بكلوريات وجامعات سوريا

القناة الرئيسية : t.me/baca11111

بوت ملفات العلمي : t.me/baca11bot

بوت ملفات الأدبي : t.me/baca1bot

السؤال الأول: يبين في الشكل المجاور جدول تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

① أوجد مجموعة تعريفه ومستقره الفعلي

② اكتب معادلة كل مقارب يوازي احد المحاور

③ هل يمكن أن يقبل C مقارب مائل؟ علل

④ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

⑤ ما حلول المتراجحة $f'(x)<0$

الحل: ① مجموعة التعريف $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

المستقر الفعلي $E_f =]-\infty,0[\cup [3,+\infty[$

② $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يمين ويسار المقارب

③ نعم يمكن أن يقبل مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

④ ليس للمعادلة حلول $f(x)=0$

⑤ $]-\infty,-1[\cup]-1,2[$

الأستاذ أحمد تكروري

السؤال الثاني: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	0

① أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x)$ وفسر المقاربات

② ما عدد القيم الحدية وعينها؟

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

④ اكتب معادلة المماس في النقطة $x=1$

الحل: ① $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ مقارب شاقولي $x=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $y=0$ أفقي

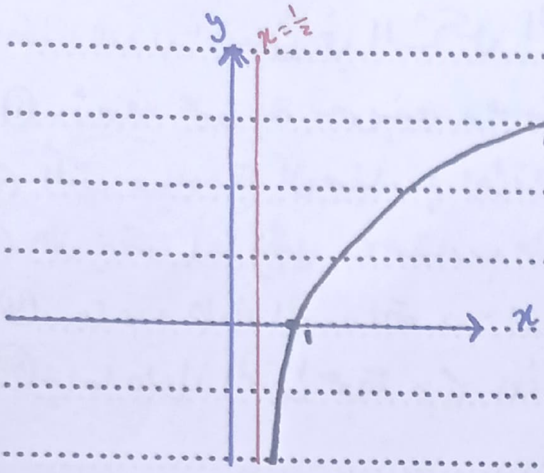
② قيمة كبرى محلية واحدة $f(1)=1$

③ حل واحد فقط ④ $f(1)=1$ ، $f'(1)=0$

معادلة المماس $y=1$

السؤال الثالث:

في الشكل المجاور لدينا الخط البياني للتابع f المطلوب:



① أوجد مجموعة التعريف

② احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) =$

③ أوجد حل المعادلة $f(x) = 0$

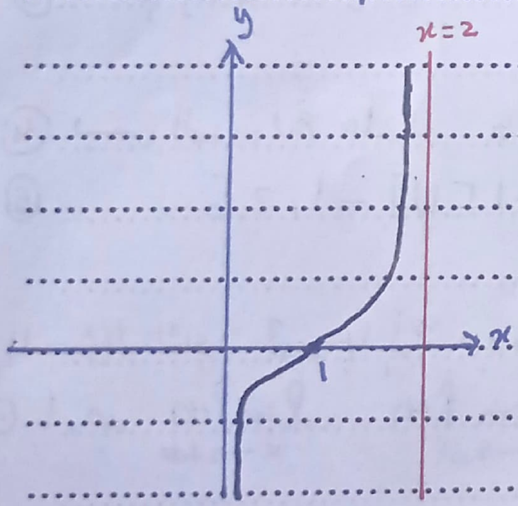
④ اكتب معادلة المستقيم المقارب الشاقولي

الحل: ① $D_f \;]\frac{1}{2}, +\infty[$

② $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$

③ يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = 0$ ④ $x = \frac{1}{2}$ مقارب شاقولي

السؤال الرابع: في الشكل المجاور لدينا الخط البياني للتابع f والمطلوب:



① أوجد $\lim_{x \to 0} f(x)$ $\lim_{x \to 2} f(x)$

② اكتب معادلة المقاربات الشاقولية والأفقية

③ أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$

④ أوجد $f(1)$

الحل:

① $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$

② $x = 2$ $x = 0$ شاقوليين

③ $[1, 2[$ ④ $f(1) = 0$

الأستاذ: أحمد تكروري

أيامك الصعبة... هي التي تصنعك

لا تقلقوا

تمرين: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ معرفة تدريجياً وفق: جامعة لبنان العام

