الأنشطة وتمارين

تمرين 1

$g(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ $\quad g(0) = 0$

$[0, +\infty[$

① تحقق أن $g(x)$ معرف في حالة $x > 0$

② a) اثبت أن g مستمر عند الصفر

b) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وعيّن إن أمكن المماس لـ C عند المبدأ.

③ a) ما نهاية g عند $+\infty$

b) احسب g' ، $x > 0$ وادرس g

c) أوجد معادلة المماس لـ C في $x = 1$

الحل: نلاحظ أن $\ln x$ معرف في $]0, +\infty[$

وأن $x - \ln x \neq 0$ في هذا المجال

وأن x معرف على هذا المجال

فالتابع $g(x)$ معرف في حالة $x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{-\infty}{0}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

كذلك $g(0) = 0$

فالتابع g مستمر عند $x = 0$

b) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

فالتابع g قابل للاشتقاق عند $x = 0$ والمشتق 0

$$g' = \frac{x - \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right)x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$g' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$x = e \quad g(e) = \frac{e}{e - 1}$

لوغاريتم

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1$$

x	0		e		$+\infty$
g'	0	+	0	−	
g	0	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	1

نقطة التماس $A(1,1) \Leftarrow g(1) = 1$

$g'(1) = 1$

معادلة المماس في A .

$y = g(1) + g'(1)(x - 1) = x$

3/171

$f(x) = \ln x$

① جد بدلالة m معادلة المماس T لـ M

$f(m) = \ln m \qquad M(m, \ln m)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad m = \frac{1}{m}$

$y - \ln m = \frac{1}{m}(x - m)$

$y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$

② a) ترتيب K = $\ln m - 1$ $\quad m > 0$

K نقطة تقاطع المماس T مع محور التراتيب

أي $x_K = 0$ للتعويض في معادلة المماس

$y = -1 + \ln m \qquad K(0, -1 + \ln m)$

b) استنتج أن $\vec{KH} = \vec{j}$

H المسقط القائم لـ M على $y'y$.

لدينا $y_M = y_H = \ln m$

$H(0, \ln m)$

$\vec{KH} = (x_H - x_K)\vec{i} + (y_H - y_K)\vec{j}$

$= (\ln m + 1 - \ln m)\vec{j}$

$= \vec{j}$

لتكن M نقطة كيفية من C

تنشئ M_1 المسقط القائم لـ M على $y'y$

ثم نرسم صورة M_1 وفق الانسحاب

الذي شعاعه $\vec{j}$. فيكون KM مماس

الخط C في النقطة M.

(10/173)

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}$$

احسب $\frac{a}{b}$.

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(a.b)\right)$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\ln\sqrt{a.b}$$

بالترسيع

$$\frac{a+b}{3}=\sqrt{a.b}$$

$$(a+b)^2=9a.b$$

$$a^2+2ab+b^2-9a.b=0$$

$$a^2+b^2-7a.b=0$$

نقسم على $a.b\neq 0$

$$\frac{a^2}{a.b}+\frac{b^2}{a.b}-7=0$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-7=0$$

نفرض $\frac{a}{b}=t$

$$t+\frac{1}{t}-7=0$$

$$t^2-7t+1=0$$

$$t_1=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}=\frac{a}{b}$$

$$t_2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}=\frac{a}{b}$$

اللوغاريتم

(12/174)

$$\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{a}{b}$$

أوجد عددان موجبان مختلفان ويحققان

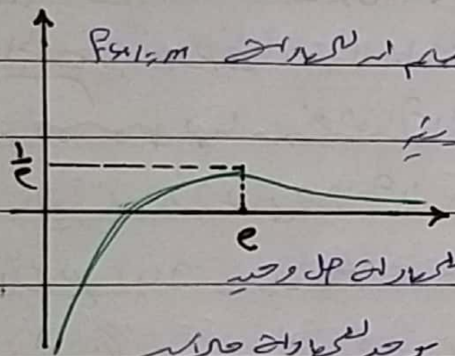
لندرس تغيرات التابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2} \qquad f'=0$$

$$x=e \qquad f(e)=\frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



نستعين بالرسم لحل المعادلة $f(x)=m$ بالحل البياني

$m\leq 0$ للمعادلة حل وحيد

$0<m<\frac{1}{e}$ يوجد للمعادلة حلان

$x_1<e$ و $x_2>e$ يكون لدينا

$$\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=m$$

$$x_2\ln x_1=x_1\ln x_2$$

$$\frac{x_2\ln x_1}{x_2\ln x_2}=\frac{x_1\ln x_2}{x_2\ln x_2}$$

$$\frac{\ln x_1}{\ln x_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

وهو المطلوب.

$\ln(x)\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$

اثبت انها محققة $]0,1[$

لندرس تغيرات التابع

$f(x)=\ln x\cdot\ln(1-x)$ $\quad]0,1[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty(0)$

$=\lim_{x\to0^+} x\ln x\cdot\frac{\ln(1-x)}{x}$

$=0(-1)=0$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=0(-\infty)$

$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}(1-x)\ln(1-x)$

$1-x=X \Rightarrow 1-X=x$

$x\to1 \Rightarrow X\to0$

$=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1-X)}{X}\,X\ln X$

$=1(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{-1}{1-x}\ln x$

$=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$

المقام موجب ومعرفة إشارة البسط ندرس تغيرات تابع

$g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=0-0=0$

$\lim_{x\to1} g(x)=0-0=0$

$\lim_{x\to1}(1-x)\ln(1-x)=\lim_{x\to0}x\ln x$

$g'=-\ln(1-x)+\frac{-1}{1-x}(1-x)-\ln x-1$

$=-\ln(1-x)-\ln x-2$

$=-\ln(x(1-x))-2 \qquad g'=0$

$\ln(x(1-x))=-2$

$x(1-x)=e^{-2}\Rightarrow x^2-x+e^{-2}=0$

$\Delta=\frac{e^2-4}{e^2}\simeq0,67$

$x_1=\frac{1+0,67}{2}=0,83$

$x_2=\frac{1-0,67}{2}=0,16$

$g(0,83)=-0,15$

$g(0,16)=0,15$

x	0		$0,16$		$\frac12$		$0,83$		1
g'		$+$	0		$-$		0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$0,15$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-0,15$	$\nearrow$	0

إذن $f'=0 \Rightarrow x=\frac12$

$f(\frac12)=\ln\frac12\cdot\ln\frac12=(\ln2)^2$

x	0		$\frac12$		1
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$(\ln2)^2$	$\searrow$	0

$f(x)\le(\ln2)^2$ وأخيراً نبدل f بـ

$\ln x\cdot\ln(1-x)\le(\ln2)^2$

إذن المتراجحة المعطاة محققة أياً كان $x\in]0,1[$.

تمارين إضافية في الدوال اللوغاريتمية ..

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$

$f(x) = x(1+\ln^2 x)$ ، $x>0$

$f(0) = 0$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) بين أن f مستمرة على اليمين عند 0

b) احسب $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ فسر النتيجة هندسيا

3) احسب f' ثم شكل جدول تغيراتها.

4) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و المستقيم $y=x$

5) ارسم (C)

~~~ * ~~~ * ~~~

تمرين

$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

1) بين $H(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x$ دالة أصلية لـ $h(x) = x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

2) بين من أجل $x>0$

$\int_1^x t\ln^2(t)\,dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)$

3) استنتج من أجل $x>0$

$F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2 x$

4) a) بين أن F متزايدة على $[0,+\infty[$

b) احسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

~~~ * ~~~

$f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

$D_f =]-1,1[\cup]1,+\infty[$

1) a) احسب نهايات f عند 1 و عند -1

ثم فسر النتائج هندسيا.

b) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل $x \in D_f$

$f'(x) = \frac{x(x-3)}{\dots}$

ثم ادرس إشارته وانظم جدول تغيراتها

b) عين معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها (2)

3) لتكن g دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$

$g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1) a) بين أن $\frac{x+1}{x} > 1$ ، $x \in]1,+\infty[$

ثم استنتج إشارة g على المجال $]1,+\infty[$

b) احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ماذا تستنتج؟

4) لتكن h دالة حيث $h(x) = \ln x$

حدد وضعية C_f بالنسبة لـ C_h على $]1,+\infty[$

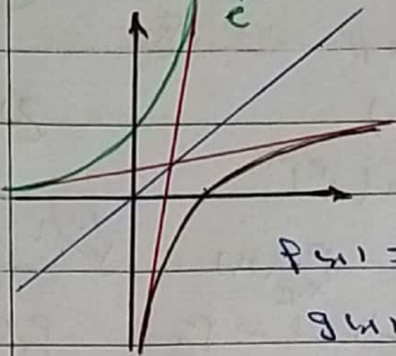
5) ارسم C_f ، C_h ، Δ.

6) حل بيانيا حسب قيم m المعادلة

$\frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = 0$ ، $x>0$

~~~ * ~~~ * ~~~

$g(x) = x\ln x + x$ ، $]0,3]$

1) ادرس تغيرات g

2) a) بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,3]$

b) استنتج إشارة $g(x)-2$

3) لتكن $f(x) = |x-2|\ln x$

1) هل f قابلة للاشتقاق عند 2

2) ادرس تغيرات f وارسم منحناها البياني

4) $h(x) = (2-\sin x)\ln(\sin x)$

a) بين أن Δ ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ محور تناظر لـ C_h

b) ادرس تغيرات h وشكل جدول تغيراتها وارسم Δ و C_h.

0923423159
~~~

12/21



و $f(x) = e^x$

و $g(x) = \ln(x)$

خطا الخطين البيانيين f و g متناظران بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث $y = x$.

معادلة مماس f عند النقطة (a, e^a) هي

$$T_f : y_f = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a)$$

معادلة مماس g عند النقطة $(b, \ln b)$ هي

$$T_g : y_g = \frac{1}{b}(x-b) + \ln b = \frac{x}{b} - 1 + \ln b$$

* ينطبق المماسان إذا تحقق $y_f = y_g$ أي

$$e^a x + e^a(1-a) = \frac{x}{b} - 1 + \ln b$$

بالمطابقة نجد أن

$e^a = \frac{1}{b} \Rightarrow b = e^{-a}$ (1)

$e^a(1-a) = \ln b - 1$ (2)

نعوض في (2)

$$e^a(1-a) = \ln e^{-a} - 1$$

$$e^a(1-a) = -a-1 \Rightarrow e^a = \frac{-a-1}{1-a}$$

$$e^a = \frac{a+1}{a-1} \Rightarrow e^{-a} - \frac{a-1}{a+1} = 0$$

ولحل هذه المعادلة ندرس التابع

$$h(x) = e^{-a} - \frac{a-1}{a+1} \quad \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} h(x) = e - \frac{-2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} h(x) = +\infty$$

$$h' = -e^{-a} - \frac{2}{(a+1)^2} < 0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	||	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1

من جدول التغيرات يتبين أن $h(x) = 0$ تقبل حلين في المجالين $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$ لأن h مستمر ومتناقص تماماً أي يوجد

$a_1 \in]-\infty, -1[\qquad a_2 \in]-1, +\infty[$ و

ومنه يوجد قيمتان لـ b

$b_1 = e^{-a_1} \qquad b_2 = -e^{-a_2}$

إذاً يوجد مماسان مشتركان للخطين f و g أحدهما T_1 يمس f في النقطة (a_1, e^{a_1}) ويمس g في النقطة $(b_1, \ln b_1)$. والثاني T_2 يمس f في النقطة (a_2, e^{a_2}) ويمس g في النقطة $(b_2, \ln b_2)$ وبالتالي f و g متناظران بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث لأن $a_1 = -a_2$.

(١٣) تابع القوة ...

تعرف إلى دراسة التابع

$$P_\alpha(x) = x^\alpha$$

الحل: التابع $P_\alpha(x) = x^\alpha$ يكتب بالشكل

$$P_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$$

$$P(u) = e^{u}$$

حيث $u(x) = \alpha \ln x$

(1) لندرس اشتقاق التابع P_α

أ) اثبت ان P_α اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وان

$$P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$$

• اذا كانت $\alpha>0$ فإن التابع $u(x)$ متزايد تماماً.

وفي حالة $\alpha<0$ فالتابع $u(x)$ متناقص تماماً.

$$P'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha P_{\alpha-1}$$

2) $0<\alpha<1$ ، $P_\alpha(0)=0$ احسب مباشرة

$t(x) = \frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}$ عند الصفر هل اشتقاقي

$$t(x) = \frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$$

$\lim_{x\to 0} t(x) = +\infty$ لأن $\alpha<1$ لأن $\alpha-1<0$

فالتابع ليس اشتقاقياً في هذه الحالة عند الصفر ولخط البياني مماس شاقولي في النقطة $(0,0)$

3) الى السؤال من أجل $\alpha>1$

وجدنا $t(x) = x^{\alpha-1}$

$$\lim_{x\to 0} t(x) = 0$$

فالتابع في هذه الحالة اشتقاقي عند الصفر

ومنه P اشتقاقي على $[0,+\infty[$

(2) اثبت ان $P_\alpha \circ P_\beta = P_{\alpha\cdot\beta}$

$$(P_\alpha\circ P_\beta)(x) = P_\alpha(P_\beta(x)) = P_\alpha x^\beta = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\cdot\beta} = P_{\alpha\cdot\beta}(x)$$

(3) $P_{\frac{1}{\alpha}}$ هو التقابل العكسي للتابع P_α

$$\left.\begin{aligned}(P_{\frac{1}{\alpha}}\circ P_\alpha)(x) &= P_{\frac{1}{\alpha}}(P_\alpha) = x\\ (P_\alpha\circ P_{\frac{1}{\alpha}})(x) &= P_\alpha(P_{\frac{1}{\alpha}}) = x\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

فالتابع $P_{\frac{1}{\alpha}}$ هو التقابل العكسي لـ P_α

واذا كانت $\alpha = n$ ، $n\in\mathbb{N}$

فإن $P_{\frac{1}{\alpha}}(x)$ هو $x^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{x}$

ومنه فإن P_n و $P_{\frac{1}{n}}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

اي x^n و $\sqrt[n]{x}$ تقابلان على $]0,+\infty[$

مقارنة تابع القوة بالتابعين اللوغاريتمي والأسي

• $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}(0) = 0$

• $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha}x^\alpha \ln x^\alpha = \frac{1}{\alpha}(0) = 0$

• $\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{e^{\alpha\ln x}} = e^{x-\alpha\ln x} = e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = e^{+\infty(1-0)} = e^{+\infty} = +\infty$$

• $x^\alpha\cdot e^{-x} = e^{\alpha\ln x}\cdot e^{-x} = e^{\alpha\ln x - x} = e^{x\left(\alpha\frac{\ln x}{x}-1\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\alpha\frac{\ln x}{x}-1\right)} = e^{\infty(0-1)} = e^{-\infty} = 0$$

أ. محمد حول الصباغ 0932421159

٢٤) $f(x) = (x^2+x-1)e^x$ $\mathbb{R}$

١) أوجد $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$

٢) a) أثبت أن

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$$

حيث $a_{n+1} = a_n + 2$, $b_{n+1} = b_n + a_n$

b) استنتج أن a_n , b_n أعداد ثابتة.

