رؤية شاملة في الاشتقاق

قواعد الاشتقاق:

مشتقات بعض التوابع المألوفة:

	التابع		التابع المشتق
1	$f(x) = a$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = 0$
2	$f(x) = ax + b \quad ; \; a \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = a$
3	$f(x) = x^n$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = n.x^{n-1}$
4	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
5	$f(x) = [g(x)]^n$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = n.[g(x)]^{n-1}.\grave{g}(x)$
6	$f(x) = g(x).h(x)$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \grave{g}(x).h(x) + \grave{h}(x).g(x)$
7	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \frac{\grave{g}(x).h(x) - \grave{h}(x).g(x)}{h^2(x)}$
8	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \frac{\grave{g}(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
9	$f(x) = \sin x$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \cos x$
10	$f(x) = \cos x$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = -\sin x$
11	$f(x) = \tan x$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$f(x) = \cot x$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$
13	$f(x) = \sin(g(x))$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \grave{g}(x)\cos(g(x))$
14	$f(x) = \cos(g(x))$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = -\grave{g}(x)\sin(g(x))$
15	$f(x) = \tan(g(x))$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \grave{g}(x)[1 + \tan^2(g(x))]$
16	$f(x) = \cot(g(x))$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = -\grave{g}(x)[1 + \cot^2(g(x))]$
17	$f(x) = e^x$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = e^x$
18	$f(x) = e^{g(x)}$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \grave{g}(x).e^{g(x)}$
19	$f(x) = \ln x$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \frac{1}{x}$
20	$f(x) = \ln(g(x))$	$\Longrightarrow$	$\grave{f}(x) = \frac{\grave{g}(x)}{g(x)}$

تعريف العدد المشتق والتابع المشتق:

بفرض f تابع معرف على مجال ما I ولتكن x_0 نقطة من I نصطنع التابع g المعرف على $I \setminus \{x_0\}$ وفق : $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ عندها نميز ما يلي :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \Rightarrow x = x_0$ غير قابل للاشتقاق عند f

ويكون عندها : $x = x_0$ مماس شاقولي للخط البياني C للتابع f.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in R \Rightarrow x = x_0$ قابل للاشتقاق عند f

ويكون : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \acute{f}(x_0) = m = \ell$

حيث (m) ميل المماس للخط البياني C للتابع f في النقطة التي فاصلتها x_0.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} g(x) = \ell_1$ $\left(m_1 = \ell_1\right.$ ميل نصف المماس لـ f في النقطة التي فاصلتها $\left.x_0\right)$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} g(x) = \ell_2$ $\left(m_2 = \ell_2\right.$ ميل نصف المماس لـ f في النقطة التي فاصلتها $\left.x_0\right)$

$\ell_1 \neq \ell_2 \Longrightarrow$ غير قابل للاشتقاق f

تمرين: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$ خطه البياني C_f:

1) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين للخط C_f في النقطة $A(0,2)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار للخط C_f في النقطة $A(0,2)$.

الحل: نصطنع التابع $g(x)$ المعرف على $R \setminus \{0\}$ وفق :

$\boxed{1}$ $: x > 0$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x} = \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x}$$

$$= \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x} = \frac{-x}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = -1 = \acute{f}(0) = m$$

معادلة نصف المماس من اليمين:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow T_1: y - 2 = -1(x-0)$$

$$T_1:\ y = -x + 2$$

$\boxed{2}$ $: x < 0$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x} = \frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x}$$

$$= \frac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{x} = \frac{3x}{x(-x+1)} = \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} g(x) = 3 = \acute{f}(0) = m$$

معادلة نصف المماس من اليسار:

$$T_2: y - 2 = 3(x-0)$$

$$T_2:\ y = 3x + 2$$

مبرهنة: بفرض u, v تابعين اشتقاقيين على مجال ما D و ليكن k عدد حقيقي عندئذ يكون كل من $k.u$, $u+v$, $u.v$ اشتقاقياً على D ويكون :

$$(k.u)' = k.u' \quad , \quad (u+v)' = u' + v' \quad , \quad (u.v)' = u'.v + v'.u$$

وعندما $v \neq 0$ يكون :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

ملاحظة: من الممكن ان يكون الجداء $u.v$ اشتقاقياً عند نقطة دون أن يكون u أو v اشتقاقياً في تلك النقطة.

مثال توضيحي:

$$f(x) = x.\sqrt{x} \quad : \quad D = [0, +\infty[$$

نلاحظ أن f جداء ضرب التابعين: $\begin{cases} x \to x \text{ اشتقاقي على } R \\ x \to \sqrt{x} \text{ اشتقاقي على }]0, +\infty[\end{cases}$

عندها f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ لكن لندرس قابلية اشتقاق f عند الصفر:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x} - 0}{x} = \sqrt{x}$$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \Rightarrow$ f اشتقاقي عند الصفر

معادلة مماس لخط بياني:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

لكتابة معادلة مماس يلزمنا نقطة (x_0, y_0) وميل m والجدول الآتي يبين كيفية إيجاد معادلة مماس في أي حالة:

المعلومات المستنتجة			المعلومات المعطاة
$f'(x_0) = m$	$\xrightarrow{\text{نشتق}}$	نعوض في التابع لنجد y_0	x_0 (1)
$f'(x_0) = m$	$\xrightarrow{\text{نشتق}}$	نعوض في التابع لنجد x_0	y_0 (2)
نعوض في التابع لنجد y_0	$\rightarrow$	نجعل $f'(x) = m$ لنجد x_0	m (3)
نعود للحالة (3)	$\rightarrow$	ميل المماس = ميل المستقيم d	المماس يوازي مستقيم معلوم d
نعود للحالة (3)	$\rightarrow$	ميل المماس $= \frac{-1}{m_d}$	المماس يعامد مستقيم معلوم d
نعود للحالة (3)	$\rightarrow$	$m = 0$	المماس أفقي
معادلته $y = y_0$	$\rightarrow$	$m = 0$	المماس في القيمة المحلية الصغرى أو الكبرى
نعود للحالة (3)	$\rightarrow$	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	مماس يمر بنقطتين A, B

تطبيقات الاشتقاق:

مبرهنة: f تابع اشتقاقي على المجال I و تابعه المشتق f' عندئذ:

- إذا كان $f' \geq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I ، كان f متزايداً تماماً على I.
- إذا كان $f' \leq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I ، كان f متناقصاً تماماً على I.

القيم الحدية:

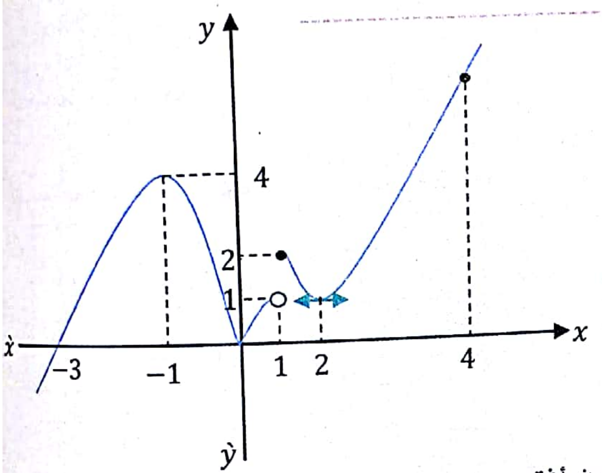
بفرض f تابع معرف على مجال ما I ، لتكن c نقطة من I عندئذ:

- نقول إن القيمة $f(c)=M$ قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند c إذا وجد مجال مفتوح J يضم النقطة c بحيث أياً يكن $x \in (I \cap J)$ فإن $f(x) \leq f(c)$
- نقول إن القيمة $f(c)=m$ قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند c إذا وجد مجال مفتوح J يضم النقطة c بحيث أياً يكن $x \in (I \cap J)$ فإن $f(x) \geq f(c)$
- نقول إن القيمة $f(c)$ قيمة حدية للتابع f إذا كانت قيمة كبرى محلياً أو صغرى محلياً.

مبرهنة: ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال مفتوح I ولتكن c نقطة من I :

- إذا كانت $f(c)$ قيمة كبرى (أو صغرى) محلياً للتابع f كان $f'(c)=0$
- إذا انعدم f' عند c و غيّر إشارته عندها، كانت $f(c)$ قيمة حدية (كبرى أو صغرى) محلياً للتابع f.
- **ملاحظة:** المماس في القيمة الحدية يكون مماساً أفقياً.

مبرهنة: ليكن f تابعاً اشـتقاقياً على مجال $I=[a,b]$ ولنفترض $f'(x) \geq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I عندئذ أياً كانت $k \in [f(a)\,,\,f(b)]$ كان للمعادلة $f(x)=k$ حل وحيد في المجال $I=[a,b]$



تمرين: نجد جانباً خط بياني لتابع f و المطلوب :

1. **اوجد مجموعة تعريف التابع f و مستقره الفعلي.**
   - بإسقاط الشكل على محور $x\acute{x}$ نجد $D=R$
   - بإسقاط الشكل على محور $y\acute{y}$ نجد $f(R)=R$
2. **اوجد $f(1)$ ، $f(0)$، $f(-3)$، $f'(2)$، $f'(-1)$، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$**

   $f(-3)=0$ ، $f(0)=0$ ، $f(1)=2$

   $f'(2)=0$ لأن المماس أفقي ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=1$

   $f'(-1)=0$ لأنها قيمة محلية كبرى فالمماس عندها يكون أفقي ميله معدوم .
3. **هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى او صغرى للتابع f ، علل ذلك ؟**

   نعم لأنه يوجد مجال مفتوح J يحوي (1) بحيث أياً يكن $x \in (R \cap J)$ فإن $f(x) \leq f(1)$
4. **ما هي القيم الحدية للتابع f**

   $f(2)=1$ قيمة محلية صغرى ؛ $f(1)=2$ قيمة محلية كبرى

   $f(0)=0$ قيمة محلية صغرى ، $f(-1)=4$ قيمة محلية كبرى
5. **أيكون التابع f اشتقاقي عند $x=1$ ، علل إجابتك؟**

   f غير اشتقاقي عند $x=1$ لأنه غير مستمر عند $x=1$ و ذلك لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \neq f(1)$
6. **ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ ، علل إجابتك ؟**

   للمعادلة $f(x)=2$ اربعة حلول و ذلك لأن المستقيم $f(x)=2$ يقطع C في أربع نقاط.
7. **اوجد صورة المجال $[-3,0]$**

   $f([-3,0])=[0,4]$
8. **اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=2$**

   بما أن المماس أفقي في القيمة المحلية فإن معادلته $y=1$

تدريب صفحة 84:

1) **فيما يأتي C_f هو الخط البياني للتابع f . اكتب معادلة المماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها (4).**

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left(4, \dfrac{1}{4}\right)$

f اشتقاقي عند $x = 4$:

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

$f'(4) = m = \dfrac{-1}{16}$

$y - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{16}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{-1}{16}x + \dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ $f(x) = x^2$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 16 \Rightarrow (4,16)$

f اشتقاقي عند $x = 4$:

$f'(x) = 2x$

$f'(4) = m = 2(4) = 8$

$y - 16 = 8(x - 4)$

$\Rightarrow y = 8x - 16$

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \Rightarrow (4,3)$

f اشتقاقي عند $x = 4$:

$f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(4) = m = \dfrac{1}{\sqrt{8+1}} = \dfrac{1}{3}$

$y - 3 = \dfrac{1}{3}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \left(4, \dfrac{1}{5}\right)$

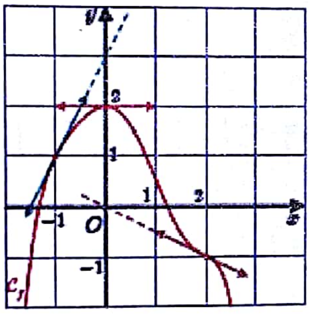
f اشتقاقي عند $x = 4$:

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$f'(4) = m = \dfrac{-1}{25}$

$y - \dfrac{1}{5} = \dfrac{-1}{25}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{-1}{25}x + \dfrac{9}{25}$

2) **في الشكل المرافق C_f هو الخط البياني لتابع f تأمل الشكل وأجب عن الأسئلة الآتية:**



1. عين كلاً من $f'(-1), f'(2), f'(0), f(-1), f(2), f(0)$

$f(0) = 2 \quad , \quad f'(0) = 0$

$f(2) = -1 \quad , \quad f'(2) = \dfrac{-1-0}{2-0} = \dfrac{-1}{2} \ : \ (0,0), (2,-1)$

$f(-1) = 1 \quad , \quad f'(-1) = \dfrac{1-3}{-1-0} = 2 \ : \ (-1,1), (0,3)$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$؟ اعط عددين صحيحين متتاليين يحصران كلاً من حلول المعادلة $f(x) = 0$.

