سلسلة الرؤى الشاملة
في الرياضيات

رؤية شاملة في الجبر

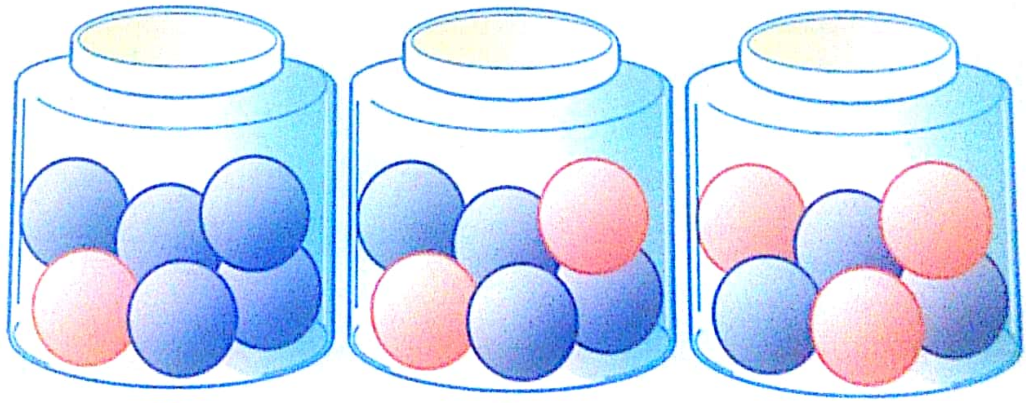
الأعـــداد العـــقديـــة

تطبيقات الأعداد العقدية

التحليل التوافقي

الاحتمالات

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$



① ② ③

بإشراف المدرس
حسان البيطار

الثالث الثانو
العلمي

هديل

الأعداد العقدية

تمهيد

إن للمعادلة $x^2 = 4$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية R هما: إما $x = 2$ او $x = -2$

إن المعادلة $x^2 = -4$ مستحيلة الحل في R، لذلك نفرض وجود وحدة تخيلية i تحقق $i^2 = -1$، ونسمي المجموعة التي تحوي هذه الوحدة التخيلية بمجموعة الأعداد العقدية C وهي تضم مجموعة الأعداد الحقيقية اي $R \subset C$.

ومنه تصبح المعادلة السابقة $x^2 = 4i^2 \implies \begin{cases} x = +2i \\ x = -2i \end{cases}$ حيث $(i^2 = -1)$ ولها حلان في المجموعة C.

مثال: حل في C المعادلة: $(x+3)^2 = -16$

$$(x+3)^2 = 16i^2 \implies \begin{cases} x+3 = 4i & \longrightarrow x = -3+4i \\ x+3 = -4i & \longrightarrow x = -3-4i \end{cases}$$

نلاحظ ان العدد مكون من قسمين احدهما يحوي i نسميه القسم التخيلي والآخر لا يحوي i نسميه القسم الحقيقي

ونسمي العدد المركب من القسمين الحقيقي والتخيلي بالعدد العقدي ويكتب بالشكل $\boxed{Z = a + bi}$

ملاحظة:

تُمثل كل نقطة $M(a,b)$ من المستوي بعدد عقدي $Z = a + bi$ والعكس صحيح يمثل كل عدد عقدي $Z = a + bi$ بنقطة M إحداثياتها (a,b) وتجري الحسابات في مجموعة الأعداد العقدية بأسلوب مماثل للحسابات في مجموعة الأعداد الحقيقية ذاته مع ملاحظة ان $i^2 = -1$

امثلة:

- $3i - 4 + 2(i-1) = 3i - 4 + 2i - 2 = -6 + 5i$
- $(2+4i)(1-i) = 2 - 2i + 4i - 4i^2 = 2 - 2i + 4i + 4 = 6 + 2i$
- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
- $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

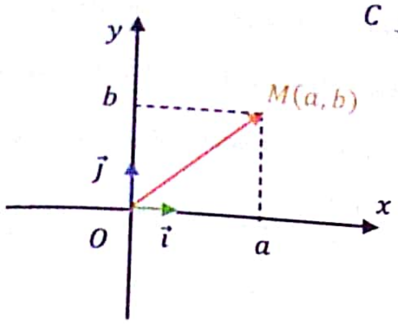
القوى الطبيعية للعدد i:

$$i^{32} = (i^2)^{16} = (-1)^{16} = 1$$
$$i^{37} = i^{36} \times i = (i^2)^{18} \times i = (-1)^{18} \times i = i$$
$$i^{134} = (i^2)^{67} = (-1)^{67} = -1$$
$$i^{135} = i^{134} \times i = (i^2)^{67} \times i = (-1)^{67} \times i = -i$$
$$i^{2007} = i^{2006} \times i = (i^2)^{1003} \times i = (-1)^{1003} \times i = -i$$

تذكر:

$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad i^4 = 1$

الشكل الجبري للعدد العقدي:



وجدنا أن كل نقطة من المستوي تمثل عدداً نسميه عدداً عقدياً.

$M(a,b)$ تُمثل العدد العقدي $Z = a + bi$ ونرمز إلى مجموعة الأعداد العقدية بالرمز C

ويمثل محور الفواصل مجموعة الأعداد الحقيقية.

ويمثل محور التراتيب مجموعة الأعداد التخيلية البحتة.

ومنه يسمى: $Z = a + bi$ الشكل الجبري للعدد العقدي Z

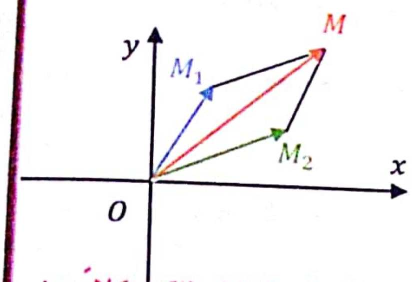
حيث b, a اعداد حقيقية.

نسمي a الجزء الحقيقي للعدد العقدي Z ونكتب $a = Re(z)$

نسمي b الجزء التخيلي للعدد العقدي Z ونكتب $b = Im(z)$

ملاحظة (1): يمثل العدد العقدي $Z = a + bi$ إما بالنقطة $M(a,b)$ أو بالمتجه $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$

ملاحظة (2): بفرض $\overrightarrow{OM_1}$ صورة العدد العقدي Z_1 و $\overrightarrow{OM_2}$ صورة العدد العقدي Z_2



فإن صورة مجموع عددين عقديين يساوي مجموع صورتيهما

اي $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

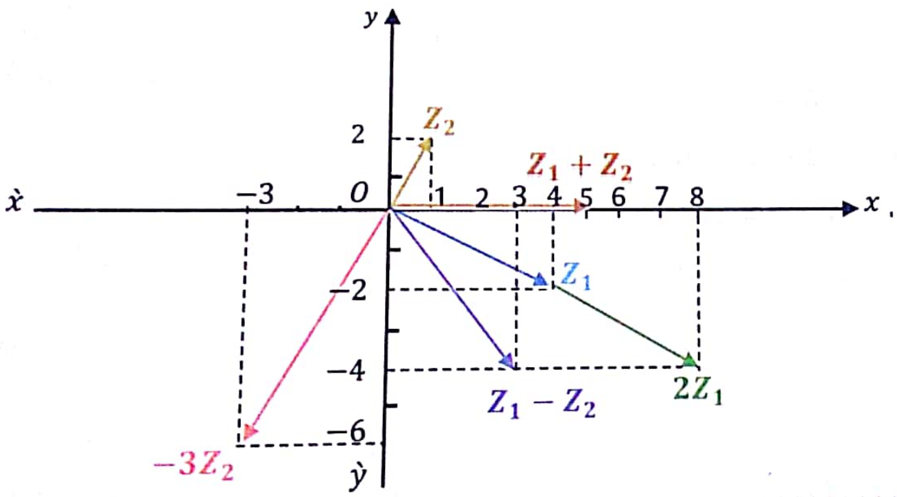
ونستنتج من ذلك أنه يمكن ان نمثل عملية جمع عددين عقديين

بعملية جمع متجهين في المستوي وذلك حسب قاعدة متوازي الأضلاع

وكذلك عملية الطرح والضرب بعدد حقيقي.

مثال: إذا كان $Z_1 = 4 - 2i$, $Z_2 = 1 + 2i$ مثل هندسياً كلاً من هذين العددين ثم مثل في الشكل ذاته كلاً من الأعداد المركبة: $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$, $2Z_1$, $-3Z_2$

$$Z_1 + Z_2 = 5$$
$$Z_1 - Z_2 = 3 - 4i$$
$$2Z_1 = 8 - 4i$$
$$-3Z_2 = -3 - 6i$$



****

ملاحظات ونتائج:

1. القول إن Z عدد حقيقي يعني ان $Im(z) = 0$
2. القول إن Z عدد تخيلي بحت يعني ان $Re(z) = 0$
3. طويلة العدد العقدي Z هو المقدار $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ وهو يمثل الطول OM أي بعد النقطة $M(a,b)$ عن المبدأ O

$$Z = a + ib \to |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$Z = a \to |Z| = |a|$$
$$Z = bi \to |Z| = |b|$$

4. يتساوى عددان عقديان إذا مثلا النقطة ذاتها في المستوي اي: $(a + bi = \grave{a} + \grave{b}i) \Leftrightarrow (a = \grave{a}\ ,\ b = \grave{b})$

(تستخدم في المطابقة بين عددين عقديين)

5. مرافق العدد العقدي $Z = a + bi$ هو $\overline{Z} = a - bi$ حيث $Z.\overline{Z} = a^2 + b^2$ اي $Z.\overline{Z} = |Z|^2$

وتكون النقطة $\acute{M}(a,-b)$ الموافقة للعدد $\overline{Z}$ هي نظيرة النقطة $M(a,b)$ الموافقة للعدد Z بالنسبة لمحور الفواصل

6. عكس العدد العقدي $Z = a + bi$ هو $-Z = -a - bi$

وتكون النقطة $\grave{M}(-a,-b)$ الموافقة للعدد $-Z$ هي نظيرة النقطة $M(a,b)$ الموافقة للعدد Z بالنسبة للمبدا .

7. مقلوب عدد عقدي غير معدوم هو $\frac{1}{Z}$ ولكتابته بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بمرافق Z

مثال: ليكن: $Z_1 = 2 + i$, $Z_2 = 2 - i$, $Z_3 = -1 - i$, $Z_4 = 4i$

اوجد $\frac{Z_1}{Z_2}$, $\frac{Z_3}{Z_1}$, $\frac{Z_3}{Z_4}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(2+i)^2}{4+1} = \frac{4+4i+i^2}{5} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{-1-i}{2+i} = \frac{(-1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-3-i}{5} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{Z_3}{Z_4} = \frac{-1-i}{4i} = \frac{(-1-i)(i)}{(4i)(i)} = \frac{-i-i^2}{4i^2} = \frac{-i+1}{-4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

****

خواص طويلة ومرافق الشكل الجبري للعدد العقدي

ايا ً كان Z_1 , Z_2 عددان عقديان و $n \in N$

$$Z = x + iy$$

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2|$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$|Z^n| = |Z|^n$$

$$|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

$$|\lambda \,.Z| = |\lambda|\,|Z|$$

$|\lambda|$ هي القيمة المطلقة لـ λ حيث $\lambda \in R$

$$\overline{Z} = x - iy$$

$$\overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

$$\overline{Z^n} = \left(\overline{Z}\right)^n$$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$\overline{\lambda.Z} = \lambda \;.\overline{Z}$$

مثال: ليكن العدد المركب $Z_1 = 3 - 4i$, $Z_2 = -2i$

1. اوجد طويلة ومرافق العددان Z_1 , Z_2

$$Z_1 = 3 - 4i \Rightarrow \begin{cases} |Z_1| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \overline{Z_1} = 3 + 4i \end{cases}$$

$$Z_2 = -2i \quad \Rightarrow \begin{cases} |Z_2| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \overline{Z_2} = 2i \end{cases}$$

2. اوجد $|Z_1{}^3|$, $\overline{Z_2}^4$

$$|Z_1{}^3| = |Z_1|^3 = (5)^3 = 125$$

$$\overline{Z_2}^4 = \left(\overline{Z_2}\right)^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$$

3. اوجد $2Z_1 - 3Z_2$, $iZ_2 + Z_1$

$$2Z_1 - 3Z_2 = 2(3-4i) - 3(-2i) = 6 - 8i + 6i = 6 - 2i$$

$$iZ_2 + Z_1 = i(-2i) + 3 - 4i = -2i^2 + 3 - 4i = 5 - 4i$$

مثال: اثبت ان:

$\boxed{a}$ $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}+\dfrac{(1-i)^2}{1-i}=-2i$

$$L_1=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1-2i+i^2}{1-i}=\frac{-2i}{1+i}+\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1-i)-2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{-2i+2i^2-2i-2i^2}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i=L_2$$

$\boxed{b}$ $\dfrac{1}{(1-i)^2}+\dfrac{1}{(2+i)^2}=\dfrac{6+17i}{50}$

$$L_1=\frac{1}{1-2i+i^2}+\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{-2i}+\frac{1}{3+4i}$$
$$=\frac{i}{-2i^2}+\frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{i}{2}+\frac{3-4i}{9+16}=\frac{i}{2}+\frac{3-4i}{25}$$
$$=\frac{25i+6-8i}{50}=\frac{6+17i}{50}=L_2$$

$\boxed{c}$ $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

$$L_1=(1-i)(1+1)(1+i)=2(1-i)(1+i)=2(1-i^2)=2(2)=4=L_2$$

****

ملاحظات: بفرض العدد العقدي $Z=x+yi$, $\overline{Z}=x-yi$

1. $Z.\overline{Z}=x^2+y^2$ ، $\overline{(\overline{Z})}=Z$
2. $Z+\overline{Z}=2x=2Re(z)$
3. $Z-\overline{Z}=2yi=2i\ Im(z)$
4. يكون Z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $\overline{Z}=Z$
5. يكون Z عدد تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $\overline{Z}=-Z$
6. إذا كان $|Z|=1$ فإن $\overline{Z}=\frac{1}{z}$
7. إذا كان $Z_1=x_1+iy_1$ و $Z_2=x_2+iy_2$ فإن:
$$Z_1=Z_2 \iff (x_1=x_2 \ \wedge\ y_1=y_2)$$
8. إذا كان $Z=x+yi$ فإن: $Z=0 \iff (x=0 \ \wedge\ y=0)$

****

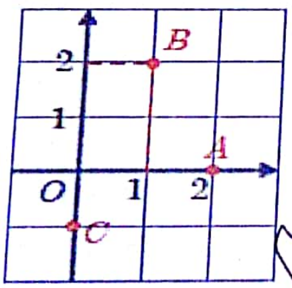
تدرب صفحة 105 :

1) ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة M في المستوي.

