النموذج ①

نموذج امتحان لمادة الرياضيات

الصف الثالث الثانوي العلمي

الاسم: ....

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة العظمى: ستمئة

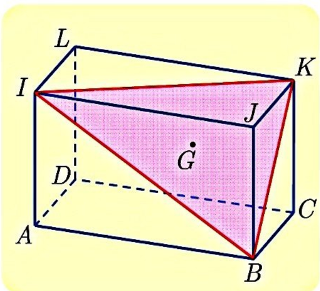
أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: بفرض f تابع معرف على D، جدول تغيراته معطى كما يلي:

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

1) عيِّن D و $f(D)$
2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً. علل؟
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$
4) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 4$
5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$
6) أوجد مجموعة تعريف $g(x) = \sqrt{f(x)}$

السؤال الثاني: حل في R المعادلة الآتية: $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$



السؤال الثالث: $ABCDIJkL$ متوازي سطوح وليكن G مركز ثقل المثلث BIk
أثبت أن النقاط J, G, D تقع على استقامة واحدة.

السؤال الرابع: ليكن z عدداً عقدياً ما . وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .
أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الخامس: ليكن f تابع معرف على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x}$ خطه البياني C
أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

السؤال السادس: حل المعادلة: $\binom{n+2}{2} = 3P_{n+1}^{1}$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني، 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق: $f(x) = x^2e^{2x}$ والمطلوب:

1) جد تابعاً أصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P كثير حدود.
2) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$
3) أوجد معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1)

التمرين الثاني: لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق: $\begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$
2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.
3) أثبت أنها متقاربة. واحسب نهايتها.

التمرين الثالث: يحوي صندوق 8 كرات ثلاثة منها حمراء مرقمة 0,1,1 ، وثلاث خضراء مرقمة 2 , 1 , 0 وكرتين بيضاء مرقمة 0,1 ، نسحب عشوائياً ثلاث كرات معاً من الصندوق ونعرف الحدثين:
A : سحب كرة من كل لون ، B : الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته ، والمطلوب:

1) احسب احتمال كل من الأحداث: $A \cap B\ ,\ B\ ,\ A$
2) إذا علمت أن الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته، ما احتمال أن تكون كلاً منها من لون مختلف؟
3) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات التي تحمل الرقم واحد ، اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X وتوقعه الرياضي $E(X)$

__ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:__ (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس النقاط $D(-3,3,-1)$, $C(2,1,1)$, $B(-1\,,0,2)$, $A\left(-\frac{1}{2},3\,,1\right)$

1) a) أثبت أن النقاط B, C, D تمثل مستو . أوجد معادلته.
   b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته
2) a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)
   b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)
3) احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$
4) a) أثبت أن النقاط $B\ ,C\ ,D$ تقع على كرة مركزها A
   b) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها.

لمسألة الثانية: بفرض C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

1) من أجل $]-\infty\,,-2[\ \cup\ ]2\,,+\infty[$ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية إن وجدت
2) اثبت أن $y = x$ مقارب مائل لـ C_f وادرس الوضع النسبي
3) احسب $f(x) + f(-x)$ ماذا تستنتج؟
4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في $]-\infty,-2[$ ثم أثبت أن هذا الحل يقع بين $-3\,,-2$
5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f
6) استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x) = |f(x)|$

....

انتهت الأسئلة

الاسم:	نموذج امتحان لمادة الرياضيات
المدة: ثلاث ساعات	الصف الثالث الثانوي العلمي
الدرجة العظمى: ستمئة	

النموذج ①

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: بفرض f تابع معرف على D، جدول تغيراته معطى كما يلي:

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$3 \searrow$	0	$\searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	1	$\nearrow 2$

1) عيّن D و $f(D)$

$f(D) =]-\infty,+\infty[$ (من سطر $f(x)$)

$f(D) =]-\infty,3[\, \cup [1,+\infty[= R$

(من سطر $f(x)$)

2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً. علل؟

$f(-1) = 0$ ليست قيمة حدية، لأن المشتق عند $x = -1$ لا يغير إشارته

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

للمعادلة $f(x) = 2$ حلين مختلفين

4) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 4$

عند $x = 4$ المماس أفقي (لأن $m = f'(4) = 0$)

عندئذٍ معادلة المماس $y = 1$

5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$ حيث $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = -\infty}$

6) أوجد مجموعة تعريف $g(x) = \sqrt{f(x)}$

شرط الحل: $f(x) \geq 0$

إذاً $D_g =]-\infty,-1] \cup]2,+\infty[$

....