للمعادلة $f(x) = 0$ حلين مختلفين. أحدهما $x_1 \in]1,2[$ والآخر $x_2 \in]-2,-1[$

3) **فيما يأتي احسب التابع المشتق للتابع f مبيناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها.**

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$D_f = R$:

$f'(x) = 2x^2 - x + 1$

$\boxed{2}\ f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{4} = \dfrac{1}{4}(x^2+3x-1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(2x+3) = \dfrac{2x+3}{4}$ $\qquad : D_{f'} = R$

$\boxed{3}\ f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$

$f'(x) = 4x^3 - 2\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.x\right) = 4x^3 - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} = 4x^3 - 3\sqrt{x}$ $\qquad : D_{f'} = [0,+\infty[$

$\boxed{4}\ f(x) = \dfrac{2}{x+1} - x$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} - 1$ $\qquad : D_{f'} = R\backslash\{-1\}$

$\boxed{5}\ f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

$f'(x) = \dfrac{1(x^2-4) - 2x(x-1)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^2-4-2x^2+2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$ $\qquad : D_{f'} = R\backslash\{-2,2\}$

$\boxed{6}\ f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\frac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ $\qquad : D_{f'} =]0,+\infty[$

$\boxed{7}\ f(x) = x\cos x$

$f'(x) = \cos x + (-\sin x)\,x = \cos x - x\sin x$ $\qquad : D_{f'} = R$

$\boxed{8}\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{(\cos x)\,(x) - 1(\sin x)}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ $\qquad : D_{f'} = R^*$

$\boxed{9}\ f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$f'(x) = \dfrac{(\cos x)\,(\cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad : D_{f'} = R\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z\right\}$

$\boxed{10}\ f(x) = \sin x\cos x$

$f'(x) = (\cos x)\,(\cos x) + (-\sin x)(\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ $\qquad : D_{f'} = R$

$\boxed{11}\ f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

$f'(x) = \dfrac{(-\sin x)(\sin x - 1) - \cos x(\cos x)}{(\sin x - 1)^2} = \dfrac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2}$

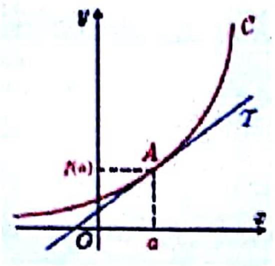
$= \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \dfrac{-1 + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \dfrac{1}{\sin x - 1}$ $\qquad : D_{f'} = R\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in Z\right\}$

$\boxed{12}\ f(x) = \dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$

$f'(x) = \dfrac{(\cos x)(2+\cos x) - (-\sin x)(1+\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$= \dfrac{2\cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{2\cos x + \sin x + 1}{(2+\cos x)^2}$ $\qquad : D_{f'} = R$

المماس والتقريب التآلفي:



ليكن C الخط البياني للتابع f الاشتقاقي عند النقطة a

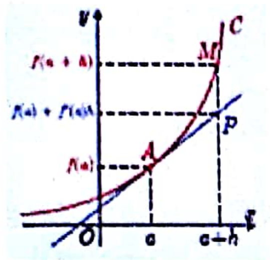
وليكن T المماس لمنحني C في النقطة $A(a, f(a))$

إن T هو المستقيم المار بالنقطة A وميله يساوي $m = f'(a)$

معادلته تكتب بإحدى الشكلين:

$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$ أو $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

التقريب التآلفي:



يظهر الرسم أن المستقيم T يكون قريباً من المنحني C في جوار النقطة A فإذا اردنا حساب قيمة عددية لنقطة تنتمي للخط C يمكن حسابها عن طريق المستقيم T في جوار تلك النقطة $(a+h)$ ونكتب القانون:

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h}$$

وذلك عندما h قريبة من الصفر.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{4.2}$

بفرض $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف والمستمر على $[0, +\infty[$ والاشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\overbrace{a = 4 \qquad\qquad h = 0.2 = \frac{2}{10}}^{a + h = 4.2}$$

$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f(a) = f(4) = \sqrt{4} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow f'(a) = f'(4) = \frac{1}{4}$: f اشتقاقي عند $a = 4$

حسب قانون التقريب الخطي:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$$

$$\sqrt{4.2} \approx 2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right) \Rightarrow \sqrt{4.2} \approx \frac{41}{20}$$

مثال: ليكن التابع $f(x) = \sin x$ اكتب عبارة التقريب الخطي عند $a = 0$ بدلالة h

f اشتقاقي على R

$$\overbrace{a = 0 \qquad\qquad h}^{a + h = 0}$$

$f(x) = \sin x \longrightarrow f(a) = f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(a) = f'(0) = \cos(0) = 1$: f اشتقاقي عند $a = 0$

حسب قانون التقريب الخطي:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$$

$\sin(0+h) \approx 0 + 1.h \Rightarrow \sin h \approx h$ من أجل قيم صغيرة للعدد h

---

تمرين: ليكن P القطع المكافئ الذي معادلته $f(x)=x^2$ بفرض B,A نقطتان من القطع P فاصلتاهما على الترتيب $-3,1$
ولتكن D نقطة من القطع P فاصلتها $x_D=\frac{x_A+x_B}{2}$ اثبت ان المماس T المار بالنقطة D للقطع P يوازي AB

$$\left.\begin{array}{l} A(1,f(1))=(1,1) \\ B(-3,f(-3))=(-3,9) \end{array}\right\} \Rightarrow x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$$

يكون المماس T في D يوازي AB إذا كان لهما نفس الميل:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-9}{1+3}=\frac{-8}{4}=-2 \\ f \text{ على اشتقاقي } R \\ m_D=f'(x_D):\quad f'(x)=2x \\ \qquad f'(-1)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_D=m_{AB}$$

ومنه T و AB متوازيان.

تمرين: ليكن التابع $f(x)=\tan x$ خطه البياني C .

1. اوجد مجموعة تعريف f ثم اثبت ان f تابع فردي واثبت ان دوره π
2. ادرس التابع f وارسم خطه البياني C

◆ $\boxed{1}$ $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ معرف على R ما عدا القيم التي تعدم المقام ومنه:

$$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad : k\in Z \Rightarrow \boxed{D=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\ ;k\in Z\right\}}$$

◆ لإثبات ان f تابع فردي يجب تحقق الشرطين:

$\boxed{1}\ \forall x\in D \longrightarrow -x\in D \qquad \boxed{2}\ f(-x)=-f(x)$

$\boxed{1}\ \forall x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k: k\in Z\right\} \Rightarrow -x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k: k\in Z\right\}$

$\boxed{2}\ f(-x)=\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x=-f(x)$

ومنه f تابع فردي خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ O

◆ لإثبات أن f دوري دوره π يجب أن يكون $x\in D \Rightarrow x+\pi\in D$

$$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=f(x)$$

فالتابع دوري ودوره π

$\boxed{2}$ بما ان f تابع دوري دوره π يكفي دراسة التابع على مجال طوله π مثل $I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

ولأن f فردي يكفي دراسة f على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونكمل الدراسة بالإستفادة من التناظر المركزي والانسحاب.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

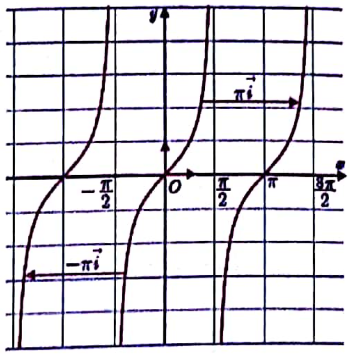
$f(0)=\tan 0=0$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} f(x)=\tan\frac{\pi}{2}=+\infty$$

ومنه $x=\frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب شاقولي للخط C عند $+\infty$ ، و C يقع على يسار المقارب

$$\acute{f}(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\acute{f}(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$



طرق تعيين الثوابت

1) تعيين قيمة a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً مثلاً عند $x = 1$ أي $\acute{f}(1) = 0$.

2) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون للتابع f قيمة حدية محلية مثلاً مساوية 4 عند $x = 3$ أي:

$$\overbrace{f(3) = 4 \qquad \acute{f}(3) = 0}$$

دائماً نفس الفاصلة $\qquad$ دائماً

3) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون C الخط البياني للتابع f يقبل مماساً أفقياً في النقطة مثلاً $A(1,2)$

$$\overbrace{f(1) = 2 \qquad \acute{f}(1) = 0}$$

(المماس أفقي ميله 0)

4) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون مستقيم ما Δ مماس للخط البياني C للتابع f في نقطة منه فاصلتها مثلاً $x = 0$

نوجد m_Δ $\qquad$ نعوض $x = 0$ في Δ فنحصل على ترتيب النقطة y_0

فيكون $\acute{f}(0) = m_\Delta$ $\qquad$ $(0, y_0)$

عندها $f(0) = y_0$

5) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون Δ المار بالنقطتين A و B مماساً للخط C للتابع f في النقطة A

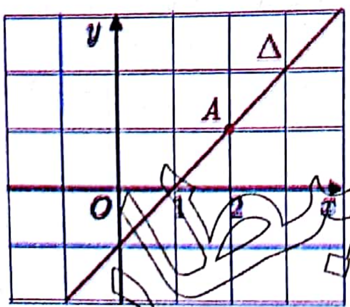
نوجد $m_\Delta = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ $\qquad$ $f(x_A) = y_A$

ثم $\acute{f}(x_A) = m_\Delta$

تمارين صفحة 89:

1) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين a, b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A

تحقق أن التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.



Δ يمر بالنقطتين $(2,1)$ و $(1,0)$ فإن ميله: $\frac{1-0}{2-1} = 1$

Δ مماس للخط البياني C في $A(2,1)$ اي :

$f(2) = 1$

$\frac{a(2)+b}{(2)^2+1} = 1$

$\frac{2a+b}{5} = 1$

$\boxed{2a+b=5}$ $\boxed{1}$

$f'(2) = m_\Delta = 1$

f اشتقاقي عند (2)

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$1 = \frac{a(4+1) - 4(2a+b)}{(4+1)^2}$$

$$1 = \frac{5a - 8a - 4b}{25}$$

$\boxed{-3a-4b=25}$ $\boxed{2}$

بالحل المشترك لـ $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

$$\begin{cases} -3a - 4b = 25 \\ 2a + b = 5 \quad (\text{نضرب بـ } 4) \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -3a - 4b = 25 \\ 8a + 4b = 20 \end{cases}$$

$5a = 45 \Rightarrow \boxed{a = 9}$

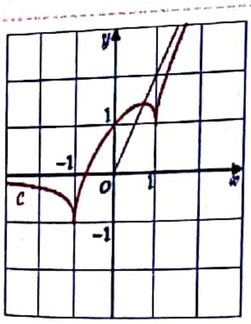
نعوض في $\boxed{1}$ فنجد $\boxed{b = -13}$

إذاً $f(x) = \frac{9x - 13}{x^2+1}$

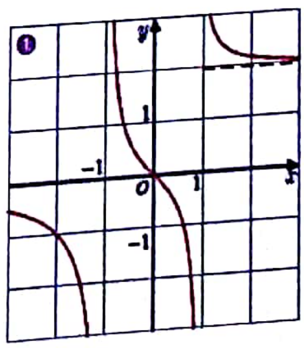
التحقق من صحة الحل:

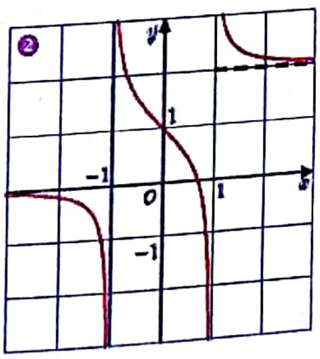
$f'(x) = \frac{9(x^2+1) - 2x(9x-13)}{(x^2+1)^2}$ $f'(2) = \frac{9(5) - 4(5)}{25} = \frac{45-20}{25} = 1$ محققة	$f(2) = \frac{9(2)-13}{(2)^2+1} = \frac{5}{5} = 1$ محققة

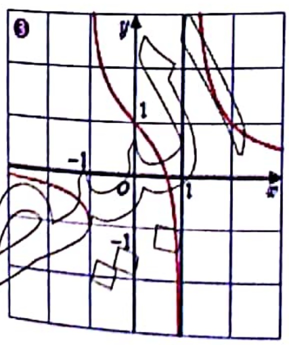
2) في الشكل المجاور C هو الخط البياني لتابع f معرف على R واشتقاقي على $R\backslash\{-1,1\}$



اي الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثل الخط البياني للتابع المشتق f' ؟







♦ نلاحظ من الخط البياني للتابع f ان هناك مماس افقي في نقطة $x_0 \in]0,1[$ اي $\acute{f}(x_0) = 0$

ومنه الخط البياني للتابع $\acute{f}$ يجب ان يقطع xx في نقطة $x_0 \in]0,1[$ **فالشكل 1 مرفوض.**

♦ نلاحظ ان الخط البياني للتابع f يملك مقارب مائل معادلته $y = 2x$ عند الـــــ $+\infty$ (حيث ان المقارب المائل يمر بالنقطتين $(0,0),(1,2)$) اي:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\acute{f}(x) - 2) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\acute{f}(x) = 2$$

اي للخط البياني للتابع $\acute{f}$ مقارب افقي $y = 2$ في جوار $+\infty$ **فالشكل 3 مرفوض**، إذاً الخط البياني للتابع $\acute{f}$ **هو الشكل 2**

---

3) ليكن f التـابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ عين العدد الحقيقي a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً عند $x = 1$

التابع f اشتقاقي على R ومشتقه $\acute{f}(x) = 3x^2 - 2x + a$ و $f(1)$ قيمة حدية عندئذ:

$\acute{f}(1) = 0$ قيمة حدية

$$3 - 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x$$

---

4) ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث b,a عددان حقيقيان نهدف إلى البحث عن قيم b,a بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

♦ **$f(-1)$ قيمة حدية محلياً للتابع.**

♦ **هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.**

1. لماذا $\acute{f}(-1) = 0$, $f(-1) = 0$

$\acute{f}(-1) = 0$ لأن المشتق عند القيمة الحدية ينعدم.