وليكن $Z_1=2+xi$ و $Z_2=3+x+4i$

اكتب Z_1, Z_2 بالشكل الجبري في حالة:

$M=A$ او $M=B$ او $M=C$ حيث A,B,C مبينة في الشكل المجاور.



كون x عدد عقدي فهو يكتب بالشكل $x=a+bi$

$\boxed{I}$ $M=A \Rightarrow x=2$

♦ $Z_1=2+2i$

♦ $Z_2=3+2+4i$
$=5+4i$

$\boxed{II}$ $M=B \Rightarrow x=1+2i$

♦ $Z_1=2+(1+2i)i$
$=2+i+2i^2=i$

♦ $Z_2=3+(1+2i)+4i$
$=4+6i$

$\boxed{III}$ $M=C \Rightarrow x=-i$

♦ $Z_1=2+(-i)i$
$=3$

♦ $Z_2=3+(-i)+4i$
$=3+3i$

2) في حالة عدد عقدي Z نضع $P(Z) = Z^3 - (1-i)Z^2 - (4-5i)Z + (4+6i)$
احسب كلاً من $P(i)$, $P(-2)$, $P(3-2i)$

$$P(Z) = Z^3 - (1-i)Z^2 - (4-5i)Z + (4+6i)$$

- $P(i) = i^3 - (1-i)i^2 - (4-5i)i + (4+6i)$
$= -i + 1 - i - 4i - 5 + 4 + 6i$
$= -6i + 6i - 4 + 4 = 0$
- $P(-2) = (-2)^3 - (1-i)(-2)^2 - (4-5i)(-2) + (4+6i)$
$= -8 - 4(1-i) + 2(4-5i) + 4 + 6i$
$= -8 - 4 + 4i + 8 - 10i + 4 + 6i = 0$
- $P(3-2i) = (3-2i)^3 - (1-i)(3-2i)^2 - (4-5i)(3-2i) + (4+6i)$
$= (3-2i)[(3-2i)^2 - (1-i)(3-2i) - (4-5i)] + 4 + 6i$
$= (3-2i)[(9-12i-4) + (-1+i)(3-2i) - 4 + 5i] + 4 + 6i$
$= (3-2i)[5-12i + (-3+2i+3i+2) - 4 + 5i] + 4 + 6i$
$= (3-2i)[5-12i-1+5i-4+5i] + 4 + 6i$
$= (3-2i)(-2i) + 4 + 6i$
$= -6i - 4 + 4 + 6i = 0$

---

3) بسط العبارتين:

$\boxed{1}$ $Z = \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$ نوحد المقامات :

$$= \frac{(\sqrt{2}+i)^2}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)} + \frac{(\sqrt{2}-i)^2}{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)}$$
$$= \frac{2+2\sqrt{2}\,i - 1 + 2 - 2\sqrt{2}\,i - 1}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$$
$$= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{2}$ $w = (1+i)^8$
$= [(1+i)^2]^4$
$= [1+2i-1]^4$
$= [2i]^4 = 16$

---

4) اعط الشكل الجبري للأعداد العقدية الآتية:

$\boxed{1}$ $Z_1 = (2+i)(3-2i)$
$= 6 - 4i + 3i - 2i^2$
$= 6 - i + 2 = 8 - i$

$\boxed{2}$ $Z_2 = (1+i)^2$
$= 1 + 2i + i^2$
$= 1 + 2i - 1 = 2i$

$\boxed{3}$ $Z_3 = (1-i)^2$
$= 1 - 2i + i^2$
$= 1 - 2i - 1 = -2i$

$\boxed{4}$ $Z_4 = (1+2i)(1-2i)$
$= (1)^2 - (2i)^2$
$= 1 + 4 = 5$

$\boxed{5}$ $Z_5 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$
$= (3)^2 - (i\sqrt{5})^2$
$= 9 + 5 = 14$

$\boxed{6}$ $Z_6 = (4-3i)^2$
$= 16 - 24i + 9i^2$
$= 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

$\boxed{7}\; Z_7 = \dfrac{4-6i}{3+2i}$

$$= \frac{(4-6i)}{(3+2i)} \cdot \frac{(3-2i)}{(3-2i)}$$

$$= \frac{12-8i-18i+12i^2}{9+4}$$

$$= \frac{12-26i-12}{13} = \frac{-26i}{13} = -2i$$

$\boxed{8}\; Z_8 = \dfrac{1}{2-i}$

$$= \frac{1}{(2-i)} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)}$$

$$= \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$\boxed{9}\; Z_9 = \dfrac{3-6i}{3+i} + \dfrac{4}{3-i}$ نوحد المقامات

$$= \frac{(3-6i)(3-i)+4(3+i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{9-3i-18i+6i^2+12+4i}{9+1}$$

$$= \frac{15-17i}{10} = \frac{15}{10} - \frac{17}{10}i$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i$$

$\boxed{10}\; Z_{10} = \left(\dfrac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

$$= \left[\frac{2(2-3i)}{(2-3i)}\right]\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$$

$$= \frac{(2+6i)}{(3+2i)} \cdot \frac{(3-2i)}{(3-2i)}$$

$$= \frac{6-4i+18i-12i^2}{9+4}$$

$$= \frac{18+14i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$$

****

تدرب صفحة 107 :

1) اكتب بدلالة $\overline{Z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية Z الآتية:

$\boxed{1}\; Z = (Z-1)(Z+i)$

$$\overline{Z} = \overline{(Z-1)(Z+i)}$$

$$= \overline{(Z-1)}\;\overline{(Z+i)}$$

$$= (\overline{Z}-1)(\overline{Z}-i)$$

$\boxed{2}\; Z = \dfrac{3Z^2-2iZ+4}{2Z-3i}$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{3Z^2}-\overline{2iZ}+4}{\overline{2Z}-\overline{3i}}$$

$$= \frac{3\overline{Z}^2+2i\overline{Z}+4}{2\overline{Z}+3i}$$

$\boxed{3}\; Z = Z^3+2iZ^2+1-3i$

$$\overline{Z} = \overline{Z^3}+\overline{2iZ^2}+1-\overline{3i}$$

$$= \overline{Z}^3 - 2i\overline{Z}^2 + 1 + 3i$$

$\boxed{4}\; Z = (1+2iZ)^3$

$$\overline{Z} = \overline{(1+2iZ)^3}$$

$$= (1-2i\overline{Z})^3$$

---

2) حل كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول Z حيث: $Z = a+bi$

$\boxed{1}\; Z - 2\overline{Z} = 2$

$$a+bi-2(a-bi) = 2$$

$$a+bi-2a+2bi = 2$$

$$-a+3bi = 2$$

$$-a+3bi = 2+0i$$

بالمطابقة نجد :

$$-a = 2 \Longrightarrow \boxed{a=-2}$$

$$3b = 0 \Longrightarrow \boxed{b=0}$$

ومنه $\boxed{Z=-2}$

$\boxed{2}\; 2iZ + \overline{Z} = 3+3i$

$$2i(a+bi)+(a-bi) = 3+3i$$

$$2ai-2b+a-bi = 3+3i$$

$$(a-2b)+(2a-b)i = 3+3i$$

بالمطابقة نجد : $\big\}\; a-2b=3 \;\boxed{1}\;,\; 2a-b=3\;\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ $\rightarrow a = 3+2b\;\boxed{*}$

$\xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{2}} 2(3+2b)-b = 3 \Longrightarrow \boxed{b=-1}$

$\xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{*}} \boxed{a=1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z=1-i}$

$\boxed{3}$ $2\overline{Z} = i - 1$

طريقة أولى:

$2(a - bi) = i - 1$

$2a - 2bi = -1 + i$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}} \\ -2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-1}{2}} \end{cases}$$

ومنه $\boxed{Z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i}$

طريقة ثانية:

نأخذ مرافق الطرفين : $\overline{Z} = \frac{i-1}{2}$

$Z = \frac{-i-1}{2}$

ومنه $\boxed{Z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i}$

$\boxed{4}$ $\frac{\overline{Z} - 1}{\overline{Z} + 1} = i$

طريقة أولى:

$\overline{Z} - 1 = i(\overline{Z} + 1)$

$a - bi - 1 = i(a - bi + 1)$

$(a - 1) + (-b)i = b + (a + 1)i$

$$\left.\begin{array}{l} a - 1 = b \quad \boxed{1} \\ -b = a + 1 \quad \boxed{2} \end{array}\right\}$$

$-(a - 1) = a + 1$

نعوض $\boxed{1}$ في $\boxed{2}$ فنجد :

$-a + 1 = a + 1$

$\boxed{a = 0} \xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} \boxed{b = -1}$

ومنه $\boxed{Z = -i}$

طريقة ثانية:

$\overline{Z} - 1 = i(\overline{Z} + 1)$

$\overline{Z} - 1 = i\overline{Z} + i$

$\overline{Z} - i\overline{Z} = 1 + i$

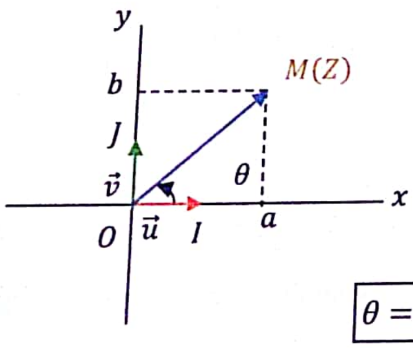
$\overline{Z}(1 - i) = 1 + i$

$\overline{Z} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{1+1} = i$

$\overline{Z} = i$

ومنه $\boxed{Z = -i}$

الشكل المثلثي للعدد العقدي:



نزود المستوي بمعلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث $(\overrightarrow{OI} = \vec{u} \ , \ \overrightarrow{OJ} = \vec{v})$

بفرض $M(a, b)$ هي صورة العدد العقدي $Z = a + bi$

حيث M مختلفة عن المبدا O

إن $r = OM$ والزاوية $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ نسمي الزوج المرتب (r, θ) الذي يحقق:

$\boxed{r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\boxed{\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})}$

زوجاً من الإحداثيات القطبية للنقطة M ويعبر عن ذلك بالكتابة $M(r, \theta)$

ويكون $a = r\cos\theta \ , b = r\sin\theta$

ومنه $\boxed{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ الشكل المثلثي للعدد العقدي Z

ملاحظة: ① نسمي زاوية للعدد العقدي Z ، ونرمزها $arg(Z)$ وهي قياس الزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ بالراديان.

② $r > 0$ كون $r = |Z|$ حيث $r \in R$

③ Z عدد حقيقي $\Leftrightarrow arg(Z) \in \{0, \pi\}$

④ Z عدد تخيلي بحت $\Leftrightarrow arg(Z) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

كتابة العدد العقدي Z بالشكل المثلثي:

نعلم أن الشكل الجبري يعطى بالشكل: $Z = a + bi$

$$|Z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\theta = ?} \Longrightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ملاحظات:

1. للتحويل من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي نحتاج إلى θ, r

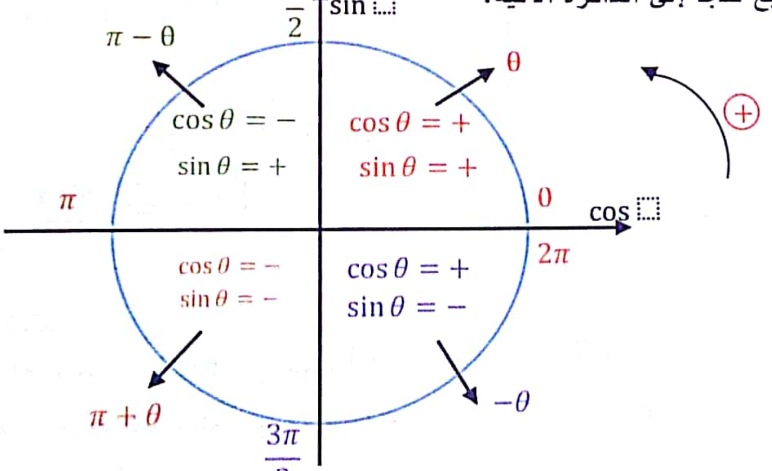
2. $\overbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}^{\text{مثلثي}} = \overbrace{Z = a + bi}^{\text{جبري}}$ وبالمطابقة (حقيقي = حقيقي ، تخيلي = تخيلي)

3. $\overline{Z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

4. النسب المثلثية للزوايا الشهيرة:

θ	2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\cos\theta$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

5. لمعرفة قياس الزاوية وفي أي ربع نلجأ إلى الدائرة الآتية:



****

تمارين: اكتب الأعداد المركبة الآتية بالشكل المثلثي:

$\boxed{1}$ $Z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{2}$ $Z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

وائل زعترية 0933699123 ياسر السالمة 0949198068 علاء رحال 0952480990

$\boxed{3}$ $Z_3 = -1 - \sqrt{3}\, i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{4}$ $Z_4 = 1 - \sqrt{3}\, i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_4 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}$$

تمرين: ليكن العدد العقدي Z الذي طويلته 2 وزاويته $\frac{5\pi}{4}$ أعط الشكل الجبري لـ Z

$$\begin{aligned} Z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

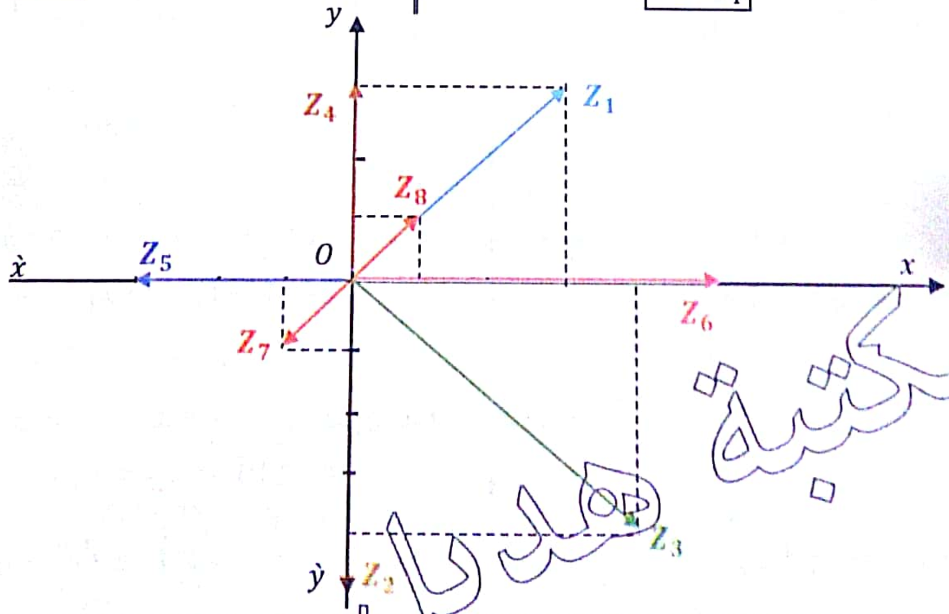
$\frac{5\pi}{4} = 225$ تقع في الربع الثالث :

تدرب صفحة 110 :

1) مثل الأعداد الآتية في المستوي العقدي، ثم أعط زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات.

$1+i\ ,\ -1-i\ ,5\ ,-3\ ,\ 3i\ ,\ 4-4i\ ,-5i\ ,3+3i$

$Z_1 = 3+3i$	$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}$	$Z_2 = -5i$	$\boxed{\theta_2 = \frac{-\pi}{2}}$
$Z_3 = 4-4i$	$\boxed{\theta_3 = \frac{-\pi}{4}}$	$Z_4 = 3i$	$\boxed{\theta_4 = \frac{\pi}{2}}$
$Z_5 = -3$	$\boxed{\theta_5 = \pi}$	$Z_6 = 5$	$\boxed{\theta_6 = 0}$
$Z_7 = -1-i$	$\boxed{\theta_7 = \frac{5\pi}{4}}$	$Z_8 = 1+i$	$\boxed{\theta_8 = \frac{\pi}{4}}$



2) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$\boxed{1}$ $Z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$\boxed{2}$ $Z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{4+12} = 4$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{3}$ $Z_3 = 4 - 4i$

$r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)}$$

$\boxed{4}$ $Z_4 = -2i$

$r = \sqrt{0+4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = 0 \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2} = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{2}}$$

$$\boxed{Z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$\boxed{5}$ $Z_5 = \frac{-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$r = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_5 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{6}$ $Z_6 = \frac{4}{1-i}$

$$= \frac{4}{(1-i)}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{4+4i}{2} = \frac{4}{2} + \frac{4i}{2}$$

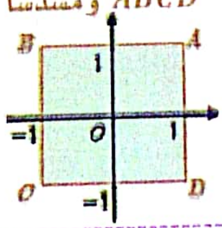
$Z_6 = 2 + 2i$

$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

3) في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس مربعاً $ABCD$ ومسدساً $ABCDEF$ اعط الأعداد العقدية التي تمثل كلاً من رؤوس كل منهما.



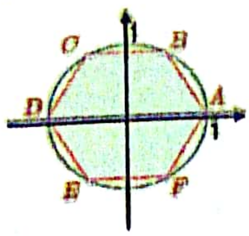
$A(1,1) \Rightarrow Z_A = 1 + i$

$B(-1,1) \Rightarrow Z_B = -1 + i$

$C(-1,-1) \Rightarrow Z_C = -1 - i$

$D(1,-1) \Rightarrow Z_D = 1 - i$

تذكر : في المثلث المتساوي الأضلاع طول ضلعه a يكون طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}a$



$A(1,0) \Rightarrow Z_A = 1$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_C = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$D(-1,0) \Rightarrow Z_D = -1$

$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_E = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_F = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Scanned by CamScanner

4) في كل من الحالات الآتية عين مجموعة النقاط M التي يحقق العدد العقدي Z الذي يمثلها الشرط المعطى:

$\boxed{2}$ $argZ = \frac{-2\pi}{3}$ نصف مستقيم مفتوح المبدا يصنع زاوية مقدارها $\frac{-2\pi}{3}$ مع محور الفواصل	$\boxed{1}$ $argZ = \frac{\pi}{3}$ نصف مستقيم مفتوح المبدا يصنع زاوية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل
$\boxed{4}$ $\|Z\| = 3$ مجموعة النقاط M تقع على محيط دائرة مركزها مبدا الإحداثيات ونصف قطرها $r = 3$	$\boxed{3}$ $argZ = \pi$ نصف مستقيم مفتوح المبدا يصنع زاوية مقدارها π مع محور الفواصل(الأعداد الحقيقية السالبة)
$\boxed{6}$ $Im(z) = 1$ مجموعة النقاط M هي المستقيم $y = 1$	$\boxed{5}$ $Re(Z) = -2$ مجموعة النقاط M هي المستقيم $x = -2$

خواص طويلة عدد عقدي وزاويته بالشكل المثلثي

بفرض Z_2, Z_1 عددين عقديين فإن:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{1}\ |Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2| \\ \boxed{2}\ arg(Z_1.Z_2) = argZ_1 + argZ_2\end{array}\right\} \Rightarrow Z_1.Z_2 = (r_1.r_2)[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{3}\ \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \\ \boxed{4}\ arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = argZ_1 - argZ_2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$\boxed{5}$ $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$

$\boxed{6}$ $arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -arg(Z)$

$\boxed{7}$ $arg(Z)^n = n\ arg(Z)$

تمرين: بفرض $Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ ، $Z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$ عندئذ:

$|Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2| = 2\times 3 = 6$

$arg(Z_1.Z_2) = \left(\frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{20} \Rightarrow Z_1.Z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{20}\right)\right)$

ملاحظة:

اياً كان العدد العقدي غير المعدوم Z و ايا كان العدد الطبيعي n كان:

$$|Z^n| = |Z|^n$$

وعند وضع $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نجد:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

دستور دوموافر

في الحالة الخاصة الموافقة لعدد عقدي طويلته تساوي 1 اي $(r = 1)$ فإن دستور دوموافر يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

تمرين: اكتب بأبسط صيغة ممكنة: $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}$

$$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3} \overset{\text{دوموافر}}{\cong} \frac{\cos 10\theta+i\sin 10\theta}{\cos 9\theta+i\sin 9\theta} = \cos\theta+i\sin\theta$$

تمرين: اكتب كلاً مما يلي بالشكل الجبري:

$$\boxed{a}\ \left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4 \overset{\text{دوموافر}}{\cong} \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2} = 0-i=-i$$

$$\boxed{b}\ \left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3} \overset{\text{دوموافر}}{\cong} \cos\frac{-7\pi}{4}+i\sin\frac{-7\pi}{4}$$

$$= \cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$= \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right) &= -\sin\frac{7\pi}{4}\\ \cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) &= \cos\frac{7\pi}{4}\end{aligned}}$$

تمرين: بفرض $Z=\frac{(1+i)^4}{(\sqrt3+i)^3}$ اكتب Z بأبسط صورة واستنتج $|Z|$ ، $argZ$

لحساب القوى نستعمل التمثيل المثلثي:

$Z_1=(1+i)^4$

لنكتب $(1+i)$ بالشكل المثلثي: $r=\sqrt2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt2}\\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i) = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1=(1+i)^4=\left[\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$

$$=4(\cos\pi+i\sin\pi)=4(-1+0)$$

$$\boxed{Z_1=(1+i)^4=-4}$$

$Z_2=\left(\sqrt3+i\right)^3$

لنكتب $(\sqrt3+i)$ بالشكل المثلثي: $r=2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\sqrt3}{2}\\ \sin\theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

$$(\sqrt3+i)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z_2=\left(\sqrt3+i\right)^3=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3$$

$$=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8(0+i)$$

$$\boxed{Z_2=\left(\sqrt3+i\right)^3=8i}$$

$$Z=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt3+i\right)^3}=\frac{-4}{8i}=\frac{-1}{2i}=\frac{1}{2}i$$

$$|Z|=\sqrt{0+\frac14}=\frac12$$

$$argZ=arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=argZ_1-argZ_2=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

تدرب صفحة 113 :

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد:

[1] $Z = (1-i)^2$

لنكتب $1 - i$ بالشكل المثلثي:

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{4}} \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{Z = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^2 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\ \sin\frac{-\pi}{2}\right)}$$

---

[2] $Z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$

$\boldsymbol{Z_1 = 1 - i\sqrt{3}}$

$r = 2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}$$

$\boldsymbol{Z_2 = 1 + i}$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-7\pi}{12} + i\ \sin\frac{-7\pi}{12}\right)$$

---

[3] $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{i}\right)^5$

$$= \left(\frac{(\sqrt{3} - i)}{i} \cdot \frac{i}{i}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}\,i + 1}{-1}\right)^5 = (-1 - \sqrt{3}\,i)^5$$

لنكتب $-1 - \sqrt{3}\,i$ بالشكل المثلثي:

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{4\pi}{3}} \Rightarrow -1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{Z = \left[2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right]^5 = 32\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\ \sin\frac{20\pi}{3}\right)}$$

2) نعطى العددين العقديين $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ ، $Z_2 = 1 - i$

1. اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد $Z_1 , Z_2 , \frac{Z_1}{Z_2}$

$$Z_2 = 1 - i$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\ \sin\frac{-\pi}{4}\right)}$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{6}}$$

$$\boxed{Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\ \sin\frac{-\pi}{6}\right)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\ \sin\frac{-\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\ \sin\frac{-\pi}{4}\right)} = \cos\frac{\pi}{12} + i\ \sin\frac{\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i\ \sin\frac{\pi}{12}}$$

2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{2(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} - i^2\sqrt{2}}{2(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\,i}$$

3. استنتج ان $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

بالتساوي بين الشكلين المثلثي والجبري نجد:

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

بالمطابقة نجد ان :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

---

3) اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1 + i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$ واخيراً احسب العددين:

$\boxed{1}$ $Z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$ $\boxed{2}$ $Z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$

لنكتب $1 + i\sqrt{3}$ بالشكل المثلثي

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

إذاً نستنتج ان $(1 - i\sqrt{3})$ يكتب بالشكل المثلثي:

$$\boxed{1 - \sqrt{3}\, i = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\ \sin\frac{-\pi}{3}\right)}$$

$$* \ (1+\sqrt{3}\, i)^5 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ \sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 16 - 16\sqrt{3}\, i$$

$$* \ (1-\sqrt{3}\, i)^5 = \overline{(1+\sqrt{3}\, i)^5} = \overline{16 - 16\sqrt{3}\, i}$$

$$= 16 + 16\sqrt{3}\, i$$

$\boxed{1}$ $$\boldsymbol{Z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5}$$

$$= (16 - 16\sqrt{3}\, i) + (16 + 16\sqrt{3}\, i) = 32$$

$\boxed{2}$ $$\boldsymbol{Z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5}$$

$$= (16 - 16\sqrt{3}\, i) - (16 + 16\sqrt{3}\, i) = -32\sqrt{3}\ i$$

---

4) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$\boxed{1}$ $$Z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$$

$$= \cos\frac{6\pi}{8} + i\ \sin\frac{6\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}$$

$\boxed{2}$ $$Z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\ \cos\frac{\pi}{5}\right)^6$$

بشكل عام:

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad , \quad \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right]^6$$

$$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]^6$$

$$= \cos\frac{18\pi}{10} + i\sin\frac{18\pi}{10}$$

$$= \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} = \cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}$$

$\boxed{3}$ $$Z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\ \sin\frac{\pi}{9}\right)$$

نكتب $(1+i)$ بالشكل المثلثي:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

إذاً : $$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\ \sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= (\sqrt{2})(1)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{13\pi}{36} + i\ \sin\frac{13\pi}{36}\right]$$

$\boxed{4}$ $$Z = (1+i)^{2016}$$

$$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2016}$$

$$= (\sqrt{2})^{2016}\left(\cos\frac{2016\,\pi}{4} + i\sin\frac{2016\,\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{1008}(\cos 504\,\pi + i\ \sin 504\,\pi)$$

$$= 2^{1008}(\cos 0 + i\sin 0)$$

الشكل الأسي لعدد عقدي:

بفرض Z عدد عقدي طويلته تساوي 1 اي $1 = |Z| = r$ فإن الشكل الأسي للعدد العقدي Z هو:

$$\boxed{Z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

وإذا كان $1 \neq |Z| = r$ فإن الشكل الأسي للعدد العقدي Z هو:

$$\boxed{Z = |Z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

ملاحظات ونتائج:

.1	$e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{-\pi}{2}i} = -i$	$e^{\frac{\pi}{2}i} = +i$	$e^{\pi i} = -1$	$e^{2\pi i} = +1$
.2	$re^{i\theta} \times \grave{r}e^{i\grave{\theta}} = (r.\grave{r})e^{(\theta+\grave{\theta})i}$		$\frac{re^{i\theta}}{\grave{r}e^{i\grave{\theta}}} = \frac{r}{\grave{r}}e^{(\theta-\grave{\theta})i}$	
.3	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$		$(re^{i\theta} = \grave{r}e^{i\grave{\theta}}) \Leftrightarrow \begin{cases} r = \grave{r} \\ \theta = \grave{\theta} + 2\pi k \end{cases}$	
.4	دستور دوموافر في الشكل الأسي $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$			
.5	$\overline{Z} = r\,e^{-i\theta} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$		$Z = r\,e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$	
.6	علاقتا أويلر			

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \quad \boxed{+}$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad (\div 2)$$

$$\boxed{\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \quad \boxed{-}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \quad (\div 2i)$$

$$\boxed{\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta}$$

تمرين: ليكن Z عدد عقدي طويلته الواحد برهن صحة كل مما يلي:

♦ $\frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1} = i\tan\theta \qquad ; Z \neq \{i, -i\}$

بما ان $(Z = e^{i\theta} \Leftarrow |Z| = r = 1)$

$$L_1 = \frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \underset{\text{حسب اويلر}}{=} \frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta} = i\tan\theta = L_2$$

تدريب: ليكن $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ اعط الشكل الأسي للعدد العقدي $Z = 1 + e^{2\theta i}$

$$Z = 1 + e^{2\theta i} = e^{\theta i}\left[\frac{1}{e^{\theta i}} + e^{\theta i}\right] = e^{\theta i}[e^{-\theta i} + e^{\theta i}] = 2\cos\theta\, e^{\theta i}$$

بما ان $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\theta > 0$ وبالتالي الشكل الأسي للعدد هو: $Z = 2\cos\theta\, e^{\theta i}$

****

تدرب صفحة 116 :

1) نضع $Z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, $Z_2 = 3e^{\frac{-\pi}{4}i}$, $Z_3 = \sqrt{2}\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$ جد الشكل الأسي للأعداد الآتية:

$Z_1.Z_2$, $\frac{Z_1}{Z_2}$, Z_1^3 , $Z_1.Z_2.Z_3$, Z_3^4 , $\frac{Z_2}{Z_3}$

♦ $Z_1.Z_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}.3e^{\frac{-\pi}{4}i} = 3e^{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)i} = 3e^{\frac{\pi}{12}i}$

◆ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{3e^{\frac{-\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}.e^{\frac{\pi}{4}i}}{3} = \frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{12}i}$

◆ $Z_1^3 = \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^3 = e^{\frac{3\pi}{3}i} = e^{\pi i}$

◆ $Z_1.Z_2.Z_3 = (Z_1.Z_2)(Z_3) = \left(3e^{\frac{\pi}{12}i}\right).\left(\sqrt{2}.e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = 3\sqrt{2}.e^{\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = 3\sqrt{2}.e^{\frac{9\pi}{12}i} = 3\sqrt{2}.e^{\frac{3\pi}{4}i}$

◆ $Z_3^4 = \left(\sqrt{2}.e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{\frac{8\pi}{3}i} = 4e^{\frac{8\pi}{3}i} = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

◆ $\frac{Z_2}{Z_3} = \frac{3.e^{\frac{-\pi}{4}i}}{\sqrt{2}.e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{\frac{-\pi}{4}i}.e^{\frac{-2\pi}{3}i} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)i} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{\frac{-11\pi}{12}i}$

---

2) اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

$r = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{Z_1 = 4\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}}$

$Z_2 = (1+i)\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}.\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= \sqrt{6}.e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}$

$\boxed{Z_2 = \sqrt{6}.e^{\frac{7\pi}{12}i}}$

$Z = 1+i$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$Z = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z_3 = (1-\sqrt{2}).e^{\frac{\pi}{4}i}$

$= (\sqrt{2}-1)e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$= (\sqrt{2}-1)e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i}$

$\boxed{Z_3 = (\sqrt{2}-1).e^{\frac{5\pi}{4}i}}$

بما ان r يجب ان تكون

نكتب:

$(1-\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}-1)$

$= (\sqrt{2}-1).e^{\pi i}$

$;(e^{\pi i} = -1)$

$Z_4 = (1+i\sqrt{3})^4$

$= \left(2.e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4$

$= (2)^4.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$\boxed{Z_4 = 16.e^{\frac{4\pi}{3}i}}$

$Z = 1+\sqrt{3}i$

$r = 2$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$Z = 2.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$Z_5 = \frac{6}{1+i}$

$= \frac{6}{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}}$

$\boxed{Z_5 = 3\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{4}i}}$

$Z = 1+i$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$Z = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z_6 = (1+i\sqrt{3})^4.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

وجدنا من Z_4 ان:

$(1+i\sqrt{3})^4 = 16.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$Z_6 = 16.e^{\frac{4\pi}{3}i}.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$= 16.e^{\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)i}$

$Z_6 = 16.e^{\frac{8\pi}{3}i} = 16.e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$Z_7 = \left[\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right]^5$$

وجدنا ان:

$$1+i = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$
$$\sqrt{3}+i = 2.e^{\frac{\pi}{6}i}$$

ومنه :

$$Z_7 = \left[\frac{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}}{2.e^{\frac{\pi}{6}i}}\right]^5 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)i}\right]^5$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^5}.\left[e^{\left(\frac{\pi}{12}\right)i}\right]^5$$
$$\boxed{Z_7 = \frac{1}{4\sqrt{2}}.e^{\frac{5\pi}{12}i}}$$

$$Z_8 = \frac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$$

$Z = 2\sqrt{3}+2i$
$r = 4$
$$\left.\begin{matrix}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$Z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$\grave{Z} = 1-i$
$r = \sqrt{2}$
$$\left.\begin{matrix}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$
$$\grave{Z} = \sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{4}i}$$

$$Z_8 = \frac{\left(4.e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^5}{\left(\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^4} = \frac{(4)^5.e^{\frac{5\pi}{6}i}}{(\sqrt{2})^4.e^{\frac{-4\pi}{4}i}} = (4)^4.e^{\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)i}$$
$$\boxed{Z_8 = 256.e^{\frac{11\pi}{6}i}}$$

$$Z_9 = -12.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

نعلم ان: $(e^{\pi i} = -1)$

$$= 12e^{\pi i}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$
$$= 12e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i}$$
$$\boxed{Z_9 = 12.e^{\frac{5\pi}{4}i}}$$

$$Z_{10} = 3i.e^{\frac{\pi}{3}i}$$

نعلم ان: $\left(e^{\frac{\pi}{2}i} = i\right)$

$$= 3e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{3}i}$$
$$= 3.e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)i}$$
$$\boxed{Z_{10} = 3.e^{\frac{5\pi}{6}i}}$$

---

3) نضع $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}i}$ بين اي الخواص الآتية صحيحة:

$\boxed{1}$ $|Z| = 1$

نعلم ان: $(-1 = e^{\pi i})$ ومنه:

$$Z = \frac{-\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{3}i}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}.e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{4\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}} = e^{\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)i} = e^{\frac{13\pi}{12}i} \Rightarrow |Z| = 1$$

(صحيحة)

$\boxed{2}$ $Z = -(1-i).e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$= \frac{-(1-i)(1+i)}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{-2}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i} \neq \frac{-\sqrt{2}}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i}$$

(غير صحيحة)

$\boxed{3}$ $argZ = \frac{-\pi}{12}$

وجدنا ان: $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$

$$argZ = \frac{13\pi}{12} \neq \frac{-\pi}{12}$$

(غير صحيحة)

$\boxed{4}$ $Z = e^{\frac{13\pi}{12}i}$

بعد تحويل Z إلى الشكل الأسي نجد $Z = \frac{-\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{3}i}}{1+i} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$ اي ان العلاقة (صحيحة).

المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية:

لتكن المعادلة $aZ^2 + bZ + c = 0$ حيث $a, b, c \in R$ بشرط $a \neq 0$

نوجد المميز Δ: $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز ثلاث حالات

$\Delta < 0$ نوجد $\sqrt{-\Delta}$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان.	$Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$ للمعادلة جذر مضاعف	$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ للمعادلة جذرين حقيقيين.

ملاحظة:

يمكن حل المعادلة من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$ بالإتمام إلى مربع كامل بعد إخراج a عامل مناسب .

****

تمرين: حل في C المعادلة $Z^2 + 4Z + 29 = 0$ بطريقتين.

طريقة الدستور Δ:	طريقة الإتمام إلى مربع كامل:
$Z^2 + 4Z + 29 = 0$ $\Delta = 16 - 4(1)(29) = -100 < 0$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{100} = 10$ $Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i$ $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 10i}{2} = -2 - 5i$	$Z^2 + 4Z + 29 = 0$ $\underbrace{Z^2 + 4Z + 4} - 4 + 29 = 0$ $(Z + 2)^2 + 25 = 0$ $(Z + 2)^2 = -25$ $(Z + 2)^2 = 25i^2$ إما $Z + 2 = 5i \Rightarrow Z = -2 + 5i$ أو $Z + 2 = -5i \Rightarrow Z = -2 - 5i$

تمرين: حل في C المعادلة $Z^2 + 3Z + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(6) = -15 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{15}$

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2} = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3 - i\sqrt{15}}{2} = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

****

ملاحظات:

1. يمكن تحليل كثير الحدود $aZ^2 + bZ + c$ إلى جداء عوامل درجة أولى باستخدام القانون:

$$aZ^2 + bZ + c = a(Z - Z_1)(Z - Z_2)$$

2. لكي نثبت ان Z_1 جذر للمعادلة $aZ^2 + bZ + c = 0$ نعوض Z_1 في المعادلة ويجب ان نحصل على $0 = 0$

3. في المعادلة $aZ^2+bZ+c=0$
إذا كان $\Delta>0$ وكان $a,b,c\in R$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان Z_2,Z_1 مختلفان.
وإذا كان $\Delta<0$ وكان $a,b,c\in R$ فإن للمعادلة جذران عقديان مترافقان أي $Z_2=\overline{Z_1}$ فعند معرفة احد الجذرين يمكن استنتاج الجذر الآخر مباشرة بأخذ المرافق.

4. بفرض Z_2,Z_1 جذرا المعادلة $Z^2+p.Z+q=0$ فإن المعادلة تكتب بالشكل:
$$Z^2-(Z_1+Z_2)Z+(Z_1.Z_2)=0$$
حيث $p=-(Z_1+Z_2)$, $q=Z_1.Z_2$

مثال: حلل في C كثير الحدود $4Z^2-12Z+13$

$$4Z^2-12Z+13=0$$
$$\Delta=144-4(4)(13)$$
$$\Delta=-64<0$$
للمعادلة جذران عقديان مترافقان:
$$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{+64}=8$$

$$Z_1=\frac{12+8i}{8}=\frac{3}{2}+i$$
$$Z_2=\frac{12-8i}{8}=\frac{3}{2}-i$$
$$4Z^2-12Z+13=4\left(Z-\frac{3}{2}-i\right)\left(Z-\frac{3}{2}+i\right)$$

***

تمرين: لتكن المعادلة: $Z^2+Z+1=0$

1. تحقق من ان: $Z_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هو جذر للمعادلة السابقة ثم اوجد الجذر الآخر.

نعوض Z_1 في المعادلة:
$$L_1=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$$
$$=\frac{1}{4}-2.\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\frac{3}{4}i^2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0=L_2$$

فإن: $Z_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هو جذر للمعادلة السابقة.

الجذر الآخر: $Z_2=\overline{Z_1}=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ لأن $a,b,c\in R$

2. اكتب Z^2+Z+1 على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى.
$$Z^2+Z+1=\left(Z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(Z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

***

تمرين: في كل من الحالات الآتية اوجد معادلة من الشكل: $Z^2+pZ+q=0$ حيث العدد Z_1 جذراً لها. حيث $p,q\in R$

$\boxed{1}$ $Z_1=i$
$$Z_2=\overline{Z_1}=-i$$
- $Z_1+Z_2=i-i=0$
- $Z_1.Z_2=(i)(-i)=-i^2=1$
$$Z^2-(Z_1+Z_2)Z+(Z_1.Z_2)=0$$
$$Z^2-0Z+1=0$$
$$\boxed{Z^2+1=0}$$

$\boxed{2}$ $Z_1=5-i$
$$Z_2=\overline{Z_1}=5+i$$
- $Z_1+Z_2=5-i+5+i=10$
- $Z_1.Z_2=(5-i)(5+i)=25+1=26$
$$Z^2-(Z_1+Z_2)Z+(Z_1.Z_2)=0$$
$$\boxed{Z^2-10Z+26=0}$$

تمرين: جد عددين عقديين p, q حتى تقبل المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$ العددين $Z_1 = 3 - i$, $Z_2 = -4 + 2i$ جذرين لها.