$f(x) = (x^2+x-1)e^x$

$f'(x) = (2x+1)e^x + e^x(x^2+x-1)$

$= e^x(2x+1+x^2+x-1)$

$= (x^2+3x)e^x$

$f''(x) = (2x+3)e^x + e^x(x^2+3x)$

$= e^x(x^2+5x+3)e^x$

٢a) من أجل $n=1$

$f'(x) = (x^2 + a_1 x + b_1)e^x$

ومنه تكون القضية محققة من أجل $a_1 = 3, b_1 = 0$

الفرض: $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$

الطلوب: $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1})e^x$

الإثبات: نشتق الفرض.

$\left(f^{(n)}(x)\right)' = (2x+a_n)e^x + e^x(x^2+a_n x+b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2+(a_n+2)x + a_n + b_n)$

نكتب الفرض في نص المسألة أن

$a_{n+1} = a_n + 2$ $\qquad$ $b_{n+1} = b_n + a_n$

ومنه $f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققة.

لنضع قضية جديدة $E(n)$ a_n, b_n أعداد ثابتة

من أجل $n=1$ وجدنا سابقاً أن $a_1 = 3, b_1 = 0$

وهي محققة.

الفرض: a_n, b_n أعداد ثابتة

الطلوب: a_{n+1}, b_{n+1} أعداد ثابتة

الإثبات: لدينا بفرض a_n, b_n أعداد ثابتة

ووجدنا أن

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2 \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}\right\} \text{ وهي أعداد ثابتة}$$

فالقضية محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

٢) a) أثبت أن a_n حسابية واستنتج a_n

b) تحقق أن $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$

ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n.

وجدنا أن $a_{n+1} = a_n + 2$ أي $a_{n+1} - a_n = 2$

متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها

الأول $a_1 = 3$ ومنه $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = 3 + 2(n-1) \Rightarrow a_n = 1 + 2n$

لدينا من نص المسألة $b_{n+1} = b_n + a_n$ ومنه

$b_2 - b_1 = a_1$

$b_3 - \cancel{b_2} = a_2$

$\cancel{b_4} - \cancel{b_3} = a_3$

$\vdots$

$b_n - \cancel{b_{n-1}} = a_{n-1}$

$+$

$b_n - b_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$

لكن $b_1 = 0 \Rightarrow b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$

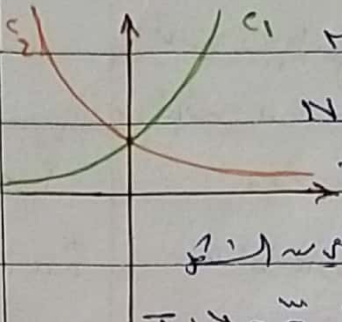
$b_n = (n-1)\dfrac{a_1 + a_{n-1}}{2}$

$= (n-1)\dfrac{3 + 2n - 1}{2} = n^2 - 1$

٢٢ / ٢١٤

$f_1(x) = e^x$ $\quad C_1$

$f_2(x) = e^{-x}$ $\quad C_2$



$M(m, e^m)$

$N(m, e^{-m})$

معادلة المماس T_1 للخط C_1 في M هي من الشكل

$T_1: y = e^m + e^m(x-m)$

معادلة المماس T_2 للخط C_2 في N هي من الشكل

$T_2: y = e^{-m} - e^{-m}(x-m)$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = e^m \\ m_2 = -e^{-m} \end{array}\right\} m_1 \times m_2 = -1$$

فالمماسان متعامدان.

[٢] $P(x, y)$ هي نقطة تقاطع T_1 و T_2 بالحل المشترك لمعادلتيهما

$y = e^m + e^m(x-m)$

$y = e^{-m} - e^{-m}(x-m)$

بالحل المشترك $y = y$ نجد

$e^m + xe^m - me^m = e^{-m} - xe^{-m} + me^{-m}$

$xe^m + xe^{-m} = e^{-m} - e^m + me^m + me^{-m}$

$x(e^m + e^{-m}) = e^{-m} - e^m + m(e^m + e^{-m})$

ومنه $x_P = m - \dfrac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$

$y_P = \dfrac{2}{e^m + e^{-m}}$

[٣] I منتصف $[MN]$

$I\left(m, \dfrac{e^m + e^{-m}}{2}\right)$

٤) جد المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في $\mathbb{R}$ ...

لإيجاد المحل الهندسي للنقطة I نحذف m بين y_I و x_I

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

تابع

٥) ارسم C مجموعة النقاط I في المعلم المتجانس

لرسم C ندرس تغيرات التابع

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

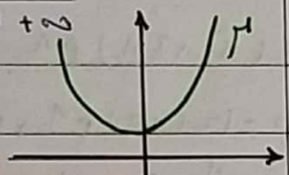
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$f' = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



[٦] a) بدلالة m احسب مركبات الشعاعين $\vec{IP}$ و $\vec{AP}$

$\vec{IP}(x_P - x_I, y_P - y_I)$

$\vec{IP}\left(-\dfrac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \dfrac{-(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})}\right)$

$\vec{AP}(x_P - x_A, y_P - y_A)$

$\vec{AP}\left(-\dfrac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \dfrac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$

b) استنتج أن المستقيم IP مماس لـ C في I.

ميل المماس لـ C عند I: $f'(m) = \frac{1}{2}(e^{m} - e^{-m})$

ميل IP: $m_{IP} = \dfrac{y_P - y_I}{x_P - x_I} = \frac{1}{2}(e^m - e^{-m})$

نلاحظ أن لهما الميل ذاته ويشتركان بـ I فهما منطبقان أي أن IP مماس لـ C في I.

c) أثبت أن طول AP ثابت

$AP^2 = (y_P - y_A)^2 + (x_P - x_A)^2$
$= 1$

أي أن طوله ثابت.

جلسات تدريبية مكثفة لطلاب الدورة

أ. محمد حول الصباغ ٠٩٣٢٤٢١١٥٩

الملف العلمي الرياضي

الملف العلمي الرياضي — أ. محمد جمال الصباغ 0934311509

(24) (2016) $f(x) = (x^2+x-1)e^x$ ، $\mathbb{R}$

1) احسب $f'(x)$ ، $f^{(2)}(x)$

2) a) اثبت أنه

$f^{(n)}(x) = (x^2+a_n x+b_n)e^x$

حيث $a_{n+1} = a_n + 2$ ، $b_{n+1} = b_n + a_n$

b) استنتج أن a_n ، b_n أعداد طبيعية.