$f(-1) = 0$ لأن القيمة الحدية معدومة فرضاً

2. عين b,a ثم تحقق ان التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

$f(-1) = 0$ $\frac{a - b + 1}{-2} = 0$ $\boxed{a - b + 1 = 0}$ $\boxed{1}$	$\acute{f}(-1) = 0$ f اشتقاقي على $R \backslash \{1\}$ $\acute{f}(x) = \frac{(2ax + b)(x - 1) - 1(ax^2 + bx + 1)}{(x - 1)^2}$ $0 = \frac{(-2a + b)(-2) - (a - b + 1)}{4}$ $0 = 4a - 2b - a + b - 1$ $\boxed{3a - b - 1 = 0}$ $\boxed{2}$

$$-\begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ 3a - b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-2a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

نعوض في $\boxed{1}$ نجد: $1 - b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

التحقق من صحة الحل:

$f(-1) = \frac{1 - 2 + 1}{-2} = 0$ محققة	$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1) - 1(x^2+2x+1)}{(x-1)^2}$ $f'(-1) = \frac{(0)(-2) - 1(1-2+1)}{4} = 0$ محققة

5) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x + 5$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$
$$3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 & \text{إما} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 7 & \text{أو} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2. تحقق ان للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 , -2 احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

f مستمر في المجال $[-1, +\infty[$, $f([-1, +\infty[) = [3, +\infty[$

وبما أن $0 \notin [3, +\infty[$ فليس للمعادلة حل في المجال $[-1, +\infty[$

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً في المجال }]-\infty, -1[\\ 0 \in f(]-\infty, -1[) =]-\infty, 7[\end{array} \right.$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً α في المجال $]-\infty, -1[$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in]-\infty, -1[\quad , \quad f(\alpha) = 0 \text{ , } \alpha \text{ وحيد} \\ \text{التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال } [-3, -2] \\ f(-2) = 3 , f(-3) = -13 \ : f(-2).f(-3) < 0 \end{array} \right.$ $\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-3, -2]$

ونلاحظ بالتجريب ان: $f(-2.3) = -0.26 , f(-2.2) = 0.9 \Rightarrow f(-2.3).f(-2.2) < 0 \Rightarrow \alpha \in]-2.3 , -2.2[$

اشتقاق تابع مركب

مبرهنة: ليكن g تابعاً اشتقاقياً على مجال J وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولنفترض انه أياً كان $x \in I$ كان $u(x) \in J$ عندئذ التابع $f(x) = g[u(x)]$ اشتقاقياً على I أياً كانت $x \in I$ ونكتب

$$\boxed{f'(x) = u'(x).g'[u(x)]}$$

مثال: احسب التابع المشتق لكل من التوابع الآتية :

- $f(x) = g[ax+b] \quad \Rightarrow \grave{f}(x) = a.\grave{g}[ax+b]$
- $f(x) = (3x^2-x)^4 \quad \Rightarrow \grave{f}(x) = 4(3x^2-x)^3(6x-1)$
- $f(x) = \sin(x^2) \quad \Rightarrow \grave{f}(x) = 2x\cos(x^2)$
- $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow \grave{f}(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $f(x) = \sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \grave{f}(x) = 3\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)$

تمرين: **اوجد مشتق التابع $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$ مبيناً مجموعة تعريف اشتقاقه.**

بما أن f معرف على R لأن $x^2+2x+3>0$ لان مميزه سالب وإشارة x^2 موجبة فيكون f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

****

تمرينات صفحة 94

1) في التمرينات الآتية احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة.

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{f(x) = (2x^3-1)^5 \ , \ D = R}$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = 5(2x^3-1)^4(6x^2) = 30x^2(2x^3-1)^4$$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3 \ , \ D = R\backslash\{-2\}}$ التابع f اشتقاقي على $R\backslash\{-2\}$

$$\grave{f}(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}\right) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right) = \frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \ , \ D = R}$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{x^2+1} \ , \ D = R}$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.x = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \ , \ D = R}$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x+1)}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2x^2+3x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{\frac{2x^2+2x+2-2x^2-3x-1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{-x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$\boxed{6}$ $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \ , \ D = R\backslash[-1,2[}$ التابع f اشتقاقي على $R\backslash]-1,2[$

$$\grave{f}(x) = \frac{\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} = \frac{-3}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}.(x-2)^2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-3}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}.(x-2)^4} = \frac{-3}{2\sqrt{(x+1)(x-2)^3}}$$

$\boxed{7}$ $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$\boxed{8}$ $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$, $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{2\sin x(\cos x).\cos^3 x-3\cos^2 x(-\sin x).\sin^2 x}{\cos^6 x}$$

$$f'(x)=\frac{2\sin x.\cos^4 x+3\cos^2 x.\sin^3 x}{\cos^6 x}=\frac{\sin x.\cos^2 x(2\cos^2 x+3\sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

$$f'(x)=\frac{\sin x[2(1-\sin^2 x)+3\sin^2 x]}{\cos^4 x}=\frac{\sin x(2-2\sin^2 x+3\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$f'(x)=\frac{\sin x(2+\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$\boxed{9}$ $f(x)=\tan 3x$, $D=\left[0,\frac{\pi}{6}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{6}\right[$

$$f'(x)=3(1+\tan^2 3x)$$

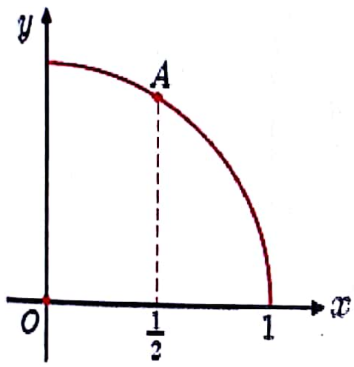
$\boxed{10}$ $f(x)=\tan^2 x$, $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)$$

---

2) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ $x^2+y^2=1$ هي معادلة للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1 ، وعليه فإن ربع الدائرة C المرسوم في الشكل المرافق هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x)=\sqrt{1-x^2}$



1. احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1[$

التابع f اشتقاقي على المجال $[0,1[$ ومنه:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. استنتج معادلة للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\frac{1}{2}$

$$x_A=\frac{1}{2}\quad,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m_T=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

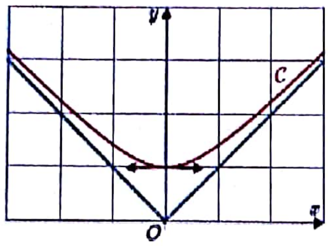
$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\boxed{T: y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}$$ معادلة المماس

3. تحقق ان المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

OA يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0,0)$

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_0}{x_A-x_0}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{1}{2}-0}=\sqrt{3}$$

$m_{OA}.m_T=\sqrt{3}.\frac{-1}{\sqrt{3}}=-1$ و بالتالي المماس T و المستقيم OA متعامدان $\Longrightarrow$



3) في الشكل المرافق نجد الخط البياني C للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

1. تحقق أن f تابع زوجي.

أياً كانت $x\in R$ فإن $-x\in R$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$ $\Big\}\Longrightarrow$ التابع f زوجي

2. احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

3. علل كون المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{1}{+\infty}=0\Longrightarrow$ $y=x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

4. ادرس تغيرات f ، هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي نستخلصها من الخط البياني.

f معرف و اشتقاقي على R , $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $D=R$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$\acute{f}(x)=0\Longrightarrow x=0:\ f(0)=1$, $\acute{f}(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

* بما أن f زوجي ويقبل مقارب مائل $y=x$ في جوار$+\infty$ فإنه يقبل مقارب مائل $y=-x$ في جوار $-\infty$
* $f(0)=1$ قيمة حدية صغرى محلياً.
* وبما أن $\acute{f}(0)=0$ فهناك مماس أفقي للخط البياني في النقطة $(0,1)$

وجميع ما سبق يوافق الرسم المعطى.

المشتقات من المرتبة n (مراتب عليا) :

ليكن f تابع اشتقاقي على مجال I نسمي التابع $\acute{f}$ المشتق الأول نرمز له $f^{(1)}$

$\acute{f}$ تابع اشتقاقي على مجال I نسمي التابع $\acute{\acute{f}}$ المشتق الثاني نرمز له $f^{(2)}$

وهكذا أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 2$ نعرف التابع المشتق من المرتبة n بـ: $f^{(n)}=[f^{(n-1)}]'$

تمرين : بفرض f تابع معرف على $R\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x)=\frac{1}{1-x}$

اثبت أن المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ حيث $x\neq 1$

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{نشتق}} f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \\ f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x)=\frac{1!}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1=L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n=1$.

- نفرض صحة الخاصة من أجل n أي :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{صحيحة}$$

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

لدينا من الفرض :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

نشتق :

$$\left[f^{(n)}(x)\right]'=\frac{-(n+1)(1-x)^{n}(-1).(n)!}{[(1-x)^{n+1}]^2}=\frac{(n+1)n!(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}}$$

$(n+1)n!=(n+1)!$:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة السابقة صحيحة من أجل كل $n\geq 1$.

****

ملاحظات هامة :

- لإثبات الخطوة الأولى ننطلق من :

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{نشتقها} \\ f^{(n)}(x) \rightarrow n=1 \ \text{نعوض} \end{cases}$$

- لإثبات الخطوة الثالثة ننطلق من الخطوة الثانية و نشتقها.
- $(n+1)!=(n+1)n!$
- $(n!)'=0$
- $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$
- $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

****

البيطار

تمرين: باستخدام تعريف العدد المشتق احسب نهاية التابع g عند القيم الموافقة:

$\boxed{1}$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ (0)

$\boxed{2}$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ (1)

$\boxed{3}$ $g(x)=\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{4}$ $g(x)=\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

الحل:

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{x+4}-2\ ,\quad f(0)=0$

f اشتقاقي عند $x=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}\quad ,\quad f'(0)=\dfrac{1}{4}$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\cos x\quad ,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

f اشتقاقي عند $x=\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=-\sin x\quad ,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}\ ,\quad f(1)=0$

f اشتقاقي عند $x=1$

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\quad ,\quad f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\tan x-1\ ,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

f اشتقاقي عند $x=\frac{\pi}{4}$

$f'(x)=1+\tan^2 x\quad ,\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=2$$

تمرين: احسب كلاً من:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}$

الحل:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\ ?$ $\quad\dfrac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$=-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{-2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{-1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}(1)^2=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

$$\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}=\frac{4\cos^3 x-3\cos x-\cos x}{x.\sin x}=\frac{4\cos^3 x-4\cos x}{x.\sin x}$$

$$=\frac{4\cos x\,(\cos^2 x-1)}{x.\sin x}=\frac{4\cos x\,(-\sin^2 x)}{x.\sin x}=\frac{-4\cos x\,.\sin x}{x}=-4\cos x\;.\;\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}=-4(1)(1)=-4$$

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$

1) a. تحقق أن f معرف على المجال $[0,2]$

التابع f معرف عندما $x(2-x)\geq 0$

$$x(2-x)=0\quad\begin{cases}x=0 & \text{إما}\\ x=2 & \text{أو}\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(2-x)\geq 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$$\Longrightarrow D_f=[0,2]$$

b. اثبت أن f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $\acute{f}(x)$ على هذا المجال

التابع f معرف على المجال $[0,2]$ فهو اشتقاقي على المجال $]0,2[$

$$\acute{f}(x)=(1)\left(\sqrt{x(2-x)}\right)+(x)\left(\frac{2-2x}{2\sqrt{x(2-x)}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x(2-x)}}{1}+\frac{x(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{x(2-x)+x-x^2}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{3x-2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

2) ما نهاية $\dfrac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ استنتج أن f اشتقاقي عند الصفر

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x}=\sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

لنشكل التابع $g(x)$ المعرف على $]0,2]$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

التابع f قابل للاشتقاق عند $x=0$

3) ما نهاية $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عندما تسعى x إلى 2؟ هل f اشتقاقي عند $x=2$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)-0}{x-2}=\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{-(2-x)}=\frac{x\sqrt{(2-x)(x)}}{-\sqrt{2-x}\,.\,\sqrt{2-x}}=-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$$