$U_0 = \frac{3}{2}$ $\quad U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

① أثبت أن $1 \le U_n \le 2$

② أثبت أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

③ استنتج أن U_n متناقصة

④ هل U_n متقاربة وأوجد نهايتها؟

الأستاذ أحمد تكروري

الحل: ① $1 \le U_n \le 2$

1" نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$1 \le U_0 \le 2$

$1 \le \frac{3}{2} \le 2$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

2" نفرض صحة القضية من أجل n

$1 \le U_n \le 2$

* فرضية الاستقراء

3" نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$1 \le U_{n+1} \le 2$

$1 \le U_n^2 - 2U_n + 2 \le 2$

$1 \le \underbrace{U_n^2 - 2U_n + 1}_{\text{جذر عبارة جذر}} - 1 + 2 \le 2$

$1 \le (U_n - 1)^2 + 1 \le 2$

من * نجد

$1 \le U_n \le 2$

نطرح من الأطراف ناقص واحد

$0 \le U_n - 1 \le 1$

نربع الأطراف

$0 \le (U_n - 1)^2 \le 1$

نضيف للأطراف واحد

$1 \le (U_n - 1)^2 + 1 \le 2$

$1 \le U_{n+1} \le 2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

② $U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n$

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 3U_n + 2$

$= (U_n - 2)(U_n - 1) < 0$

U_n متناقصة

③ نستنتج من الطلب السابق أن U_n متناقصة

④ كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

تمرين: نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$U_{n+1} = \sqrt{12+U_n}$, $U_0 = 1$

① أثبت أن $0 \leq U_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

③ استنتج أن U_n متقاربة

① نرمز للقضية بـ $E(n): 0 \leq U_n \leq 4$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): 0 \leq U_0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq 4$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n: $E(n): 0 \leq U_n \leq 4$ *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$: $E(n+1)$ $0 \leq U_{n+1} \leq 4$

$0 \leq \sqrt{12+U_n} \leq 4$

من * نجد $0 \leq U_n \leq 4 \xrightarrow{\text{نضيف } 12} 12 \leq 12+U_n \leq 16$ نجذر الطرفين

$0 \leq \sqrt{12} \leq \sqrt{12+U_n} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 4$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

② لإثبات أن U_n متزايدة $U_{n+1} - U_n \geq 0 \Leftarrow U_{n+1} \geq U_n$ **

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+2} \geq U_{n+1}$

$\sqrt{12+U_{n+1}} \geq \sqrt{12+U_n}$

من ** نجد $U_{n+1} \geq U_n$ نضيف 12 للطرفين $12+U_{n+1} \geq 12+U_n$

$\xleftarrow{\text{نجذر}} \sqrt{12+U_{n+1}} \geq \sqrt{12+U_n} \Leftarrow U_{n+2} \geq U_{n+1}$

U_n متزايدة

③ بما أن U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة

سؤال: أوجد نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$، ثم أعطِ عدداً حقيقياً يحقق الشرط $x > A$ كان $f(x)\in]2.9\ ,\ 3.1[$

الحل: تكرورية: عندما يطلب أعطِ عدد حقيقياً يحقق الشرط $x > A$ نتبع ما يأتي $]a,b[$

① $c=\frac{a+b}{2}$ مركز

② $r=\frac{b-a}{2}$ نصف القطر

③ نطبق القانون $|f(x)-c|<r$

$c=\frac{2.9+3.1}{2}=\frac{6}{2}=3$ $\qquad r=\frac{3.1-2.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$

$|f(x)-3|<\frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10}$

$\left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$

$\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{10} \xRightarrow{\text{لأننا في جوار }+\infty} \frac{1}{x+1}<\frac{1}{10}$

نقلب $\Rightarrow x+1>10 \Rightarrow x>9$

$A=9$

يمكن إضافة له طلب آخر تام مركب تصبح تمرين 60 علامة

الأستاذ أحمد تكروري

تمرين1: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \quad ; \quad U_0 = \frac{1}{2}$$

① - أثبت أن $1 > U_n > 0$ أياً كانت n من N

② - نعرف $(V_n)_{n\geq 0}$ حيث $V_n = \frac{1}{U_n} - 1$ أثبت أن V_n هندسية واستنتج V_n بدلالة n

