infty,+\infty[$، والتابع مستمر ومتناقص تماماً على R => إذاً f تابع تقابل:

ب- إيجاد f:

$$g(x) = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1+e^x \Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) \Rightarrow \boxed{f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}$$

19 - • غالباً يأتي دراسة وضع f مع محور ... T ... بالغالب دائماً بنأخذ شكل: $h(x) = f(x) - T$ ونُدرس تغيرات ونرسم جدول منطقي ... إلخ

20 - إذا عندك: $f(x) = 1 - x + 1/e^x$ وتريد حد القيمة المطلقة! مالك علاقة بالـ e^x تفضل حالو تفك إشارتها ... فقط اللي جوا الـ 1 ، 1

21 -

نهاية الدرس

عمل: محمد الدين معرش 0994900629

التوابع اللوغاريتمية : (1)

1) - مجموعة التعريف : $x \in]0,+\infty[$; $y \in \mathbb{R}$

$]0 \longrightarrow 1 \longrightarrow +\infty[$

$\ln(x) < 0$ ، $\ln(1) = 0$ ، $\ln(x) > 0$

• اشتقاقي مستمر على $]0,+\infty[$ لأنه اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وهو متزايد تماماً عليه لأن $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ...

2) - • حل معادلات / متراجحات لوغاريتمية ... لا تنسى الشروط

أ - $\ln(x_1) = \ln(x_2) \Leftarrow x_1 = x_2$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

ب - $\ln(x_1) > \ln(x_2) \Leftarrow x_1 > x_2$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ ،

3) - $\ln(a)^r = r\ln(a)$ • بشرط $a > 0$ • $\ln(\frac{1}{e}) = -1$

• $\ln(a.b) = \underset{a>0}{\ln(a)} + \underset{b>0}{\ln(b)}$ • / $\ln(\frac{a}{b}) = -\ln(\frac{b}{a})$

4) - هام : $\ln|x^2+x|$ مجموعة تعريفه : $\mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$

• هام : لا تنسى عند حل المعادلات المتراجحات أن تكتب : لا مرفوض / مقبول

• حل المعادلات : $\ln g(x) = a \Leftarrow g(x) = e^a$ لا تنسى كتابة الشرط

• $\ln x <<< x$ ...

5) - طريقة دراسة إشارة اللوغاريتم :

• $\mp\ln(x)$ / • $\mp\ln(x) \mp a$: ندرسه كالدرجة الأولى ... ←

• $h(x) = \ln x + x$: هذا ندرسه كتابع وندرس تغيراته ...

6) - نهايات اللوغاريتم :

• $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ ، • $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ، • $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ ، • $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = -0$

• $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ، • $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 0$ - - - -

7) - $\ln\sqrt{a} = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(a)$; $a > 0$ •

8) - الإثبات $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$:

أ - نشتق لا يكون الاشتقاق صفراً ثابت !! $F(x) = f(ax) - \ln a - \ln(x)$

ب - نعوض $x = 1$ يكون صفراً أيضاً $f(x) = 0$ ، ج - باختيار $x = b$ وهو المطلوب

• تمرين صفحة 158 هو 10 و 13 لا تنسى كتابة بعد النقطة - $(0,0)$

• ملاحظات : الـ $x.y = a$

1) - $a > 0 \Leftarrow$ النقاط تمثل قطع زائد تقع بالربع (1) ، (3)

2) - $a < 0 \Leftarrow$ النقاط تمثل قطع زائد بالربع (2) ، (4) .

3) - $a = 0 \Leftarrow$ $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ تمثل اجتماع محوري الإحداثيات

نتائج : تم إثبات $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ عن طريق العدد المشتق ...

0994900629 • عمل : مجد الدين بحري

(2) • هام جداً : ليكن c_f الممثل f إذن :

1) $g(x) = f(-x)$: c_g نظير c_f بالنسبة للتراتيب ، c_g ينتج عن c_f وفق التحويل : $(x,y) \longrightarrow (-x,y)$

2) $g(x) = -f(x)$: c_g نظير c_f بالنسبة للفواصل ، c_g ينتج عن c_f وفق التحويل : $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

3) $g(x) = -f(-x)$: c_g نظير c_f بالنسبة للمبدأ (o) ، c_g ينتج عن c_f وفق التحويل : $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$

4) $g(x) = |f(x)|$: نحافظ على النقاط الموجبة ، أما النقاط السالبة فنقوم بعكس ترتيبها y ...