السؤال الثاني: حل في R المعادلة الآتية: $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$

$$3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$$

نضرب بـ 3^x :

$$3^{2x+1} + 2 = 7.3^x$$

$$3^{2x+1} - 7.3^x + 2 = 0$$

$$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25 \implies \sqrt{\Delta} = 5$$

إما $3^x = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$

$$\implies e^{x\ln 3} = 2 \implies x\ln 3 = \ln 2 \implies \boxed{x = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$$

أو $3^x = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$

$$3^x = 3^{-1} \implies \boxed{x = -1}$$

السؤال الثالث: $ABCDIJkL$ متوازي سطوح وليكن G مركز ثقل المثلث BIk

أثبت أن النقاط J, G, D تقع على استقامة واحدة.

لإثبات أن النقاط J, G, D على استقامة واحدة يجب أن نثبت أن $\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JG}$ مرتبطين خطياً.

بما أن G مركز ثقل المثلث BIk إذاً:

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{Gk} = \vec{0}$$

حسب علاقة شال ندخل J :

$$\overbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}} + \overbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JI}} + \overbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{Jk}} = \vec{0}$$

وتستطيع حلها تحليلياً

$$3\overrightarrow{GJ} + \underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{Jk}} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{JD} = 3\overrightarrow{JG}$$

إذاً $\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JG}$ مرتبطين خطياً ويشتركان بنقطة J فالنقاط G, J, D على استقامة واحدة.

....

السؤال الرابع: ليكن z عدداً عقدياً ما . وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .

أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

بما أن w طويلته تساوي (1) عندئذٍ : $\left(w = \frac{1}{\bar{w}} \quad , \quad \bar{w} = \frac{1}{w} \quad , \quad w\bar{w} = 1\right)$

و حتى يكون $\frac{w\bar{z}-z}{i\,w-i}$ تخيلي بحت ، يجب أن يكون مرافقه يساوي معاكسه

$(\bar{w} = -w)$

$$\overline{\left(\frac{w\bar{z}-z}{i\,w-i}\right)} = \frac{\overline{w\bar{z}-z}}{\overline{i\,w-i}} = \frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i\,\bar{w}+i}$$

نضرب بـ w :

$$= \frac{w\ \bar{w}z - w\bar{z}}{-i\,w\bar{w}+i\,w} = \frac{z-w\bar{z}}{-i+i\,w} = -\left[\frac{w\bar{z}-z}{i\,w-i}\right]$$

و منه $\frac{w\bar{z}-z}{i\,w-i}$ تخيلي بحت .

....

السؤال الخامس: ليكن f تابع معرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x}$ خطه البياني C

أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = ?$$

$$f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x} = x + \frac{2+\sin x}{x}$$

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{2+\sin x}{x} - x = \frac{2+\sin x}{x}$$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$1 \le 2+\sin x \le 3$$

نقسم على $x > 0$:

$$\frac{1}{x} \le \frac{2+\sin x}{x} \le \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{حسب مبرهنة الإحاطة}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sin x}{x} = 0$$

ومنه Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$

السؤال السادس: حل المعادلة: $\binom{n+2}{2} = 3P_{n+1}^{1}$

شرط الحل: $n+2 \geq 2 \cap n+1 \geq 1 \implies n \geq 0$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 3(n+1)$$

$n+2 = 6 \implies \boxed{n = 4}$ مقبول

....

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني، 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق: $f(x) = x^2e^{2x}$ والمطلوب:

1) جد تابعاً أصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P كثير حدود.

F تابع أصلي لـ f فإن $F'(x) = f(x)$

F اشتقاقي على R

$$F'(x) = P'(x).e^{2x} + 2e^{2x}.P(x)$$
$$F'(x) = f(x)$$
$$P'(x)\,e^{2x} + 2e^{2x}\,P(x) = x^2\,e^{2x}$$
$$P'(x) + 2P(x) = x^2$$

نلاحظ أن $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$

$$2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$$

بالمطابقة :

$$2a = 1 \implies \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$3a + 2b = 0$$

$$2a + 2b = 0 \implies \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

$$b + 2c = 0 \implies \boxed{c = \frac{1}{4}}$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$$

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1$$

$$S = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1$$

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)e^2 - \left(0 - 0 + \frac{1}{4}\right)e^0 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4}$$

3) أوجد معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1)

معادلة المماس

ميل

$m = f'(1) = 4e^2$

نقطة

$x = 1$

نعوض في f

$y = e^2$

$N(1, e^2)$

$$T: y - y_N = m(x - x_N)$$
$$T: y - e^2 = 4e^2(x - 1)$$
$$y = 4e^2x - 3e^2$$

....

