# الرياضيات
# Mathmatics

# 2024

## قسم التحليل
## Analysis section

By Pixel team

تم كتابة و تنظيم و تنسيق هذا الكتاب
من قبل فريق بيكسل - Pixel التعليمي.

# المحتويات



## ! هام جداً:



Pixel

تابع قناة اليوتيوب ليصلك كل جديد من شرح مادة التحليل

## تعريف المتتالية

المتتالية العددية هي تابع من الشكل

$U : IN \rightarrow IR : n \rightarrow U_n$

نرمز للمتتالية بـ $(U_n)_{n\geq 0}$

**ملاحظة**

1- نسمي $U_n$ الحد العام للمتتالية أو الحد ذي الدليل $n$.

2- التمثيل البياني للمتتالية هو عبارة عن مجموعة نقاط منفصلة.

## طرق كتابة متتالية

### 1 الشكل الصريح

يمكن التعبير عن المتتالية من خلال حدها العام

< $U_n$ بدلالة $n$ >

**مثال**

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$U_n = 3n - 5$$

1- أوجد $U_0$ , $U_1$ , $U_2$ , $U_3$

2- احسب $U_{n+1} - U_n$

**الحل**

1

$$U_0 = 3(0) - 5 = -5$$

$$U_1 = 3(1) - 5 = -2$$

$$U_2 = 3(2) - 5 = 1$$

$$U_3 = 3(3) - 5 = 4$$

2

$$U_{n+1} - U_n = (3n + 3 - 5) - (3n - 5)$$

$$U_{n+1} - U_n = 3n - 2 - 3n + 5$$

$$U_{n+1} - U_n = 3$$

### 2 الشكل التدريجي

يمكن التعبير عن المتتالية بعلاقة تدريجية

**مثال**

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2\,U_n^2 - 1 \end{cases}$$

أوجد $U_1, U_2, U_3$

**الحل**

$$U_1 = 2(U_0)^2 - 1 = 1$$

$$U_2 = 2(U_1)^2 - 1 = 1$$

$$U_3 = 2(U_2)^2 - 1 = 1$$

## اطّراد متتالية

**المتتالية المطردة :** هي متتالية متزايدة أو متناقصة أو ثابتة.

### معايير دراسة اطراد متتالية

1. ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$
2. نحول المتتالية لتابع وندرس اطراده وعندئذ اطراد التابع يؤدي الى اطراد المتتالية على ان تكون المتتالية معرفة من خلال حدها العام
3. نقارن النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مع العدد $1$ أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة تماماً بدءاً من حد معين

**تمرين 4 صفحة 18**

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية :

**الحل**

**1** $U_n = \frac{3}{n^2}$

**طريقة أولى**

$$n \geq 1$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2}$$

بما أن $(n+1)^2 > n^2$

فإنّ

$$\rightarrow \frac{3}{(n+1)^2} < \frac{3}{n^2}$$

$$\rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً أياً تكن $n \geq 1$

**طريقة ثانية**

ليكن التابع $f$ المعرف على $[1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

ندرس إطّراد التابع $f$ :

$f$ اشتقاقي على $[1, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3} < 0$$

فالتابع $f$ متناقص تماماً على المجال $[1, +\infty[$

وبما أنّ $U_n = f(n)$

فالمتتالية متناقصة تماما أياً تكن $n \geq 1$

**طريقة ثالثة**

بما أنّ $U_n > 0$ فعندئذ جميع حدود المتتالية موجبة تماماً أياً يكن $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

لأن $n + 1 > n$

فالمتتالية متناقصة تماماً أياً يكن $n \geq 1$

**2** $U_n = \sqrt{3n+1}$

$$n \geq 0$$

ليكن التابع $f$ المعرف على $[0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

ندرس اطراد التابع $f$:

$f$ اشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$$

فالتابع $f$ متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$

و بما أنّ $U_n = f(n)$ فالمتتالية متزايدة أياً تكن $n \geq 0$

### 3 $U_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$

$n \geq 0$

ليكن التابع $f$ المعرف على $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

ندرس إطراد التابع $f$:

$f$ اشتقاقي على $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(x+4) - 2x + 1}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{9}{(x+4)^2} > 0$$

$f$ متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ وبما أنّ $U_n = f(n)$ فالمتتالية $U_n$ متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

### 4 $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

**طريقة أولى**

$n \geq 0$

جميع حدود المتتالية موجبة تماماً أياً تكن $n \geq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}\right)$$

$$= \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} < 1$$

ومنه المتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 0$

**طريقة ثانية**

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$$

بما أن $(n+1)^2 + 1 > n^2 + 1$

فإن $\dfrac{1}{(n+1)^2+1} < \dfrac{1}{n^2+1}$

و منه $U_{n+1} - U_n < 0$

ومنه المتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 0$

### 5 $U_n = \dfrac{3n+1}{n-2}$

$n \geq 3$

ليكن التابع $f$ المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

ندرس إطراد التابع $f$ :

$f$ اشتقاقي على $]3,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(x-2) - 3x - 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2}$$

$$= -\frac{7}{(x-2)^2} < 0$$

ومنه التابع $f$ متناقص على المجال $]3,+\infty[$

وبما أنّ $U_n = f(n)$ فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 3$

### 6 $U_n = \dfrac{n}{10^n}$

$n \geq 0$

جميع حدود المتتالية موجبة أياً يكن $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \left(\frac{n+1}{10^{n+1}}\right)\left(\frac{10^n}{n}\right)$$

$$= \frac{n+1}{10n}$$

$n+1 < 10n$ أياً يكن $n \geq 1$ و منه

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

ومنه المتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 1$

**7** $U_n : \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

$$U_{n+1} = U_n - 3 \rightarrow U_{n+1} - U_n = -3 < 0$$

ومنه المتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 0$

**8** $U_n : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{cases}$

جميع حدود المتتالية موجبة تماما أياً يكن $n \geq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$$