إذاً التابع f غير قابل للاشتقاق عند $x=2$ من اليسار

4) نرمز إلى الخط البياني للتابع f ، في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بالرمز C

a. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

$$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$$

التابع معرف ومستمر على $[0,2]$ واشتقاقي على $]0,2[$

$f(0) = 0 \ , \ f(2) = 0$

$$f'(x) = \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3x - 2x^2 = 0 \\ x(3-2x) = 0 \end{matrix} \begin{cases} \text{إما} \quad x = 0 : f(0) = 0 \\ \text{او} \quad x = \frac{3}{2} : f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

b. عيّن مماسي C في النقطتين $A(0,0)$ ، $B(2,0)$

$A(0,0)$

$f'(0) = m = 0$

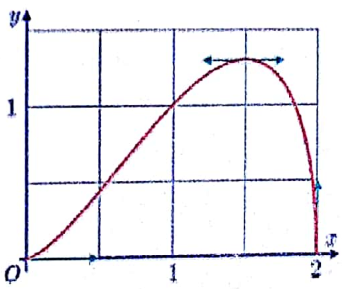
معادلة المماس $\boxed{y = 0}$

$B(2,0)$

$f'(2)$ غير معرف

معادلة المماس $\boxed{x = 0}$

c. ارسم مماسي C في A , B ثم ارسم C



تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

1) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 0$ من اليمين ومن اليسار

نشكل التابع $g(x)$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ ونميز حالتين:

نقطة التماس $(0,2)$

$x < 0$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{x \to 0, x<0} g(x) = 3$$

f اشتقاقي من اليسار عند $x = 0$

ويملك نصف مماس ميله $m = 3$

معادلته $y = 3x + 2$

$x > 0$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{-1}{x+1}$$

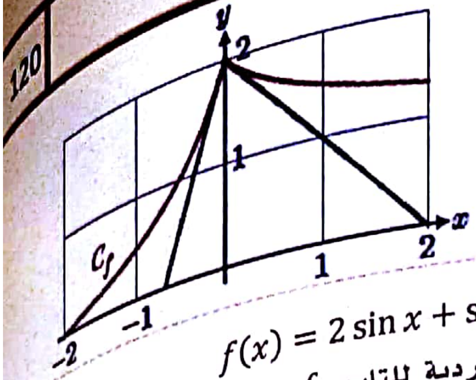
$$\lim_{x \to 0, x>0} g(x) = -1$$

f اشتقاقي من اليمين عند $x = 0$

ويملك نصف مماس ميله $m = -1$

معادلته $y = -x + 2$

2) ارسم نصفي المماس وارسم C على المجال $[-2,2]$



تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

1) تحقق ان f دوري وان 2π دوراً له، ادرس الصفة الزوجية او الفردية للتابع f

واستنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$

نريد إثبات ان $f(x+2\pi) = f(x)$

$$L_1 = f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2(x+2\pi))$$
$$= 2\sin x + \sin(2x+4\pi)$$
$$= 2\sin x + \sin 2x = f(x) = L_2 \implies 2\pi \text{ دوري دوره } f$$

لمعرفة الصفة الزوجية أو الفردية:

أياً كان $x \in R$ فإن $-x \in R$

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x)$$
$$= -2\sin(x) - \sin(2x)$$
$$= -(2\sin(x) + \sin(2x)) = -f(x) \quad \text{فالتابع فردي}$$

بما أن التابع دوري وفردي فيمكن دراسته على نصف مجال الدور $[0,\pi]$

2) اثبت انه في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + \cos 2x)$$
$$= 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

3) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(\pi) = 0$$

بما أن المجال $[0,\pi]$ فإن $k = 0$

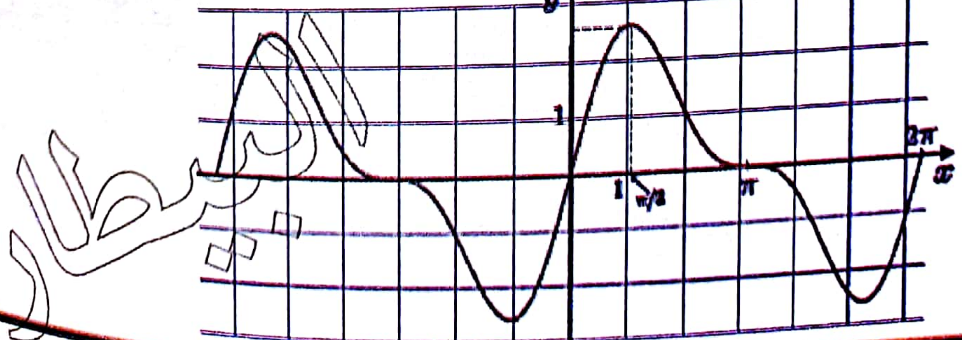
$$f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$
$$f'(x) = 0$$

إما $2\cos x = 1 \implies \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} : f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

أو $\cos x + 1 = 0 \implies \cos x = -1 \implies x = \pi : f(\pi) = 0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

4) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-2\pi, 2\pi]$



تمرينات ومسائل الوحدة

1) اكتب معادلة للمماس للخط البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a

[1] $f(x) = x^3 + x^2 - 3x \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

f اشتقاقي عند $x = 0$ و منه

$\acute f(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$m = \acute f(0) = -3$

$y - 0 = -3(x - 0)$

$\boxed{y = -3x}$ معادلة المماس

[2] $f(x) = x\sqrt{x} \quad : a = 1$

$a = x = 1 \quad : \quad f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad (1,1)$

f اشتقاقي عند $x = 1$ و منه

$$\acute f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} . x$$

$$m = \acute f(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

$\boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$ معادلة المماس

[3] $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

f اشتقاقي عند $x = 0$ و منه

$$\acute f(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \quad m = \acute f(0) = 1$$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$\boxed{y = x}$ معادلة المماس

[4] $f(x) = \frac{x}{x - 1} \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

f اشتقاقي عند $x = 0$ و منه

$$\acute f(x) = \frac{x - 1 - x}{(x - 1)^2} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

$m = \acute f(0) = -1$

$y - 0 = -1(x - 0)$

$\boxed{y = -x}$ معادلة المماس

[5] $f(x) = \cos x \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : f(0) = \cos(0) = 1$

$\Rightarrow \quad (0,1)$

$\acute f(x) = -\sin x$ $\quad$ x و منه

$= 0$ f اشتقاقي عند

$m = \acute f(0) = 0$

$y - 1 = 0(x - 0)$

$\boxed{y = 1}$ معادلة المماس

[6] $f(x) = x\cos x \quad : a = \frac{\pi}{4}$

$$a = x = \frac{\pi}{4} \quad : \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} . \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$$

f اشتقاقي عند $x = \frac{\pi}{4}$ و منه

$\acute f(x) = \cos x - x\sin x$

$$m = \acute f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\boxed{y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)x + \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}}$ معادلة المماس

2) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1. اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1

$x=1 \quad : \quad f(1)=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(1,\frac{-1}{2}\right)$

f اشتقاقي عند $x=1$ و منه

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-1\,(x^2-3x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

$$m=f'(1)=\frac{-1}{4}$$

معادلة المماس لـ C

$$y+\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-1) \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x-\frac{1}{4}}$$

2. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$

المماس يوازي المستقيم فلهما نفس الميل ومنه: $m=-4$

$$f'(x)=m$$
$$f'(x)=-4$$
$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}=-4$$
$$x^2+2x-4=-4(x+1)^2$$
$$x^2+2x-4=-4(x^2+2x+1)$$
$$x^2+2x-4=-4x^2-8x-4$$
$$5x^2+10x=0 \qquad :\div 5$$
$$x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{إما} \\ x=-2 & \text{أو} \end{cases}$$

ومنه C يقبل مماسين موازيين للمستقيم $y=-4x$

3. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$

المماس يوازي المستقيم $3x-2y=0$ فلهما نفس الميل ومنه: $m=\frac{3}{2}$: $2y=3x \to y=\frac{3}{2}x$

$$f'(x)=m$$
$$f'(x)=\frac{3}{2}$$
$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}=\frac{3}{2}$$
$$2x^2+4x-8=3(x+1)^2$$
$$2x^2+4x-8=3(x^2+2x+1)$$
$$2x^2+4x-8=3x^2+6x+3$$
$$x^2+2x+11=0 \Rightarrow \Delta=4-4(1)(11)=-40<0$$

المعادلة مستحيلة الحل أي أن C لا يقبل أي مماس يوازي المستقيم $3x-2y=0$

3) ليكن C الخط البياني للتابع ... x^2+2 ...

1. اعطِ معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها (1)

$$x = 1 \quad : \quad f(1) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

f اشتقاقي عند $x = 1$ و منه

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$m = \acute{f}(1) = \frac{1}{9}$$

معادلة المماس لـ C

$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}}$$

2. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{-1}{4}x$

المماس يوازي المستقيم فلهما نفس الميل ومنه: $m = \frac{-1}{4}$

$$\acute{f}(x) = m$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$8 - 4x^2 = -(x^2+2)^2$$

$$8 - 4x^2 = -x^4 - 4x^2 - 4$$

$$x^4 + 12 = 0 \Rightarrow x^4 = -12$$

المعادلة مستحيلة الحل أي أن C لا يقبل أي مماس يوازي المستقيم $y = \frac{-1}{4}x$

3. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x - y = 0$

المماس يوازي المستقيم $4x - y = 0$ فلهما نفس الميل ومنه: $m = 4$

$$\acute{f}(x) = m$$

$$\acute{f}(x) = 4$$

$$\frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2} = 4$$

$$2 - x^2 = 4(x^2+2)^2$$

$$2 - x^2 = 4(x^4 + 4x^2 + 4)$$

$$2 - x^2 = 4x^4 + 16x^2 + 16$$

$$4x^4 + 17x^2 + 14 = 0 \Rightarrow \Delta = 289 - 4(4)(14) = 65$$

$$x_1^2 = \frac{-17 - \sqrt{65}}{2(4)} < 0 \ (\text{مرفوضة})$$

$$x_2^2 = \frac{-17 + \sqrt{65}}{2(4)} < 0 \ (\text{مرفوضة})$$

أي أن C لا يقبل أي مماس موازياً المستقيم $4x - y = 0$

4) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 1 \ : f(1) = -1 \\ \text{او } x = -1 : f(-1) = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. تحقق ان للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور.

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,-1]$

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0 \\ f(-1) = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) \times f(-1) < 0$$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها جذر وحيد في المجال $]-\infty,-1]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = 3 > 0 \\ f(1) = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) \times f(1) < 0$$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها جذر وحيد في المجال $]-1,1[$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = -1 < 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها جذر وحيد في المجال $[1,+\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور في R

---

5) ليكن f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(3)(-1) = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2(3)} = \frac{-1}{3} : f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{37}{54}$$

$$x_2 = \frac{2+4}{2(3)} = 1 \quad : f(1) = \frac{-1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[$ و $0 \in f\left(\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[\right) = \left]-\infty, \frac{37}{54}\right[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $\left[\frac{-1}{3}, 1\right]$ و $0 \in f\left(\left[\frac{-1}{3}, 1\right]\right) = \left[\frac{-1}{2}, \frac{37}{54}\right]$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left[\frac{-1}{3}, 1\right]$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]1, +\infty[$ و $0 \in f(]1, +\infty[) = \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]1, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور في R

6) ليكن f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \quad (\div 12)$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow \begin{array}{r} x(x^2 + x - 2) = 0 \\ x(x+2)(x-1) = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x = 0 \quad : f(0) = 4 \\ \text{أو} \quad x = -2 \; : f(-2) = -28 \\ \text{أو} \quad x = 1 \quad : f(1) = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-28	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty, -2[$ و $0 \in f(]-\infty, -2[) =]-28, +\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty, -2[$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[-2,0]$ و $0 \in f([-2,0]) = [-28,4]$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-2,0]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $]0,1[$ ، $0 \in f(\,]0,1[\,) =]-1,4[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]0,1[$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$ ، $0 \in f([1,+\infty[\,) = [-1,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[1,+\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x)$ اربعة جذور في R .

