ملاحظات لحل مسائل النواس الثقلي المركب

1 ♦ الدور في حالة السعات الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

السعات الصغيرة: تكون $\theta \leq 0{,}24\,rad$ أو $\theta \leq 14°$

♦ الدور في حالة السعات الكبيرة:

$$T_0' = T_0\left[1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

السعات الكبيرة: تكون $\theta > 0{,}24\,rad$ أو $\theta > 14°$

وفي حالة: $\theta = 30°, 45°, 60°, 90°, ...$ زوايا شهيرة

♦ نواس يدق الثانية: $\boxed{T_0 = 2\,sec}$

✓ الدور يتناسب عكساً مع g إذا انتقلنا بالنواس من سطح البحر إلى قمة الجبل فتنقص $\sqrt{g}$ ويزداد T_0 أي (الميقاتية تؤخر) وبالعكس (الميقاتية تقدم)

✓ الدور لا علاقة له بالكتلة العطالية (رغني بسمي) تغير m ويطلب الدور الجديد نختار ($T_0' = T_0$)

ملاحظة: فسر علمياً باستخدام العلاقات الرياضية المناسبة ما يأتي:

1) الميقاتية تؤخر عند نقل النواس الثقلي المركب من سطح البحر إلى قمة الجبل:

ج: لأنه عند نقل النواس من سطح البحر إلى قمة الجبل فقد ارتفعنا به وهذا يؤدي إلى نقصان في الجاذبية وبالتالي فإن الدور سوف يزداد لأن:

$T_0 \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ تناسب عكسي $\quad g' < g \Rightarrow T_0' > T_0$

فإذا ازداد الدور (ازداد الزمن) فالميقاتية عندئذٍ تؤخر

2) عند الانخفاض بالنواس الثقلي المركب من قمة جبل إلى سطح البحر فالميقاتية تقدم

ج: لأنه عندما نقترب من سطح البحر فالجاذبية تزداد وبالتالي ينقص الدور لأن: $T_0 \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ تناسب عكسي

$g' > g \Rightarrow T_0' < T_0$

فإذا نقص الدور (نقص الزمن) فالميقاتية عندئذٍ تقدم

2) إن الشكل العام لتابع المطال في النواس الثقلي المركب $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

وحركته: جيبية دورانية

• عندما يذكر في نص المسألة (نزيح بزاوية ... = θ) ونترك دون سرعة ابتدائية) فهذا يعني أن: $\theta = \theta_{max}$

• تابع السرعة الزاوية:

$\omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

* السرعة العظمى (الطويلة):

$\omega_{max} = |\pm\omega_0\theta_{max}| = \omega_0\theta_{max}$

3) ♦ طلبات مسألة النواس الثقلي المركب ♦

* السؤال الأول: حساب T_0 من العلاقة: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$ يجب تعويض كل من I_Δ، d، m ونختصر g مع π^2 بعد تعويض g بـ 10

• عزم العطالة I_Δ:

✓ $I_{\Delta/m}$: عزم عطالة أي نقطة مادية (كتلة نقطية) هو جداء الكتلة بمربع بعدها عن محور ثابت (ساق، الفتل)

$I_{\Delta/m} = mr^2$

- $r = \frac{L}{2}$ الكتلة على طرف الساق $\Rightarrow I_{\Delta/m} = \frac{L^2}{4}m$
- $I_{\Delta/m} = mr^2$ الكتلة على محيط القرص

✓ $I_{\Delta/C}$ عزم عطالة الجسم (ساق أو قرص) حول محور مار من منتصفه وعمودي على مستويه

$I_{\Delta/C}$ معطى بنص المسألة

- $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}mL^2$ للساق
- $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}mr^2$ للقرص

✓ I_{Δ} مايتزاه: عزم عطالة الجسم (ساق أو قرص) حول محور لايمر من منتصفه وعمودياً على مستويه

$$I_{\Delta/\text{ما يتزاه}} = I_{\Delta/C} + md^2$$

للايمر — يمر (ساق او قرص)

✓ $I_{\Delta/\text{جملة}}$: عزم عطالة الجملة (ابو جود كتل نقطية) هو مجموع عزدم عطالة مكونات النواس

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta}\left(I_{\Delta/C} \text{ او } I_{\Delta/\text{مايتزاه}} \text{ او مهملة}\right)_{\text{جسم}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

• تعين m : * في حالة قرص (مع كتل) :

$$m_{\text{جملة}} = m_{\text{قرص}} + m_1 + m_2 + \dots$$

* في حال قرص مهمل الكتلة (ابو جود كتل نقطية)

$$m_{\text{قرص}} = 0 \Rightarrow I_{\Delta/C_{\text{قرص}}} = 0$$

* في حالة ساق (مع كتل) :

$$m_{\text{جملة}} = m_{\text{ساق}} + m_1 + m_2 + \dots$$

* في حالة ساق مهملة الكتلة ;

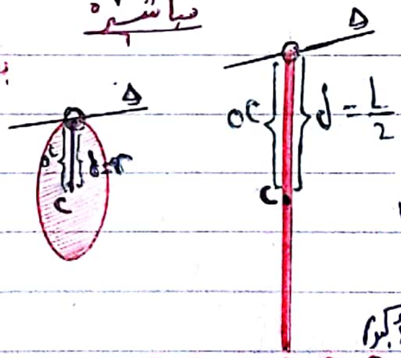
$$m_{\text{ساق}} = 0 \Rightarrow I_{\Delta/C_{\text{ساق}}} = 0$$