و منه المتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 0$

**9** $U_n : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2\, U_n \end{cases}$

جميع حدود المتتالية موجبة تماما أياً يكن $n \geq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

**10** $U_n = 2^n$

جميع حدود المتتالية موجبة تماما أياً يكن $n \geq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

**11** $U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

عندما $n$ زوجي تكون $U_n > 0$

عندما $n$ فردي تكون $U_n < 0$

فالمتتالية متناوبة فهي غير مطردة

**12** $U_n = \frac{n^2}{n!}$

جميع حدود المتتالية موجبة تماما أياً يكن $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{n^2}$$

$n^2 > n+1$ أياً تكن $n \geq 2$

و منه $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ أياً تكن $n \geq 2$

فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 2$

**13** $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

**14** $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

**ملاحظة**

لدراسة اطراد متتالية المجاميع نستخدم معيار الفرق حصراً

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية متزايدة أياً تكن $n \geq 1$

## تعريف المتتالية الحسابية

**المتتالية الحسابية :** هي متتالية ينتج فيها الحد عن إضافة عدد ثابت الى الحد الذي قبله.

المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $\in R$ $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} = U_n + r$ أو $U_{n+1} - U_n = r$

## مثال

أثبت أنَّ المتتالية الآتية حسابية:

$$U_n = 5n - 4$$

### الحل

$$U_{n+1} - U_n = (5n + 1) - (5n - 4)$$
$$U_{n+1} - U_n = 5n + 1 - 5n + 4$$
$$U_{n+1} - U_n = 5 = r$$

فالمتتالية حسابية أساسها $r = 5$

## مبرهنات المتتالية الحسابية

### مبرهنة 1

الحد العام $U_n = U_0 + nr$ $\Leftrightarrow$ $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول $U_0$ وأساسها $r$

### مبرهنة 2

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r$ عندئذٍ أياً كان العددان الطبيعيان $m$ و $n$ فإن :

$$U_n - U_m = (n - m)r$$

### مبرهنة 3

إذا كانت $a, b, c$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن $b = \frac{a+c}{2}$ وسط حسابي

## ملاحظة

1. بمعرفة أي حدين من حدود المتتالية الحسابية يمكن إيجاد $r$ ثم إيجاد جميع حدود المتتالية.
2. من أجل $m = 0$ يكون :

$$U_n = U_0 + nr$$

من أجل $m = 1$ يكون :

$$U_n = U_0 + (n - 1)r$$

من أجل $m = 2$ يكون :

$$U_n = U_0 + (n - 2)r$$

## تمرين صفحة 18

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها

$$U_2 = 41 \quad , \quad U_5 = -13$$

احسب $U_{20}$

### الحل

$$U_n - U_m = (n - m)r$$
$$U_5 - U_2 = (5 - 2)r$$
$$-13 - 41 = 3r$$
$$-54 = 3r \rightarrow r = -18$$
$$U_{20} - U_5 = (20 - 5)r$$
$$U_{20} + 13 = 15(-18)$$
$$U_{20} + 13 = -270$$
$$U_{20} = -283$$

## مجموع حدود متتالية حسابية

$$S = \frac{n}{2}(a+l)$$

$n$ : عدد حدود المجموع

$a$ : الحد الأول بالمجموع

$l$ : الحد الأخير بالمجموع

### سؤال صفحة 18

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها

$$U_1 = -2$$

احسب $U_n$ بدلالة $n$ واستنتج قيم المجموعين

$$S_1 = U_1 + U_2 + \cdots + U_{20}$$
$$S_2 = U_{30} + U_{31} + U_{32}$$

**الحل**

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$
$$U_n = -2 + (n-1)(3)$$
$$U_n = -2 + 3n - 3$$
$$U_n = 3n - 5$$

$$S_1 = U_1 + U_2 + \ldots + U_{20}$$
$$S_1 = \frac{n}{2}(U_1 + U_{20})$$
$$n = 20, U_1 = -2, U_{20} = 55$$
$$S_1 = \frac{20}{2}(-2 + 55)$$
$$S_1 = 530$$

$$S_2 = U_{30} + U_{31} + U_{32}$$
$$S_2 = \frac{n}{2}(U_{30} + U_{32})$$
$$n = 3, U_{30} = 85, U_{32} = 91$$
$$S_2 = \frac{3}{2}(85 + 91) = 264$$

### مثال

احسب :

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 \ldots + 10$$

**الحل**

$$U_0 = \frac{1}{2}, \quad U_m = 10, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$U_m - U_0 = mr$$
$$10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m$$
$$20 = 1 + m$$

$m = 19$ ⟵ الحد الأخير $U_{19}$

$S$ يمثل مجموع 20 حد من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

### ملاحظة

يمكن أخذ $U_1 = 20$ عندها يصبح $m = 20$

ولكن يبقى عدد الحدود ثابت $n = 20$

$$S = \frac{n}{2} \times (a+l)$$
$$S = \frac{20}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 10\right)$$
$$S = 10\left(\frac{21}{2}\right)$$
$$S = 105$$

### تدريب

احسب :

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + 40$$

**الحل**

$$U_0 = \frac{1}{4} \ , \qquad U_m = 40 \ , \qquad r = \frac{1}{4}$$

$$U_m - U_0 = mr$$

$$40 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}m$$

$$\frac{159}{4} = \frac{1}{4}m$$

$m = 159$ ← الحد الأخير $U_{159}$

$S$ يمثل مجموع 160 حد من متتالية حسابية أساسها $(\frac{1}{4})$

$$S = \frac{160}{2}\left(\frac{1}{4} + 40\right) = 3220$$

## تعريف المتتالية الهندسية

**المتتالية الهندسية :** هي متتالية ينتج فيها الحد عن ضرب عدد ثابت بالحد الذي قبله.

$$U_{n+1} = qU_n$$

أو

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q$

### مثال صفحة 18

أثبت أنّ المتتالية الأتية هندسية وحدد أساسها :

$$U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

### الحل

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n \times 2}{3^{n+1} \times 3} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3} = q$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ ويمكن حساب الاطراد لأن جميع الحدود موجبة تماماً أياً يكن $n \geq 0$ (يمكن معرفة اطرادها باستخدام معيار النسبة لأن جميع حدودها موجبة : $\frac{2}{3} < 1$ : متناقصة )