7) في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب $3,2,1$ للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

f تابع صحيح فهو اشتقاقي على R	$f'(x) = 3x^2 - x + 1$
f' تابع صحيح فهو اشتقاقي على R	$f''(x) = 6x - 1$
f'' تابع صحيح فهو اشتقاقي على R	$f'''(x) = 6$

$\boxed{2}$ $f(x) = x\,.\sqrt{x}$

f تابع اشتقاقي على $[0,+\infty[$	$f'(x) = 1\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
f' تابع اشتقاقي على $]0,+\infty[$	$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$
f'' تابع اشتقاقي على $]0,+\infty[$	$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(3)}{4x} = \frac{-3}{8x\sqrt{x}}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{1}{x-1}$

f تابع اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$	$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$
f' تابع اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$	$f''(x) = \frac{-2(x-1)(1)(-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$
f'' تابع اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$	$f'''(x) = \frac{-3(x-1)^2(1)(2)}{(x-1)^6} = \frac{-6}{(x-1)^4}$

$\boxed{4}$ $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$

f تابع اشتقاقي على R	$f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x$
f' تابع اشتقاقي على R	$f''(x) = -4\cos 2x - 4\sin 2x$
f'' تابع اشتقاقي على R	$f'''(x) = 8\sin 2x - 8\cos 2x$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ لاحظ : $\left(\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\; ; k \in Z\right)$

f تابع اشتقاقي على $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z\right\}$

$$f'(x) = \frac{-(-\sin x)(1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

f' تابع اشتقاقي على $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z\right\}$

$$f''(x) = \frac{\cos x\,(\cos^2 x) - 2\cos x\,(-\sin x)(\sin x)}{\cos^4 x}$$
$$= \frac{\cos x\,(\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{1 - \sin^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x}$$
$$= \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

f'' تابع اشتقاقي على $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z\right\}$

$$f'''(x) = \frac{2\sin x\cos x\,(\cos^3 x) - 3\cos^2 x\,(-\sin x)(1 + \sin^2 x)}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos^4 x + 3\cos^2 x\sin x\,(1 + \sin^2 x)}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\sin x\cos^2 x\,(2\cos^2 x + 3 + 3\sin^2 x)}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x + 3 + 2\sin^2 x + \sin^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{\sin x\,(5 + \sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ لاحظ : $(\sin x = 0 \quad x = \pi k \;\; ; k \in Z)$

f تابع اشتقاقي على $R\setminus\{\pi k : k \in Z\}$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

f' تابع اشتقاقي على $R\setminus\{\pi k : k \in Z\}$

$$f''(x) = \frac{\sin x\,(\sin^2 x) - 2\sin x\,(\cos x)(-\cos x)}{\sin^4 x}$$
$$= \frac{\sin x\,(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{\sin^4 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

f'' تابع اشتقاقي على $R\setminus\{\pi k; k \in Z\}$

$$f'''(x) = \frac{2\cos x\,(-\sin x)\sin^3 x - 3\sin^2 x\,(\cos x)(1 + \cos^2 x)}{\sin^6 x}$$
$$= \frac{-2\cos x\sin^4 x - 3\sin^2 x\cos x - 3\sin^2 x\cos^3 x}{\sin^6 x}$$
$$= \frac{-\cos x\sin^2 x\,(2\sin^2 x + 3 + 3\cos^2 x)}{\sin^6 x}$$
$$= \frac{-\cos x\,(2\sin^2 x + 3 + 2\cos^2 x + \cos^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{-\cos x\,(5 + \cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

---

8) ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

1. تحقق ان $\sqrt{1 + x^2}.f'(x) = f(x)$ ايا ً يكن x من R.

$$L_1 = \sqrt{1 + x^2}\, f'(x) = \sqrt{1 + x^2}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \sqrt{1 + x^2} + x = f(x) = L_2$$

2. استنتج ان $(1 + x^2).f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$ ايا ً يكن x من R.

لدينا من (1) : $\sqrt{1 + x^2}.f'(x) = f(x)$

نشتق :

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}f'(x)+f''(x).\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$

$$xf'(x)+(1+x^2)f''(x)=\underbrace{\sqrt{1+x^2}\,.f'(x)}_{(1)\text{من}}$$

$$xf'(x)+(1+x^2)f''(x)=f(x)$$

وهو المطلوب

$$(1+x^2).f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$$

9) في كل من الحالات الآتية ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر.

$\boxed{1}$ $f(x)=x^2\sqrt{x}$, $D_f=[0,+\infty[$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sqrt{x}-0}{x}=\frac{x^2\sqrt{x}}{x}=x\sqrt{x}\quad :(x>0)$$

$\lim_{x\to0}g(x)=0$ أي أن f اشتقاقي عند (0)

$\boxed{2}$ $f(x)=x|x|$, $D_f=R$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على R^* :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x|x|-0}{x}=\frac{x|x|}{x}=|x|$$

$\lim_{x\to0}g(x)=0$ أي أن f اشتقاقي عند (0)

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$, $D_f=R$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على R^* :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}-0}{x}=\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

للتخلص من القيمة المطلقة نميز حالتين :

♦ $x>0$:

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x(x^2+1)}=\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{x+1}{x^2+1}$$

$\lim_{x\to0^+}g(x)=1$ أي أن f اشتقاقي عند (0) من اليمين وللخط C نصف مماس

♦ $x<0$:

$$g(x)=\frac{x^2-x}{x(x^2+1)}=\frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\frac{x-1}{x^2+1}$$

$\lim_{x\to0^-}g(x)=-1$ أي أن f اشتقاقي عند (0) من اليسار وللخط C نصف مماس

و بما ان $\lim_{x\to0^-}g(x)\neq\lim_{x\to0^+}g(x)$ فإن f غير اشتقاقي عند (0)

10) التابع f معرف على R وفق $f(0)=0$, $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x\neq0$

1. هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

لناخذ التابع :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

نعلم ان :

$$\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1 \quad : \quad \left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|$$

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \le |x| \ (1)$$

$$|g(x) - 0| \le |x|$$

بما ان $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ فإن حسب الإحاطة ② $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ فالتابع f اشتقاقي عند الصفر.

2. احسب $\acute{f}(x)$ على R^*

f اشتقاقي على R^*

$$\acute{f}(x) = 2x\ \cos\frac{1}{x} + \left[-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]x^2$$

$$\acute{f}(x) = 2x\ \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

---

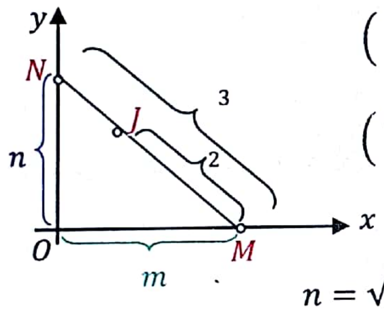
11) محل هندسي:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، M هي النقطة التي إحداثياتها $(m,0)$ حيث $0 \le m \le 3$ و N هي النقطة التي إحداثياتها $(0,n)$ حيث $n \ge 0$ ، النقطتان M و N تحققان $MN = 3$، وأخيراً J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تحقق $MJ = 2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$ ورسمه.

لدينا: النقطة $M(m,0)$ حيث $0 \le m \le 3$

والنقطة $N(0,n)$ حيث أن $n \ge 0$ و $MN = 3$

والنقطة $J(x,y)$ من $[MN]$ حيث $MJ = 2$ إذاً $NJ = 1 \Leftarrow \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{JN}$



$$\binom{x-m}{y-0} = 2\binom{0-x}{n-y}$$

$$\binom{x-m}{y-0} = \binom{0-2x}{2n-2y} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-m = -2x \\ y = 2n-2y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 3x = m \\ 3y = 2n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{m}{3} \\ y = \frac{2n}{3} \end{matrix}$$

إذاً إحداثيات النقطة J هي: $J\left(\frac{m}{3},\frac{2n}{3}\right)$

من المثلث OMN نجد: $m^2 + n^9 = 9 \Leftarrow n^2 = 9 - m^2 \Leftarrow n = \sqrt{9-m^2}$

ومنه $\begin{cases} J\left(\frac{m}{3},\frac{2\sqrt{9-m^2}}{3}\right) \\ J(\ x\ ,\ y\ ) \end{cases}$ و $\begin{matrix} x = \frac{m}{3} \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{9-m^2} \end{matrix}$

وللحصول على معادلة المحل الهندسي نكتب العلاقة بين x و y فنجد:

حيث: $0 \le m \le 3$

$$0 \le \frac{m}{3} \le 1$$

$$0 \le x \le 1$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9-(3x)^2}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9-9x^2}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9(1-x^2)}$$

$$\boxed{y = 2\sqrt{1-x^2}}$$

إذاً: النقطة J تنتمي إلى الخط البياني C للتابع f المعرف وفق العلاقة: $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ حيث $x \in [0,1]$

والنقطة J ترسم الخط البياني C كاملاً

ادرس تغيرات f وادرس قابلية اشتقاقه عند (1) مع الرسم

$$f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$

f معرف ومستمر على المجال $[0,1]$ واشتقاقي على $[0,1[$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(1) = 0$$

$$\acute{f}(x) = 2\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow f(0) = 2$$

x	0	1
$\acute{f}(x)$	$-$	$\|\|$
$f(x)$	2 ↘	0

دراسة قابلية الاشتقاق عند $x = 1$: لنأخذ التابع:

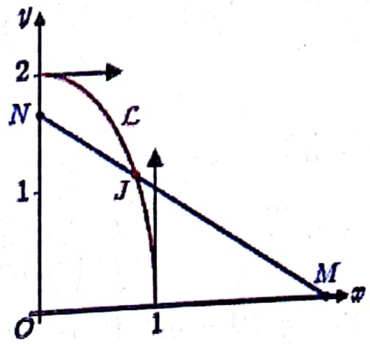
$$t(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \Longrightarrow t(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2} - 0}{x-1}$$

$$t(x) = \frac{2\sqrt{(1-x)(1+x)}}{-(1-x)}$$

$$t(x) = -2\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} t(x) = -2(+\infty) = -\infty$$

إذاً f ليس اشتقاقياً عند $x = 1$



12) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ نهدف إلى إثبات ان المجموعة $\mathcal{E}$ هي اجتماع خطين بيانيين C_2, C_1 لتابعين f_2, f_1 ثم رسم $\mathcal{E}$

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$$

$$4y^2 = -x^2 + 2x + 3 \qquad : (\div 4)$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(-x^2 + 2x + 3)$$

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

$$-(x^2 - 2x - 3) \geq 0$$

$$(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} & x=3 \\ \text{أو} & x=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-x^2+2x+3 \geq 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

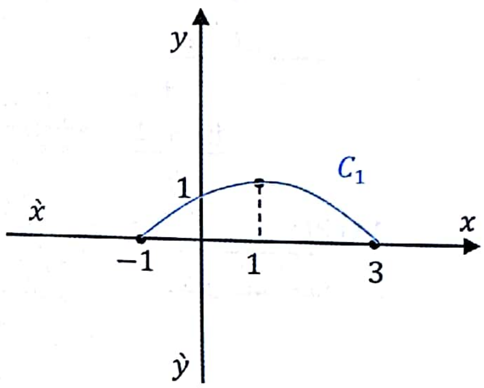
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}=f_1(x) \ : \ x\in[-1,3] \quad , \ y\geq 0 \\ y=\frac{-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}=f_2(x) \ : \ x\in[-1,3] \quad , \ y\leq 0 \end{cases}$$

♦ ندرس تغيرات f_1: $f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$

f_1 مستمر على $[-1,3]$ واشتقاقي على $]-1,3[$ $\qquad f_1(-1)=0 \quad , \quad f_1(3)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}=\frac{-x+1}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} \\ f'_1(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \ : \quad f_1(1)=1$$

x	-1		1		3
$f'_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f_1(x)$	0	↗	1	↘	0

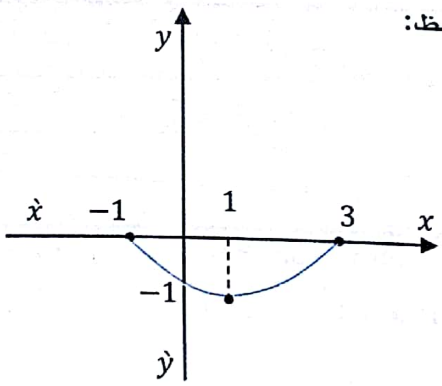


♦ $f_2(x)=\frac{-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$ $\quad : D=[-1,3] \quad : y\leq 0$

وهنا لا داعي لدراسة التغيرات للتابع f_2 لأننا نلاحظ:

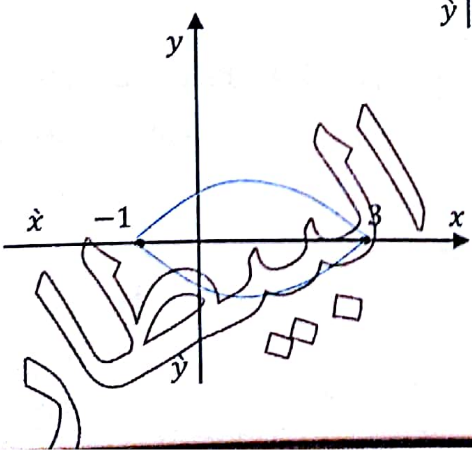
$f_2(x)=-f_1(x) \quad : \quad x\in[-1,3]$

C_2 نظير C_1 بالنسبة لـ $x\grave{x}$



ومنه فإن المجموعة ε هي اجتماع خطين بيانيين

C_1, C_2 للتابعين f_1, f_2 ويكون الشكل:



13) متراجحة هويغنز Huygens

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة $2\sin x+\tan x \ge 3x$ أياً يكن x من المجال $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة السابقة تكافئ: $2\sin x+\tan x-3x\ge 0$

$f(x)=2\sin x+\tan x-3x \quad : \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

f مستمر و اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$f(0)=0 \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{<}} f(x)=2+\frac{1}{0^+}-\frac{3\pi}{2}=+\infty$

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x+1-3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

المقام موجب فإشارة $f'(x)$ من إشارة بسطه: $2\cos^3 x-3\cos^2 x+1$

نفرض $\cos x=t \quad \Leftarrow \quad 2t^3-3t^2+1$

$$2t^3-3t^2+1=0$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3-3t^2+1 & t-1 \\ \hline \mp 2t^3 \pm 2t^2 & 2t^2-t-1 \\ -t^2+1 & \\ \pm t^2 \mp t & \\ -t+1 & \\ \pm t \mp 1 & \\ 0 & \end{array}$$

$(t-1)\underbrace{(2t^2-t-1)}=0$

نحلل باستخدام Δ

$\Delta=1-4(2)(-1)=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$

$t_1=\frac{1+3}{4}=1 \quad , \quad t_2=\frac{1-3}{4}=\frac{-1}{2}$

و منه : $(t-1)\ (2t^2-t-1)=0$

$2(t-1)(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)=0$

$2\quad (t-1)^2\ .\ \left(t+\frac{1}{2}\right)=0$

و منه : $2(\cos x-1)^2.\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0$

بما أن $\cos x+\frac{1}{2}>0$ لأن $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، $(\cos x-1)^2\ge 0$

$f'(x)\ge 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	

ونلاحظ من جدول التغيرات أن $f(x)\ge 0$ و منه $2\sin x+\tan x-3x\ge 0$

فالمتراجحة صحيحة $\Rightarrow 2\sin x+\tan x\ge 3x$

---

14) التابع f معرف على المجال $[0,1[$ وفق $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

1. هل f اشتقاقي عند الصفر.