• تعين d :

$$d = O\hat{C}$$

بعد — النقطة التي يمر منها Δ — مركز عطالة الجملة

مباشرة



غير مباشرة (ابو جود كتل نقطية)

بعد كل (m) عن (O)

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

m جملة : مجموع الكتل المكونة لهاد النواس

• يكون $r>0$: اذا كانت الكتلة تحت محور الدوران

• يكون $r<0$: اذا كانت الكتلة فوق محور الدوران

• يكون $r=0$: اذا كانت الكتلة منطبقة على محور الدوران

$$d = \frac{mr + m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots}{m + m_1 + m_2 + \dots}$$

♦ ملاحظة ① ♦ : اذا كان لدينا ساق حامل فمركز عطالتها في منتصفها

♦ ملاحظة ② ♦ اذا كان لدينا ساق مع كتلة فمركز العطالة يقترب نحو الكتلة

♦ ملاحظة ③ ♦ اذا كان لدينا ساق مع كتلتين فمركز العطالة يقترب نحو الكتلة الاثقل (الأكبر)

اللهم استودعك
ما أتعلمه
فردّه إليّ عند حاجتي إليه
ولا تنسينيه
يا
رب
العالمين

أبسط أربع طرق لحساب عزم العطالة في النواسات

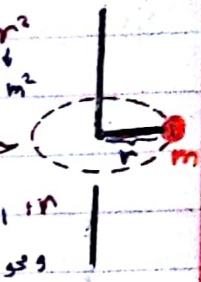
♦ **العطالة**: هي ممانعة الجسم لتغير شعاع سرعته

1) عزم عطالة نقطة مادية (كتلة نقطية)

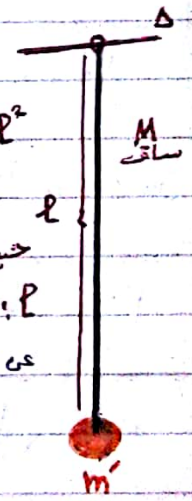
* هو جداء الكتلة m النقطية بمربع بعدها عن محور الدوران

$I_{\Delta/m} = m.r^2$

$kg.m^2 \quad kg \quad m^2$

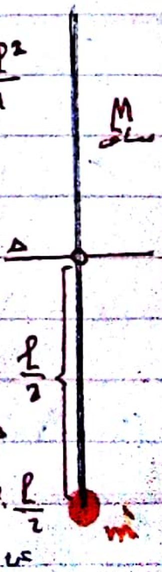


حيث: r: البعد بين الكتلة ومحور الدوران



$I_{\Delta/m'} = m' \ell^2$

حيث: ℓ: بعد الكتلة عن محور الدوران



$I_{\Delta/m'} = m' \frac{\ell^2}{4}$

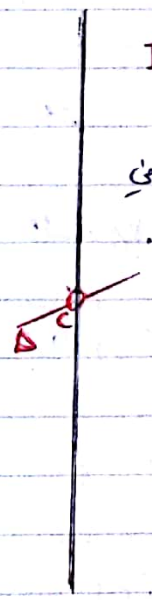
حيث: $\frac{\ell}{2}$: بعد الكتلة عن محور الدوران

2) عزم عطالة جسم صلب متجانس يدور حول محور دوران يمر من مركز عطالته

* إذا مر محور الدوران من مركز عطالة الساق نسميه $I_{\Delta/C}$

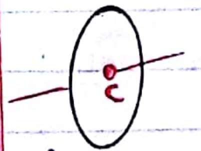
الساق:

$I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m l^2$



لا يحفظ: يعطى في نص المسألة.

قرص:



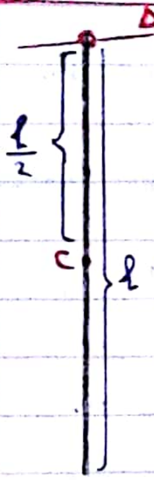
$I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} M r^2$

لا يحفظ: يعطى في نص المسألة

* إذا مر محور الدوران من مركز عطالة الجسم الصلب فعزم العطالة يعطى في نص المسألة

3) عزم عطالة جسم صلب يدور حول محور لا يمر من مركز عطالته

ساق:



♦ حسب هايغنز:

$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m d^2$

$I_\Delta = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$

حيث d: البعد بين محور الدوران ومركز عطالة الجسم C

$\Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12} m l^2 + m\frac{l^2}{4}$

$\Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{3}{12} m l^2$

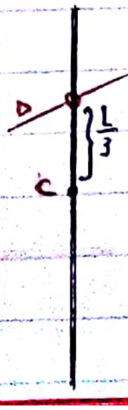
$\Rightarrow I_\Delta = \frac{4}{12} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$

قرص:

♦ حسب هايغنز:

$I_\Delta = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2$

$I_\Delta = \frac{3}{2} m r^2$



♦ حسب هايغنز:

$I_\Delta = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{3}\right)^2$

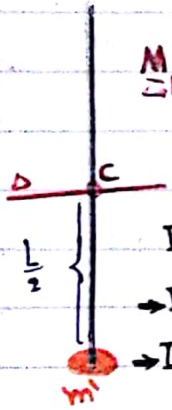
$I_\Delta = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{9} m l^2$

$I_\Delta = \frac{3ml^2}{36} + \frac{4ml^2}{36}$

$I_\Delta = \frac{7ml^2}{36}$

4) عزم عطالة جملة مادية حول محور الدوران

* $I_{\Delta/\text{جملة}}$: هو مجموع عزوم عطالة مكوناته: ساق M + كتلة m'