## مبرهنات المتتالية الهندسية

### مبرهنة 1

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية حدها الأول $U_0$ وأساسها $q$ ⟺ الحد العام $U_n = U_0 . q^n$

### مبرهنة 2

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q$ عندئذٍ أياً كان العددان الطبيعيان $m$ و $n$ فإن :

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m}$$

### مبرهنة 3

إذا كانت $a, b, c$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن $b^2 = a.c$ وسط حسابي

## ملاحظة

1. بمعرفة أي حدين من حدود المتتالية الهندسية يمكن إيجاد $q$ ثم إيجاد جميع حدود المتتالية.

2. من أجل $m = 0$ يكون :

$$U_n = U_0 . q^n$$

من أجل $m = 1$ يكون :

$$U_n = U_0 . q^{n-1}$$

من أجل $m = 2$ يكون :

$$U_n = U_0 . q^{n-2}$$

## مثال

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها

$$U_2 = 2 \quad , \quad U_5 = 32$$

احسب $U_{10}$

### الحل

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m}$$

$$\frac{U_5}{U_2} = q^{5-2}$$

$$\frac{32}{4} = q^3$$

$$q^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$\frac{U_{10}}{U_5} = q^5$$

$$\rightarrow \frac{U_{10}}{32} = 2$$

$$\rightarrow U_{10} = 1024$$

## مثال

$a , b , c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية اسحبها علماً أنّ:

1) $a + b + c = 21$

2) $a . b . c = 216$

### الحل

#### طريقة أولى

بما أنّ $a , b , c$ حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإنّ :

3) $b^2 = a . c$

نعوض 3 في 2 فنجد

$$b^3 = 216 \rightarrow b = 6$$

نعوض 1 في 2 فنجد

$$a + c = 15$$
$$a . c = 36$$

بالحل المشترك نجد أنه

إما $c = 3 \quad , \quad a = 12$

أو $a = 3 \quad , \quad c = 12$

## ملاحظة

إذا كانت متتالية متزايدة نختار $a = 3$ و $b = 6$ و $c = 12$

#### طريقة ثانية

من 1 :

$$c = 15 - a$$

نعوض في 2 :

$$a(15 - a) = 36$$
$$15a - a^2 = 36$$
$$a^2 - 15a + 36 = 0$$
$$(a - 12)(a - 3) = 0$$

إما $a = 12$

أو $a = 3$

ومنه :

عندما $c = 3 \quad , \quad a = 12$

عندما $c = 12 \quad , \quad a = 3$

### سؤال 6 صفحة 22

$a\, , b\, , c$ ثلاثة أعداد حقيقية , $a \neq 0$
نعلم أنّ $a\, , b\, , c$ حدود متعاقبة من متتالية هندسية نرمز الى أساسها بالرمز $q$
كما نعلم أنّ $3a\, , 2b\, , c$ هي حدود متوالية من متتالية حسابية.

أوجد $q$

**الحل**

بما أنّ $a\, , b\, , c$ حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإنّ :

❶ $b = q.a$

❷ $c = q.b = q^2.a$

بما أنّ $3a\, , 2b\, , c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فإنّ :

❸ $$2b = \frac{3a + c}{2}$$

نعوض العلاقتين الأولى والثانية في العلاقة الثالثة :

$$4(qa) = 3a + q^2.a$$
$$q^2a + 3a = 4qa$$

نقسم على $a \neq 0$

$$q^2 + 3 = 4q$$
$$q^2 - 4q + 3 = 0$$
$$(q - 3)(q - 1) = 0$$

إما $q = 1$

أو $q = 3$

**ملاحظة**

إذا كانت المتتالية غير ثابتة, نرفض الحل $q = 1$

## مجموع حدود متتالية هندسية

$$S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q} : q \neq 1$$

$n$ : عدد حدود المجموع

$a$ : الحد الأول بالمجموع

$q$ : أساس المتتالية

**ملاحظة**

إذا كانت $q = 1$ تكون المتتالية ثابتة

ومنه : $S = a\,.\,n$

حيث $a$ الحد الثابت

**مثال**

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها

$U_0 = 1 \quad , \quad q = 2$

احسب $S = U_3 + U_4 + \ldots + U_{10}$

**الحل**

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m}$$

$$\rightarrow U_n = U_0.q^n$$

$$\rightarrow U_n = 2^n$$

$$U_3 = 2^3 = 8$$

$$S = U_3.\frac{1 - q^n}{1 - q} : n = 8\, , q = 2$$

$$S = 8.\frac{1 - 2^8}{1 - 2}$$

$$= -8\,(1 - 2^8) = 2040$$

## سؤال 4 صفحة 18

هام

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها

$$U_1 = -2 \quad , \quad q = 3$$

احسب $U_n$ بدلالة $n$ واستنتج قيمة المجموعين

$$S_1 = U_1 + U_2 + \dots + U_7$$
$$S_2 = U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n}$$

### الحل

$$U_n = U_1 . q^{n-1}$$
$$U_n = -2 \, . \, 3^{n-1} = -2 . 3^{-1} . 3^n$$
$$U_n = -\frac{2}{3} . 3^n$$

$$S_1 = U_1 . \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$S_1 = -2 \, . \frac{1-3^7}{1-3}$$
$$S_1 = 1 - 3^7$$
$$S_1 = -2186$$

$$S_2 = U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n}$$
$$S_2 = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

$$V_n = U_{2n}$$
$$V_n = -\frac{2}{3} . (3)^{2n}$$
$$V_n = -\frac{2}{3} . 9^n$$

نلاحظ أن الحدود غير متعاقبة و القفزات منتظمة

لذلك نفرض متتالية مساعدة

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{-\frac{2}{3} . 9^{n+1}}{-\frac{2}{3} . 9^n} = 9$$

المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ هي متتالية هندسية أساسها

لأنّ : $q_1 = 9$

$$S_2 = V_1 \times \frac{1-(q_1)^n}{1-q_1} = -6 \times \frac{1-9^n}{1-9}$$
$$S_2 = \frac{3}{4} \times (1-9^n)$$

## مثال

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها

$$U_1 = -4 \quad , \quad q = 2$$

احسب $U_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج المجموع

$$S = U_4 + U_8 + U_{12} + \dots + U_{4n}$$

### الحل

$$U_n = U_1 . q^{n-1}$$
$$U_n = -4 \, . \, 2^{n-1}$$
$$U_n = -4 \, . \, 2^n . 2^{-1}$$
$$U_n = -2 \, (2)^n$$

$$S = U_n + U_8 + \dots + U_n$$
$$S = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

حيث :

$$V_n = U_{4n}$$
$$V_n = -2 \, (2)^{4n}$$
$$V_n = -2 \, (16)^n$$

$$\frac{V_{(n+1)}}{V_n} = \frac{-2 \times (16)^{n+1}}{-2 \times (16)^n} = 16$$

المتتالية $V_n$ هي متتالية هندسية أساسها

$$q_1 = 16$$

$$S = V_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = -32 \times \frac{1-16^n}{1-16}$$
$$s = \frac{32}{15} \times (1-16^n)$$

## البرهان بالتدريج (الاستقراء الرياضي)

لبرهان صحة القضية $E(n)$ تتعلق بالعدد الطبيعي $n \geq 0$ :

1) نبرهن صحة القضية $E(n = 0)$

2) نفرض صحة القضية $E(n)$

3) نبرهن صحة القضية $E(n+1)$

## ملاحظة

لدراسة إطراد متتالية معرفة بعلاقة تدريجية نستخدم البرهان بالتدريج

## مثال

ادرس إطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \end{cases}$$

### الحل

$$U_1 = \frac{3}{4}U_0 + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + 2 = \frac{21}{8} + 2 = \frac{37}{8}$$

على مايبدو أن المتتالية متزايدة تماماً.

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): U_{n+1} > U_n \ : n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$U_1 > U_0$ 🡸 $\frac{7}{2} > 2$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): U_{n+1} > U_n \ : n \geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1): U_{n+2} > U_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}U_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}U_{n+2}$$

الإثبات :

$$U_{n+1} > U_n$$

$$\frac{3}{4}U_{n+1} > \frac{3}{4}U_n$$

$$\frac{3}{4}U_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}U_n + 2$$

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ والمتتالية متزايدة تماماً.

## مثال

ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \end{cases}$$

### الحل

$$U_1 = \frac{3}{4}U_0 + 2 = 8$$

$$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + 2 = 8$$

على مايبدو أنّ المتتالية ثابتة

لنبرهن بالتدريج صحة القضية :

$$E(n): U_n = 8 \ : n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$U_0 = 8$ 🡸 $8 = 8$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): U_n = 8 \ : n \geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1): U_{n+1} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}U_{n+2} = 8$$

الإثبات :

$$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$$

$$U_{n+1} = \frac{3}{4}8 + 2$$

$$U_{n+1} = 6 + 2 = 8$$

أي القضية $E(n+1)$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ والمتتالية ثابتة (مطردة).

## سؤال 15 صفحة 25

المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

1) أثبت أنّ $0 \leq U_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي $n$

2) أثبت أن المتتالية $U_n$ متزايدة تماماً

### الحل

1

لنبرهن بالتدريج صحة القضية :

$$E(n): 0 \leq U_n \leq 4 \ : n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$0 \leq U_0 = 1 \leq 4$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): 0 \leq U_n \leq 4 \ : n \geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n): 0 \leq U_{n+!} \leq 4$$
$$\Longleftrightarrow \ 0 \leq \sqrt{2 + U_n} \leq 4$$

الإثبات :

$$: 0 \leq U_n \leq 4$$
$$2 \leq U_n + 2 \leq 6$$
$$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + U_n} \leq \sqrt{6} \leq 4$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن
$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن
$n \geq 0$ و العلاقة محققة.

2

لنبرهن بالتدريج صحة القضية :

$$H(n): U_{n+1} > U_n \ : n \geq 0$$

III. القضية $H(0)$ صحيحة لأنّ :

$\sqrt{3} > 1 \Leftarrow U_1 > U_0$ محققة

I. نفرض صحة القضية :

$$H(n): U_{n+1} > U_n \ : n \geq 0$$

II. نبرهن صحة القضية :

$$H(n+1): U_{n+2} > U_{n+1}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{2 + U_{n+1}} > \sqrt{2 + U_n}$$

الإثبات :

$$U_{n+1} > U_n$$
$$2 + U_{n+1} > 2 + U_n$$
$$\sqrt{2 + U_{n+1}} > \sqrt{2 + U_n}$$
$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

أي القضية $H(n+1)$ صحيحة أياً تكن
$n \geq 0$ ومنه القضية $H(n)$ صحيحة أياً تكن
$n \geq 0$ فالمتتالية متزايدة تماماً

## مثال

ادرس إطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{2}U_n - 2 \end{cases}$$

### الحل

$$U_1 = \frac{3}{2}U_0 - 2 = \frac{3}{2}(2) - 2 = 1$$
$$U_2 = \frac{3}{2}U_1 - 2 = \frac{3}{2}(1) - 2 = -\frac{1}{2}$$

على ما يبدو أنّ المتتالية متناقصة

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): U_{n+1} < U_n \ : n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$1 > 2 \Leftarrow U_1 < U_0$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): U_n = 8 \ : n \geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1): U_{n+2} < U_{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2}U_{n+1}-2<\frac{3}{2}U_n-2$$

الإثبات من الفرض :

$$U_{n+1}<U_n$$
$$\frac{3}{2}U_{n+1}<\frac{3}{2}U_n$$
$$\frac{3}{2}U_{n+1}-2<\frac{3}{2}U_n-2$$
$$U_{n+2}<U_{n+1}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n\geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n\geq 0$ والمتتالية متناقصة تماماً.