5) $g(x) = f(x+1)$ ← c_g ينتج عن c_f بانسحاب للأعلى قدره 1

6) - • هام : لا تنسى النقاط المشتركة بين c_f و Δ مقارب في الجدول ؛ وذلك بتعويض x في y المقارب أو f ،

• برهان $\ln(x+1)$ اشتقاقي تابع ؟؟ $x+1 > 0$.

قاعدة : لبرهان تابع اشتقاقي على مجال ، يجب أن يكون موجباً عليه ؛ ليكن $\sqrt{x}$ اشتقاقي $]1,+\infty[$ لأن $x > 1$ عليه واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ضمناً $]1,+\infty[$ أيضاً وضمن $\sqrt{x}$ أيضاً ...

7) - الإثبات : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ((لا دروس جديدة 23))

أ - برهن $\ln x < 2\sqrt{x}$ من خلال التغيرات ، ب - نقول : هذه تحقق عند $x > 0$ ومن أيضاً عند $x > 1$ الذي نستطيع كتابة $\ln(1) < \ln x$ ... ومنه $\ln(1) < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftarrow 0 < \ln(x) < 2\sqrt{x}$

8) - تمرين أعط $\frac{2}{162}$ ، القيم هي : $x = e$ ، $x = \frac{1}{e}$ ،

9) - هام : حل معادلات : شرطها $x > 0$ ؛ ظهرت : $x = e$ ، $x = e^{-2}$

إذا $x = e^{2}$ مقبول ولا مرفوض بانتباه !!!

10) - قانون الحصر : نثبت أن : $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t$

أ - ندرس $f(x) = \ln x + 1 - x$ ، ونبرهن $\ln(x) \leq x-1$ --- (1)

ب - نعوض $x = 1+t$ ، $x = \frac{1}{1+t}$ فنحصل المطلوب ...

11) - $g(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ ... نثبت أنه معرف عندما $x > 0$ ، نعني يجب برهان $x > \ln x$ بالطرق المعتادة ...

12) - • كيف نختار العدد الحقيقي m ؛ كي يكون للمعادلات جذران مختلفان ؟ $\Delta > 0$ ، أعطهم / جذر مضاعف ؟ $\Delta = 0$ / ولا جذر ؟ $\Delta < 0$ ، ولا تنسى الشرط الثاني أيضاً $1 > m$ أو حسب الحالة

13) • هام جداً : النقاط المقاربة التي تتجه نهايتها : $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ نفرغ عند الرسم O .

• برهان المقارنة e^{π} ، π^{e} : $f(\pi) < f(e) \xrightarrow[\text{متناقص}]{\text{في مجال } e,\pi} \pi > e$

$\Rightarrow \frac{\ln(\pi)}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e\ln\pi < \pi\ln e \Rightarrow \boxed{\pi^e < e^\pi}$

• $e^2 = 7.35 \simeq 7.5$ ، • $\sqrt{e} = 1.67 \simeq 1.5$ للرسم ...

• $\frac{1}{e} = 0.5$ تقريباً ...

عمل : مجد الدين بحري 0994900629

• التابع $\ln\ln\ln x$ هو تابع معرف $]e,+\infty[$ على

مشتقه : $\frac{1}{x\ln x . \ln\ln x}$

(14) - أيوجد عددان موجبان يحققان : $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$ ؟؟ (3)

أ) - ندرس تغيرات $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ...

ب) - نرسم ؛ ومن الرسم والجدول نناقش حلول $f(x) = k$ عندما يوجد حلان مختلفان والحل الموافق

(15) - • حله : $\ln|x-2| + \ln|x+4| = 0$ نرفض ونكتب الشرط ؛

ثم بعد ذلك لا نفكر إلا بعد التخلص من ln الكلي : $x^2 - 4 = \pm 1$

• إذا اعتبر $\ln(x-2) + \ln|x+4|$ نقوم بإيجاد مجموعة التعريف الكلية ونطرح القيم المخالفة إلى ما ليس من هنا من المجال ...

(16) - للمرة الألف ربما! حل معادلات أو متراجحات ! إيش ما كان لا تنسى تكتب الشروط ...

(17) - • أثبت أن التابع f متزايد تماماً على I ؟؟ يعني احسب المشتق وبرهن أنه موجب على I ،

(18) - • هام : لا يكون لـ f حل وحيد λ في مجال $I =]1, +\infty[$ ونبرهن يطلب منك برهان : $1 < \lambda < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$ ...