$I_{\Delta/m'} = m' r^2$

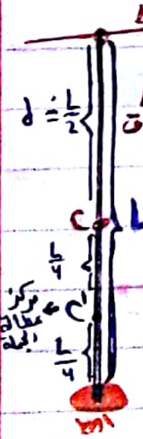
$\rightarrow I_{\Delta/m'} = m'\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$\rightarrow I_{\Delta/m'} = m' \frac{l^2}{4}$

$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/C\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m'}$

$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12} M l^2 + m' \frac{l^2}{4}$

$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{l^2}{4}\left(\frac{1}{3} M + m'\right)$



$d = \frac{L}{2}$

♦ حسب هايغنز:

$I_{\Delta\,\text{ساق}} = I_{\Delta/C} + M d^2$

$I_{\Delta\,\text{ساق}} = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{M L^2}{4}$

$I_{\Delta\,\text{ساق}} = \frac{1}{3} M L^2$

$I_{\Delta/m'} = m' r^2 = m' L^2$

$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m'}$

$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{3} M L^2 + m' L^2$

$I_{\Delta/\text{جملة}} = L^2\left(\frac{1}{3} M + m'\right)$

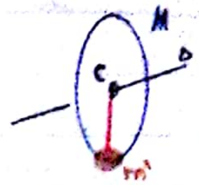
■ في حالة $M_{\text{ساق}} = m'_{\text{النقطية}}$

$\Rightarrow I_{\Delta/\text{جملة}} = M L^2\left(1 + \frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{4}{3} M L^2$

تطبيقات على طرق حساب عزم العطالة في النواسات

تطبيق (1):



$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/C\,قرص} + I_{\Delta/m'}$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{2}Mr^2 + m'r^2$

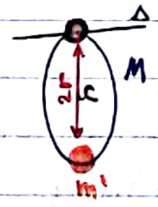
$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = r^2(\frac{1}{2}M + m')$

■ في حالة $M = m'$ قرص:

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = Mr^2(\frac{1}{2}+1)$

$= \frac{3}{2}Mr^2$

تطبيق (2)



$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta\,قرص\,هايغنز} + I_{\Delta/m'}$

حساب I_Δ قرص (هايغنز):

$I_{\Delta\,هايغنز} = I_{\Delta/C\,قرص} + Md^2$

$= \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2$

$= \frac{3}{2}Mr^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \frac{3}{2}Mr^2 + m'(2r)^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \frac{3}{2}Mr^2 + 4m'r^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = r^2[\frac{3}{2}M + 4m']$

تطبيق (3):

$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta\,ساق\,هايغنز} + I_{\Delta/m'}$

■ حساب I_Δ (هايغنز):

$I_{\Delta\,هايغنز} = I_{\Delta/C\,ساق} + Md^2$

$= \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2$

$= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$

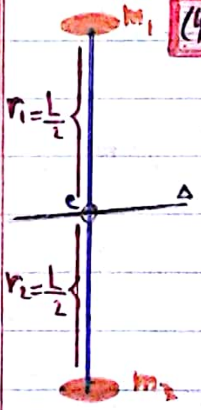
$= \frac{1}{3}ML^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{3}ML^2 + m'(\frac{2}{3}L)^2$

$= \frac{1}{3}ML^2 + \frac{4}{9}m'L^2$

$= L^2(\frac{1}{3}M + \frac{4}{9}m')$

تطبيق (4)



نفرضاً $m_1 = m_2$

$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/C\,ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= \frac{1}{12}ML^2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

$\left.\begin{matrix} r_1 = r_2 \\ m_1 = m_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2}$

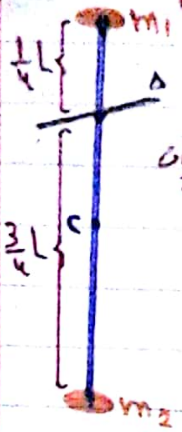
$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/C\,ساق} + 2I_{\Delta/m_1}$

في حالة ساق مهملة الكتلة

$M_{ساق} = 0 \Rightarrow I_{\Delta/C\,ساق} = 0$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = 2I_{\Delta/m_1}$

تطبيق (5)



$M_{ساق} = 0$ مهملة

$I_{\Delta/جملة} = \cancel{I_{\Delta/ساق}}^{0} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

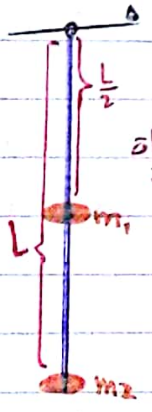
$I_{\Delta/جملة} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

$I_{\Delta/جملة} = m_1(\frac{L}{4})^2 + m_2(\frac{3L}{4})^2$

$I_{\Delta/جملة} = m_1\frac{L^2}{16} + m_2\frac{9L^2}{16}$

$I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{16}L^2(m_1 + 9m_2)$

تطبيق (6)



$M_{ساق} = 0$ مهملة

$I_{\Delta/جملة} = \cancel{I_{\Delta\,ساق}}^{0} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

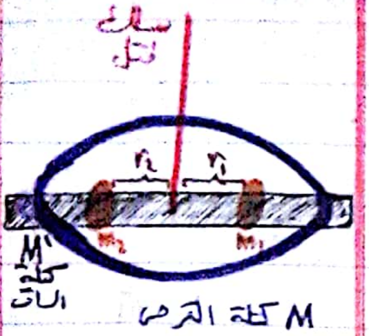
$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2L^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = m_1\frac{L^2}{4} + m_2L^2$

$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = L^2(\frac{1}{4}m_1 + m_2)$

تطبيق (7)



M كتلة القرص

R نصف قطر القرص

$\left.\begin{matrix} m_1 = m_2 \\ r_1 = r_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2}$

$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/C\,قرص} + I_{\Delta/C\,ساق} + 2I_{\Delta/m_1}$

$I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}M'L^2 + 2m_1r_1^2$

آمن بفكرتك واستمتع في تحقيقها ♥ ......