نشكل التابع $t(x)$

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}-0}{x-0}=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}=\frac{\sqrt{x^3}}{x\sqrt{1-x}}=\frac{|x|\sqrt{x}}{x\sqrt{1-x}} \ : x\in\,]0,1[\ ;\ x>0$$

$t(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} t(x)=0 \Rightarrow$ أي f اشتقاقي عند (0) و $f'(0)=0$

2. احسب $\grave{f}(x)$ على $]0,1[$

$$\grave{f}(x)=\frac{\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{3x^2-3x^3+x^3}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}(1-x)^4}}$$

$$=\frac{-2x^3+3x^2}{2\sqrt{x^3(1-x)^3}}=\frac{x^2(-2x+3)}{2x(1-x)\sqrt{x(1-x)}}=\frac{3-2x}{2(1-x)}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

15) نتأمل التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

1- احسب التابع المشتق للتابع f.

f اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$:

$$\grave{f}(x)=\frac{2x(x-1)-1(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\underline{x^2-2x+1}-2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}=1-\frac{2}{(x-1)^2}$$

2- استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $g:x\to\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

نفرض $u(x)=\sqrt{x}$ عندئذ :

$$g(x)=\frac{u^2(x)+1}{u(x)-1}=f(u(x))$$

$$\grave{g}(x)=\grave{f}(u(x)).\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(u(x)-1)^2}\right].\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(\sqrt{x}-1)^2}\right].\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\boxed{2}$ $h:x\to\frac{x^4+1}{x^2-1}$

نفرض $u(x)=x^2$ عندئذ :

$$h(x)=\frac{u^2(x)+1}{u(x)-1}=f(u(x))$$

$$\grave{h}(x)=\grave{f}(u(x)).\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(u(x)-1)^2}\right].\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(x^2-1)^2}\right].2x$$

$\boxed{3}$ $\ell:x\to\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

$$\ell(x)=\sqrt{f(x)}$$

$$\grave{\ell}(x)=\frac{\grave{f}(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1-\frac{2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$$

$\boxed{4}$ $K:x\to\frac{\sin^2x+1}{\sin x-1}$

نفرض $u(x)=\sin x$ عندئذ :

$$K(x)=\frac{u^2(x)+1}{u(x)-1}=f(u(x))$$

$$\grave{K}(x)=\grave{f}(u(x)).\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(u(x)-1)^2}\right].\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(\sin x-1)^2}\right].\cos x$$

16) فيما يأتي، اوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق:

$\boxed{1}$ $f(x) = cos^2 3x$

f معرف واشتقاقي على R

$$f'(x) = 2\cos 3x\,.(-3\sin 3x)$$
$$= -6\cos 3x \sin 3x$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{1}{sin^2 3x}$

f معرف عندما : $sin^2 3x \neq 0$

$\sin 3x \neq 0$

$3x \neq \pi k\,; k \in Z \Rightarrow x \neq \frac{\pi k}{3} \quad ; k \in Z$

$D = R\backslash\left\{\frac{\pi k}{3}\right\} \quad ; k \in Z$

f اشتقاقي على $R\backslash\left\{\frac{\pi k}{3}\right\}\,; k \in Z$

$$f'(x) = \frac{-2\sin 3x\,(3\cos 3x)}{sin^4 3x}$$
$$= \frac{-6\cos 3x}{sin^3 3x}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = sin^3 2x$

f معرف واشتقاقي على R

$$f'(x) = 3\sin^2 2x\,.(2\cos 2x)$$
$$= 6\sin^2 2x.\cos 2x$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{1}{cos^3 2x}$

f معرف عندما : $cos^3 2x \neq 0$

$\cos 2x \neq 0$

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\,; k \in Z \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad ; k \in Z$

$D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right\}\,; k \in Z$

f اشتقاقي على $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right\} \; ; k \in Z$

$$f'(x) = \frac{-3cos^2 2x(-2\sin 2x)}{cos^6 2x}$$
$$= \frac{6\sin 2x}{cos^4 2x}$$

17) ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

1. عين التابع المشتق f' للتابع f.

f اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$:
$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$
اثبت ان g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I.

$$g(x) = f(\sin x) = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$$

g معرف عندما : $\sin x - 1 \neq 0$

$\sin x \neq 1$

$x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k\,; k \in Z : D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right\} \quad ; k \in Z$

g اشتقاقي على $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right\} \; ; k \in Z \quad \Longrightarrow \quad g$ اشتقاقي على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g'(x) = f'(\sin x)\,.(\sin x)'$$
$$= \frac{-5}{(\sin x - 1)^2}\,.(\cos x)$$

3. نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على $J =]1,+\infty[$ وفق: $k(x) = f(\sqrt{x})$
اثبت ان k اشتقاقي على J ثم احسب $k'(x)$ على J

$$k(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

k معرف عندما:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow [0,+\infty[\\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow \boxed{x \neq 1} \end{array}\right\} \Rightarrow D = [0,1[\cup]1,+\infty[$$

k اشتقاقي على كل من المجالين $[0,1[\cup]1,+\infty[$ فهو اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$k(x) = f(\sqrt{x}) \Rightarrow k'(x) = f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = \frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

18) a,b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ ،
هل يمكن تعيين b,a لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

المماس أفقي في النقطة $A(1,2)$ أي:

$f(1) = 2$

$a(1)^3 + b(1)^2 + 1 = 2$

$\boxed{a+b=1}$ $\boxed{1}$

$f'(1) = 0$

f اشتقاقي على R

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$0 = 3a(1)^2 + 2b(1)$

$\boxed{3a+2b=0}$ $\boxed{2}$

$$\begin{cases} 3a+2b=0 \\ a+b=1 \quad (\text{نضرب بـ } 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+2b=0 \\ - \\ \underline{2a+2b=2} \end{cases}$$

$a = -2 \xrightarrow{\text{بالتعويض في}(1)} b = 3$

إذاً $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$

19) a,b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$
عين a,b لتكون $y = 4x+3$ معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

$x = 0$ نعوض في معادلة المماس $y = 4(0)+3 = 3 \Rightarrow$ نقطة التماس $(0,3)$

ولدينا $y = 4x+3$ ميله $\boxed{m_\Delta = 4}$

Δ مماس للخط C في النقطة $(0,3)$ أي:

$f(0) = 3$

$$\frac{3(0)^3 + a(0) + b}{(0)^2+1} = 3$$

$b = 3$

$f'(0) = m_\Delta = 4$

f اشتقاقي على R:

$$f'(x) = \frac{(9x^2+a)(x^2+1) - 2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$4 = \frac{a(1)-0}{1} \Rightarrow a = 4$$

إذاً: $f(x) = \frac{3x^3+4x+3}{x^2+1}$

20) a عدد حقيقي، و f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدية عند $x = 1$ ؟

f اشتقاقي على R و $f(1)$ قيمة حدية عندئذ: $f'(1) = 0$ ومنه:

f اشتقاقي على R ;

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$
$$0 = 3a(1)^2 + 6(1) + 3$$
$$-9 = 3a \Rightarrow a = -3$$

إذاً $f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x$

لنتحقق ان للتابع f قيمة حدية هي $f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -9x^2 + 6x + 3 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} -9x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\overbrace{x = 1 \qquad\qquad x = -\tfrac{1}{3}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x$		$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

أي ان f يملك قيمة حدية كبرى هي $f(1)$.

21) f هو تابع معرف على R واشتقاقي عليها. إضافة إلى ذلك نفترض ان:

* $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$

* f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$

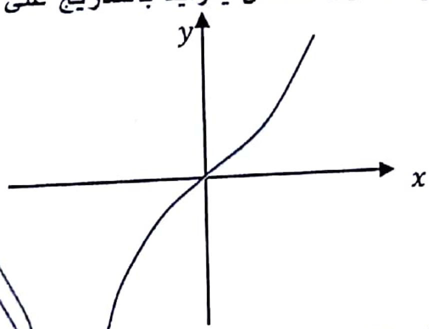
ارسم خطاً بيانياً C يمكن ان يمثل التابع f

الخط البياني C يمر من النقطة $(0,0)$ ، مشتق التابع f عند $x = 0$ يساوي الواحد. أي أن ميل المماس له عند $x = 0$ يساوي الواحد.

المشتق f' متناقص على المجال $]-\infty, 0]$ أي ان ميل المماس يتناقص بالتدريج على المجال $]-\infty, 0]$

المشتق f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ أي ان ميل المماس يتزايد بالتدريج على المجال $[0, +\infty[$

ويمكن رسم C بالشكل الآتي:



ولإيجاد التابع f : نبحث عن تابع يحقق انه متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$

ويأخذ القيمة 1 عند $x = 0$. يبدو ان التابع $a > 1$: $f'(x) = ax^2 + 1$ يحقق كل الشروط السابقة.

اي التابع f يجب ان يكون مشتقه من صيغة f'. اي $f(x) = bx^3 + x$ حيث $b > 0$

نختار احد التوابع فرضاً $f(x) = x^3 + x$

22) في كل من الحالات الآتية احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها .

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ $: a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$g(x) = \cos x - 1 \;\Rightarrow\; g(0) = 0$

$\dot{g}(x) = -\sin x \;\Rightarrow\; \dot{g}(0) = 0$

g اشتقاقي عند $: a = 0$

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dot{g}(0) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ $: a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$g(x) = \tan x \;\Rightarrow\; g(0) = 0$

$\dot{g}(x) = 1 + \tan^2 x \;\Rightarrow\; \dot{g}(0) = 1$

g اشتقاقي عند $: a = 0$

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dot{g}(0) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ $: a = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2} \;\Rightarrow\; g(1) = 0$

$\dot{g}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \;\Rightarrow\; \dot{g}(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

g اشتقاقي عند $: a = 1$

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \dot{g}(1) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}$ $: a = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - 2 \;\Rightarrow\; g(1) = 0$

$\dot{g}(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} \;\Rightarrow\; \dot{g}(1) = \frac{3}{4}$

g اشتقاقي عند $: a = 1$

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \dot{g}(1) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} = \frac{3}{4}$$

طارق سعد الدين 0955561648 غاندي سمعان 0932791896 غسان البيطار 0933756454

23) في كل من الحالات الآتية اوجد عدد حلول المعادلة ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}

$\boxed{1}$ $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$

نفرض $f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$ ، لنوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

$f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$

لندرس تغيرات التابع

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(5)(1) = -11 < 0$

اي ان $f'(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً على } R \\ 0 \in f(R) = R \end{array}\right.$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في R

نجد ان: $f(1.5) = 0.71875$ ، $f(1.4) = -0.96576$ ونلاحظ $f(1.4).f(1.5) < 0$ ومنه المجال المطلوب: $[1.4, 1.5]$

$\boxed{2}$ $x(2x+1)^2 = 5$

$f(x) = x(2x+1)^2 - 5$

لندرس تغيرات التابع

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = (2x+1)^2 + 2(2x+1)(2)x = (2x+1)(2x+1+4x) = (2x+1)(6x+1)$

$f'(x) = 0$

$(2x+1)(6x+1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{إما } x = \frac{-1}{2} \; : \; f\left(\frac{-1}{2}\right) = -5 \\ \text{أو } x = \frac{-1}{6} \; : \; f\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{-137}{27} \simeq -5.07 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\frac{-137}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

$0 \notin f\left(\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]\right) =]-\infty, -5]$ فليس للمعادلة جذر في المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$

$0 \notin f\left(\left]\frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}\right[\right) = \left]\frac{-137}{27}, -5\right[$ فليس للمعادلة جذر في المجال $\left]\frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}\right[$

$\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً على المجال } \left[\frac{-1}{6}, +\infty\right[\\ 0 \in f\left(\left[\frac{-1}{6}, +\infty\right[\right) = \left[\frac{-137}{27}, +\infty\right[\end{array}\right.$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left[\frac{-1}{6}, +\infty\right[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في R

نجد ان: $f(0.75) = -\frac{5}{16}$ ، $f(0.8) = \frac{51}{125}$ ونلاحظ $f(0.75).f(0.8) < 0$ ومنه المجال المطلوب: $[0.75, 0.8]$

$\boxed{3}$ $x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

لندرس تغيرات التابع $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + 1$

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2} \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{16}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

$0 \notin f(R) = \left[\frac{13}{16}, +\infty\right[$ فليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذر في R