## مثال

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n+2}{2U_n+6} \end{cases}$$

1) أثبت أنّ التابع $x\rightarrow \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2}<U_n\leq 1$ أياً كان العدد $n\geq 0$

2) أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

## الحل

1) $f$ معرف واشتقاقي على $R/\{-3\}$

$$f'(x)=\frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$
$$=\frac{14}{(2x+6)^2}>0$$

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ \frac{1}{2}<U_n\leq 1\ :\ n\geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

محققة $\frac{1}{2}<U_0\leq 1$

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n)=\frac{1}{2}<U_n\leq 1 : n\geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1)=\frac{1}{2}<U_{n+1}\leq 1$$

الإثبات :

$$\frac{1}{2}<U_n\leq 1$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(U_n)\leq f(1)$$

لأن $f$ متزايد تماماً على المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$$\frac{1}{2}<U_{n+1}\leq\frac{5}{8}\leq 1$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n\geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n\geq 0$

2

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): U_{n+1}<U_n\ :\ n\geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

محققة $\frac{5}{8}<1\rightarrow U_1<U_0$

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): U_{n+1}<U_n\ :\ n\geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n): U_{n+2}<U_{n+1}$$

الإثبات :

$$U_{n+1}<U_n$$
$$\rightarrow f(U_{n+1})<f(U_n)$$
$$U_{n+2}<U_{n+1}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية

$E(n)$ صحيحة أياً تكن $n\geq 0$ والمتتالية متناقصة تماماً.

## ملاحظة

عندما يكون التابع $f(x)$ متزايد تماماً نقوم بتصوير القضية $E(n)$ أثناء اثبات صحة العلاقة $E(n+1)$ .

## تمرين 2 صفحة 207 (الجزء الثاني)

أثبت تزايد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n^2} \end{cases}$$

### الحل

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): U_{n+1} > U_n \ : n \geq 0$$

IV. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

محققة $\sqrt{1+U_0^2} > 0$ 🡸 $U_1 > U_0$

V. نفرض صحة القضية :

$$E(n): U_{n+1} > U_n \ : n \geq 0$$

VI. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1): U_{n+2} > U_{n+1} \iff$$

$$E(n+1): \sqrt{1+(U_{n+1})^2} > \sqrt{1+(U_n)^2}$$

الإثبات :

$$U_{n+1} > U_n$$
$$(U_{n+1})^2 > (U_n)^2$$
$$1 + (U_{n+1})^2 > 1 + (U_n)^2$$
$$\sqrt{1 + (U_{n+1})^2} > \sqrt{1 + (U_n)^2}$$
$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ والمتتالية متزايدة تماماً.

## سؤال 12 صفحة 25

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية

$$3^n \geq (n+2)^2$$

1) أتكون القضايا $E(0)$ , $E(1)$ , $E(3)$ , $E(4)$صحيحة ؟

2) أثبت بالتدريج أنّ القضية $E(n)$صحيحة أياً كانت $n \geq 3$ .

### الحل

$$E(0): 3^0 \geq 2^2 \to 1 \geq 4$$

غير صحيحة

$$E(1): 3^1 \geq 3^2 \to 3 \geq 9$$

غير صحيحة

$$E(3): 3^3 \geq 5^2 \to 27 \geq 25$$

صحيحة

$$E(4): 3^4 \geq 6^2 \to 81 \geq 36$$

صحيحة

$$E(n): \ 3^n \geq (n+2)^2 \ : n \geq 3$$

I. القضية $E(3)$ صحيحة لأنّ :

محققة $27 > 25$ 🡸 $3^3 > 5^2$

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): \ 3^n \geq (n+2)^2 \ : n \geq 3$$

III. نبرهن صحة القضية:

$$E(n+1): \ 3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

الإثبات :

$$3^n \geq (n+2)^2$$
$$3^{n+1} \geq 3(n+2)^2 \geq (n+3)^2$$

لأنّ

$$3(n+2)^2 - (n+3)^2$$
$$= 3n^2 + 12n + 12 - n^2 - 6n - 9$$
$$= 2n^2 + 6n + 3 \geq 0$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 3$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 3$

### سؤال 11 صفحة 26

أثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ فإنّ
$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

**الحل**

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): 3n^2 > (n+1)^2 \ : \ n \geq 2$$

I. القضية $E(2)$ صحيحة لأنّ:

$12 \geq 9$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): 3n^2 > (n+1)^2 \ : \ n \geq 2$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1): 3(n+1)^2 > (n+2)^2$$

الإثبات :

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$
$$3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 6n + 3$$
$$3n^2 + 6n + 3$$
$$\geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 3$$
$$\geq (n+2)^2$$

لأنّ

$$(n+1)^2 + 6n + 3 - (n+2)^2$$
$$= n^2 + 2n + 1 + 6n + 3 - n^2 - 4n - 4$$
$$= 4n \geq 0$$

ومنه

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 2$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 2$

## قضايا المضاعف

### سؤال 13 صفحة 25

أثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي $n$

**الحل**

**ملاحظة**

أياً كان العدد الطبيعي $n$ = ابدأ من الـ$(n=0)$

**1** $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): \ 4^n + 5 = 3k \quad : \quad k \in N$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): \ 4^n + 5 = 3k \quad : \quad k \in N$$
$$4^n = 3k - 5$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n): \ 4^{n+1} + 5 = 3k' \quad : \quad k \in N$$

$$4^{n+1} + 5 = 4 \cdot 4^n + 5$$
$$= 4(3k - 5) + 5$$
$$= 12k - 15$$
$$= 3(4k - 5) \quad \text{عدد طبيعي}$$
$$= 3k'$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ أي $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