أ) - من مجموعة التعريف $1 < \lambda$ وكذلك : $\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = -\infty < 0$ من الجدول

ب) - نقوم بتعويض $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) > 0$ ، ومنه بما أنه متزايد تماماً فالمتراجحة محققة ... الله .. الوضع الدراسي !!

(19) - (احفظ) : أثبت أن $4 - x \in D_f$ أياً : $x \in D_f$

ننطلق من $x \in D_f$ ونضرب بـ (-1) ونجمع (+4) .

(20) - • M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل ؟! $y_1 = 0$

• M_2 نقطة من C مماسه عندها يوازي $\overrightarrow{x'x}$ ؟! $f'(x_3) = 0$

• M_3 نقطة من C مماسه فيها يمر من مبدأ الإحداثيات ؟؟

نحسب $f'(x_3)$ ، ثم نحسب m عند هذه النقطة : $m = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$

حيث $x_0 = 0$ ، $y_0 = 0$ لأنه يمر من الإحداثيات ونساوي $f'(x_3) = m$ ،

(21) - أثبت أن : $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$ هو الشرط اللازم ليكون المماس في $B(u, f(u))$ في B T_B موازياً لـ $\Delta : y = x$

نوجد : $f'(u)$ ونساويه مع (1) ميل Δ ...

نهاية اللوغاريتم ...

عمل : مجد الدين مضر شحنه
0994900629

• معلومات مهمة ومفيدة: (السادة):

① - لإيجاد إحداثيات مسقط نقطة A على مستقيم Δ «ولتكن هذه النقطة التي هي مسقط A على Δ بأنها H»:

أ- نستفيد من كون $H \in \Delta$ / 2- نستفيد من: $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

حيث أن $AH \perp \Delta$ وهو عمودي على شعاع توجيه $\overrightarrow{BC}$ ...

② - يكون للتابع نصف مماس عندما يكون اشتقاقي من جهة فقط «طرف من العدد» ..

$f(1) = 1$ ، $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ له نصف مماس

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$ لأنه: $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ ..

③ - عندما يكون max , min نتعامل كأنه تابع جزء محيح من حيث الاستمرار والاشتقاق:

$f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = x$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{x}$

وهكذا ندرس الاشتقاق والاستمرار ...

④ - أوجد التابع $h(x)$ الذي: $h'(x) = f(x)$ و $h(1) = 0$

لذلك يا!!!: $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow h'(x) = f(x)$

$$h(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + k$$

لأنه أعطاني شرط: $h(1) = 0$ بعد

ذلك نعوض تظهر $k = 0$ ..

⑤ - بسيطة: فكرة مركز ثقل المثلث مع فكرة مركز الأبعاد المتناسبة: تذكر أن

مركز ثقل المثلث: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ ..

⑥ - هام جداً جداً جداً احفظ: نبحث مجموعة النقاط التي تحقق الشرط: $Z + \frac{4}{Z} \in R$

يا أخي نضع لـ R مجموعة الأعداد الحقيقية لنعطي:

ثم نكمل $Z = \overline{Z} \Rightarrow Z + \frac{4}{Z} = \overline{Z} + \frac{4}{\overline{Z}}$

• ملاحظة: عدد عقدي لنعطي $Z \in R$ $Z = \overline{Z}$

• عدد عقدي Z تخيلي بحت: $Z = -\overline{Z}$ ..

• عدد عقدي حقيقي؟ = $Z \in R \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$ ..

• إعداد: محمد الدين مقرش

• هام جداً: A, B, C تعيين مثلث: إذا كان C هو مرافق B هذا يعني أن: $AB = AC$، والمثلث متساوي الساقين ،، ~ حفظة ...

• مثلث: عدد عقدي على مرافقه إن الشعاع منها متساوي الساقين ،

⑦ - بس كانت متساويات العقدية حول متوازي أضلاع وطلب تساوي عددين عقديين: $Z_{\overrightarrow{AM}} = i Z_{\overrightarrow{AF}}$

نستخدم الاستفادة من متوازي الأضلاع: $Z_{\overrightarrow{AM}} = Z_{\overrightarrow{AB}} + Z_{\overrightarrow{BM}}$

⑧ -

لا تنسونا من الدعاء

0994900629

إعداد: محمد الدين مقرش