إذاً المعادلة مستحيلة الحل في R

$\boxed{4}$ $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

لندرس تغيرات التابع $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x^4 - x^2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x^4 - x^2 = 0 \\ x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \\ x^2(x-1)(x+1) = 0 \end{array} \left\{\begin{array}{lll} \text{إما} & x = 0 & : f(0) = 1 \\ \text{أو} & x = 1 & : f(1) = \frac{13}{15} \\ \text{أو} & x = -1 & : f(-1) = \frac{17}{15} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $\left]-\infty, -1\right]$
$0 \in f(\left]-\infty, -1\right]) = \left]-\infty, \frac{17}{15}\right]$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left]-\infty, -1\right]$

$0 \notin f(\left]-1, +\infty\right[) = \left]\frac{13}{15}, +\infty\right[$ فليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذر في المجال $\left]-1, +\infty\right[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في R

نجد أن: $f(-1.7) = -0.202047$, $f(-1.6) = 0.268181$ ونلاحظ $f(-1.7).f(-1.6) < 0$

ومنه المجال المطلوب: $[-1.7, -1.6]$

24) ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

.1 ادرس تغيرات التابع f اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

التابع f مستمر على $[1,+\infty[$ و اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$f(1) = -3 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$ و $0 \in f([1,+\infty[) = [-3,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $[1,+\infty[$

.2 احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

$f(x) = 0$

$x + \sqrt{x-1} - 4 = 0$

$\sqrt{x-1} = 4 - x$ نربع الطرفين بشرط : $\begin{pmatrix} 4 - x \geq 0 \\ 4 \geq x \end{pmatrix}$

$x - 1 = (4-x)^2$

$x - 1 = 16 - 8x + x^2$

$x^2 - 9x + 17 = 0 \Longrightarrow \Delta = 81 - 4(1)(17) = 13 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$

$x_1 = \dfrac{9+\sqrt{13}}{2} \geq 4$ (مرفوض)

$x_2 = \dfrac{9-\sqrt{13}}{2} \leq 4$ (مقبول)

---

25) ليكن f التابع المعرف على $I =]1,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

.1 ادرس تغيرات f على I

f معرف و مستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

.2 استنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيداً يقع في المجال $]1,2[$

f مستمر ومتناقص تماماً على $]1,+\infty[$ و $0 \in f(]1,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$f(2) = 1 - \sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x).f(2) < 0 \Longrightarrow$ و هذا الجذر يقع في المجال $]1,2[$

26) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

.1 ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني C

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} f(x)=1\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$ $\boxed{\Delta: y=1}$ مقارب أفقي لـ C في جوار $+\infty,-\infty$

$$\acute{f}(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x+3)-(2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}=\frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$$

$$\acute{f}(x)=0\Rightarrow 6x+3=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{11}{4}}=\frac{-1}{11}$$

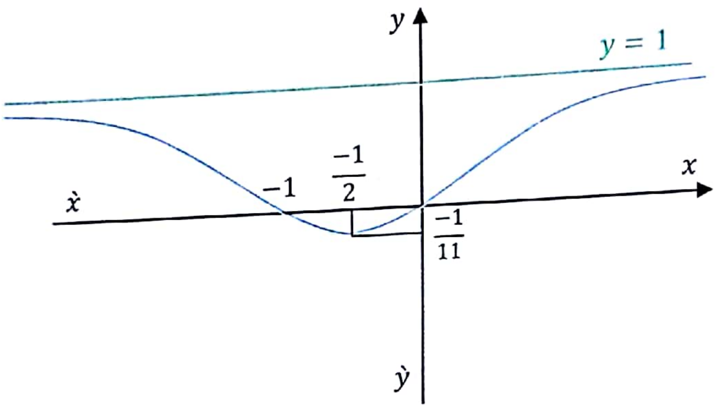
$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{11}$ قيمة حدية صغرى محلية

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{-1}{11}$	↗	1

نقطة مساعدة:

نقطة تقاطعه مع $x\acute{x}$

$$y=0$$
$$x^2+x=0 \qquad\qquad \Rightarrow \begin{cases} x=0\ , & (0,0)\\ x=-1\ , & (-1,0)\end{cases}$$
$$x(x+1)=0$$



.2 نريد تعيين المماسات للخط البياني C المارة بالمبدا (غير المماس في المبدا).

a) ليكن a عدداً حقيقياً. اكتب معادلة المماس T_a الذي يمس C في النقطة $A(a,f(a))$

$$f(a)=\frac{a^2+a}{a^2+a+3} \quad , \quad A\left(a\,,\ \frac{a^2+a}{a^2+a+3}\right)$$

$$m=\acute{f}(a)=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}$$

$$T_a:\ y-\frac{a^2+a}{a^2+a+3}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$

b) فكر في ان T_a يكون احد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدا ثم جد معادلة لكل مماس للخط البياني C يمر بالمبدا.

بما أن المماس مار من المبدا $(0,0)$ نعوض في معادلة T_a فنجد:

$$0-\frac{a^2+a}{a^2+a+3}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}(0-a)\Rightarrow \quad -\frac{a^2+a}{a^2+a+3}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}(-a)$$

بما أن المماس المطلوب مغاير للمماس في المبدا فإن $a\neq 0$ نقسم على $-a$ الطرفين:

$$\frac{a+1}{(a^2+a+3)} = \frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}$$

نضرب الطرفين بـ $(a^2+a+3)^2$

$$(a+1)(a^2+a+3) = 6a+3$$

$$a^3+a^2+3a+a^2+a+3 = 6a+3$$

$$a^3+2a^2-2a = 0$$

$$a(a^2+2a-2) = 0$$

إما $a = 0$ مرفوض (كون $a \neq 0$ فرضاً)

او $a^2+2a-2 = 0$

$$\Delta = 4-4(1)(-2) = 12 > 0 \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$a_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3}$$

$$a_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3}$$

$$T_{a_1}: y - \frac{(-1-\sqrt{3})^2+(-1-\sqrt{3})}{(-1-\sqrt{3})^2+(-1-\sqrt{3})+3} = \frac{6(-1-\sqrt{3})+3}{\left[(-1-\sqrt{3})^2+(-1-\sqrt{3})+3\right]^2}(x+1+\sqrt{3})$$

$$\boxed{T_{a_1}: y - \frac{3+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}} = \frac{-3-6\sqrt{3}}{39+12\sqrt{3}}(x+1+\sqrt{3})}$$

$$T_{a_2}: y - \frac{(-1+\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})+3} = \frac{6(-1+\sqrt{3})+3}{\left[(-1+\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})+3\right]^2}(x+1-\sqrt{3})$$

$$\boxed{T_{a_2}: y - \frac{3-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} = \frac{-3+6\sqrt{3}}{39-12\sqrt{3}}(x+1-\sqrt{3})}$$

---

27) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$

1. اوجد نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2. اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = 2x-1$ مقارب مائل للخط C

بالقسمة الإقليدية نجد :

$$f(x) = 2x-1+\frac{8}{x+1}$$

$$f(x)-y_\Delta = 2x-1+\frac{8}{x+1}-(2x-1) = \frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$$

أي $\Delta: y = 2x-1$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty,+\infty$

3. ادرس نهاية f عند -1 ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط C

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$ ، C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$ ، C يقع على يسار المقارب

4. ادرس تغيرات f و ...

f مستمر و اشتقاقي على $R\backslash\{-1\}$

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2 - 8}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2(x+1)^2 - 8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \Rightarrow x = 1 & : f(1) = 5 \quad \text{إما} \\ x+1 = -2 \Rightarrow x = -3 & : f(-3) = -11 \quad \text{أو} \end{cases}$$

$$(x+1)^2 = 4$$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-11	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗ $+\infty$

قيمة حدية كبرى محلياً $f(-3) = -11$

قيمة حدية صغرى محلياً $f(1) = 5$

5. اثبت ان النقطة $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط C

$$x_0 = -1 \Rightarrow 2x_0 = -2 \Rightarrow 2x_0 - x = -2 - x$$

$$y_0 = -3 \Rightarrow 2y_0 = -6$$

① $x \in R\backslash\{-1\} \Rightarrow -x \in R\backslash\{1\} \Rightarrow -2-x \in R\backslash\{-1\}$ (الشرط الأول محقق)

② $$f(-2-x) = \frac{2(-2-x)^2 + (-2-x) + 7}{-2-x+1} = \frac{2(4+4x+x^2) - 2 - x + 7}{-1-x}$$

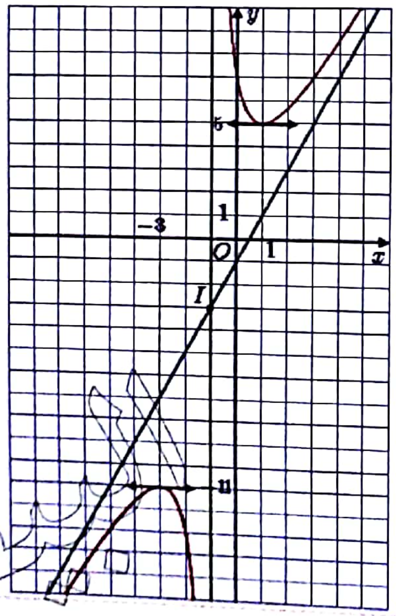
$$= \frac{-(2x^2 + 7x + 13)}{x+1}$$

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{-2x^2 - 7x - 13 + 2x^2 + x + 7}{x+1} = \frac{-6x-6}{x+1} = \frac{-6(x+1)}{x+1} = -6 = 2y_0$$

(الشرط الثاني محقق)

و منه $I(-1,-3)$ مركز تناظر .

6. ارسم مقاربات C ثم ارسم C



$y = 2x - 1$

x	0	1
y	-1	1
	$(0,-1)$	$(1,1)$

28) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$,C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$

.1 اوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=-\infty$$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي لـ C و C يقع على يسار مقاربه عند $-\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي لـ C و C يقع على يمين مقاربه عند $-\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$

f اشتقاقي على $R\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6x+10)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-3x^2+10x-11)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)[(3x^2-6x+10)(x-1)-2(x^3-3x^2+10x-11)]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0$$
$$x^3-3x^2-4x+12=0$$
$$x^2(x-3)-4(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2-4)=0$$

$$(x-3)(x+2)(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases} \text{إما } x=3 : f(3)=\frac{19}{4} \\ \text{او } x=-2 : f(-2)=\frac{-51}{9}=\frac{-17}{3} \\ \text{او } x=2 : f(2)=5 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-17}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗	$+\infty$

.2 اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C

بالقسمة الإقليدية نكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x)=x-1+\frac{7x-10}{(x-1)^2}$$

$$f(x)-y_\Delta=x-1+\frac{7x-10}{(x-1)^2}-(x-1)=\frac{7x-10}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

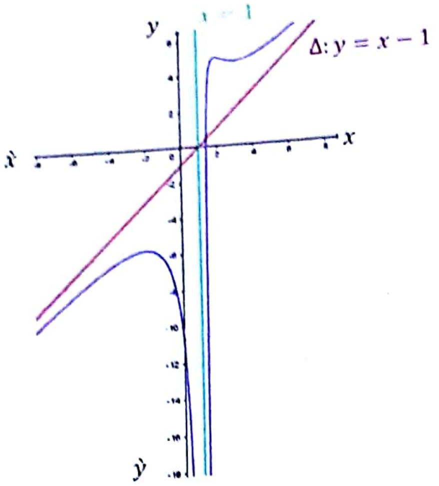
اي $\boxed{\Delta: y=x-1}$ مقارب مائل للخط C عند $-\infty,+\infty$

Scanned by CamScanner

3. ادرس الوضع النسبي للخطين C, d ثم ارسم كلاً من C, d

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \frac{7x-10}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 7x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

x	$-\infty$ 1	1 $\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$ $+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	$-$ 0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	C تحت Δ	C فوق Δ



نقط مساعدة:

$\left(\frac{10}{7}, \frac{3}{7}\right)$ نقطة مشتركة بين C و Δ

$\Delta: y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0
	$(0,-1)$	$(1,0)$

4. حدد هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3 - (m+3)x^2 + (2m+10)x - 11 - m = 0$

$$x^3 - mx^2 - 3x^2 + 2mx + 10x - 11 - m = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 10x - 11 = m(x^2 - 2x + 1)$$

$$m = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2} = f(x)$$

- ♦ $m \in \left]-\infty, \frac{-17}{3}\right[$ للمعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول.
- ♦ $m = \frac{-17}{3}$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان.
- ♦ $m \in \left]\frac{-17}{3}, \frac{19}{4}\right[$ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.
- ♦ $m = \frac{19}{4}$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان.
- ♦ $m \in \left]\frac{19}{4}, 5\right[$ للمعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول.
- ♦ $m = 5$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان.
- ♦ $m \in]5, +\infty[$ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

29) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$

1. احسب نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+8})(x+\sqrt{x^2+8})}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{x^2-(x^2+8)}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-8}{\infty} = 0$$

$\boxed{y=0}$ مقارب أفقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

2. تحقق ان المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C

$$f(x) - y_\Delta = x - \sqrt{x^2+8} - 2x = -x - \sqrt{x^2+8}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{(-x-\sqrt{x^2+8})(-x+\sqrt{x^2+8})}{-x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{x^2-(x^2+8)}{-x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{-x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = \frac{-8}{-\infty} = 0$$

وبالتالي فإن $\boxed{\Delta: y = 2x}$ مقارب مائل فقط عند $-\infty$

3. نظم جدولاً بتغيرات f

f اشتقاقي على R

$$\acute{f}(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\acute{f}(x) \neq 0$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\acute{f}(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0