هناك شيء بالنفس اسمه الثقة ......

فكلام الناس آراء وليس حقيقة ......

مهما كانت أرد ينا معجزة ......

أحلامنا تراعب الجموع ......

* السؤال الثاني: احسب طول النواس البسيط المواقت للنواس المركب

T_0 مركب $= T_0$ بسيط

(رقم) $=$ (قانون)

رقم $= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L}{10}} =$ رقم $\Rightarrow 2\sqrt{L} =$ رقم

• نربع الطرفين:

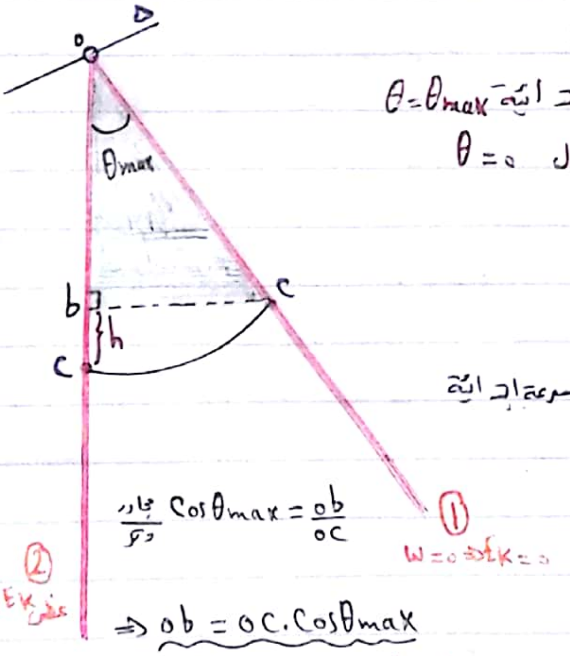
$\Rightarrow 4L = (\text{رقم})^2 \Rightarrow \boxed{L = \frac{(\text{رقم})^2}{4}}$

---

* السؤال الثالث: نزيح (نحرف) النواس (الجملة) عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركها دون سرعة ابتدائية ويُطلب احد الطلبين:

A) θ_{max} ، ω? أو v? استنتج السرعة الزاوية لحظة المرور بالشاقول علماً أن: ($\theta_{max} = ...$)

B) θ_{max}? ، ω أو v: استنتج قيمة الزاوية θ_{max} علماً أن: ($v_{\text{خطية}} = ...$) أو ($\omega_{\text{زاوية}} = ...$)



• نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

• الوضع الأول: لحظة تركه دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

• الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$\Delta \bar{E}_K = \sum \vec{W}_{\vec{F}_{1\to 2}}$$

$$E_{K_2} - \cancel{E_{K_1}} = \cancel{\vec{W}_{\vec{R}}} + \vec{W}_{\vec{w}}$$

0 لأنه ترك دون سرعة ابتدائية — 0 لأن نقطة تأثير القوة لا تنتقل

$\cos\theta_{max} = \frac{ob}{oc}$ $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

$\Rightarrow ob = oc.\cos\theta_{max}$

حيث h: هي ارتفاع مركز عطالة الجسم عن المستوي الأفقي المار من مركز العطالة لهذا الجسم

$h = oc - ob$

$h = oc - oc.\cos\theta_{max}$

$h = oc(1 - \cos\theta_{max})$

$d = oc \Rightarrow \boxed{h = d(1-\cos\theta_{max})}$ (حفظاً)

$\Rightarrow E_{K_2} = \vec{W}_{\vec{w}}$

$\Rightarrow E_{K_2} = \vec{w}.h$

$\Rightarrow E_{K_2} = mg.h$

$\Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mg.h$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2mgh}{I_\Delta}$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2mg.d(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$

* إذا أردنا حساب θ_{max}:

$\Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m.g.h$

$\Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mg.d[1-\cos\theta_{max}]$

$\Rightarrow \frac{I_\Delta \omega^2}{2mgd} = 1 - \cos\theta_{max}$

$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_\Delta \omega^2}{2mgd}}$

• حيث I_Δ ، d ، m نحصل على قيمهم من طلب الدرس

* **السؤال الرابع: احساب السرعة الخطية:**

$$v = \omega . r$$

v خطية ، ω زاوية ، r بعد m عن o

• **السرعة الخطية لمركز الكتلة:**

$$v_c = \omega . r \Rightarrow v_c = \omega . oc \rightarrow \boxed{v_c = \omega . d}$$

• **السرعة الخطية لأي جزء للجسم:** r: بعد m عن o ؛ $\boxed{v = \omega . r}$

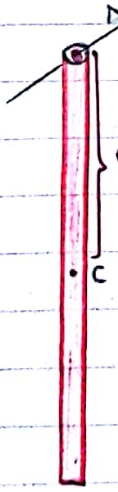
تطبيقات على ملاحظات النواس الثقلي المركب

♦ **طلبات النواس الثقلي المركب:**

الطلب الأول: قد يطلب حساب الدور، ونعلم أن الدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة يمكن حسابه من العلاقة: $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$

♦ **ونميز الحالات التالية:**

(1) ساق متجانسة محور الدوران مار من طرفها العلوي وطول الساق L



$oc = d = \frac{L}{2}$

* علاقة الدور: $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$

وهنا يلزمنا I_Δ و m و d.