نعلم أن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$Z^2 - (z_1 + z_2)Z + (z_1 . z_2) = 0$, $(Z_1 + Z_2 = -p$, $Z_1 . Z_2 = q)$

- $Z_1 + Z_2 = -1 + i = -p \Rightarrow \boxed{p = 1 - i}$
- $Z_1 . Z_2 = -12 + 6i + 4i - 2i^2 = -10 + 10i \Rightarrow \boxed{q = -10 + 10i}$

$Z^2 - (-1 + i)Z - 10 + 10i = 0$

تدرب صفحة 118 :

1) حل في C كلاً من المعادلات الآتية بالمجهولين $Z, \bar{Z}$

$\boxed{1}$ $\begin{cases} 3Z + \bar{Z} = 2 - 5i & (1) \\ Z - \bar{Z} = -2 + i & (2) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow 4Z = -4i \Rightarrow \boxed{Z = -i}$

نعوض في (2) فنجد:

$-i - \bar{Z} = -2 + i$

$\boxed{\bar{Z} = 2 - 2i}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} 3Z + \bar{Z} = 5 + 2i & (1) \\ -Z + \bar{Z} = 1 - 2i & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow 4Z = 4 + 4i \Rightarrow \boxed{Z = 1 + i}$

نعوض في (2) فنجد:

$-1 - i + \bar{Z} = 1 - 2i$

$\boxed{\bar{Z} = 2 - i}$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} 2iZ + \bar{Z} = 2i & (1) \\ 3Z - i\bar{Z} = 1 & (2) \end{cases}$

نضرب طرفي (1) بـ i

$\boxed{1}$ $-2Z + i\bar{Z} = -2$

(2) $3Z - i\bar{Z} = 1$

$(2) + \boxed{1} \Rightarrow \boxed{Z = -1}$

نعوض في (2) فنجد:

$-3 - i\bar{Z} = 1 \Rightarrow -i\bar{Z} = 4$

$\bar{Z} = \frac{-4}{i} \Rightarrow \boxed{\bar{Z} = 4i}$

---

2) حل في C كلاً من المعادلات الآتية:

$\boxed{1}$ $2Z^2 - 6Z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(2)(5) = -4 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i$

$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{6 - 2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i$

$\boxed{2}$ $Z^2 - 5Z + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(1)(9) = -11 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{11}$

$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{5 + \sqrt{11}\, i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i$

$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{5 - \sqrt{11}\, i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i$

3 $Z^2 + Z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{3}$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

4 $Z^2 - 2Z + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 + \sqrt{2}\, i$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 - \sqrt{2}\, i$$

5 $Z^2 - 2(1+\sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$Z^2 - 2(1+\sqrt{2})Z + (1+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2}+2) = 0$$

$$\left(Z - (1+\sqrt{2})\right)^2 - (1 + 2\sqrt{2} + 2) + 2\sqrt{2} + 4 = 0$$

$$(Z - 1 - \sqrt{2})^2 - 1 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 4 = 0$$

$$(Z - 1 - \sqrt{2})^2 + 1 = 0$$

$$(Z - 1 - \sqrt{2})^2 - i^2 = 0$$

$$(Z - 1 - \sqrt{2} - i)(Z - 1 - \sqrt{2} + i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 1 + \sqrt{2} + i \\ Z_2 = 1 + \sqrt{2} - i \end{cases}$$

6 $Z^2 - 2(\cos\theta)Z + 1 = 0$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$Z^2 - 2(\cos\theta)Z + \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1 = 0$$

$$(Z - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + 1 = 0$$

$$(Z - \cos\theta)^2 = \cos^2\theta - 1$$

$$(Z - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta$$

$$(Z - \cos\theta)^2 = i^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z - \cos\theta = i\sin\theta \\ \quad Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \text{او } Z - \cos\theta = -i\sin\theta \\ \quad Z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}$$

---

3) جد عددين عقديين q, p كي تقبل المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$ العددين $1 + 2i$, $3 - 5i$ جذرين لها.

ليكن Z_1 , Z_2 جذران للمعادلة، نعلم أن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$$Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + (Z_1 . Z_2) = 0 \quad , \quad (Z_1 + Z_2 = -p \quad , \quad Z_1 . Z_2 = q)$$

- $Z_1 + Z_2 = 3 - 5i + 1 + 2i = 4 - 3i = -p \Rightarrow \boxed{p = -4 + 3i}$
- $Z_1 . Z_2 = (3 - 5i)(1 + 2i) = 3 + 6i - 5i + 10 = 13 + i \Rightarrow \boxed{q = 13 + i}$

---

4) احسب جداء الضرب $(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5)$ ثم حل في C المعادلة:

$$Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$$

- $(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5) = Z^4 + 2Z^3 + 5Z^2 + 2Z^3 + 4Z^2 + 10Z - 3Z^2 - 6Z - 15$
  $= Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15$
- $Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$

$(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5) = 0$

إما $Z^2 + 2Z - 3 = 0$

$(Z + 3)(Z - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{Z_1 = -3} \\ \text{او } Z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{Z_2 = 1} \end{cases}$$

او $Z^2 + 2Z + 5 = 0$: بالإتمام إلى مربع كامل

$Z^2 + 2Z + 1 - 1 + 5 = 0$

$(Z + 1)^2 + 4 = 0$

$(Z + 1)^2 = 4i^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z + 1 = 2i \Rightarrow \boxed{Z_3 = -1 + 2i} \\ \text{او } Z + 1 = -2i \Rightarrow \boxed{Z_4 = -1 - 2i} \end{cases}$$

الجذور التربيعية

نقول ان $w = x + yi$ جذر تربيعي للعدد المركب $Z = a + bi$ إذا وفقط إذا كان $w^2 = Z$.

$$|w^2| = |Z|$$
$$|w|^2 = |Z|$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$w^2 = Z$$
$$(x+iy)^2 = a+bi$$
$$x^2 + 2xy\,i + \underbrace{i^2}_{-1} y^2 = a+bi$$
$$\underline{\underline{x^2-y^2}} + \underline{2xy}\,i = \underline{\underline{a}} + \underline{b}i$$

بالمطابقة

$$x^2 - y^2 = a$$
$$2xy = b$$

تمرين: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 3 + 4i$

نفرض $w = x + yi$ هو الجذر التربيعي لـ Z ومنه:

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = 3$

$\boxed{3}\ 2xy = 4$

$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$ إما $x = +2$ أو $x = -2$

$\boxed{1} - \boxed{2} \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1$ إما $y = 1$ أو $y = -1$

من $\boxed{3}$ نجد ان y, x لهما نفس الإشارة ومنه:

$$w_1 = 2 + i \quad , \quad w_2 = -2 - i$$

تمرين: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 1 - 4\sqrt{5}\,i$

نفرض $w = x + i\,y$ هو الجذر التربيعي لـ Z ومنه:

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = 9$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = 1$

$\boxed{3}\ 2xy = -4\sqrt{5}$

$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5$ إما $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$

$\boxed{1} - \boxed{2} \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$ إما $y = 2$ أو $y = -2$

من $\boxed{3}$ نجد ان y, x لهما إشارتين مختلفتين ومنه:

$$w_1 = \sqrt{5} - 2i \quad , \quad w_2 = -\sqrt{5} + 2i$$

****

المعادلات في C

1 معادلة تحوي مجهول Z بالأشكال الآتية:

a. تحوي Z فقط
b. تحوي $\overline{Z}$ فقط
} بالعزل نحصل على Z

c. تحوي Z و $\overline{Z}$

هنا نبدل كل $Z = x + yi$ و $\overline{Z} = x - yi$

ننشر ونعزل المجاهيل إلى طرف و المعاليم إلى طرف آخر

نقارن القسم الحقيقي في الطرفين

نقارن القسم التخيلي في الطرفين

نحل المعادلات الناتجة فنتنج قيمتي x و y ومنهما نحصل على $Z = x + yi$

مثال : حل في C المعادلات الآتية بالمجهول Z:

1 $3\overline{Z} - 9 = 6 + 3i$

$$3\overline{Z} = 6 + 3i + 9$$
$$3\overline{Z} = 15 + 3i$$
$$\overline{Z} = 5 + i$$
$$Z = 5 - i$$

2 $2Z - 10i = 4 + 6i$

$$2Z = 10i + 4 + 6i$$
$$2Z = 4 + 16i$$
$$Z = 2 + 8i$$

3 $\dfrac{\overline{Z} - i}{\overline{Z} + 2} = i$

$$\overline{Z} - i = i(\overline{Z} + 2)$$
$$\overline{Z} - i = i\overline{Z} + 2i$$
$$\overline{Z} - i\overline{Z} = 2i + i$$
$$\overline{Z}(1 - i) = 3i$$
$$\overline{Z} = \frac{3i}{1 - i}$$
$$\overline{Z} = \frac{3i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$
$$\overline{Z} = \frac{-3 + 3i}{1 + 1}$$
$$\overline{Z} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$Z = \frac{-3}{2} - \frac{3}{2}i$$

4 $2Z + i\overline{Z} = 5 + 10i$

نبدل كل $Z = x + yi$

وكل $\overline{Z} = x - yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 + 10i$$
$$2x + 2yi + xi + y = 5 + 10i$$
$$2x + y + (x + 2y)i \underset{\text{بالمقارنة}}{=} 5 + 10i$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + y = 5 & ① \\ x + 2y = 10 & ② \end{array}\right\}$$

نضرب ② بـ (-2) ونجمعها مع ①:

$$-2x - 4y = -20$$
$$\underline{2x + y = 5}$$
$$-3y = -15$$
$$\boxed{y = 5}$$

نعوض في ① فنجد : $\boxed{x = 0}$

و منه : $Z = 0 + 5i = 5i$

2 حل جملة معادلتين بمجهولين $Z , \acute{Z}$:

طريقة الحل :

1) بالتعويض 2) بالجمع 3) بالتساوي

مثال : حل في C جملة المعادلتين بالمجهولين $Z , \acute{Z}$:

$$\begin{cases} ① & 2Z + i\acute{Z} = 5 + 10i \\ ② & 2iZ + 3\acute{Z} = 6 + i \end{cases}$$

نضرب ① بـ $(-i)$ ونجمعها مع ②:

$$\begin{aligned} -2iZ + \acute{Z} &= 10 - 5i \\ 2iZ + 3\acute{Z} &= 6 + i \end{aligned} \quad \text{بالجمع}$$

$$4\acute{Z} = 16 - 4i$$

$$\boxed{\acute{Z} = 4 - i}$$

نعوض في المعادلة ① :

$$2Z + i(4 - i) = 5 + 10i$$

$$2Z + 4i + 1 = 5 + 10i$$

$$2Z = 4 + 6i$$

$$\boxed{Z = 2 + 3i}$$

---

3 حل معادلة من الشكل : $Z^2 = w = a + bi$, أو بمعنى آخر إيجاد الجذور التربيعية للعدد العقدي:

مثال : حل المعادلة $w = -5 + 12i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w فنجد:

① $x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$

② $x^2 - y^2 = -5$

③ $2xy = 12 > 0$

①+②: $2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

①−②: $2y^2 = 18 \rightarrow y^2 = 9 \quad \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

من ③ x , y متفقان بالإشارة :

$$Z_1 = 2 + 3i$$

$$Z_2 = -2 - 3i$$

---

4 حل المعادلة من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$ باستخدام الدستور $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث $a , b , c \in R$:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$ نوجد $\sqrt{-\Delta}$
$Z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$Z_1 = Z_2 = \dfrac{-b}{2a}$	$Z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
للمعادلة جذرين حقيقيين.	للمعادلة جذر مضاعف	للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

مثال ① : حل المعادلة في C: $4Z^2 + 6Z + 9 = 0$

$$a = 4 , \quad b = 6 , \quad c = 3$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(4)(3) = -12 < 0 \Rightarrow$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{3}\, i}{8} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$Z_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{3}\, i}{8} = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

5 حل المعادلة من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$ باستخدام الدستور $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث a, b, c احدهم على الأقل لا ينتمي لـ R

عدد عقدي $\Delta =$ نوجد الجذور التربيعية لـ Δ للمعادلة جذران عقديان $Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$	a عدد حقيقي ، $\Delta = a$ ويكون للمعادلة جذران عقديان مختلفان

مثال② : حل المعادلة في C: $Z^2 - (3+5i)Z - 4 + 7i = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -3 - 5i \quad , \quad c = -4 + 7i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3 - 5i)^2 - 4(1)(-4 + 7i)$

$\Delta = 9 + 30i - 25 + 16 - 28i = 2i$

بفرض $w = x + yi$ جذر تربيعي لـ Δ

① $x^2 + y^2 = \sqrt{0 + 4} = 2$

② $x^2 - y^2 = 0$

③ $2xy = 2 > 0$

①+② : $2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

①−② : $2y^2 = 2 \rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

من ③ x , y متفقان بالإشارة :

$w_1 = 1 + i$

$w_2 = -1 - i$

$Z_1 = \frac{3 + 5i + 1 + i}{2} = 2 + 3i$

$Z_2 = \frac{3 + 5i - 1 - i}{2} = 1 + 2i$

---

6 المعادلة من الدرجة الثالثة :

نميز عدة حالات :

1) المعادلة من الشكل : $\alpha Z^3 + \beta = 0$ حيث α , β اعداد حقيقية

نستخدم القانون :