## 2   $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

نبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ 2^{3n}-1 = 7k \quad : \quad k \in N$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$2^0 - 1 = 0 = 7 \times 0 \ : \ k = 0$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ 2^{3n}-1 = 7k \quad : \quad k \in N$$

$$2^{3n} = 7k + 1$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1):\ 2^{3n+3}-1 = 7k' :\ k' \in N$$

$$2^{3(n+1)}-1$$

$$= 2^3 . 2^{3n} - 1 = 8\,(7k + 1) - 1$$

$$= 56k + 7$$

$$= 7\,(8k + 1)$$ عدد طبيعي

$$= 7k'$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ أي $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

## 3   $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3

نبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ n^3 + 2n = 3k \quad : \quad k \in N$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$0^3 + 2(0) = 0 = 3 \times 0 : k = 0$

محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ n^3 + 2n = 3k \quad : \ k \in N$$

$$n^3 = 3k - 2n$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n):\ (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k' \quad : \ k' \in N$$

الإثبات :

$$\begin{aligned}
&(n+1)^3 + 2(n+1)\\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2\\
&= 3k - 2n + 3n^2 + 5n + 3\\
&= 3k + 3n^2 + 3n + 3\\
&= 3(k + n^2 + n + 1) = 3k'
\end{aligned}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ أي $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3

## 4   $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

نبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \quad : \quad k \in N$$

II. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$2^0 - 1 = 0 = 7 \times 0 \ : \ k = 0$

محققة

III. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \quad : \ k \in N$$

$$3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$$

IV. نبرهن صحة القضية :

$$E(n):\ 3^{2n+4} + 2^{n+3} = 7k' \quad : \ k' \in N$$

الإثبات :

$$\begin{aligned}
3^{2n+3} + 2^{n+3} &= 3^2 . 3^{2n+1} + 2^1 . 2^{n+2}\\
&= 63k - 9 . 2^{n+2} + 2 . 2^{n+2}\\
&= 63k - 7 . 2^{n+2}\\
&= 7\,(9k - 2^{n+2}) \text{ عدد طبيعي}\\
&= 7k'
\end{aligned}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ أي $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

ملاحظة

1 في حالة اثبات مساواة نبدأ من الطرف الأول.

2 نفصل بما يتناسب مع الفرض لكي نعوض

تمرين

أثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي $n$ فإنّ العدد 9 يقسم العدد $10^n + 8$

الحل

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ 10^n + 8 = 9k \quad : \quad k \in N$$

V. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$$10^0 + 8 = 9 = 9 \times 1 \ : \ k = 1$$

محققة

VI. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ 10^n + 8 = 9k \quad : \quad k \in N$$

$$10^n = 9k - 9$$

VII. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1):\ 10^{n+1} + 8 = 9k \quad : \quad k' \in N$$

الإثبات :

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 8 &= 10 \,.\, 10^n + 8 \\ &= 10\,(9k - 8) + 8 \\ &= 90k - 80 + 8 \\ &= 90k - 72 \\ &= 9\,(10k - 8) \end{aligned}$$

عدد طبيعي

$$= 9k'$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$

أي أنّ العدد 9 يقسم العدد $n \geq 0$

$10^n + 8$

سؤال 1 صفحة 21

نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

1) احسب $S_1$, $S_2$ , $S_3$ , $S_4$ ثم أحسب المقدار $S_{n+1}$ بدلالة $S_n$ و $n$

2) أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل

1

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 5 + 9 = 14$$

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 14 + 16 = 30$$

$$S(n+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$S(n+1) = S_n + (n+1)^2$$

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad : \ n \geq 1$$

II. القضية $E(1)$ صحيحة لأنّ :

$$L_1 = S_1 = 1$$

$$L_2 = \frac{(2)(3)}{6}$$

$L_1 = L_2$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad : \quad n \geq 1$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n): S_n = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

الإثبات :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7-1}{4} = -2$$

نطبق القانون :

$$2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)$$

**للتأكد :** يمكن نشر المقدار

$$(x+2)(2x+3) = 2x^2 + 7x + 6$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$

## مثال صفحة 20

أثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً $n$ كان

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^{2(n+1)^2}}{4} : n \geq 1$$

## الحل

بفرض $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} : n \geq 1$$

الحد الأول للمجموع هو : $1 = 1^3$

I. القضية $E(1)$ صحيحة لأنّ :

$$L_2 = S_1 = 1 = 1^3 = \frac{1(2^2)}{4} = L_1$$

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} : n \geq 1$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1) : S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

الإثبات :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$

$$S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$

## سؤال 4 صفحة 22

أثبت بالتدريج صحة الخاصتين الأتيتين :

1. $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$
2. $n! \geq 2^{n-1}$

## الحل

1 بفرض $S_n = 1 + 2\,.\,2! + \cdots + n\,.\,n!$

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): S_n = (n+1)! - 1 \; : \; n \geq 1$$

I. القضية $E(1)$ صحيحة لأنّ :

$$L_2 = 1 = 2! - 1 = 1 = L_1$$

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): S_n = (n+1)! - 1 \; : \; n \geq 1$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1) : S_{n+1} = (n+2)! - 1$$

الإثبات :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).(n+1)!$$
$$S_{n+1} = (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)!$$
$$S_{n+1} = (n+1)!\,(n+1+1) - 1$$
$$S_{n+1} = (n+1)!\,(n+2) - 1$$
$$S_{n+1} = (n+2)! - 1$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$

2 لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): n! \geq 2^{n-1} \; : \; n \geq 1$$

I. القضية $E(1)$ صحيحة لأنّ :

$$L_2 = 1! = 1 \geq 2^0 = 1 = L_1$$

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n): n! \geq 2^{n-1} \; : \; n \geq 1$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1) : (n+1)! \geq 2^n$$