$f(x) = (x^2+x-1)e^x$

$f'(x) = (2x+1)e^x + e^x(x^2+x-1)$

$= e^x(2x+1+x^2+x-1)$

$= (x^2+3x)e^x$

$f''(x) = (2x+3)e^x + e^x(x^2+3x)$

$= e^x(x^2+5x+3)e^x$

2) a) من أجل $n=1$

$f'(x) = (x^2+a_1 x+b_1)e^x$

ومنه لدينا القضية محققة من أجل $a_1=3, b_1=0$

الفرض: $f^{(n)}(x) = (x^2+a_n x+b_n)e^x$

المطلوب: $f^{(n+1)}(x) = (x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x$

الإثبات: نشتق الفرض.

$(f^{(n)}(x))' = (2x+a_n)e^x + e^x(x^2+a_n x+b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2+(a_n+2)x+a_n+b_n)$

لكن من الفرض في نص المسألة أنه

$a_{n+1} = a_n+2$ ، $b_{n+1} = b_n+a_n$

ومنه $f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})$

أي القضية $E(n+1)$ محققة.

b) لنضع قضية جديدة $E(n)$: a_n ، b_n أعداد طبيعية

من أجل $n=1$ وجدنا سابقاً أنه $a_1=3, b_1=0$

وهي محققة.

الفرض: a_n, b_n أعداد طبيعية

المطلوب: a_{n+1}, b_{n+1} أعداد طبيعية

الإثبات: لدينا فرضاً a_n, b_n أعداد طبيعية ووجدنا أنه

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n+2 \\ b_{n+1} &= a_n+b_n \end{aligned}\right\}$$ وهي أعداد طبيعية

فالقضية محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

3) a) اثبت أن a_n متتالية حسابية واستنتج a_n

b) تحقق أن $b_n = a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_2+a_1$

ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n.

وجدنا أنه $a_{n+1}=a_n+2$ أي $a_{n+1}-a_n=2$

أي متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها

الأول $a_1=3$ ومنه $a_n=a_1+(n-1)r$

$a_n = 3+2(n-1) \Rightarrow a_n = 1+2n$

ومن $b_{n+1} = b_n+a_n$ لدينا من نص المسألة

$b_2 - b_1 = a_1$

$b_3 - b_2 = a_2$

$b_4 - b_3 = a_3$

$\vdots$

$+\quad b_n - b_{n-1} = a_{n-1}$

$b_n - b_1 = a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}$

لكن $b_1=0 \Rightarrow b_n = a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$

$b_n = (n-1)\dfrac{a_1+a_{n-1}}{2}$

$= (n-1)\dfrac{3+2n-1}{2} = n^2-1$

جلسات تحضيرية مكثفة للطلاب دورة

n ≥ 2

يا ١) حل المعادلة التفاضلية (١)

$y' - \frac{1}{n} y = 0$ ...(1)

$y' = \frac{1}{n} y \Rightarrow y = K e^{\frac{1}{n}x}$

b) $y' - \frac{1}{n} y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$ ...(2)

عين a, b لكي يكون $g(x) = ax + b$ حلاً للمعادلة (2)

$g'(x) - \frac{1}{n} g(x) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$ *

$a - \frac{ax+b}{n} = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

$a - \frac{a}{n}x - \frac{b}{n} = -\frac{x}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$

بالمطابقة:

$\frac{-a}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow a = \frac{1}{n+1}$

$a - \frac{b}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow$

$\frac{1}{n+1} - \frac{b}{n} = \frac{-1}{(n+1)n}$

$n - (n+1)b = -1 \Rightarrow b = 1$

ومنه $g(x) = \frac{1}{n+1}x + 1$ حل لـ (2)

① أثبت أن كون h حلاً لـ 2 يكافئ أن يكون h − g حلاً لـ (1)

الفرض: h حل لـ 2

الطلب: h − g حل لـ 1

الإثبات: h حل لـ 2 إذن

$h' - \frac{1}{n} h = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

وكذلك $g' - \frac{1}{n} g = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

$h' - g' - \frac{1}{n} h + \frac{1}{n} g = 0$

$(h-g)' - \frac{1}{n}(h-g) = 0$ ومنه h − g حل لـ (1)

الفرض: h − g حل لـ (1)

الطلب: h حل لـ (2)

الإثبات: h − g حل لـ (1) إذن

$(h-g)' - \frac{1}{n}(h-g) = 0$

$h' - g' - \frac{1}{n} h + \frac{1}{n} g = 0$

$h' - \frac{1}{n} h = g' - \frac{1}{n} g$

$h' - \frac{1}{n} h = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

ومنه h حل لـ 2

② استنتج حلول المعادلة (2)

وجدنا h − g حل لـ (1) إذن

$h - g = K e^{\frac{1}{n}x}$

$h = K e^{\frac{1}{n}x} + g(x)$

$= K e^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1}x + 1$

③ استنتج عين الحل f الذي يحقق f(0) = 0

$0 = K + 1 \Rightarrow K = -1$

$f(x) = -e^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1}x + 1$

[2] $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$

فادرس تغيرات f_n' ثم ارسم جدول تغيراتها

استنتج أن f_n ... f_n تقبل قيمة كبرى M

موجبة ... المطلوب تعيينها ..

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 - \infty - 0 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n}\left(\frac{n}{x} + \frac{n}{x}\frac{x}{n+1} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)$

$= +\infty\left(0 + \frac{n}{n+1} - \infty\right)$

$= -\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha$$

x	$-\infty$		α		0	$+\infty$
f'		$+$		$-$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$-\infty$

فالتابع f_n يبلغ قيمة كبرى $M = f(\alpha_n)$

وهي موجبة

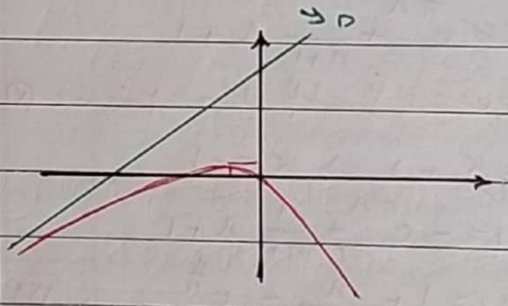
$y = 1 + \frac{x}{n+1}$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

لدينا

$$f - y_\Delta = -e^{\frac{x}{2}} < 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f - y) = 0$$

C تحت y_Δ.