$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

مثال : $Z^3 - 8 = (Z - 2)(Z^2 + 2Z + 4)$

مثال : $27Z^3 + 1 = (3Z + 1)(9Z^2 - 3Z + 1)$

2) المعادلة من الشكل : $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$

طريقة الحل : بفرض $Z = Z_1$ حل المعادلة نحصل عليه بالتجريب او من نص السؤال

عندئذ $(Z - Z_1)$ هو احد عوامل المعادلة

نكتب المعادلة بشكل جداء عاملين احدهما درجة اولى و الآخر درجة ثانية

$(Z - Z_1)(\grave{a}Z^2 + \grave{b}Z + \grave{c}) = 0$

بالنشر و المطابقة نحصل على الثوابت $\grave{a}$, $\grave{b}$, $\grave{c}$ او مباشرة باستخدام القسمة الإقليدية إذا عُلم الحل Z_1

مثال : حل المعادلة :

$$Z^3-(3+2i)Z^2+(2+6i)Z-4i=0$$

إذا علمت انها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

الحل : بفرض $Z=ai$ حل للمعادلة و منه $(Z-ai)$ عامل من عوامل المعادلة

المعادلة من الشكل :

$$(Z-ai)(Z^2+bZ+c)=0$$

$$Z^3+bZ^2+cZ-aiZ^2-abiZ-aci=0$$

$$\left.\begin{array}{r} Z^3+(b-ai)Z^2+(c-abi)Z-aci=0 \\ Z^3-(3+2i)Z^2+(2+6i)Z-4i=0 \end{array}\right\} \text{بالمطابقة}$$

$$b-ai=-3-2i \Rightarrow \boxed{b=-3}, \boxed{a=2}$$

$$c-abi=2+6i \Rightarrow \boxed{c=2}\ ,(-ab=6) \text{ محققة}$$

$$(-aci=-4i) \text{ محققة}$$

و منه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(Z-2i)(Z^2-3Z+2)=0$$

إما $Z-2i=0 \Rightarrow \boxed{Z=2i}$

أو $Z^2-3Z+2=0$

$$(Z-2)(Z-1)=0$$

إما $Z-2=0 \Rightarrow \boxed{Z=2}$

أو $Z-1=0 \Rightarrow \boxed{Z=1}$

****

أنشطة

نشاط (1) كثيرات الحدود:

اولاً: مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة:

نهدف إلى حل المعادلة $(1): Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = 0$ $\quad Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (z+1).Q(z)$

① علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق

بما ان $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$ فإن (-1) هو احد جذور المعادلة السابقة فهي تقبل القسمة على $z+1$ ويوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(Z)$ يحقق:

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (Z+1)\,Q(Z)$$

② عين $Q(Z)$ ثم حل المعادلة $Q(Z) = 0$

$$\begin{array}{r|l} & Z^2 - 4Z + 7 \\ \hline Z+1 & Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 \\ & -Z^3 \mp Z^2 \\ \hline & -4Z^2 + 3Z + 7 \\ & \pm 4Z^2 \pm 4Z \\ \hline & 7Z + 7 \\ & -7Z \mp 7 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$: \frac{Z^3}{Z} = Z^2$

$: \frac{-4Z^2}{Z} = -4Z$

$: \frac{7Z}{Z} = 7$

$: Q(Z) = Z^2 - 4Z + 7$

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (Z+1)(Z^2 - 4Z + 7)$$

$$Z^2 - 4Z + 7 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(7) = -12 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مختلفان

$$\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = 2 - \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = 2 + \sqrt{3}i$$

③ لتكن A , B , C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) اثبت ان ABC مثلث متساوي الأضلاع.

$$Z_C = 2 + \sqrt{3}i \quad , \quad Z_B = 2 - \sqrt{3}i \quad , \quad Z_A = -1$$

نحسب أطوال اضلاع المثلث ABC:

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 3 - \sqrt{3}i \Rightarrow AB = |Z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 3 + \sqrt{3}i \Rightarrow AC = |Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = 2\sqrt{3}i \Rightarrow BC = |Z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{0+12} = 2\sqrt{3}$$

$AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

ثانياً: مثال على كثير حدود من المرتبة الرابعة:

نهدف إلى حل المعادلة $(2): Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = 0$

① اثبت بوجه عام انه إذا كانت أمثال P حقيقية وكان Z_0 جذراً للمعادلة $P(Z) = 0$ كان $\overline{Z_0}$ أيضاً جذراً للمعادلة $P(Z) = 0$.

بفرض لدينا كثير الحدود:

$$P(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0$$

إذا كان Z_0 جذراً للمعادلة $P(Z) = 0$ فإن:

$$a_n {Z_0}^n + a_{n-1} {Z_0}^{n-1} + \cdots + a_1 Z_0 + a_0 = 0$$

ناخذ مرافق الطرفين وبما ان الأمثال حقيقية فإن:

$$\underbrace{a_n \overline{Z_0}^{\,n} + a_{n-1} \overline{Z_0}^{\,n-1} + \cdots + a_1 \overline{Z_0} + \overline{Z_0}}_{P(\overline{Z_0})=0} = 0$$

ومنه $\overline{Z_0}$ جذراً للمعادلة $P(Z) = 0$

② تحقق ان $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة (2) ماذا تستنتج بالاستفادة من اولاً؟

$$P(i\sqrt{3}) = 9i^4 - 6(3\sqrt{3})i^3 + 24(3i^2) - 18(i\sqrt{3}) + 63$$
$$= 9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18\sqrt{3}i + 63 = 0$$

$i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة ونستنتج ان $-i\sqrt{3}$ احد حلول المعادلة (2) اي $P(-i\sqrt{3}) = 0$

③ استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة (2) تكتب $(Z^2+3)Q(Z) = 0$

بما ان $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$ من جذور المعادلة (2) فإن P يقبل القسمة على $(Z - i\sqrt{3})$, $(Z + i\sqrt{3})$ فهو يقبل القسمة على جداء ضربهما إذاً: يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q تحقق $P(Z) = (Z^2+3).Q(Z)$

④ حل المعادلة (2) لتكن D , C , B , A نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (2) اثبت ان هذه النقاط تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها ونصف قطرها.

$$\begin{array}{r|l} & Z^2 - 6Z + 21 \\ \hline Z^2+3 & Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 \\ & -Z^4 + 0 \mp 3Z^2 \\ \hline & -6Z^3 + 21Z^2 - 18Z + 63 \\ & \pm 6Z^3 + 0 \pm 18Z \\ \hline & 21Z^2 + 63 \\ & \mp 21Z^2 \mp 63 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$: \frac{Z^4}{Z^2} = Z^2$$
$$: \frac{-6Z^3}{Z^2} = -6Z$$
$$: \frac{21Z^2}{Z^2} = 21$$

$$: Q(Z) = Z^2 - 6Z + 21$$

$$Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = (Z^2+3)(Z^2 - 6Z + 21)$$

لنوجد جذور:

$$Z^2 - 6Z + 21 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(21) = -48$$
$$\sqrt{-\Delta} = 4\sqrt{3}$$
$$Z_1 = \frac{6 - 4\sqrt{3}i}{2} = 3 - 2\sqrt{3}i$$
$$Z_2 = \frac{6 + 4\sqrt{3}i}{2} = 3 + \sqrt{3}i$$

جذور المعادلة (2) هي:

$Z_A = \sqrt{3}i$, $Z_B = -\sqrt{3}i$, $Z_C = 3 - 2\sqrt{3}i$, $Z_D = 3 + 2\sqrt{3}i$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\overrightarrow{AB}} = -2\sqrt{3}i \\ Z_{\overrightarrow{DC}} = -4\sqrt{3}i \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

AB , DC متوازيان

فالشكل $ABCD$ شبه منحرف

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\overrightarrow{AD}} = 3 + \sqrt{3}i \Rightarrow AD = 2\sqrt{3} \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = 3 - \sqrt{3}i \Rightarrow BC = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

أصبح $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين فالرباعي دائري والنقاط D , C , B , A تقع على دائرة واحدة مركزها منتصف $[DC]$ وليكن $Z_{\grave{O}}$ ويمثله العدد العقدي $Z_{\grave{O}} = 3$ نصف قطرها $Z_{\overrightarrow{\grave{O}A}} = -3 + \sqrt{3}i$

$$\grave{O}A = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

****

نشاط (2) الجذور التربيعية لعدد عقدي:

<u>اولاً</u>: تعيين الجذور التربيعية للعدد i:

① اكتب i بالشكل الأسي: $i = 1e^{\frac{\pi}{2}i}$

② حل المعادلة $Z^2 = i$:

$$Z^2 = 1.e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$Z_1 = 1.e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad Z_2 = -e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

<u>ثانياً</u>: تعيين الجذور التربيعية للعدد $1+i$:

① اثبت أن حل المعادلة $(x+iy)^2 = 1+i$ في R يؤول إلى تعيين x , y تحققان:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$(x+iy)^2 = 1+i \qquad (*)$$

$$x^2 + 2xyi + i\underbrace{y^2} = 1+i$$

$$(x^2 - y^2) + (2xy)i = 1+i$$

بالمطابقة $x^2 - y^2 = 1$, $2xy = 1$

بأخذ طويلة المعادلة $(*)$:

$$|(x+iy)^2| = |1+i|$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على المعادلات الثلاث المطلوبة.

② حل المعادلة $Z^2 = 1+i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} & ① \\ x^2 - y^2 = 1 & ② \\ 2xy = 1 & ③ \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow 2x^2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = +\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ \text{أو } x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$$

$$① - ② \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$y^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow\begin{cases} \text{إما} \quad y=+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ \text{او} \quad y=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

بما أن $2xy=1>0$ فإن لـ y,x نفس الإشارة.

ومنه فإن حلول المعادلة السابقة:

$$Z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i \quad , \quad Z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$$

③ حل المعادلة $Z^2=1+i$ بأسلوب ثان، واستنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$

$$1+i=\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \Rightarrow \quad Z^2=\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$Z_1=\sqrt[4]{2}.e^{\frac{\pi}{8}i} \qquad Z_2=-\sqrt[4]{2}.e^{\frac{\pi}{8}i}$$

بالمقارنة بين ② و ③ نجد:

$$\sqrt[4]{2}.e^{\frac{\pi}{8}i}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i \qquad \div\sqrt[4]{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}i=\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt[4]{2}}+\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}i$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt[4]{2}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}$$

نشاط (3) الأعداد العقدية والتوابع المثلثية:

$\grave{Z}$, Z عددين عقديين طويلة كل منها تساوي الواحد وزاويتهما a, b بالترتيب

عندئذ العدد العقدي $Z\grave{Z}$ طويلة تساوي الواحد وزاويته $a+b$ والمطلوب :

1) اكتب العدد $Z\grave{Z}$ بطريقتين واثبت أن

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

لدينا $Z\grave{Z}$ عدد عقدي طويلته تساوي الواحد وزاويته $a+b$

$$Z\grave{Z}=\cos(a+b)+i\sin(a+b) \qquad \boxed{I}$$

ولدينا:

$$Z=\cos a+i\sin a$$
$$\grave{Z}=\cos b+i\sin b$$

ومنه:

$$Z\grave{Z}=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)$$
$$=\cos a\,.\cos b+\ i\cos a\,.\sin b+i\sin a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b$$
$$Z\grave{Z}=(\cos a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b)+\ i(\sin a\,.\cos b+\cos a\,.\sin b) \qquad \boxed{II}$$

بالمقارنة بين $\boxed{I}$ و $\boxed{II}$ نستنتج أن:

$$\cos(a+b)=\cos a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b \qquad \boxed{1}$$
$$\sin(a+b)=\sin a\,.\cos b+\cos a\,.\sin b \qquad \boxed{2}$$

2) ما العلاقات التي تستنتجها عند استبدال $-b$ بالمقدار b :

نبدل $(-b)$ بالمقدار (b)

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\cos b + \sin a \,.\sin b \qquad \boxed{\hat{1}}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \,.\cos b - \cos a \,.\sin b \qquad \boxed{\hat{2}}$$

3) استنتج أن :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \qquad \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) - \sin(a+b)) \qquad \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

بجمع العلاقتين $\boxed{1}$ و $\boxed{\hat{1}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\cos a \,.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

بطرح العلاقتين $\boxed{1}$ و $\boxed{\hat{1}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\sin a \,.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

بجمع العلاقتين $\boxed{2}$ و $\boxed{\hat{2}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\sin a \,.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

بطرح العلاقتين $\boxed{2}$ و $\boxed{\hat{2}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\cos a \,.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) - \sin(a+b)]$

4) ما العلاقات التي تستنتجها عند تعويض :

$$a+b = p \quad , \quad a-b = q$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\,.\sin\frac{p-q}{2} \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,.\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}$$

5) استفد مما سبق لتحل في R المعادلة المثلثية :

$$\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$$

$$\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$$

$$-2\sin\left(\frac{3x+5x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-5x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{6x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)$$

$$-2\sin(4x)\sin(-x) = 2\sin(4x)\cos(2x)$$

$$\sin(4x)\sin(x) = \sin(4x)\cos(2x)$$

$$\sin(4x)\sin(x) - \sin(4x)\cos(2x) = 0$$

$$\sin 4x\,(\sin x - \cos 2x) = 0$$

إما $\sin 4x = 0 \to 4x = \pi k \to x = \frac{\pi}{4}k$

أو $\sin x - \cos 2x = 0$

$$\sin x = \cos 2x$$

$$\cos\frac{\pi}{2} - x = \cos 2x$$

إما $\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2\pi k$

$$-3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{6}{\pi} - \frac{2}{3}\pi k$$

أو $\frac{\pi}{2} - x = -2x + 2\pi k$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

تمرينات ومسائل صفحة 122

1) لتكن النقاط D, C, B, A نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{-\pi}{6} i} \quad , \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , \quad b = e^{\frac{\pi}{3} i} \quad , \quad a = 1$$

1. اكتب c بالشكل الأسي، واكتب d بالشكل الجبري.