* **حساب I_Δ:**

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{3}{12}mL^2$$

$$= \frac{4}{12}mL^2 \Rightarrow \boxed{I_\Delta = \frac{1}{3}mL^2}$$

(هايغنز)

* **حساب:** $d = oc = \frac{L}{2}$ بالطريقة المباشرة (نظريا)

* نعوض في علاقة الدور: $\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{\cancel{m}.g.\frac{\cancel{L}}{2}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$

علاقة الدور بدلالة طول الساق

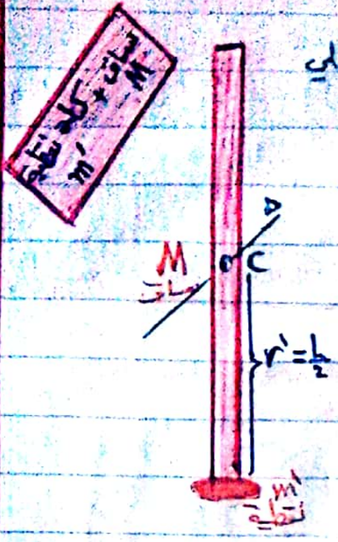
مثلاً: اذا كانت $L = \frac{3}{2}m$ فيكون الدور:

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2.\frac{3}{2}}{3.10}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\ Sec}$ * نواس يدق الثانية

وهنا نسميه نواس يدق الثانية لأن قيمة دوره 2 s

ملاحظة: عندما يذكر في نص المسألة جملة [نواس يدق الثانية] أي ان دوره هو $T_0 = 2s$

(2) ساق متجانسة محور الدوران يمر من مركز عطالتها معلق بطرفها السفلي كتلة نقطية m' وطول الساق L



* علاقة الدور: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• وهنا يلزمنا I_Δ ، m ، d.

* حساب m:
$$m_{جملة} = m'_{نقطية} + M_{ساق}$$

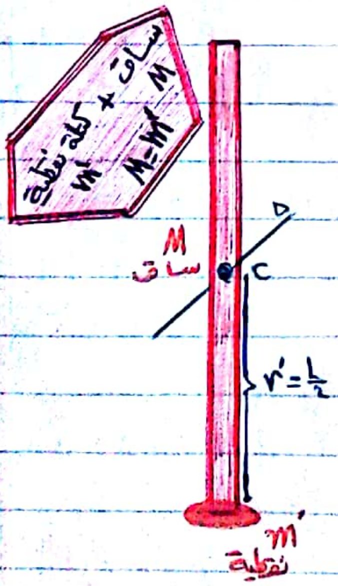
* حساب I_Δ:
$$I_{\Delta\,جملة} = I_{\Delta\,ساق} + I_{\Delta/m'}$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + m'r'^2 = \frac{1}{12}ML^2 + m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + m'\cdot\frac{L^2}{4} \Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \text{رقم}\ Kg.m^2$$

* حساب d:
$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{M\overset{0}{r} + m'r'}{m' + M}$$
$$\Rightarrow d = \frac{m'\frac{L}{2}}{m' + M} \Rightarrow \boxed{d = \text{رقم}\ m}$$

■ وهكذا أحسبنا m و I_Δ و d ثم نعوضهم في علاقة الدور ونحسب قيمته

---

(3) حالة خاصة: ساق متجانسة محور الدوران يمر من منتصفها معلق بطرفها السفلي كتلة نقطية m' تساوي كتلة الساق M وطول الساق L



* علاقة الدور: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

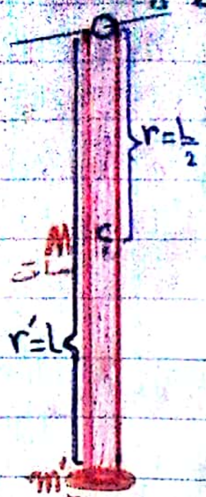
• وهنا يلزمنا I_Δ ، m ، d.

* حساب m:
$$m_{جملة} = m'_{نقطية} + M_{ساق} \Rightarrow m_{جملة} = 2M$$

* حساب I_Δ:
$$I_{\Delta\,جملة} = I_{\Delta\,ساق} + I_{\Delta/m'}$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + m'r'^2 = \frac{1}{12}ML^2 + m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{4}{12}ML^2 \Rightarrow I_{\Delta\,جملة} = \frac{1}{3}ML^2\ Kg.m^2$$

* حساب d:
$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{M\overset{0}{r} + m'r'}{m' + M} = \frac{m'\frac{L}{2}}{2m'}$$
$$\Rightarrow d = \frac{L}{4}\ m$$

* نعوض قيم m و I_Δ و d في علاقة الدور:
$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{2\cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{4}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}L}$$



ساق + كتلة نقطية
M m'

(4) ساق متجانسة كتلتها M معلقة بطرفها السفلي كتلة m' ويمر محور الدوران Δ من طرفها العلوي وطولها L

* علاقة الدور هي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• وهنا يلزمنا I_Δ و d و m

* حساب m:

$m_{جملة} = \underset{نقطية}{m'} + \underset{ساق}{M} \Rightarrow \{m_{جملة} = \text{رقم}\ Kg\}$

* حساب I_Δ:

$I_{\Delta\,جملة} = \underset{\substack{ساق\\(هايغنز)}}{I_\Delta} + I_{\Delta/m'}$

$I_{\Delta\,هايغنز} = I_{\Delta/C} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$

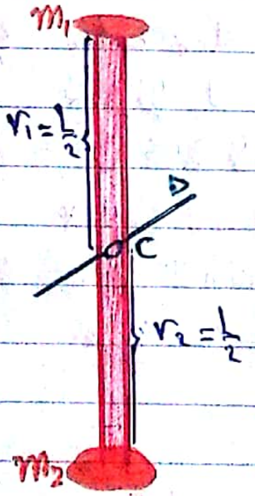
$\Rightarrow I_{\Delta\,جملة} = \frac{1}{3}ML^2 + m'L^2 \Rightarrow \{I_{\Delta\,جملة} = \text{رقم}\ Kg.m^2\}$

* حساب d:

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{Mr + m'r'}{m' + M}$$

$$= \frac{M\frac{L}{2} + m'L}{m' + M} \Rightarrow \{d = \text{رقم}\ m\}$$

* وهكذا حسبنا قيمة m و I_Δ و d وبعدها نعوضهم في علاقة الدور ومن ثم نحسب قيمته



كتلتين + ساق مهملة الكتلة
$M_{ساق}=0$
$I_{\Delta/C}=0$ ساق

(5) ساق مهملة الكتلة تعلق في كل من طرفيها كتلتان m_1، m_2 حيث تعلق في طرفها العلوي كتلة m_1 وتعلق في طرفها السفلي كتلة m_2 ومحور الدوران مار من منتصفها وطول الساق L

* علاقة الدور هي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• وهنا يلزمنا I_Δ و d و m

* حساب m:

$m_{جملة} = \underset{ساق}{m_0} + m_1 + m_2$

$m_{جملة} = m_1 + m_2 \Rightarrow \{m_{جملة} = \text{رقم}\ Kg\}$

* حساب I_Δ:

$I_{\Delta\,جملة} = \underset{ساق}{I_{\Delta/C}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$I_{\Delta\,جملة} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1\frac{L^2}{4} + m_2\frac{L^2}{4}$

$\Rightarrow I_{\Delta\,جملة} = (m_1 + m_2)\frac{L^2}{4} \Rightarrow \{I_{\Delta\,جملة} = \text{رقم}\ Kg.m^2\}$

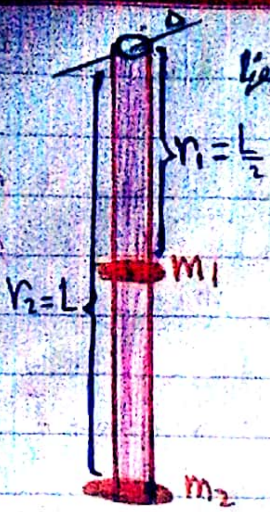
* حساب d:

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\cancel{M r}_{ساق} - m_1 r_1 + m_2 r_2}{\cancel{M}_{ساق} + m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\frac{L}{2} + m_2\frac{L}{2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \{d = \text{رقم}\ m\}$$

* وهكذا حسبنا قيمة m و I_Δ و d وبعدها نعوضهم في علاقة الدور ومن ثم نحسب قيمته

6) ساق متجانسة مهملة الكتلة طولها L تعلق كتلة m_1 في منتصفها وكتلة m_2 في طرفها السفلي ومحور الدوران مار من طرفها العلوي.



* علاقة الدور هي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• يلزمنا m و I_Δ و d

* **حساب m:** $m_{\text{جملة}} = \cancel{m_{\text{ساق}}}^{0} + m_1 + m_2 = m_1 + m_2$

$\Rightarrow \boxed{m_{\text{جملة}} = \text{رقم}\ Kg}$

* **حساب I_Δ:** $I_{\Delta\,\text{جملة}} = \cancel{I_{\Delta\,\text{ساق}}}^{0} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

ساق مهملة الكتلة + كتلتين
$I_{\Delta\,\text{ساق}} = 0$ ، $M_{\text{ساق}} = 0$

$I_{\Delta\,\text{جملة}} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2 (L)^2$

$I_{\Delta\,\text{جملة}} = m_1\frac{L^2}{4} + m_2 L^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta\,\text{جملة}} = \text{رقم}\ Kg}$

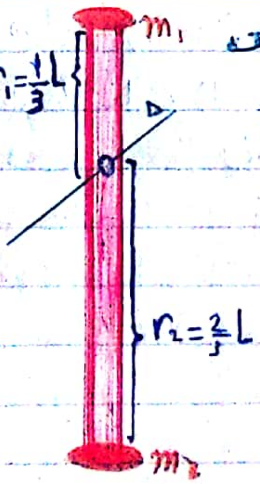
* **حساب d:** $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{+m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

$d = \frac{m_1\frac{L}{2} + m_2 L}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{d = \text{رقم}\ m}$

* وهكذا احسبنا قيمة m و I_Δ و d وبعد ذلك نعوضها في علاقة الدور ومن ثم نحسب قيمته

---

7) ساق مهملة الكتلة طولها L تعلق في طرفها العلوي كتلة m_1 وتعلق في طرفها السفلي كتلة m_2 بجعلها تهتز حول محور دوران يبعد $\frac{L}{3}$ من الكتلة الأولى m_1 (طرفها العلوي)



* علاقة الدور هي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• يلزمنا m و I_Δ و d

* **حساب m:** $m_{\text{جملة}} = \cancel{m_{\text{ساق}}}^{0} + m_1 + m_2 = m_1 + m_2$