التكامل

* أمثلة على إيجاد التوابع الأصلية:

1) $f(x)=\sqrt{x}$

$=x^{\frac{1}{2}}$

$F(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$=\dfrac{1}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}=(2x+3)^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\underbrace{2}_{g'}\underbrace{(2x+3)}_{g}^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=\dfrac{1}{\cancel{2}}\dfrac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$

$=\sqrt{2x+3}$

3) $f(x)=\dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x-5}}$

$=(4x+6)(x^2+3x-5)^{-\frac{1}{2}}$

$=2\underbrace{(2x+3)}_{g'}\underbrace{(x^2+3x-5)}_{g}^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=2\dfrac{(x^2+3x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$=4\sqrt{x^2+3x-5}$

4) $f(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{2}{x}+1\right)}{x^2}$

$=\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\frac{2}{x}+1\right)$

$=\dfrac{1}{-2}\cdot\underbrace{\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)}_{g'}\sin\left(\frac{2}{x}+1\right)$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{x}+1\right)$

"الملاحظة"

$f(x)=\sin(g(x)) \underset{F}{\rightleftarrows} f'(x)=g'(x)\cos(g(x))$

$f(x)=\cos(g(x)) \underset{F}{\rightleftarrows} f'(x)=-g'(x)\sin(g(x))$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$

$=\dfrac{1}{(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$

$=x^{-\frac{3}{4}}$

$F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}=4\sqrt[4]{x}$

6) $f(x)=\dfrac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$

$f(x)=\dfrac{1-2x+x^2}{x^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{2x}{x^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}$

$=x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$

$F(x)=\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-2\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$=-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$

* التكامل بالتجزئة:

يستخدم إذا كان لدينا تابعين من نوعين مختلفين، أي لا يمكن استخدام القواعد.

$$-\ F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ -$$

- أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x)=x.\sin x$

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$=\int_0^x t\sin t$

$u=t \qquad u'=1$

$v'=\sin t \qquad v=-\cos t$

$F(x)=[u.v]_0^x-\int_0^x u'.v\,dt$

$=[-t\cos t]_0^x-\int_0^x -\cos t\,dt$

$=-x\cos x+0+[\sin t]_0^x$

$=-x\cos x+\sin x-0$

$=-x\cos x+\sin x$

2) $f(x)=\ln x$

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$=\int_1^x \ln t\,dt$

$u=\ln t \qquad u'=\frac{1}{t}$

$v'=1 \qquad v=t$

$F(x)=[u.v]_1^x-\int_1^x u'v\,dt$

$=[t.\ln t]_1^x-\int_1^x t.\frac{1}{t}$

$=x\ln x-0-\int_1^x \frac{1}{x}\,dt$

$=x\ln x-[t]_1^x$

$=x\ln x-(x-1)$

$=x\ln x-x+1$

$=x\ln x-x$

3) $I=\int_1^e \ln x\,dx$

$u=\ln x \qquad u'=\frac{1}{x}$

$v'=1 \qquad v=x$

$I=[u.v]_1^e-\int_1^e u'v\,dx$

$=[x.\ln x]_1^e-\int_1^e 1\,dx$

$=e(1)-0-[x]_1^e$

$=e-(e-1)$

$=e-e+1$

$=1$

4) $J=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$

$J=x(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$u=x \qquad u'=1$

$v'=(3x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.3(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \qquad -\frac{1}{2}=n$

$v=\frac{1}{3}\,\frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}$

$J=[u.v]_0^1-\int_0^1 u'.v\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{3x+1}\right]_0^1-\int_0^1 \frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}(1)(2)-0\right]-\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\int_0^1 3(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{4}{3}-\frac{2}{9}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} \left[\sqrt{(3x+1)^3} \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{27}(8-1)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{28}{27} = \frac{8}{27}$$

5) $$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$$

$$= \int_1^{e^3} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \underbrace{(\ln x+1)}_{g}^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^{e^3}$$

$$= 2\left[\sqrt{\ln x+1}\right]_1^{e^3}$$

$$= 2(2-1)$$

$$= 2$$

* **الكسور الجزئية:**

$\boxed{1}$ قوة البسط أكبر أو تساوي قوة المقام.

«نستخدم القسمة الإقليدية»

$f(x) =$ الناتج $+$ $\dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$\boxed{2}$ قوة المقام أكبر من قوة البسط

«نستخدم تفريق الكسور»

مثال:

1) $$\int_0^1 \frac{x}{x^2-4}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$x = A(x+2) + B(x-2)$$

لحساب A:

$: x = 2$

$$2 = A(4) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

لحساب B:

$: x = -2$

$$-2 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(3) - \ln(4)\right]$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3}{4}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $$\int_{-5}^{-4} \frac{3x+6}{x^2+5x+6}$$

$$= \int_{-5}^{-4} \frac{3\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+3)}$$

$$= \int_{-5}^{-4} \frac{3}{x+3}$$

$$= 3\left[\ln|x+3|\right]_{-5}^{-4}$$

$$= 3\left[\ln(1) - \ln(2)\right]$$

$$= -3\ln(2)$$

$$= -\ln(8)$$

3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3+x}$ «فكرة جديدة»

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

جذر بسيط — مستحيل

لحساب A:

نضرب بـ x ونجعل $x \to 0$:

$$\frac{2}{x^2+1} = A + x\,\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\boxed{2 = A}$$

لحساب B:

نضرب بـ x ونجعل $x \to +\infty$:

$$\frac{2}{x^2+1} = A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}$$

$$0 = A + B \Longrightarrow \boxed{B = -2}$$

لحساب C:

$x = 1$

$$\frac{2}{2} = A + \frac{B+C}{2}$$

$$2 = 2A + B + C$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(2\cdot\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$= \left[2\ln|x| - \ln|x^2+1|\right]_{-2}^{-1}$$

$$= 2\ln(1) - \ln(2) - 2\ln(2) + \ln(5)$$

$$= -3\ln(2) + \ln(5)$$

$$= -\ln(8) + \ln(5)$$

$$= \ln\left(\frac{5}{8}\right)$$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2}{x^3+x^2}$

$$\frac{2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

بسيط

لحساب A:

نضرب بـ $x+1$ ونجعل $x \to -1$:

$$\frac{2}{x^2} = A \Longrightarrow \boxed{A = 2}$$

لحساب C:

نضرب بـ x^2 ونجعل $x \to 0$:

$$\frac{2}{x+1} = C \Longrightarrow \boxed{C = 2}$$

لحساب B:

$x = 1$:

$$\frac{2}{2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{1} + \frac{C}{1}$$

$$1 = 1 + B + 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = -2}$$

$$\int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x+1} + \frac{-2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \int_{1}^{2} \left(2\cdot\frac{1}{x+1} - 2\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot x^{-2}\right)$$

$$= \left[2\ln|x+1| - 2\ln|x| - \frac{2}{x}\right]_{1}^{2}$$

$$= 2\ln(3) - 2\ln(2) - 1 - (2\ln 2 - 2)$$
$$= \ln(9) - \ln(4) - 1 - \ln(4) + 2$$
$$= \ln(9) - \ln(16) + 1$$

المساحة

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

((ولها أربع حالات تم ذكرها سابقاً))

"قاعدة جديدة:"

لحساب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $y'y$ والمستقيمين $y=a$، $y=b$ حيث $b > a$، يمكننا حساب المساحة التي يحدها نظيره C' بالنسبة لمنصّف الربعين الأول والثالث والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a$، $x=b$ وذلك بعد أن نكتب x بدلالة y.

مثال:

$$f(x) = x^3 - 1$$

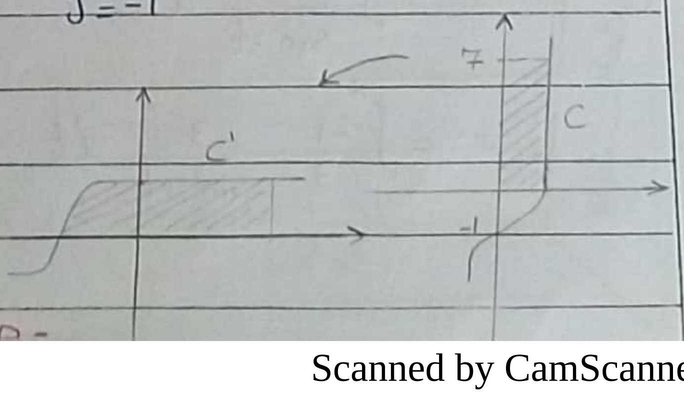
احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $y'y$ والمستقيم $y=7$.