التمرين الثاني: لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق: $\begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 1$:

$$2 \leq u_1 = \frac{5}{2} \leq 3 \quad \text{محققة}$$

- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$$2 \leq u_n \leq 3$$

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n + 1$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 = u_n^2 - 4u_n + 4 + 2$$
$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$

من الفرض لدينا:

$$2 \leq u_n \leq 3$$
$$0 \leq u_n - 2 \leq 1$$
$$0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$$
$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$
$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

محققة من أجل $n + 1$ فهي صحيحة أياً كانت $n \geq 1$

2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 5u_n + 6$$
$$= (u_n - 3)(u_n - 2) \leq 0$$

حيث $2 \leq u_n \leq 3$:

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{المتتالية متناقصة}$$

3) أثبت أنها متقاربة. واحسب نهايتها.

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (2) فهي متقاربة

نهايتها حل المعادلة $f(x) = x$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$ و f مستمر على R

$$f(x) = x$$
$$x^2 - 4x + 6 = x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$x = 3$ مرفوض $\qquad$ $x = 2$ مقبول

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

....

التمرين الثالث: يحوي صندوق 8 كرات ثلاثة منها حمراء مرقمة 1 , 1 , 0 ، وثلاث خضراء مرقمة 2 , 1 , 0 وكرتين بيضاء مرقمة 1 , 0 ، نسحب عشوائياً ثلاث كرات معاً من الصندوق ونعرف الحدثين:

A : سحب كرة من كل لون ، B : الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته ، والمطلوب:

1) احسب احتمال كل من الأحداث: $A \cap B , B , A$

8 كرات $(W_0W_1 , G_0G_1G_2 , R_0R_1R_1)$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = 8 \\ r = 3 \quad \text{معاً} \\ \binom{8}{3} = 56 \end{array}}$$

A: سحب كرة من كل لون، B: الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته

$$A = \{(R, G, W)\}$$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{18}{56}$$

$$B = \{(1,1,1), (0,0,0)\}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

$$A \cap B = \{(W_0, G_0, R_0), (W_1, G_1, R_1)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{56}$$

2) إذا علمت أن الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته، ما احتمال أن تكون كلاً منها من لون مختلف؟

وقع B: الكرات تحمل ذات الرقم

مطلوب A: الكرات من ألوان مختلفة

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{56}}{\frac{5}{56}} = \frac{3}{5}$$

3) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات التي تحمل الرقم واحد ، اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X وتوقعه الرياضي $E(X)$

$$I = \{ \underbrace{0}_{\text{ع,ع,ع}} , \underbrace{1}_{\text{1,ع,ع}} , \underbrace{2}_{\text{1,1,ع}} , \underbrace{3}_{1,1,1} \}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56} \qquad P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} \qquad P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56}$$

X	0	1	2	3	
$P(X_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$	
$\sum_{i=1}^{i=4} X_i\, P(X_i)$	$\frac{24 + 48 + 12}{56}$				$= \frac{84}{56}$

$$E(X) = \frac{84}{56}$$

....

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس النقاط $A\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right), B(-1, 0, 2), C(2, 1, 1), D(-3, 3, -1)$

1) a) أثبت أن النقاط B, C, D تمثل مستو . أوجد معادلته.

$\overrightarrow{BC}(3, 1, -1) \quad , \quad \overrightarrow{BD}(-2, 3, -3)$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً وعليه النقاط C, D, B تشكل مستوي

معادلة مستوي: نقطة اختيارية B

ناظم $\vec{n}(a, b, c)$ حيث c, a, b ليست جميعها أصفاراً

$$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow \boxed{3a + b - c = 0} \quad ①$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{BD} = 0 \Longrightarrow \boxed{-2a + 3b - 3c = 0} \quad ②$$

بما أن للمستوي عدد لا نهائي من الأشعة الناظمة نختار $\boxed{c = 1}$ نعوض في ① و ②

$$-2a + 3b - 3 = 0$$

$$3a + b - 1 = 0 \Longrightarrow b = -3a + 1$$

$$-2a + 3(-3a + 1) - 3 = 0$$

$$-2a - 9a + 3 - 3 = 0$$

$$-11a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 0} \Longrightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{n}(0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \quad y + z + d = 0$$

B نعوض $\Rightarrow \quad 0 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

$$\boxed{(BCD):\ y + z - 2 = 0}$$

b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = -6 + 3 + 3 = 0$$

المثلث قائم في B

$$S_{BCD} = \frac{BC.BD}{2}$$

$$BC = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

$$BD = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$$

$$S_{BCD} = \frac{\sqrt{11}.\sqrt{22}}{2} = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

2) a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)

$$3 + 1 - 2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

A تقع خارج المستوي

b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

$$dist\,(A\,,BCD) = \frac{|y_A + z_A - 2|}{\sqrt{1 + 1}}$$

$$= \frac{|3 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$dist\,(A\,,BCD) = \sqrt{2}$$

3) احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \,.\, h$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times 11$$

$$\boxed{V = \frac{11}{3}}$$

4) a) أثبت أن النقاط $B\,,C\,,D$ تقع على كرة مركزها A

$$AB = \sqrt{\frac{1}{4} + 9 + 1} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$AC = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 0} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$AD = \sqrt{\frac{25}{4} + 0 + 4} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$AD = AB = AC$ وعليه $B\,,C\,,D$ تقع على كرة مركزها A

b) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها.