$\Rightarrow \boxed{m_{\text{جملة}} = \text{رقم}\ Kg}$

* **حساب I_Δ:** $I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta\,\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

ساق مهملة الكتلة + كتلتين
$I_{\Delta\,\text{ساق}} = 0$ ، $M_{\text{ساق}} = 0$

$I_{\Delta\,\text{جملة}} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1\left(\frac{1}{3}L\right)^2 + m_2\left(\frac{2}{3}L\right)^2$

$I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{1}{9}m_1 L^2 + \frac{4}{9}m_2 L^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta\,\text{جملة}} = \text{رقم}\ Kg}$

* **حساب d:** $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

$= \frac{-m_1\frac{L}{3} + m_2\cdot\frac{2L}{3}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{d = \text{رقم}\ m}$

* وهكذا احسبنا قيمة m و I_Δ و d وبعد ذلك نعوضها في علاقة الدور ثم نحسب قيمته

قرص

(8) قرص كتلته m نصف قطره r يهتز حول محور مار من نقطة على محيطه

* علاقة الدوري: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• يلزمنا m و I_Δ و d

* m قرص   * $d = oc = r$

* حساب I_Δ: فايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c\,\text{قرص}} + md^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$

$\Rightarrow \boxed{I_\Delta = \frac{3}{2}mr^2}$

* نعوض في علاقة الدور:

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cancel{m}r^{\cancel{2}}}{\cancel{m}g\cancel{r}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}}$

الدور بدلالة نصف القطر

مثلاً: اذا كانت $r = \frac{1}{6}m$ ⇐ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\cdot\frac{1}{6}}{2\cdot 10}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}} = 2\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{T_0 = 1\,Sec}$

نقطية m'

قرص + كتلة

(9) قرص كتلته M نصف قطره r نضع في طرفه السفلي كتلة نقطية m' ويهتز حول محور مار من مركزه

* علاقة الدوري: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• يلزمنا m و I_Δ و d

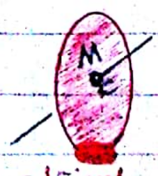
* حساب m: $m_{\text{جملة}} = M_{\text{قرص}} + m'_{\text{نقطية}} \Rightarrow \boxed{m_{\text{جملة}} = \text{رقم}\ kg}$

* حساب d: $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{Mr + m'r'}{M+m'} = \frac{m'r'}{M+m'}$

$\Rightarrow \boxed{d = \text{رقم}\ m}$

* حساب I_Δ: $I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta/c\,\text{قرص}} + I_{\Delta/m'} \Rightarrow I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{1}{2}Mr^2 + m'r'^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta\,\text{جملة}} = \text{رقم}\ kg\,m^2}$

* هكذا نكون قد حسبنا m و d و I_Δ وبعد ذلك نعوضهم في علاقة الدور



نقطية m'

قرص + كتلة $M = m'$

(10) قرص كتلته M نصف قطره r نضع في طرفه السفلي كتلة نقطية m' تساوي كتلة القرص M ويهتز حول محور مار من مركزه

* علاقة الدوري: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• يلزمنا m و I_Δ و d

* حساب m: $m_{\text{جملة}} = M_{\text{قرص}} + m'_{\text{نقطية}} \Rightarrow \boxed{m_{\text{جملة}} = 2M}$

* حساب d: $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{Mr + m'r'}{M+m'} = \frac{m'r}{2M} = \frac{Mr}{2M}$

$\Rightarrow \boxed{d = \frac{r}{2}}$

* حساب I_Δ: $I_{\Delta\,\text{جملة}} = I_{\Delta/c\,\text{قرص}} + I_{\Delta/m'} \Rightarrow I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{1}{2}Mr^2 + m'r'^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta\,\text{جملة}} = \frac{3}{2}Mr^2}$

* نعوض $\{M_{جملة} = 2M\}$ و $\{d = \frac{r}{2}\}$ و $\{I_{\Delta جملة} = \frac{3}{2}Mr^2\}$ في علاقة الدور

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cancel{M}r^{\cancel{2}}}{2\cancel{M}\cdot\frac{\cancel{r}}{2}\cdot g}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}}$$

(11) قرص كتلته M نصف قطره r نعلق في طرفه السفلي كتلة نقطية m' ويهتز حول محور مار من طرفه العلوي

* علاقة الدور هي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

• يلزمنا m و d و I_Δ

* حساب m:

$$m_{جملة} = M_{قرص} + m'_{نقطي} \Rightarrow \boxed{m_{جملة} = \text{رقم}\ kg}$$

* حساب d:

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{Mr + m'(2r)}{M + m'} \Rightarrow \boxed{d = \text{رقم}\ m}$$

* حساب I_Δ:

$$I_{\Delta جملة} = I_{\Delta هايغنز} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_{\Delta هايغنز} = I_{\Delta/c} + Md^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

$$\Rightarrow I_{\Delta جملة} = \frac{3}{2}Mr^2 + m'(4r^2) = \frac{3}{2}Mr^2 + 4m'r^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta جملة} = \text{رقم}\ kg\cdot m^2}$$

* ملاحظة: أن نكون قد حسبنا كل من I_Δ و m و d وبعد ذلك نعوضهم في علاقة الدور ثم نحسب قيمته

♦ ملاحظة هامة ♦ إن السرعة الزاوية ثابتة لجميع أجزاء النواس

♦ ملاحظة هامة ♦ إن الطاقة الميكانيكية في النواس الثقلي المركب هي عبارة عن طاقتين [طاقة حركية + طاقة كامنة ثقالية]

$$E = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}I_\Delta \omega^2 + mgh$$