### طريقة أولى

الإثبات من الفرض :

$$n! \geq 2^{n-1}$$
$$(n+1)n! \geq 2^{n-1}(n+1)$$
$$(n+1)! \geq 2^n.2^{-1}(n+1)$$
$$(n+1)! \geq 2^n\left(\frac{n+1}{2}\right) \geq 2^n : n \geq 1$$
$$\frac{n+1}{2} \geq 1$$
$$(n+1)! \geq 2^n$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$

### طريقة ثانية

الإثبات من الفرض :

$$(n+1)! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2^n$$
$$n \geq 1$$
$$n+1 \geq 2$$
$$(n+1)2^{n-1} \geq 2.2^{n-1}$$
$$(n+1)2^{n-1} \geq 2^n$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$

### ملاحظة

$$3! \times 4 = 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 6$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$$

و منهُ

$$n!\,(n+1) = (n+1)!$$

## سؤال 5 صفحة 22

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$V_n = U_{2n} - U_n$$

أثبت أن المتتالية $V_n$ متزايدة تماماً

### الحل

$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

فالمتتالية $V_n$ متزايدة تماماً .

## سؤال 3 صفحة 18

$(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق :

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{(n+1)} = \dfrac{V_n}{1+V_n} \end{cases}$$

1) تحقق أنّ $V_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي $n$

2) أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = \frac{1}{V_n}$ متتالية حسابية

3) استنتج عبارة $V_n$ بدلالة $n$

### الحل

1

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ V_n > 0 \ :\ n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$V_0 > 0 \leftarrow 1 > 0$ محققة

II. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ V_n > 0 \ :\ n \geq 0$$

III. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1) : V_{(n+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_n}{V_n + 1} > 0$$

الإثبات من الفرض :

$$V_{n+1} = \frac{V_n}{1+V_n} \begin{cases} V_n > 0 \ \text{(البسط)} \\ 1 + V_n > 1 > 0 \ \text{(المقام)} \end{cases}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 0$



2

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{V_n}{V_n} = 1 = r$$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 1$

3

$$U_n = U_0 + nr = 1 + n$$

$$V_n = \frac{1}{U_n}$$

$$V_n = \frac{1}{1+n}$$

**سؤال 2 صفحة 21**

ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي $n$ نرمز $E(n)$ إلى صحة المتراجحة :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

أثبت أنّ $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي $n$ .

**الحل**

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$$
$$:\ n \geq 0$$

ا. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

محققة $(1+x)^0 \geq 1 \rightarrow 1 \geq 1$

اا. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ (1 + x)^n \geq 1 + nx :\ n \geq 0$$

ااا. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1) :\ (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

الإثبات من الفرض :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$
$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x)$$
$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2$$
$$\geq 1 + x + nx$$
$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$

**سؤال 10 صفحة 24**

نتأمل متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالتدريج وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 4 \\ U_{(n+1)} = 5U_n - 6\,U_{n-1} \end{cases}$$

1) لتكن $(V_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$V_n = U_{n+1} - 2U_n$$

أثبت أنّ $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 3.

2) لتكن $(W_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق

$$W_n = V_{n+1} - 3V_n$$

أثبت أنّ $(W_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 2

3) عبر عن $V_n$ و $W_n$ بدلالة $n$ واستنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$

**الحل**

1

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n):\ \frac{V_{n+1}}{V_n} = 3\ :\ n \geq 0$$

ا. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{U_2 - 2U_1}{U_1 - 2U_0} = \frac{14 - 2(4)}{4 - 2(1)} = 3$$ محققة

اا. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ \frac{V_{n+1}}{V_n} = 3\ :\ n \geq 0$$

ااا. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1): \frac{V_{n+2}}{V_{n+1}} = 3 : n \geq 0$$

الإثبات :

$$U_{n+3} - 2\,U_{n+2}$$
$$= 5U_{n+2} - 6U_{n+1} - 2U_{n+2}$$
$$= 3U_{n+2} - 6U_{n+1}$$
$$= 3(U_{n+2} - 2U_{n+1})$$

$$V_{n+2} = 3V_{n+1}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ والمتتالية $V_n$ هندسية وأساسها 3

**طريقة ثانية**

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+2} - 2U_{n+1}}{U_{n+1} - 2U_n}$$

$$= \frac{5U_{n+1} - 3U_n - 2U_{n+1}}{U_{n+1} - 2U_n}$$

$$= \frac{3U_{n+1} - 6U_n}{U_{n+1} - 2U_n}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3(U_{n+1} - 2U_n)}{U_{n+1} - 2U_n} = 3 = q$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ والمتتالية $V_n$ هندسية وأساسها 3

2

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{U_{n+2} - 3U_{n+1}}{U_{n+1} - 3U_n}$$

$$= \frac{5U_{n+1} - 6U_n - 3U_{(n+1)}}{U_{n+1} - 3U_n}$$

$$= \frac{2U_{n+1} - 6U_n}{U_{n+1} - 3U_n}$$

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2(U_{n+1} - 3U_n)}{U_{n+1} - 3U_n} = 2 = q$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

3

$$V_n = V_0 q^n$$

$$V_0 = U_1 - 2U_0 = 4 - 2 = 2$$

$$\rightarrow V_n = 2(3)^n$$

$$W_n = W_0 q^n$$

$$W_0 = U_1 - 3U_0 = 4 - 3 = 1$$

$$W_n = 2^n$$

الاستنتاج :

$$V_n = U_{n+1} - 2U_n$$

$$W_n = U_{n+1} - 3U_n$$

نطرح المعادلتين :

$$V_n - W_n = U_n$$

$$\rightarrow U_n = 2(3)^n - 2^n$$

**سؤال 7 صفحة 26**

ليكن $\Theta$ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وفق

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos(\Theta) \\ U_{(n+1)} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$$

1) احسب $U_0$ , $U_1$

2) أثبت بالتدريج أنّ $U_n = 2\cos\frac{\Theta}{2^n}$

**الحل**

1

$$U_1 = \sqrt{2 + U_0} = \sqrt{2 + 2\cos\Theta}$$

$$= \sqrt{2(1 + \cos\Theta)}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\Theta}{2}} = 2\cos\frac{\Theta}{2}$$

$$U_2 = \sqrt{2 + U_1} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\Theta}{2}}$$

$$= \sqrt{2(1 + \cos\frac{\Theta}{2})}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\Theta}{4}} = 2\cos\frac{\Theta}{4}$$

2

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): U_n = 2\cos\frac{\Theta}{2^n} \ : \ n \geq 0$$

ا. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ :

$$U_0 = 2\cos\left(\frac{\Theta}{2^0}\right) = 2\cos(\Theta)$$

محققة

## سؤال 9 صفحة 24

نُعطى عددين حقيقيين $a$ و $b$ ونفترض أنّ $a \neq 1$ ونتأمل المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق

$$V_{n+1} = aV_n + b$$

أياً كان العدد الطبيعي $n$.

