علاقات الترتيب

التعريف: ليكن R علاقة على المجموعة A $(A \neq \emptyset)$. R علاقة ترتيب جزئي إذا كان:

(i) R علاقة انعكاسية:

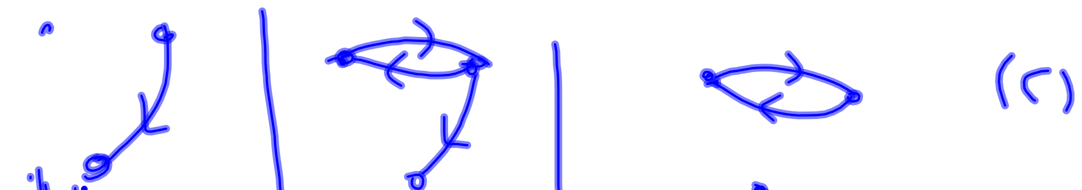
(ii) R علاقة تخالفية: $\forall x,y \in A$: إذا كان xRy, yRx فإن $x=y$

(iii) R علاقة متعدية:

ملاحظة: (1) S_i علاقة على $\{1,2,3\}$

S_i علاقة تناظرية وتخالفية.

(2)



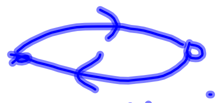
علاقة تخالفية وليست تناظرية | علاقة ليست تخالفية وليست تناظرية | علاقة تناظرية وليست تخالفية

ملاحظة:

(1) R علاقة ليست تخالفية:

$\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

يوجد $x,y \in A$ حيث xRy , yRx و $x \neq y$



(2) في الرسم الموجه

R تخالفية: لكل $a,b \in A$ فإن أو أو

R ليست تخالفية: يوجد $a,b \in A$ حيث

مثال (3,35) ص 152

لتكن R علاقة المعرفة على $\mathbb{Z}^+$ كالتالي:

$$aRb \iff a|b$$

أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^+$

الحل: (i) R انعكاسية: ليكن $a \in \mathbb{Z}^+$ فإن $a = 1 \cdot a$ فإن $a|a$ فإن aRa

(ii) R تخالفية: ليكن $a,b \in \mathbb{Z}^+$ حيث aRb و bRa فإن $a|b$ و $b|a$ فإنه يوجد $p,k \in \mathbb{Z}$ حيث $b = p \cdot a$ و $a = k \cdot b$ فإن $b = p \cdot a = p \cdot (k \cdot b)$ فإن $b - pkb = 0$ فإن $b(1-pk) = 0$ فإن $b = 0$ أو $pk = 1$ فإن $b = 0$ أو $p = k = 1$ أو $p = k = -1$ فإن $a = b = 0$ أو $b = a$ أو $b = -a$ (خطأ لأن $a,b \in \mathbb{Z}^+$) فإن $a = b$

(iii) R علاقة متعدية: ليكن $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ حيث aRb و bRc فإن $a|b$ و $b|c$ فإنه يوجد $p,k \in \mathbb{Z}$ حيث $b = p \cdot a$ و $c = k \cdot b$ فإن $c = k \cdot b = k(p \cdot a) = (kp)a$ فإن $a|c$ وبالتالي aRc.

مثال: لتكن S علاقة معرفة على $\mathbb{Z}$ حيث

$$a \, S \, b \iff a \mid b$$

S ليست علاقة ترتيب جزئي لأن

S ليست تخالفية $\left(2 \neq -2, \ (-2) \, S \, 2, \ 2 \, S \, (-2)\right)$

مثال : ليكن $U=\{1,2,3\}$

$\mathcal{P}(U)$: مجموعة أجزاء U هي

$$\mathcal{P}(U)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

لدينا $\text{Card}(U)=|U|=3$ (عدد عناصر U)

$$\text{Card}(\mathcal{P}(U))=|\mathcal{P}(U)|=8=2^3$$

بصفة عامة ليكن X مجموعة

إذا كان $|X|=n$ فإن $|\mathcal{P}(X)|=2^n$

مثال: $U=\{1,2,3\}$ ، $\wp(U)$ مجموعة أجزاء U

لكل $A,B\in\wp(U)$ حيث

$$A\,R\,B \Leftrightarrow A\subseteq B$$

أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي على $\wp(U)$

الحل: (i) R علاقة انعكاسية: ليكن $A\in\wp(U)$

لدينا $A\subseteq A$ فإن $A\,R\,A$

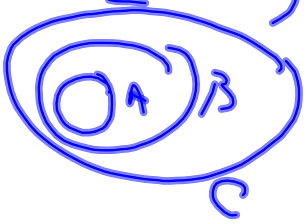
(ii) R تخالفية على $\wp(U)$: ليكن $A,B\in\wp(U)$

حيث $A\,R\,B$ و $B\,R\,A$ فإن $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$

فإن $A=B$

(iii) R متعدية: ليكن $A,B,C\in\wp(U)$ حيث

$A\,R\,B$ و $B\,R\,C$ فإن $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$



فإن $A\subseteq C$

فإن $A\,R\,C$

بصفة عامة: ليكن U مجموعة غير خالية

و R علاقة على $\wp(U)$ المعرفة كالتالي:

$$A\,R\,B \Leftrightarrow A\subseteq B$$

R علاقة ترتيب جزئي على $\wp(U)$.