حيث:

$$h = d[1 - \cos\theta_{max}]$$

ملاحظات لحل مسائل النواس الثقلي البسيط

1 الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط وتغيراته

✓ الدور بحالة سعات كبيرة:

$\theta > 14°$ أو $\theta > 0,24\ rad$

(الزوايا الشهيرة)

$$\boxed{T_{0\,\text{سعات كبيرة}} = T_{0\,\text{سعات صغيرة}}\left[1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right]}$$

✓ الدور بحالة السعات الصغيرة:

$\theta \leq 14°$ أو $\theta \leq 0,24\ rad$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

✓ الدور T_0 يتناسب عكساً مع $\sqrt{g}$

• أي اذا انتقلنا بالنواس من سطح البحر إلى قمة الجبل تنقص $\sqrt{g}$ ويزداد الدور T_0

اي (الميقاتية تؤخر) وبالعكس (الميقاتية تقدم)

2 نزيح بزاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية

• استنتج السرعة الخطية لحظة المرور بالشاقول بالرموز ثم احسب قيمتها

أو • استنتج بالرموز السعة الزاوية θ_{max} لحظة المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها

"كليشة"

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

* الوضع الأول: لحظة تركه دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$
* الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}\,1\to 2}$$

$$\Rightarrow E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{T}} + W_{\vec{w}}$$

ولكن: $E_{K_1} = 0$: تركت دون سرعة ابتدائية

وكذلك $W_{\vec{T}} = 0$ لأن $\vec{T}$ تعامد الانتقال في كل لحظة

$$\Rightarrow E_{K_2} - 0 = 0 + W_{\vec{w}}$$

$$\Rightarrow E_{K_2} = W_{\vec{w}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gh$$

ولكن:

$$h = l[\cos\theta - \cos\theta_{max}]$$

حيث $l = L$

• وعند المرور بالشاقول $\theta = 0 \Leftarrow \cos\theta = 1$

$$\Rightarrow h = L[1 - \cos\theta_{max}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gL[1-\cos\theta_{max}]$$

* وهنا نعزل حسب المجهول:

• اذا اردنا السرعة الخطية:

$$\Rightarrow v^2 = 2gL[1-\cos\theta_{max}]$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gL[1-\cos\theta_{max}]}}$$

• إذا اردنا السعة الزاوية:

$$\Rightarrow [1-\cos\theta_{max}] = \frac{v^2}{2gL}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gL}}$$

3 استنتاج علاقة توتر الخيط لحظة المرور بالشاقول

■ جملة المقارنة "خارجية"

■ الجملة المدروسة "كرة النواس"

■ القوى المؤثرة $\left\{ \begin{array}{l} \vec{w} \text{ ثقل الكرة} \\ \vec{T} \text{ توتر الخيط} \end{array} \right.$

■ نطبق العلاقة الأساسية في التحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

• بالإسقاط على الناظم نجد:

$$T - W = m a_c$$

$\Rightarrow T = m.a_c + W$

ولكن: التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r}$

و $L = r$ طول الخيط $\Rightarrow a_c = \frac{v^2}{L}$

$\Rightarrow T = m.\frac{v^2}{L} + W$

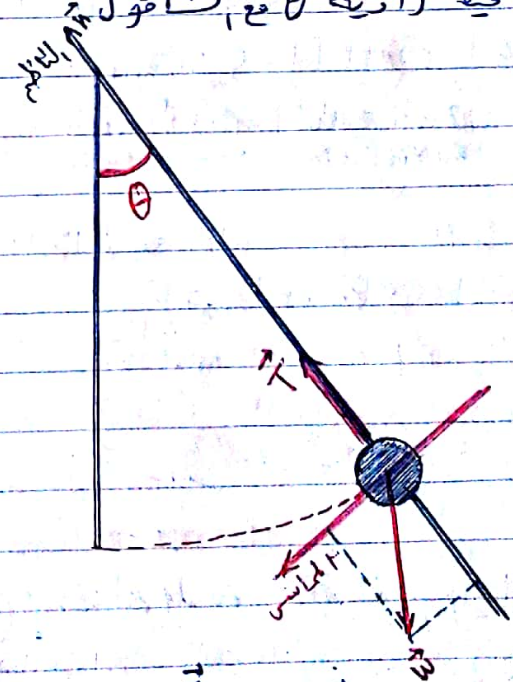
ولكن: $w = mg$

$\Rightarrow T = m.\frac{v^2}{L} + mg$

علاقة توتر الخيط

$$\Rightarrow T = m\left[\frac{v^2}{L} + g\right] \quad (N)$$

4) علاقة التسارع المماسي عندما يصنع الخيط زاوية θ مع الشاقول



$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$

• بالإسقاط على المماسي نجد:

$w.\sin\theta + 0 = m.a_t$

$\Rightarrow mg.\sin\theta = m.a_t$

$\Rightarrow \boxed{a_t = g\sin\theta}$ التسارع المماسي $(m.s^{-2})$

التسارع الزاوي

$a_t = \alpha . r$

$\Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r}$

طول الخيط $L = r$ $\Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{L}$ $(rad.s^{-2})$

ملاحظة: • إسقاط التسارع على الناظمي هو تسارع ناظمي $a_c = \frac{v^2}{r}$

• وإسقاط التسارع على المماسي هو تسارع مماسي a_t