1) عين تابعاً $f$ يحقق $V_{n+1} = f(V_n)$ أياً كان العدد الطبيعي $n$

2) أحسب $l$ حل المعادلة $f(x) = x$

3) نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$U_n = V_n - l$$

أثبت أنّ $U_n$ هندسية و أستنتج $U_n$ بدلالة $a$ و $b$ و $n$ و $V_0$. ثم أستنتج $V_n$ بدلالة هذه المُعاملات.

### الحل

1 $f(x) = ax + b$ تابع معرف على $R$

2
$$f(x) = x \leftrightarrow ax + b = x$$
$$\leftrightarrow al + b = l$$
$$\leftrightarrow al - l = -b$$
$$\leftrightarrow l(a-1) = -b$$
$$\leftrightarrow l = -\frac{b}{a-1}$$

3
$$U_n = V_n - l$$
$$\rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{V_{n+1} - l}{V_n - l}$$
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{aV_n + b - l}{V_n - l}$$
$$= \frac{aV_n - al + l - l}{V_n - l}$$
$$= \frac{a(V_n - l)}{V_n - l} = a = q$$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = a$

I. نفرض صحة القضية :

$$E(n):\ U_n = 2\cos\frac{\Theta}{2^n} \ :\ n \geq 0$$

II. نبرهن صحة القضية :

$$E(n+1):\ U_{n+1} = 2\cos\frac{\Theta}{2^{n+1}}$$

الإثبات من الفرض :

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$$
$$= \sqrt{2 + 2\cos\frac{\Theta}{2^n}}$$
$$= \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\Theta}{2^n}\right)}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\Theta}{2 \cdot 2^n}}$$
$$= 2\cos\frac{\Theta}{2^{n+1}}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$

$$U_n = U_0 q^n \ , \ U_0 = V_0 - l$$

$$U_0 = V_0 + \frac{b}{a-1}$$

$$U_n = \left(V_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n$$

$$V_n = U_n + l$$

$$V_n = \left(V_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}$$

## ملاحظات

1) لتخمين الحد العام لمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بعلاقة تدريجية من الشكل

$$U_{n+1} = aU_n + b$$

ويمكن الاستفادة من القانون على المسودة

$$U_n = \left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}$$

2) عند تخمين الحد العام لمتتالية يجب أن نبرهن صحة التخمين عن طريق البرهان بالتدريج .

## سؤال 7 صفحة 23

نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$$\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{(n+1)} = 10U_n - 18 \end{cases}$$

خمن عبارة $U_n$ بدلالة $n$ ثم أثبت صحة

### الحل

$$U_1 = 52 = 5 \times 10^1 + 2$$

$$U_2 = 502 = 5 \times 10^2 + 2$$

$$U_3 = 5002 = 5 \times 10^3 + 2$$

$$U_4 = 50002 = 5 \times 10^4 + 2$$

نلاحظ نمط وهو :

$$U_n = 5 \times 10^n + 2$$

## طريقة ثانية على المسودة

$$a = 10 \ , \quad b = -18 \ , \quad U_0 = 7$$

$$U_n = \left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}$$

$$= \left(7 - \frac{18}{9}\right) 10^n + \frac{18}{9}$$

$$U_n = 5 \times 10^n + 2$$

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): \ U_n = 5 \times 10^n + 2$$

$$: n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ $U_0 = 5 \times 10^0 + 2 = 7$ محققة

II. نفرض صحة القضية

$$E(n) = 5 \times 10^n + 2$$

III. نبرهن صحة القضية

$$E(n+1): U_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2 : n \geq 0$$

الإثبات :

$$U_{n+1} = 10U_n - 18$$

$$= 10(5 \times 10^n + 2) - 18$$

$$= 5 \times 10^{n+1} + 20 - 18$$

$$= 5 \times 10^{n+1} + 2$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 0$

## سؤال 3 صفحة 21

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{(n+1)} = -U_n + 4 \end{cases}$$

في حالة عدد طبيعي $n$ . احسب $U_1$ و $U_2$ و $U_3$ و $U_4$ و $U_5$ وخمّن عبارة $U_n$ بدلالة $n$ ثم حدد $U_n$ بدلالة $n$ .

### الحل

$$U_1 = 1 , U_2 = 3 , U_3 = 1 ,$$
$$U_4 = 3 , U_5 = 1$$

بالتخمين نجد:

$$U_n = (-1)^n + 2$$

لنبرهن صحة القضية بالتدريج:

$$E(n): \ U_n = (-1)^n + 2$$
$$: n \geq 0$$

I. القضية $E(0)$ صحيحة لأنَّ

$U_0 = (-1)^0 + 2 = 3$ محققة

II. نفرض صحة القضية

$E(n) = (-1)^n + 2 : n \geq 0$

III. نبرهن صحة القضية

$E(n+1): U_{n+1} = (-1)^{n+1} + 2 : n \geq 0$

الإثبات :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= -U_n + 4 \\ &= -1((-1)^n + 2) + 4 \\ &= (-1)^{n+1} - 2 + 4 \\ &= (-1)^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$ ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً تكن

$n \geq 0$

Pixel - بكسل