$x=0$

الحل:

نعوض $x=0$ في معادلة $f(x)$:

$$y = -1$$



$$y = x^3 - 1$$
$$x^3 = y + 1$$
$$x = \sqrt[3]{x+1} \qquad C'$$
$$x = -1 \qquad x = 7$$
$$S = \int_{-1}^{7} \sqrt[3]{x+1}$$
$$= \int_{-1}^{7} (x+1)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left[\frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_{-1}^{7}$$
$$= \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x+1)^4} \right]_{-1}^{7}$$
$$= \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{8^3 \cdot 8} - 0 \right]$$
$$= \frac{3}{4} \times 16 = 12$$ واحدة مربعة

ملاحظة:

$$(x,y) \xrightarrow{\Delta_1} (y,x)$$

Δ_1: منصّف الربعين الأول والثالث.

$$(x,y) \xrightarrow{\Delta_2} (-y,-x)$$

Δ_2: منصف الربعين الثاني والرابع.

الحجم

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

تمارين:

1) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$

نفرض $\sqrt{x}=t$

$x=t^2$

$\frac{dx}{dt}=(x)'_t=2t$

$dx=2t\,dt$

$x=0 \rightarrow t=0$

$x=1 \rightarrow t=1$

$\int_0^1 2te^t\,dt$

$u=2t \qquad u'=2$

$v'=e^t \qquad v=e^t$

$[u.v]_0^1-\int_0^1 u'.v$

$=[2te^t]_0^1-\int_0^1 2e^t$

$=2(1)(e)^1-0-2[e^t]_0^1$

$=2e-2(e-1)$

$=2e-2e+2$

$=2$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x.\sin^2 x}$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|(\cos x)^{\frac{1}{2}}$

الربعين الرابع والأول

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\sin x\cos^{\frac{1}{2}}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^{\frac{1}{2}}x$

الربع الرابع — الربع الأول

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\underbrace{-\sin x}_{g'}\,\underbrace{\cos^{\frac{1}{2}}x}_{g}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{-\sin x}_{g'}\,\underbrace{\cos^{\frac{1}{2}}x}_{g}$

$=\left[\frac{\cos^{\frac{3}{2}}x}{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\left[\frac{\cos^{\frac{3}{2}}x}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\left[\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{2}{3}[1-0]-\frac{2}{3}[0-1]$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

3) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$

ملاحظة التمرين:

$\tan x \underset{\int \text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}\ '}{\rightleftarrows}} \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot x \underset{\int \text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}\ '}{\rightleftarrows}} \frac{-1}{\sin^2 x}$

$\Longrightarrow \cot 3x \underset{\int \text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}\ '}{\rightleftarrows}} \frac{-3}{\sin^2 3x}$

$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

$=\int_1^x \frac{1}{\sin^2 3t}\,dt$

$=\int_1^x \frac{-1}{3}\cdot\frac{-3}{\sin^2 3t}\,dt$

$$F(x) = \left[\frac{-1}{3}\cot 3t\right]_1^x$$

$$= \frac{-1}{3}\cot 3x + \frac{1}{3}\cancel{\cot 3}$$

ثابت

$$= \frac{-1}{3}\cot 3x$$

4) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$

$$= \frac{x^3}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{8}{3}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}$$

$$= \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}}$$

5) $f(x) = \sin^3 x . \sin 2x$

$$= \sin^3 x . 2\sin x \cos x$$

$$= 2\underbrace{\cos x}_{g'}\,\underbrace{\sin^4 x}_{g}$$

$$F(x) = 2\frac{\sin^5 x}{5} = \frac{2}{5}\sin^5 x$$

6) $f(x) = 2x + 5 - \csc^2 x$

ملاحظة التمرين :

$\sec = \dfrac{1}{\cos}$ / $\csc = \dfrac{1}{\sin}$

$$\tan x \underset{\text{تكامله}}{\overset{\text{مشتقة}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2$$

$$\cot x \underset{\text{تكامله}}{\overset{\text{مشتقة}}{\rightleftarrows}} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2$$

$$F(x) = 2\frac{x^2}{2} + 5x + \cot x$$

$$= x^2 + 5x + \cot x$$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{g'}\,\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{g}{}^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = 2\frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\sqrt{1+\sqrt{x}}$$

8) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-1 & x^3+2 \\ & -x^3 \pm x \\ \hline & x+2 \end{array}$$

الملف العلمي الرياضي

أ. محمد حول الصباغ ٠٩٣٤٣١١٥٩

جلسات تحضيرية مكثفة لطلاب الدورة

$$F(x) = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

نضرب بالبسوط ونحذف المقامات:

$$x+2 = A(x+1) + B(x-1)$$

لحساب A: $x = 1$

$$3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

لحساب B: $x = -1$

$$-1+2 = B(-1-1)$$

$$1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$F(x) = x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$= x + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$$

9) $F(x) = \dfrac{x^4+4}{x^2-4}$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4 \\ \hline x^2-4 & x^4+4 \\ & -x^4 \pm 4x^2 \\ \hline & 4x^2+4 \\ & -4x^2 \pm 16 \\ \hline & 20 \end{array}$$

$$F(x) = x^2 + 4 + \frac{20}{x^2-4}$$

$$\frac{20}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

نضرب بالبسوط ونحذف المقامات:

$$20 = A(x+2) + B(x-2)$$

لحساب A: $x = 2$

$$20 = A(2+2) \Rightarrow \boxed{A = 5}$$

لحساب B: $x = -2$

$$20 = B(-2-2) \Rightarrow \boxed{B = -5}$$

$$F(x) = x^2 + 4 + \frac{5}{x-2} + \frac{-5}{x+2}$$

$$= x^2 + 4 + 5 \cdot \frac{1}{x-2} - 5 \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + 5\ln|x-2| - 5\ln|x+2|$$

10) $\int_1^2 \sqrt[3]{1-x}$

$$= \int_1^2 (1-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \int_1^2 \underbrace{- \cdot -}_{g'} \underbrace{(1-x)}_{g}{}^{\frac{1}{3}}$$

$$= -\left[\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_1^2$$

$$= \frac{-3}{4} \left[\sqrt[3]{(1-x)^4} \right]_1^2$$

$$= \frac{-3}{4} (1-0)$$

$$= \frac{-3}{4}$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x \right]_0^9$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x \right]_0^9$$

$$= \frac{2}{3}(27) - 9 - 0$$

$$= 18 - 9$$

$$= 9$$

13) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\cdot\frac{-1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{g'} \cdot -\sin\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{g}$$

$F(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

14) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}$

$$= \left[\ln|e^x+1|\right]_0^1$$

$$= \ln(e+1) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

11) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$$= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_1^4 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{g'} \underbrace{(1+\sqrt{x})}_{g}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3}\left[\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} \right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