تعريف

R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A

(1) الزوج المرتب (A, R) مجموعة مرتبة جزئيا

• غالب الاحيان نرمز للعلاقة R (الترتيب الجزئي) بالرمز "$\leq$"

(2) ليكن $a, b \in A$ إذا كان aRb أو bRa
a و b يقبلان المقارنة بالعلاقة R.

إذا كان $a \not R b$, $b \not R a$ فنقول a و b لا يقبلان المقارنة.

(3) ليكن $B \subseteq A$ نقول أن العلاقة R_B
حيث $R_B = R \cap (B \times B)$ نسمي R_B الاقتصار
للعلاقة R على المجموعة B.

مثال : بالمثال 35 : R علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}^+$

حيث $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $aRb \Leftrightarrow a|b$

ليكن $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_B = ?$

$R_B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4)\}$

R_B : اقتصار R على B .

شكل هاس (Hass diagramm)

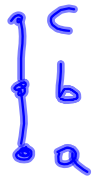
ليكن R علاقة ترتيب جزئي
يعني (A,R) مجموعة مرتبة جزئيا.

← R انعكاسية: لا نرسم العروات في شكل هاس

← R تخالفية: إذا كان aRb فنرسم في شكل هاس a أسفل b بدون سهم.

← R متعدية: إذا كان aRb , bRc فإن aRc

نرسم



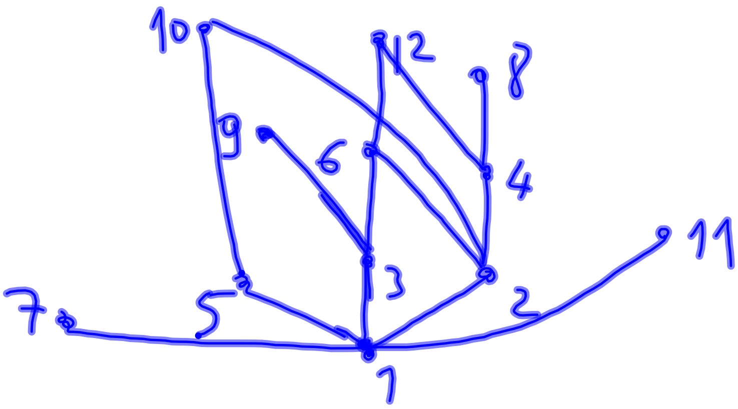
بدون ربط بين a و c.

تعريف: ليكن (A,R) مجموعة مرتبة جزئيا. إذا كان لكل $a,b\in A$ فإن a و b يقبلان المقارنة، فنقول أن (A,R) مجموعة مرتبة كليا. و R علاقة ترتيب كلي.

مثال (3,37) ص 154

جد شكل هاس للمجموعة الجزئية المرتبة جزئيا
من المجموعة $(Z^+, \leq)$ في $A = \{1, 2, \ldots, 12\}$
المثال (3,35)

الحل

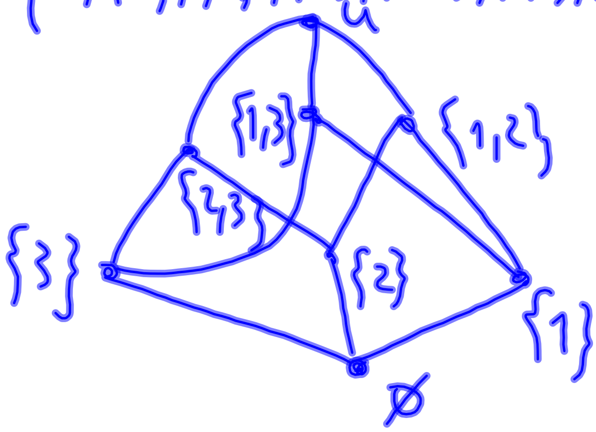


مثال (3,39) ص 155

اذا كانت $U=\{1,2,3\}$ نجد شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئيا $(P(U),\leq)$ حيث "$\leq$" هي كما في المثال (3,36)

الحل:

$P(U)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},U\}$



مثال (3,44) ص 157

لتكن A مجموعة القواسم الموجبة للعدد 81 والعلاقة "$\le$" هي علاقة القسمة أثبت أن: $(A,\le)$ مجموعة مرتبة كليا.

الحل: $81=3^4$; $A=\{1,3,9,27,81\}$

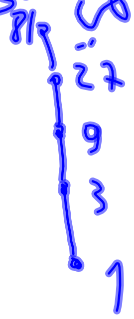
← انعكاسية: لكل $a\in A$, $a|a$ فإن $a\le a$

← تخالفية: لكل $a,b\in A$ إذا كان $a|b$, $b|a$ فإن $a=b$

← متعدية: لكل $a,b,c\in A$ إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$.

فإن $(A,\le)$ هي مجموعة مرتبة جزئيا.

شكل هاس



فإن $(A,\le)$ مجموعة مرتبة كليا.

الجبريات البولية وتطبيقاتها

تعريف: ليكن A مجموعة غير خالية

• عملية آحادية هي تطبيق من A إلى A

$$f : A \longrightarrow A$$

مثال

$$inv : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \longmapsto inv(x) = \frac{1}{x}$$

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto g(x) = -x$$

• عملية ثنائية: هي تطبيق من $A\times A$ إلى A

$$f : A \times A \longrightarrow A$$

مثال:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x \cdot y$$

$$\mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$
$$(A,B) \longmapsto A \cap B$$