نصف قطر هذه الكرة هو $AB = \frac{\sqrt{41}}{2}$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{41}{4}$$

....

المسألة الثانية: بفرض C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

1) من أجل $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية إن وجدت

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2-4} > 0$$

x	$-\infty$ $\qquad$ -2		2 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$	//////	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	//////	$-\infty \nearrow +\infty$

2) اثبت أن $y = x$ مقارب مائل لـ C_f وادرس الوضع النسبي

$$f(x) - y = x + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - x = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = \ln 1 = 0$$

$y = x$ مقارب مائل لـ C بجوار $\pm\infty$

الوضع النسبي على المجال $]-\infty, -2[$ ومنه:

$$\frac{x-2}{x+2} > 1$$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) > 0$$

C يقع فوق المقارب

وعلى المجال $]2, +\infty[$ ومنه:

$$\frac{x-2}{x+2} < 1$$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) < 0$$

C يقع تحت المقارب

3) احسب $f(x)+f(-x)$ ماذا تستنتج؟

$$f(x)+f(-x)=x+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)-x+\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

$$=\ln 1=0$$

$$f(-x)=-f(x)$$

وبما أن $-x\in D_f$

$\Leftarrow$ f تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدا

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في $]-\infty,-2[$ ثم أثبت أن هذا الحل يقع بين -3 , -2

f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,2[$

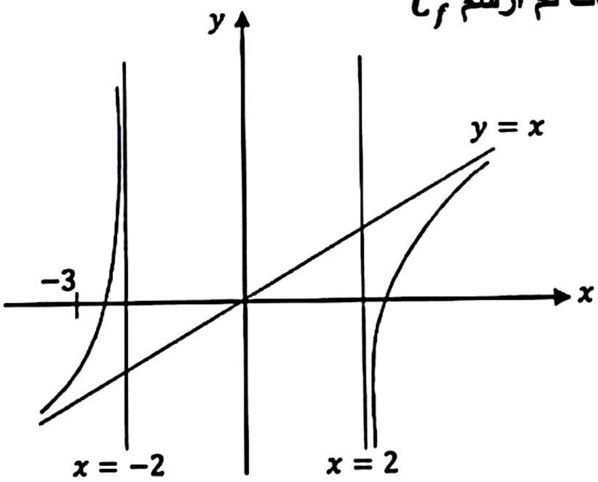
$$0\in f(]-\infty,-2[)=]-\infty,+\infty[$$

$\Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد على $]-\infty,-2[$

$$\left.\begin{array}{l} f(-3)=-3+\ln(5)<0 \\ \lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-3).\lim_{x\to-2} f(x)<0$$

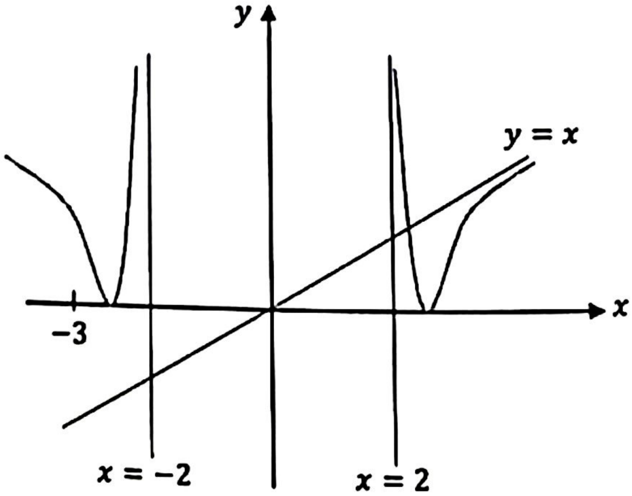
$\Rightarrow$ الحل يقع بين -3 , -2

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f



6) استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x)=|f(x)|$

C_g ينتج عن C_f بأخذ نظير النقاط ذات التراتيب السالبة بالنسبة لمحور $x\acute{x}$ والحفاظ على النقاط ذات التراتيب الموجبة



انتهت الأسئلة