12) $\int_0^9 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}$

$$= \int_0^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{x} - 1 \\ \hline \sqrt{x}+1 & x - 1 \\ & -x \mp \sqrt{x} \\ \hline & -\sqrt{x} - 1 \\ & -\sqrt{x} - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$= \int_0^9 \sqrt{x} - 1$$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\tan^3 x}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{g'}$

$= \left[\frac{\tan^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{(1)^4}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

16) $f(x) = 2x\cos^2 x \, dx$

$f(t) = 2t\cos^2 t \, dt$

$\int_0^x f(t)\,dt$

$\int_0^x 2t\cos^2 t \, dt$

بفرض

$u = 2t \qquad u' = 2$

$v' = \cos^2 t$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$

$v = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$

$[u.v]_0^x - \int_0^x u'.v$

$= \left[2t\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]_0^x - \int_0^x 2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)$

$= \left[t^2 + \frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^x - 2\left[\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2t\right]_0^x$

$= x^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x - 0 - 2\left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x - \left(-\frac{1}{8}\right)\right]$

$= x^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x - \cancel{\frac{1}{4}}$

$= \frac{x^2}{2} + x\sin x\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x$

مسائل (١٠٠ درجة)

المسألة الأولى:

$f(x) = (x-1)e^x \qquad \mathbb{R}$

1. أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أن $f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$
2. نظّم جدولاً بتغيرات التابع.
3. ناقش عدد حلول المعادلة $f(x) = k$.
4. ارسم الخط البياني للتابع.
5. استنتج الخط البياني للتابع $f_1 = x.e^{x+1}$
6. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات

الحل:

1. من أجل n=1

$f'(x) = (x+1-1)e^x = xe^x$

نشتق التابع

$f'(x) = 1.e^x + e^x(x-1)$

$= e^x(1+x-1)$

$= x.e^x$

والعلاقة محققة من أجل n = 1 .

الكتب العلمي الرياضي

أ. محمود الصباغ ٠٩٣٢٤٣١١٥٩

الفرض:

$$f^{(n)}_{(x)} = (x+n-1)e^{x}$$

الطلب:

$$f^{(n+1)}_{(x)} = (x+n)e^{x}$$

الإثبات: نشتق الفرض:

$\boxed{4}$ $$\left(f^{(n)}_{(x)}\right)' = e^{x} + (x+n-1)e^{x}$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = e^{x}(1+x+n-1)$$

$$= e^{x}(x+n)$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة.

$\boxed{2}$ f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f_{(x)} = +\infty$$

$\boxed{5}$ $$\lim_{x \to -\infty} f_{(x)} = 0(\infty)$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to -\infty} (xe^{x} - e^{x})$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$f'_{(x)} = xe^{x}$$

$$f'_{(x)} = 0 \Rightarrow xe^{x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$f_{(0)} = -1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_{(x)}$		$-$	0	$+$	
$f_{(x)}$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

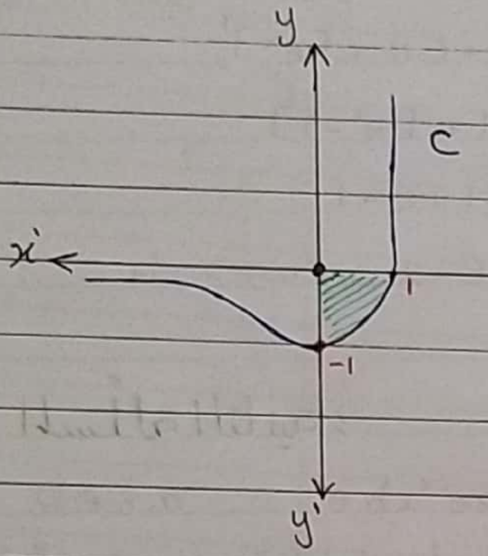
$\boxed{3}$ $k \in]-\infty, -1[$ مستحيلة الحل

$k = -1$ حل وحيد

$k \in]-1, 0[$ حلين

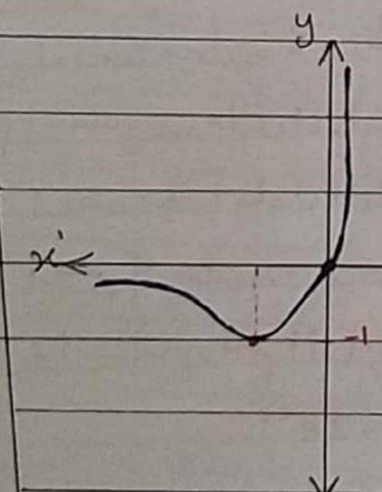
$k = 0$ حل وحيد

$k \in]0, +\infty[$ حل وحيد



$$f_{1(x)} = f_{(x+1)}$$

نجري انسحاب نحو اليسار مرتبة واحدة



$\boxed{6}$ $$S = \int_{0}^{1} -f_{(x)}\,dx$$

$$S = -\int_{0}^{1} (x-1)e^{x}\,dx$$

جلسات تحولية تكثيفة لطلاب دورة

$u = x-1 \qquad u' = 1$

$v' = e^x \qquad v = e^x$

$S = -\left([u.v]_0^1 - \int_0^1 u'v\,dx\right)$

$= -[u.v]_0^1 + \int_0^1 u'v\,dx$

$= -[(x-1)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx$

$= 0 + (-1) + [e^x]_0^1$

$= -1 + [e^1 - 1]$

$= -1 + e - 1$

$= e - 2$ واحدة مربعة

المسألة الثانية:

$f(x) = a e^{2x} + b e^x \qquad a, b \in \mathbb{R}$

أولاً: عيّن a ، b إذا علمت أن للتابع f قيمة محلية قيمتها (-1) عند (0).

ثانياً: في حال $a = 1$ ، $b = -2$.

ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

1. استنتج عدد حلول المعادلة $e^x - 2 = -e^{-x}$
2. ادرس جبرياً حلول المعادلة $f(x) = \lambda$.
3. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج رسم التابع $f_1(x) = \frac{1}{e^{2x}}(1 - 2e^x)$
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات.
5. احسب حجم السطح الناتج عن دوران C دورة كاملة حول $x'x$

الحل:

أولاً: $f(0) = -1$ قيمة حدية فهي تحقق معادلة التابع

$\boxed{-1 = a + b}$ ①

القيمة الحدية تعدم المشتق الأول

$f'(0) = 0$

$f'(x) = 2a e^{2x} + b e^x$

نعوض: $\boxed{0 = 2a + b}$ ②

بطرح ② من ①

$-1 = -a \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$\boxed{b = -2}$

$f(x) = e^{2x} - 2e^x$

ثانياً:

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x(e^x - 2)\right) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x(e^x - 1) = 0$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

$f(0) = -1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

جلسات تحضيرية مكثفة لطلاب دورة

5

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^{x})^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} (e^{4x} - 4e^{3x} + 4e^{2x}) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4x} - \frac{4}{3} e^{3x} + 2e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4\ln 2} - \frac{4}{3} e^{3\ln 2} + 2e^{2\ln 2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2\right)\right]$$

$$= \pi \left[4 - \frac{32}{3} + 8 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 2\right]$$

$$= \pi \left[\underset{(12)}{\frac{10}{1}} - \underset{(4)}{\frac{18}{3}} - \underset{(3)}{\frac{1}{4}}\right]$$

$$= \pi \left[\frac{120 - 72 - 3}{12}\right]$$

$$= \pi \left(\frac{45}{12}\right)$$

$$= \frac{15}{4}\pi$$ واحدة مكعبة

27 مسألة مركبة

1 C و Γ خطين بيانيين لتابعين اشتقاقيين على R، نرمز إليهما g و g'.

① بيّن معللاً أيهما لـ g وأيهما المشتقة.