③ - اكتب U_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

الحل: ① نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$0 < U_0 < 1$

$0 < \frac{1}{2} < 1$

نفرض صحة القضية من أجل n

$* \quad 0 < U_n < 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$0 < U_{n+1} < 1$

من $*$ نجد

$0 < U_n < 1$

نفرض $f(x) = U_{n+1} = \frac{x}{2-x}$

$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$

f متزايد تماماً

$f(0) < f(U_n) < f(1)$

$0 < 1 < \frac{U_n}{2-U_n} < 2$

$0 < U_{n+1} < 2$

② $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{U_n}{2-U_n}} - 1$

$= \frac{2-U_n}{U_n} - 1 = \frac{2-U_n-U_n}{U_n}$

$= \frac{2(1-U_n)}{U_n} = 2\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2$

إذاً V_n هندسية أساسها $q=2$

$V_0 = \frac{1}{U_0} - 1 = 2 - 1 = 1$

$V_n = (2)^n$

③

$V_n = \frac{1}{U_n} - 1 \Rightarrow 2^n + 1 = \frac{1}{U_n}$

$U_n = \frac{1}{2^n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

لأن $q = 2 > 1$

تمرين: ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ وفق $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$

① اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-4}$

② أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C

درجة البسط > درجة المقام قسمة اقليدية

الحل:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-7x-3 & x-4 \\ \mp 2x^2 \pm 8x & 2x+1 \\ \hline x-3 & \\ -x \pm 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$f(x)=$ الناتج $+$ $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$$

② لإثبات أن $y=2x+1$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{2x}+1+\frac{1}{x-4}-(\cancel{2x}+1)\right)$$

$$\lim+\frac{1}{\infty}=0$$

بما أن النهاية تساوي الصفر فإن

$y=2x+1$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$$

$\frac{1}{x-4}$ بالشمال: $]-\infty,4[$ ($x=0$) ، وباليمين: $]4,+\infty[$ ($x=5$)

$f(x)-y_\Delta<0$: C تحت المقارب

$f(x)-y_\Delta>0$: C فوق المقارب

الطريقة الثانية: تشكيل جدول

سؤال: ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

$x \to 0$

$f(0) = m$

ما قيمة m التي تجعل f مستمر عند الصفر

الحل: حتى يكون f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ح.ع}$$

نضرب ونقسم بالمرافق البسط

$$\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1-x^2-1}{(1+\sqrt{x^2+1})x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{2} = 0 = m$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$0 = 0$$

f مستمر عند الصفر

سؤال: التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) & ; x \neq 0 \end{cases}$$

1) هل f اشتقاقي عند $a = 0$

2) احسب f' على

1) لدراسة قابلية الاشتقاق

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x}$$

$$= x \cdot \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \Delta(x) = 0 \cdot \cos \infty$$

نحتاج احاطة

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب بـ $x > 0$

$$-x \leq \cos \frac{1}{x} \leq x$$

$$\lim_{x\to 0}(-x) = \lim_{x\to 0}(x) = 0$$

بما أن نهاية الطرفين تساوي الصفر فإن حسب الاحاطة

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

2) $$f'(x) = 2x \cdot \cos\frac{1}{x} - \left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin x(x^2)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

مسألة ١: ليكن C الخط البياني للتابع

$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ $\quad R\setminus\{-1\}$

① - ادرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$

② أوجد معادلة مقارب أفقي للخط C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C

③ احسب $f'(x)$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبين القيم الحدية

④ - أوجد معادلة المماس في النقطة التي $x=-2$

⑤ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محور الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$

الحل: ①

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

② $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $\pm\infty$

دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-0$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
		C تحت		C فوق			

③

$f'(x) = \frac{-x-3}{(x+1)^3}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال

$]-\infty,-1[\ \cup\ ]-1,+\infty[$

$f'(x)=0$

$-x-3=0 \Rightarrow f(-3) = \frac{-1}{4}$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