نقط مساعدة : $\boxed{y_\Delta = 2x}$

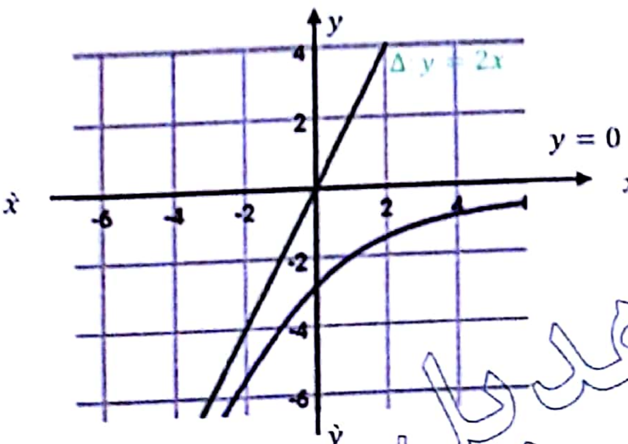
x	0	1
y	0	2
	(0,0)	(1,2)

نقطة التقاطع مع $y\acute{y}$ $x = 0$

$$y = f(0) = -2\sqrt{2}$$

$$(0, -2\sqrt{2})$$

4. ارسم مقاربات C ثم ارسم C



30) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$

1. قارن كلاً من $f(x+2\pi), f(-x)$ مع $f(x)$ استنتج انه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

$$\blacklozenge\ f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) \qquad ; \begin{pmatrix} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{pmatrix}$$

$$= 3[-\sin x]^2 + 4\cos^3 x = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

ولاحظ انه $x \in R$ فإن $-x \in R$ إذاً f تابع زوجي.

$$\blacklozenge\ f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi) \qquad : \begin{pmatrix} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{pmatrix}$$

$$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

ومنه f تابع دوري ودوره 2π وهو تابع زوجي متناظر بالنسبة لـ $y\grave{y}$ فيكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$

2. اثبت ان $\grave{f}(x) = 6\cos x \times \sin x\,(1 - 2\cos x)$ عند كل عدد حقيقي x

f اشتقاقي على R ومنه:

$$\grave{f}(x) = 3(2)\sin x\,(\cos x) + 4(3)\cos^2 x\,(-\sin x)$$
$$= 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x\sin x = 6\sin x\cos x\,(1 - 2\cos x)$$

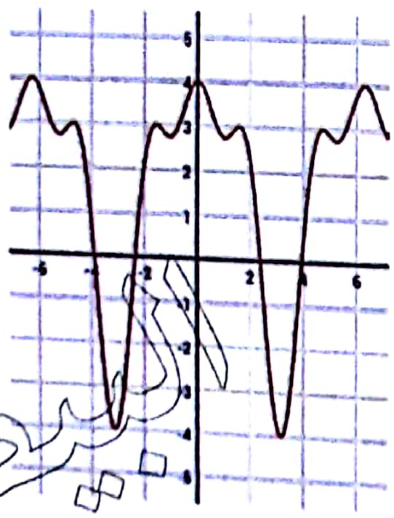
3. ادرس تغيرات التابع f على $[0,\pi]$

f معرف واشتقاقي على $[0,\pi]$ ومنه: $\quad f(0) = 4 \quad , \quad f(\pi) = -4$

$$\left.\begin{matrix} \grave{f}(x) = 0 \\ 6\cos x\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}} : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \\ \text{أو } \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = 4 , \boxed{x = \pi} : f(\pi) = -4 \\ \text{أو } 1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}} \ : \ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{4} \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\grave{f}(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

4. ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$



31) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$

1. اثبت ان $f(x+2\pi) = f(x)$ اياً يكن العدد الحقيقي x

$$f(x+2\pi) = 4\sin^3(x+2\pi) + 3\cos(x+2\pi) = 4\sin^3 x + 3\cos x = f(x)$$

2. تحقق ان $f'(x) = 3\sin x\,(2\sin 2x - 1)$ اياً يكن العدد الحقيقي x

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 4(3)\sin^2 x\,(\cos x) + 3(-\sin x) = 12\sin^2 x\cos x - 3\sin x$$
$$= 3\sin x\,(4\sin x\cos x - 1) \quad : \begin{pmatrix} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ 2\sin 2x = 4\sin x\cos x \end{pmatrix}$$
$$= 3\sin x\,(2\sin 2x - 1)$$

3. ادرس f على مجال طوله 2π وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi, 2\pi]$

ندرس تغيرات f على المجال $[0,2\pi]$:

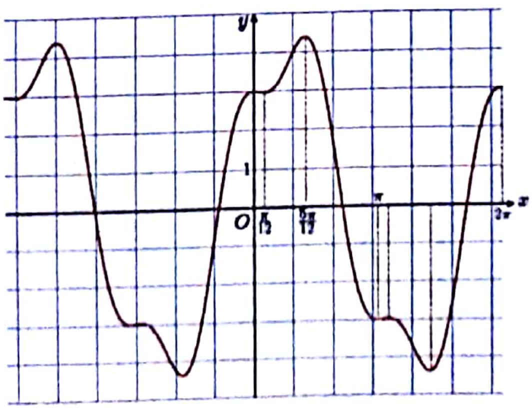
f مستمر واشتقاقي على $[0,2\pi]$ $\quad f(2\pi) = 3 \quad , \quad f(0) = 3$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 0 \\ 3\sin x\,(2\sin 2x - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = 3 \;,\; \boxed{x = \pi} : f(\pi) = -3 \\ \qquad \boxed{x = 2\pi} : f(2\pi) = 3 \\ \text{او} \quad 2\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ $k = 0 : x = \frac{\pi}{12} \quad : f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \simeq 2{,}97$ $k = 1 : x = \frac{13\pi}{12} \quad : f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\simeq -2.96$	$2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$ $k = 0 : x = \frac{5\pi}{12} \quad : f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \simeq 4{,}38$ $k = 1 : x = \frac{17\pi}{12} \quad : f\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$ $\simeq -4.38$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	↘	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	↘	-3	↗	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	↗	3



32) ليكن f التابع المعرف على $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x)=4x-\tan^2 x$

1. احسب التابع المشتق $f'(x)$ ضع $\tan x = t$ وتحقق ان $f'(x)=2(1-t)(t^2+t+2)$

f اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ علماً ان: $\tan x = t$

ملاحظة: t^3+t-2 احد حلولها $t=1$ فهي تقبل القسمة على $t-1$

$$\begin{array}{r|l} t^3+t-2 & t-1 \\ \mp t^3 \pm t^2 & t^2+t+2 \\ \hline t^2+t-2 & \\ \mp t^2 \pm t & \\ \hline 2t-2 & \\ \mp 2t \pm 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4-2\tan x\,(1+\tan^2 x) \\ &= 4-2t(1+t^2) \\ &= 4-2t-2t^3 \\ &= -2(t^3+t-2) \\ &= -2(t-1)(t^2+t+2) \\ &= 2(1-t)(t^2+t+2) \end{aligned}$$

وهذا المطلوب.

وبما ان $\tan x = t$

$$f'(x)=2(1-\tan x)(\tan^2 x+\tan x+2)$$

2. استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I

f مستمر واشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(0)=0 \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{<}} f(x)=4\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=0 \\ 2(1-\tan x)(\tan^2 x+\tan x+2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1-\tan x=0 \\ \tan x = 1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}} \end{array} \; : \; f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=\pi-1$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi-1$	$\searrow$	$-\infty$

3. اثبت ان للمعادلة $f(x)=-1$ في المجال I جذراً وحيداً α

♦ $f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=[0,\pi-1]$ $-1\notin$ فليس للمعادلة $f(x)=-1$ جذر في $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ و $-1\in f\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-\infty,\pi-1\right[$ فللمعادلة $f(x)=-1$ جذر وحيد في $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

إذاً للمعادلة $f(x)=-1$ جذر وحيد في I

33) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=x\cos x$

1) احسب عند كل x من R : $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

f اشتقاقي على R

$$f'(x)=1.\cos x+(-\sin x).x=\cos x-x\sin x$$

$f''(x) = -\sin x - (\sin x + x\cos x) = -2\sin x - x\cos x$

$f'''(x) = -2\cos x - (\cos x - x\sin x) = -3\cos x + x\sin x$

f' اشتقاقي على R

f'' اشتقاقي على R

2) اثبت مستخدماً البرهان بالتدريج، انه مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا :

$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$ اياً يكن x من R.

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 1$:

$$f(x) = x\cos x \xrightarrow{\text{نشتق}} f'(x) = \cos x - x\sin x = L_1$$

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x) = \underbrace{x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{(بالارجاع)}} + \cos x$$

$$= -x\sin x + \cos x = L_2$$

$L_1 = L_2$ فالخاصة صحيحة من اجل $n = 1$.

- نفرض صحة الخاصة من اجل n اي :

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(صحيحة)}$$

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت :

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

لدينا من الفرض

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

نشتق

$$[f^{(n)}(x)]' = 1.\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - x\underbrace{\sin}_{\text{بالارجاع}}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n\underbrace{\sin}_{\text{بالارجاع}}\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

إذاً :

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (1+n)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$. فالخاصة السابقة صحيحة مهما تكن $n \geq 1$

---

34) ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1, 1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

1. اوجد عددين حقيقيين b, a يحققان $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ على $R\backslash\{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{ax + a + bx - b}{x^2 - 1} = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1} \\ f(x) = \dfrac{2x + 0}{x^2 - 1} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بالمطابقة}} \left.\begin{array}{l} a + b = 2 \\ a - b = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2a = 2 \Longrightarrow \boxed{a = 1} \xRightarrow[\text{احدى المعادلتين}]{\text{نعوض في}} \boxed{b = 1}$$

2. بالاستفادة مما سبق أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $R\backslash\{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\grave{\acute{f}}(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\underbrace{\acute{\grave{\acute{f}}}(x)}_{\vdots} = \underbrace{\frac{-6}{(x-1)^4}}_{\vdots} + \underbrace{\frac{-6}{(x+1)^4}}_{\vdots}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n . n!}{(x+1)^{n+1}}$$

---

35) إيجاد تابع:

نفترض وجود تابع f معرف على R واشـــتقاقي عليه ويحقق: $f(0) = 0$ و $\acute{f}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ عند كل x من R وليكن C خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = f(x) + f(-x)$

a. تحقق ان g اشتقاقي على R واحسب $\acute{g}(x)$

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

بما أن f اشتقاقي على R فرضاً فإن g اشتقاقي على R

لانو مشتق $-x = -1$

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \acute{f}(-x)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

لانو تربيع ار (-)

b. احسب $g(0)$ واستنتج ان التابع f فردي.

$$g(0) = f(0) + f(0) = 0 + 0 = 0$$

بما أن $\begin{cases} \acute{g}(x) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ فإن $g(x)$ تابع ثابت ومنه $g(x) = 0$

$$f(x) + f(-x) = 0$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه f تابع فردي.

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

② ليكن h التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق: $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

a. تحقق ان h اشتقاقي على I واحسب $h'(x)$ على I.

- $f(x)$ اشتقاقي على R فرضاً فهو اشتقاقي على I
- $f\left(\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$

h اشتقاقي على I

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

b. اثبت ان $h(x) = 2f(1)$ اياً يكن x من I.

$h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$h(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

بما ان $h'(x) = 0$ فهو تابع ثابت وبما ان $h(1) = 2f(1)$ فانه مهما يكن x من I فإن $\boxed{h(x) = 2f(1)}$

c. استنتج ان نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$

لدينا: $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} h(x)}_{\text{ثابت}} = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2f(1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + f(0) \qquad : f(0) = 0$$

$$\boxed{2f(1) = \lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

d. ماذا تستنتج بشان الخط البياني C ؟

بما ان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1)$ فإن: $y = 2f(1)$ مقارب أفقي للخط C // xx' بجوار $+\infty$

③ ليكن k التابع المعرف على $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $k(x) = f(\tan x) - x$

a. احسب $k'(x)$ ماذا تستنتج بشان التابع k؟

$$k'(x) = (1+\tan^2 x) \cdot f'(\tan x) - 1$$

$$= (1+\tan^2 x) \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

نعوض في $\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

بما ان $k'(x) = 0$ فإن $k(x)$ تابع ثابت ويكون:

$$k(0) = f(\tan(0)) - 0 = f(0) - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{k(x) = 0}$$

b. احسب $f(1)$

$$k(x) = f(\tan x) - x$$

اياً يكن $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$0 = f(1) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{f(1) = \frac{\pi}{4}}$$

c. نظم جدولاً بتغيرات f على R.

نلاحظ ان $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

وبما ان f تابع فردي فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه:

x	$-\infty \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$

d. ارسم المستقيمات المقاربة للخط C وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها $1-$ و 0 و 1 ثم ارسم C.

- المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$:

$$f(1) = \frac{\pi}{4} \qquad : \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(1) = m = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)}$$

- المماس في النقطة التي فاصلتها $x = -1$:

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad : \left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$$ « لان f تابع فردي»

$$f'(-1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x+1)}$$

- المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 0$:

$$f(0) = 0 \qquad : (0,0)$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\boxed{y = x}$$