لنفرض أن Γ هو الخط البياني للتابع g

فنلاحظ من الرسم أن Γ يملك قيمة حدية

في المجال $[-1, 0]$

إذن g' ينعدم في المجال $[-1, 0]$ أي C

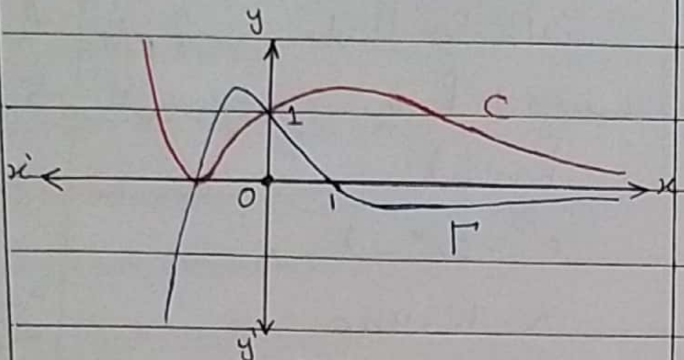
يجب أن يقطع $x'x$ في المجال $[-1, 0]$

وهذا غير ممكن حسب الرسمة، إذن Γ

ليس هو الخط الأساسي للتابع g ومنه

C هو الخط البياني لـ g .

Γ هو الخط البياني لـ g' .



② $m = f'(0) = 1$

2 $(E): \; y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① أثبت أن $f_0(x) = (x^2+2x)e^{-x}$ هو حل لـ E .

$$f_0'(x) = (2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2+2x)$$

$$= e^{-x}(\cancel{2x} + 2 - x^2 - \cancel{2x})$$

$$= e^{-x}(2 - x^2)$$

نعوض في E

$$\ell_1 = e^{-x}(2-x^2) + (x^2+2x)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + 2x)$$

$$= e^{-x}(2 + 2x)$$

$$= 2(1+x)e^{-x} = \ell_2$$

إذن $f_0(x)$ حل لـ E

② $(E'): \; y' + y = 0$

أثبت أن f حل لـ E يكافئ $u = f - f_0$

حل لـ E'.

الفرض: $u = f - f_0$ حل لـ E'

الطلب: f حل لـ E

الكتاب العلمي الرياضي أ. محمد عدنان الصباغ ٠٩٣٤١٣١١٥٩.

الإثبات: لدينا u حل لـ E' إذن

$$u' + u = 0$$

$$f' - f_0' + f - f_0 = 0$$

$$f' + f = f_0' + f_0$$

$$f' + f = e^{-x}(2 - x^2) + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + 2x)$$

$$= 2(x+1)e^{-x}$$

ومنه f حل لـ E.

ثم حل (E') واستنتج صيغة f عندما يكون f حلاً لـ (E)

$$y' + y = 0$$

$$y' = -y \Longrightarrow$$

ومنه $y = ke^{-x}$ حل E'

$$u = ke^{-x}$$

$$f - f_0 = ke^{-x}$$

$$f = ke^{-x} + f_0$$

$$= ke^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$f = e^{-x}(x^2 + 2x + k)$$

③ إذا علمت أن g من الجزء $\boxed{1}$ هو حل لـ (E) أعط صيغة $g(x)$ بدلالة x.

$$\Longleftarrow \begin{cases} f \text{ حل لـ } E \\ g \text{ حل لـ } E \end{cases}$$

$$g = f$$

$$g(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + k)$$

g يمر بالنقطة $(0,1)$ فهي تحقق معادلته

$$1 = 0 + 0 + k \Longrightarrow \boxed{k = 1}$$

$$g(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$$

④ عيّن h حل المعادلة E الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

$$h(x) = f(x)$$

$$h(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + k)$$

$$h'(0) = 0$$

$$h'(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + k) + (2x + 2)e^{-x}$$

$$0 = 0 + 0 - k + 0 + 2$$

$$\boxed{k = 2}$$

$$h(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$$

$\boxed{3}$ ليكن $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ $\mathbb{R}$

① ادرس تغيرات التابع ونظم جدولها.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0)$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = 0$$

- $f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$

$$= e^{-x}(\cancel{2x} + \cancel{2} - x^2 - \cancel{2x} - \cancel{2})$$

$$f'(x) = -x^2 \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 \cdot e^{-x} = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

(2) اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها تساوي (-1) ثم ارسم C' الخط البياني لـ f وارسم المماس (T).

$f(-1) = (1-2+2)e$

$= e$

نقطة التماس $(-1, e)$

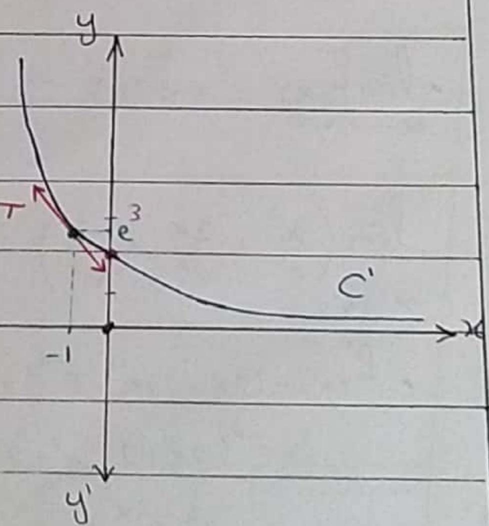
$m = f'(-1) = -e$

ومنه معادلة المماس

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - e = -e(x+1)$

$y = -ex$



(3) عيّن a و b و c حتى يكون التابع $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً لـ f على $\mathbb{R}$

F تابع أصلي لـ f إذن

$F'(x) = f(x)$

$(2ax+b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c) = (x^2+2x+2)e^{-x}$

$2ax+b-ax^2-bx-c = x^2+2x+2$

$-ax^2+(2a-b)x+b-c = x^2+2x+2$

بالمطابقة

$-a = 1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$2a-b = 2 \Rightarrow \boxed{b=-4}$

$b-c = 2 \Rightarrow \boxed{c=-6}$

$F(x) = (-x^2-4x-6)e^{-x}$

- ثم احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و C' والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\alpha$ ، $x=0$.

$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx$

$= [F(x)]_0^\alpha$

$= F(\alpha) - F(0)$

$A(\alpha) = (-\alpha^2-4\alpha-6)e^{-\alpha} - (-6)$

$= (-\alpha^2-4\alpha-6)e^{-\alpha} + 6$ واحدة مربعة

- ثم احسب $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = 0(\infty)$ عدم تعيين

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty}\left(\left(\frac{-\alpha^2}{e^\alpha} - \frac{4\alpha}{e^\alpha} - \frac{6}{e^\alpha}\right)+6\right)$

$= 0 - 0 - 0 + 6$

$= 6$