$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{c = \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{6} i}}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{-\pi}{6} i}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i \sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

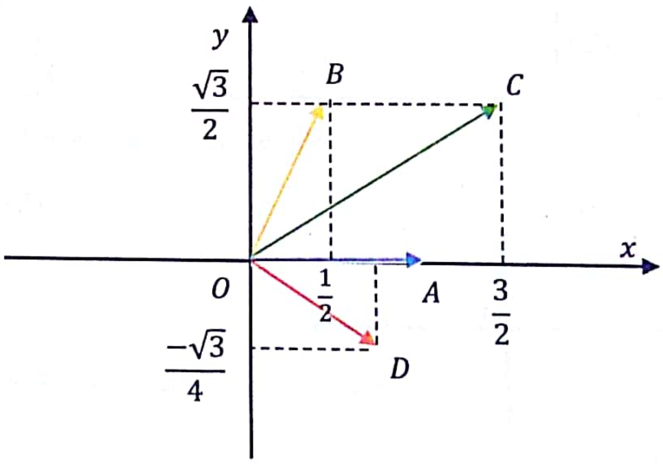
$$\boxed{d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i}$$

2. a) وضع النقاط D, C, B, A في مستو مزود بمعلم متجانس.

من (1) $D\left(\frac{3}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$ ، فرضاً $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، $A(1,0)$

$$b = e^{\frac{\pi}{3} i} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



b) اثبت ان الرباعي $OACB$ معين.

$\overrightarrow{OA}\,(1,0)$

$\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{BC}\,(1,0)$

$\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = 1$$

ومنه $OACB$ شكل رباعي اضلاعه متساوية فهو معين

2) 1. اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة: $(Z^2+3\sqrt{3}Z+9)(Z^2-3\sqrt{3}Z+9)=0$

إما

$Z^2+3\sqrt{3}Z+9=0$

$\Delta=27-36=-9<0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta}=3$

$Z_1=\dfrac{-3\sqrt{3}+3i}{2}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

$Z_2=\dfrac{-3\sqrt{3}-3i}{2}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

لنكتب Z_1 بالشكل الأسي $r=\sqrt{\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}}=3$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \theta=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$$

إذاً $\boxed{Z_1=3.e^{\frac{5\pi}{6}i}}$

وبما ان Z_2 هو مرافق Z_1 فإن:

$\boxed{Z_2=3.e^{\frac{-5\pi}{6}i}}$

أو

$Z^2-3\sqrt{3}Z+9=0$

$\Delta=27-36=-9<0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta}=3$

$Z_3=\dfrac{3\sqrt{3}+3i}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

$Z_4=\dfrac{3\sqrt{3}-3i}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

لنكتب Z_3 بالشكل الأسي $r=\sqrt{\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}}=3$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$$

إذاً $\boxed{Z_3=3.e^{\frac{\pi}{6}i}}$

بما ان Z_4 هو مرافق Z_3 فإن:

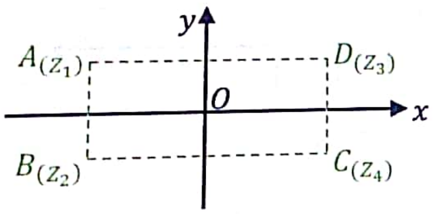
$\boxed{Z_4=3.e^{\frac{-\pi}{6}i}}$

2. أثبت ان النقاط D,C,B,A التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

نلاحظ ان: $OA=OB=OC=OD=3$

أي الرباعي $ABCD$ تساوى طولا قطريه وتناصفا.

وبالتالي $ABCD$ مستطيل رؤوسه D,C,B,A تمثل جذور المعادلة السابقة.



3) بسط كتابة العدد العقدي $Z=\dfrac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$ موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الطريقة الأولى للحل:

$$Z=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}=\frac{1+e^{-xi}}{1+e^{xi}}=\frac{e^{-xi}(e^{xi}+1)}{(1+e^{xi})}=e^{-xi}$$

قيم x التي تجعل هذا المقدار موجود:

$1+e^{xi}\neq 0$

$e^{xi}\neq -1$

$e^{xi}\neq e^{\pi i} \Rightarrow x\neq \pi+2\pi k$

$\Rightarrow x\in R\backslash\{\pi+2\pi k\}$

الطريقة الثانية للحل:

نعلم ان:

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$Z=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-i2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+i2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}\right]}{2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right]}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{-x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}=\frac{e^{\frac{-x}{2}i}}{e^{\frac{x}{2}i}}=e^{-xi}$$

---

4) 1. ليكن Z عدداً عقدياً ما وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

اثبت ان $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي.

أي لنثبت أن العدد العقدي يساوي مرافقه.

$$\overline{\left(\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}\right)}=\frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

نضرب البسط والمقام بـ u :

$$=\frac{\bar{Z}u-u\bar{u}Z}{u-u\bar{u}}$$

بما أن u عدد عقدي طويلته تساوي الواحد $(u\bar{u}=1)$:

$$=\frac{\bar{Z}u-Z}{u-1}=\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$$

ومنه العدد حقيقي

2. نفترض ان $u\neq 1$ وان $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي اثبت انه إما ان يكون Z حقيقياً او ان يكون $|u|=1$

بما أن عدد $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي فهو يساوي مرافقه و نكتب :

$$\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}=\frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

$$(Z-u\bar{Z})(1-\bar{u})=(1-u)(\bar{Z}-\bar{u}Z)$$

$$Z-Z\bar{u}-u\bar{Z}+u\bar{u}\bar{Z}=\bar{Z}-\bar{u}Z-u\bar{Z}+u\bar{u}Z$$

$$Z-\bar{Z}+u\bar{u}\bar{Z}-u\bar{u}Z=0$$

$$Z-\bar{Z}-u\bar{u}(Z-\bar{Z})=0$$

$$(Z-\bar{Z})(1-u\bar{u})=0\Rightarrow\begin{cases}\text{إما} & Z-\bar{Z}=0\Rightarrow Z=\bar{Z}\Rightarrow Z\ \text{حقيقي}\\ \text{او} & 1-u\bar{u}=0\Rightarrow u\bar{u}=1\Rightarrow |u|=1\end{cases}$$

---

5) اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين:

$$Z_1=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{e^{xi}}{e^{-xi}}=e^{2xi}=\cos 2x+i\sin 2x \quad ;x\in R$$

$$Z_2=(3+i)^4=((3+i)^2)^2=(9+6i-1)^2=(8+6i)^2=64+96i-36=28+96i$$

---

6) ليكن $\acute{Z},Z$ عددين عقديين اثبت ان: $|Z+\acute{Z}|^2+|Z-\acute{Z}|^2=2|Z|^2+2|\acute{Z}|^2$

$$\left|\text{عدد مركب}\right|^2=(\text{العدد})(\text{مرافق العدد})$$

$$|Z|^2=Z.\bar{Z}$$

$$L_1=|Z+\acute{Z}|^2+|Z-\acute{Z}|^2=(Z+\acute{Z})(\bar{Z}+\bar{\acute{Z}})+(Z-\acute{Z})(\bar{Z}-\bar{\acute{Z}})$$

$$=Z\bar{Z}+Z\bar{\acute{Z}}+\acute{Z}\bar{Z}+\acute{Z}\bar{\acute{Z}}+Z\bar{Z}-Z\bar{\acute{Z}}-\acute{Z}\bar{Z}+\acute{Z}\bar{\acute{Z}}$$

$$=2Z\bar{Z}+2\acute{Z}\bar{\acute{Z}}=2|Z|^2+2|\acute{Z}|^2=L_2$$

7) ليكن المثلث ABC اثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

1. المثلث متساوي الساقين وراسه A
2. $2\sin\hat{B}\cos\hat{C}=\sin\hat{A}$

$$\overbrace{\text{المثلث متساوي الساقين وراسه } A}^{\boxed{1}} \Leftrightarrow \overbrace{2\sin\hat{B}.\cos\hat{C}=\sin\hat{A}}^{\boxed{2}}$$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$

$2\sin\hat{B}\cos\hat{C}=\sin\hat{A}$

$2\left[\frac{1}{2}\left(\sin(\hat{B}+\hat{C})+\sin(\hat{B}-\hat{C})\right)\right]=\sin\hat{A}$

$\sin(\hat{B}+\hat{C})+\sin(\hat{B}-\hat{C})=\sin\hat{A}$

$\sin\hat{A}+\sin(\hat{B}-\hat{C})=\sin\hat{A}$

$\sin(\hat{B}-\hat{C})=0 \Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=0 \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$

إذاً المثلث متساوي الساقين وراسه $\hat{A}$

$\boxed{2} \Leftarrow \boxed{1}$

مجموع زوايا المثلث 180^0 ، $\boxed{\sin\theta=\sin(180-\theta)}$

إذاً : $\sin\hat{A}=\sin(\hat{B}+\hat{C})$

$\sin\hat{A}=\sin\hat{B}\cos\hat{C}+\cos\hat{B}\sin\hat{C}$

(وبما ان $\hat{B}=\hat{C}$) إذاً:

$\sin\hat{A}=2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$

---

8) تعيين مجموعة:

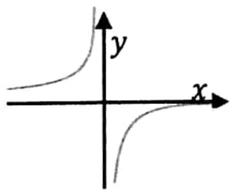
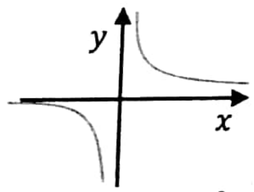
ليكن a عدداً عقدياً معطى. لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق: $Z^2-a^2=\overline{Z}^2-\overline{a}^2$

عين المجموعة $\mathcal{E}$ ومثلها في مستو مزود بمعلم.

بفرض $Z=x+yi$ و $a=\alpha+\beta i$

$$Z^2-a^2=\overline{Z}^2-\overline{a}^2$$
$$Z^2-\overline{Z}^2=a^2-\overline{a}^2$$
$$(Z-\overline{Z})(Z+\overline{Z})=(a-\overline{a})(a+\overline{a})$$
$$(2yi)(2x)=(2\beta i)(2\alpha)$$
$$\boxed{xy=\alpha\,\beta}$$

$$\boldsymbol{x.y=\alpha.\beta}$$

$\alpha.\beta=0$	$\alpha.\beta<0$	$\alpha.\beta>0$
$x.y=0$ إما $x=0$ أي مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد التخيلية البحتة وتمثل بمحور التراتيب أو $y=0$ أي مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد الحقيقية وتمثل بمحور الفواصل	أي مجموعة الأعداد العقدية Z تمثل بنقاط قطع زائد فرعاه في الربعين الثاني والرابع. 	أي مجموعة الأعداد العقدية Z تمثل بنقاط قطع زائد فرعاه في الربعين الأول والثالث. 

---

9) نتأمل عددين عقديان w,Z ويحققان $|Z|=1$ و $|w|=1$ و $Zw\neq-1$

اثبت أن العدد العقدي $Z=\frac{z+w}{1+zw}$ عدد حقيقي.

نعلم أن : $|Z|=1 \Rightarrow Z.\overline{Z}=1 \Rightarrow \overline{Z}=\frac{1}{Z}$

$|w|=1 \Rightarrow w.\overline{w}=1 \Rightarrow \overline{w}=\frac{1}{w}$

يكون العدد العقدي Z حقيقي إذا تحقق $\overline{Z} = Z$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z}+\overline{w}}{1+\overline{z}\overline{w}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{z}\frac{1}{w}} = \frac{w+z}{zw+1} = Z$$

بما ان $\overline{Z} = Z$ فالعدد: $Z = \frac{z+w}{1+zw}$ عدد حقيقي.

10) نتامل كثير الحدود $P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40$

1. عين عددين حقيقين b, a يحققان $P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$

$$\begin{aligned}P(Z) &= (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)\\ &= Z^4 + 4Z^3 + 2aZ^2 + aZ^3 + 4aZ^2 + 2a^2Z + bZ^2 + 4bZ + 2ab\\ &= Z^4 + (4+a)Z^3 + (6a+b)Z^2 + (2a^2+4b)Z + 2ab\end{aligned}$$

$$Z^4 + (4+a)Z^3 + (6a+b)Z^2 + (2a^2+4b)Z + 2ab = Z^4 + 0Z^3 - 19Z^2 + 52Z - 40$$

بالمطابقة نجد:

$4 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$

$6a + b = -19 \Rightarrow -24 + b = -19 \Rightarrow \boxed{b = 5}$

$2a^2 + 4b = 52 \Rightarrow 2(16) + 4(5) = 52$ صحيحة

$2ab = -40 \Rightarrow 2(-4)(5) = -40$ صحيحة

$\boxed{P(Z) = (Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8)}$

2. حل في C المعادلة $P(Z) = 0$

$(Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8) = 0$

إما	أو
$Z^2 - 4Z + 5 = 0$ $\Delta = (16) - 4(5) = -4 < 0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$ $Z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$ $Z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$	$Z^2 + 4Z - 8 = 0$ $\Delta = 16 - 4(-8) = 48 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$ $Z_3 = \frac{-4+4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}$ $Z_4 = \frac{-4-4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}$

إذاً حلول المعادلة: $\{2+i \ , \ 2-i \ , \ -2-2\sqrt{3} \ , \ -2+2\sqrt{3}\}$

11) حل في C المعادلة $Z^3 - (3+4i)Z^2 - 6(3-2i)Z + 72i = 0$ إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

$Z = ai$ حل للمعادلة $\Leftarrow (Z - ai)$ عامل، فالمعادلة تكتب بالشكل:

$(Z - ai)(Z^2 + bZ + c) = 0$

$Z^3 + bZ^2 + cZ - aiZ^2 - abiZ - aci = 0$

$$\left.\begin{aligned}&Z^3 + (b - ai)Z^2 + (c - abi)Z - aci = 0\\ &Z^3 - (3+4i)Z^2 - 6(3-2i)Z + 72i = 0\end{aligned}\right\}$$ بالمقارنة :

$b - ai = -3 - 4i \Rightarrow \boxed{b = -3}$, $\boxed{a = 4}$

$c - abi = -18 + 12i \Rightarrow \boxed{c = -18}$, $-abi = 12i$ (محققة)

$-aci = 72i$ (محققة)

المعادلة تكتب بالشكل:

$$(Z-4i)(Z^2-3Z-18)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z-4i=0 \Rightarrow Z=4i \\ \text{أو } Z^2-3Z-18=0 \Rightarrow (Z-6)(Z+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z=6 \\ \text{أو } Z=-3 \end{cases} \end{cases}$$

$S=\{4i,6,-3\}$

---

12) ليكن $\alpha=e^{\frac{2\pi}{5}i}$ نضع $A=\alpha+\alpha^4$, $B=\alpha^2+\alpha^3$

1. اثبت ان $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

واستنتج ان B,A هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية $x^2+x-1=0$

طريقة أولى: بما ان: $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

فإن:

$$\boxed{1+e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4=0} \qquad (*)$$

نلاحظ أن العلاقة $(*)$ هي عبارة عن مجموع خمس حدود من متتالية هندسية:

حدها الأول: $a=1$ أساسها: $q=e^{\frac{2\pi}{5}i}$ عدد حدودها: $n=5$

نعلم أن مجموع الحدود في متتالية هندسية يعطى بالقانون:

$$S=\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q} \Rightarrow S=\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=0$$

طريقة ثانية :

$L_1=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$, (نضرب ونقسم بالمقدار $1-\alpha$)

$$=\frac{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)}{1-\alpha}=\frac{1^5-\alpha^5}{1-\alpha}=\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5}{1-a}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-a}=\frac{1-1}{1-\alpha}=\frac{0}{1-\alpha}=0=L_2$$

حيث $\boxed{\alpha^5=\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5=e^{2\pi i}=1}$

- حتى يكون B,A جذران للمعادلة x^2+x-1 يجب ان يتحقق: $x^2-(A+B)x+AB=0$

أي لنثبت ان: $A.B=-1$ و $A+B=-1$

طريقة أولى:

من الفرض لدينا:

$$A+B=\alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3$$

$$A+B=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3$$

$$\boxed{A+B=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4} \qquad \boxed{1}$$

ولدينا حسب $(*)$:

$$1+e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4=0$$

نعوض $\boxed{1}$ في $(*)$:

$$1+A+B=0 \Rightarrow \boxed{A+B=-1}$$

$$A.B=(\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3)$$

$$A.B=\left[e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4\right]\left[\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3\right]$$

$$A.B=\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}\right)\left(e^{\frac{4\pi}{5}i}+e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)$$

$$A.B=e^{\frac{6\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}+e^{\frac{12\pi}{5}i}+e^{\frac{14\pi}{5}i}$$

$$A.B=e^{\frac{6\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}+e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{4\pi}{5}i}\quad ;$$

حيث : $\boxed{\begin{array}{l} e^{\frac{12\pi}{5}i}=e^{\frac{(2+10)\pi}{5}i}=e^{\frac{2\pi}{5}i} \\ e^{\frac{14\pi}{5}i}=e^{\frac{(4+10)\pi}{5}i}=e^{\frac{4\pi}{5}i}\end{array}}$

$$\boxed{A.B=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4}\qquad \boxed{2}$$

نعوض $\boxed{2}$ في *:

$$1+A.B=0\Rightarrow \boxed{A.B=-1}$$

طريقة ثانية :

من أجل $A=\alpha+\alpha^4$ نعوض في المعادلة :

$$\begin{aligned}A^2+A-1&=(\alpha+\alpha^4)^2+\alpha+\alpha^4-1\\&=\alpha^2+\underbrace{2\alpha^5}+\underbrace{\alpha^8}+\alpha+\alpha^4-1\\&=\alpha^2+2+\alpha^3+\alpha+\alpha^4-1\\&=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4\\&=0\ (\text{فرضاً})\end{aligned}$$

حيث $\boxed{\begin{array}{l}\alpha^5=1\\ \alpha^8=\alpha^3.\alpha^5=\alpha^3(1)=\alpha^3\end{array}}$

ومنه A حل للمعادلة

من أجل $B=\alpha^2+\alpha^3$ نعوض في المعادلة :

$$\begin{aligned}B^2+B-1&=(\alpha^2+\alpha^3)^2+\alpha^2+\alpha^3-1\\&=\alpha^4+\underbrace{2\alpha^5}+\underbrace{\alpha^6}+\alpha^2+\alpha^3-1\\&=\alpha^4+2+\alpha+\alpha^2+\alpha^3-1\\&=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4\\&=0\ (\text{فرضاً})\end{aligned}$$

حيث $\boxed{\begin{array}{l}\alpha^5=1\\ \alpha^6=\alpha.\alpha^5=\alpha(1)=\alpha\end{array}}$

ومنه B حل للمعادلة

2. عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

طريقة أولى:

$$\begin{aligned}A&=\alpha+\alpha^4\\&=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}\\&=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{-2\pi}{5}i}\quad ;\quad \boxed{e^{\frac{8\pi}{5}i}=e^{\frac{10\pi i-2\pi i}{5}}=e^{2\pi i-\frac{2\pi i}{5}}=e^{\frac{-2\pi}{5}i}}\\&=2\cos\frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

ومنه بحسب دستورا أويلر يكون:

طريقة ثانية :

$$A=\alpha+\alpha^4=\alpha+\frac{\alpha^5}{\alpha}=\alpha+\frac{1}{\alpha}\quad ;\ (\alpha^5=1)\ \text{حيث}$$

$$=\alpha+\alpha^{-1}=\underbrace{e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{-\frac{2\pi}{5}i}}_{\text{حسب اويلر}}$$

$$A=2\cos\frac{2\pi}{5}$$

3. حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

لدينا مما سبق: $A=2\cos\frac{2\pi}{5}$ ومنه: $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{A}{2}}$

$x^2+x-1=0$

$\Delta=1-4(1)(-1)=5$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}>0 \\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0 \end{cases}$$

وبما أن A هو حل للمعادلة و$\frac{2\pi}{5}$ بالربع الأول اي $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ سنختار $A=x_1$ ومنه فإن:

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{A}{2}=\frac{x_1}{2}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

---

13) ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi,\pi[$ نعرف $t=\dfrac{e^{\frac{\theta}{2}i}-e^{\frac{-\theta}{2}i}}{e^{\frac{\theta}{2}i}+e^{\frac{-\theta}{2}i}}$

1. احسب المقادير $\frac{2t}{1+t^2}$ ، $\frac{2t}{1-t^2}$ ، $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ

$$t=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=i\tan\frac{\theta}{2}$$ حسب علاقتي اويلر

حيث:

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)i}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=2i\,\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=2i\,\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=2i\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=i\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=i\tan\theta$$

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)i}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}i=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}i=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}i=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}i=i\sin\theta$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

---

2. اثبت صحة العلاقات الآتية:

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$L_2=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{1}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta=L_1$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$L_2 = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta = L_1$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$L_2 = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = 2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = L_1$$

---

14) 1. حل في C المعادلات $Z^2 = w$ في الحالات الآتية:

$w = -21 - 20i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{441 + 400} = 29$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -21$

$\boxed{3}\ \ 2xy = -20 < 0$

$\boxed{1}+\boxed{2}: 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$\boxed{1}-\boxed{2}: 2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y مختلفان بالإشارة:

$Z_1 = 2 - 5i \quad , \quad Z_2 = -2 + 5i$

$w = -3 + 4i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -3$

$\boxed{3}\ \ 2xy = 4 > 0$

$\boxed{1}+\boxed{2}: 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\boxed{1}-\boxed{2}: 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقان بالإشارة:

$Z_1 = 1 + 2i \quad , \quad Z_2 = -1 - 2i$

$w = -7 + 24i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = 25$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -7$

$\boxed{3}\ \ 2xy = 24 > 0$

$\boxed{1}+\boxed{2}: 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$\boxed{1}-\boxed{2}: 2y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقان بالإشارة:

$Z_1 = 3 + 4i \quad , \quad Z_2 = -3 - 4i$

١

2. حل في C المعادلات الآتية:

$2iZ^2 + (3+7i)Z + 4 + 2i = 0$

$a = 2i \qquad b = 3+7i \qquad c = 4+2i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3+7i)^2 - 4(2i)(4+2i)$

$\Delta = -24 + 10i$

بفرض $x + yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{576 + 100} = 26$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -24$

$\boxed{3}\ \ 2xy \ = 10 > 0$

$\boxed{1} + \boxed{2} : 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} : 2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقتان بالإشارة: $\begin{cases} \sqrt{\Delta} = 1 + 5i & \text{إما} \\ \sqrt{\Delta} = -1 - 5i & \text{أو} \end{cases}$

$Z_1 = \dfrac{-(3+7i) + 1 + 5i}{4i} = \dfrac{-2-2i}{4i} \times \dfrac{-i}{-i}$

$= \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$Z_2 = \dfrac{-(3+7i) - 1 - 5i}{4i} = \dfrac{-4-12i}{4i} \times \dfrac{-i}{-i}$

$= -3 + i$

$Z^2 + (1+4i)Z - 5 - i = 0$

$a = 1 \qquad b = 1+4i \qquad c = -5-i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$

$\Delta = 5 + 12i$

بفرض $x + yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = 5$

$\boxed{3}\ \ 2xy \ = 12 > 0$

$\boxed{1} + \boxed{2} : 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} : 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقتان بالإشارة: $\begin{cases} \sqrt{\Delta} = 3 + 2i & \text{إما} \\ \sqrt{\Delta} = -3 - 2i & \text{أو} \end{cases}$

$Z_1 = \dfrac{-(1+4i) + 3 + 2i}{2} = 1 - i$

$Z_2 = \dfrac{-(1+4i) - 3 - 2i}{2} = -2 - 3i$

$Z^2 + (1+8i)Z - 17 + i = 0$

$a = 1 \qquad b = 1+8i \qquad c = -17+i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (1+8i)^2 - 4(1)(-17+i)$

$\Delta = 5 + 12i$

بفرض $x + yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = 5$

$\boxed{3}\ \ 2xy \ = 12 > 0$

$\boxed{1} + \boxed{2} : 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} : 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقتان بالإشارة: $\begin{cases} \sqrt{\Delta} = 3 + 2i & \text{إما} \\ \sqrt{\Delta} = -3 - 2i & \text{أو} \end{cases}$

$Z_1 = \dfrac{-(1+8i) + 3 + 2i}{2} = \dfrac{2-6i}{2} = 1 - 3i$

$Z_2 = \dfrac{-(1+8i) - 3 - 2i}{2} = \dfrac{-4-10i}{2} = -2 - 5i$

15) في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نضـــع $Z = \frac{2+Z}{1+Z}$ ونفترض ان $z = x + iy$, $Z = X + iY$ حيث Y, X, y, x هي أعداد حقيقية.

1. احسب Y, X بدلالة العددين y, x

$$Z = \frac{2 + x - yi}{1 + x - yi}$$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z = \frac{(2 + x - yi)(1 + x + yi)}{(1 + x - yi)(1 + x + yi)} = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2 + yi}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2} + \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} i \quad \Rightarrow X = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2} \quad , \quad Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

2. اثبت أن مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

يكون Z حقيقياً إذا كان قسمه التخيلي معدوم اي: $Y = 0$ ومنه $y = 0$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ هي نقاط محور الفواصل عدا النقطة $(-1,0)$

3. اثبت أن مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

يكون Z تخيلياً بحتاً إذا كان قسمه الحقيقي معدوم اي: $X = 0$ ومنه: $x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 + 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} - 2 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ هي نقاط دائرة مركزها $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ عدا النقطة $(-1,0)$

---

16) عين في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق الشرط المعطى.

1. المقدار $(Z + 1)(\overline{Z} - 2)$ حقيقي.

يكون المقدار حقيقياً إذا تحقق:

$$(Z + 1)(\overline{Z} - 2) = \overline{(Z + 1)(\overline{Z} - 2)}$$
$$(Z + 1)(\overline{Z} - 2) = (\overline{Z} + 1)(Z - 2)$$
$$Z.\overline{Z} - 2Z + \overline{Z} - 2 = Z.\overline{Z} - 2\overline{Z} + Z - 2$$
$$3Z - 3\overline{Z} = 0$$
$$(Z - \overline{Z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = \overline{Z}$$

ومنه مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد الحقيقية

2. العدد Z مختلف عن $4i$ و $\frac{Z+2i}{Z-4i}$ عدد حقيقي.

يكون المقدار حقيقياً إذا تحقق:

$$\frac{Z + 2i}{Z - 4i} = \overline{\left(\frac{Z + 2i}{Z - 4i}\right)}$$
$$\frac{Z + 2i}{Z - 4i} = \frac{\overline{Z} - 2i}{\overline{Z} + 4i}$$
$$(Z + 2i)(\overline{Z} + 4i) = (Z - 4i)(\overline{Z} - 2i)$$
$$Z.\overline{Z} + 4Zi + 2\overline{Z}i - 8 = Z.\overline{Z} - 2Zi - 4\overline{Z}i - 8$$
$$6Zi + 6\overline{Z}i = 0$$
$$6i(Z + \overline{Z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = -\overline{Z}$$

ومنه مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد التخيلية البحتة بشرط $Z \neq 4i$

****