قيمة حدية صغرى $f(-3) = -\frac{1}{4}$

④

$f(-2)=0 \qquad f'(-2)=+1$

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

$T: y = x+2$

الرسم: ① مقاربات

$y=0$ أفقي $\qquad x=-1$ شاقولي

② نقاط الجدول

مجال1: $(-1,+\infty)$ $(-3,-\frac{1}{4})$ $(-\infty,0)$

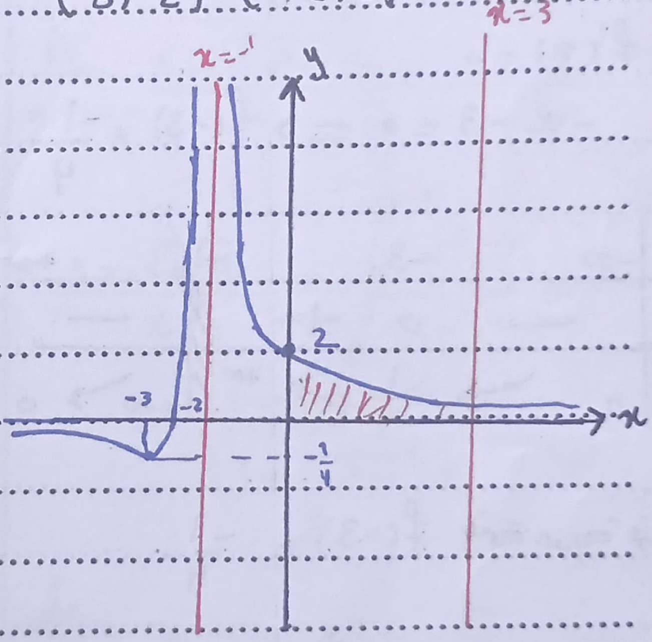
مجال2: $(-1,+\infty)$ $(+\infty,0)$

③ نقاط مساعدة

$x=0 \Longrightarrow f(0)=2$

$y=0 \Longrightarrow x=-2$

$(0,2)$ $(-2,0)$



$$S=\int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$$

تمرين: ليكن f التابع المعرف على $]2,+\infty[$

$$f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$$

① ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ ونظم جدولاً

② أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً.

③ اكتب معادلة المماس للخط C في $x=3$

① f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]2,+\infty[$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$$

f متزايد تماماً

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	//	$+$	
$f(x)$	// -2	$\nearrow$	$+\infty$

② f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

$f(]2,+\infty[)=]-2,+\infty[\ni 0$

للمعادلة

$f(x)=0$

حل وحيد

③ معادلة المماس تحتاج

نقطة تماس	ميل
$f(x_0)=y_0$	$f'(x)=m$

$f(3)=0$

$y_0=0$

$f'(3)=\frac{3}{2}$

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y=\frac{3}{2}(x-3)$

تمرين: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$U_n=\frac{2n-1}{n+1}$$

① ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

② أثبت أن 2 راجح لـ U_n

③ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ثم حدد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان $U_n \in]1{,}9\,,\,2{,}1[$

الحل: ① دراسة اطراد المتتالية U_n

$$f(x)=U_n=\frac{2x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

f متزايد تماماً ومنه U_n متزايدة

② $U_n-2=\frac{2n-1}{n+1}-2$

$=\frac{2n-1-2n-2}{n+1}=\frac{-3}{n+1}<0$

$U_n-2<0 \Longrightarrow U_n<2$

فإن 2 عنصر راجح لـ U_n

③ $|U_n-2|<\frac{1}{10}$

$\left|\frac{-3}{n+1}\right|<\frac{1}{10}$

$\frac{3}{n+1}<\frac{1}{10}$

$\frac{n+1}{3}>10$

$n+1>30 \Longrightarrow n>29$

$n_0=29$

سؤال: حل في IR المعادلة: (ص)

$9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$

$3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$

نفرض $3^x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-1)(t-2) = 0$

$t = 1 \Rightarrow 3^x = 1$

$x = 0$

$t_2 = 2 \Rightarrow 3^x = 2$

$x \cdot \ln 3 = \ln 2$

$x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

سؤال: حل المعادلة التفاضلية

$2y' + y = 1$

ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

الحل:

$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y$

$a = -\frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$

حلها $y = k \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$

$y = k \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

لحساب k : من $f(-1) = 2$

نجد $x = -1$ $\quad y = 2$

$2 = k \cdot e^{\frac{1}{2}} + 1$

$k = e^{-\frac{1}{2}}$

$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$y = e^{-\frac{1}{2}(x+1)} + 1$

تمرين: ليكن التابع المعرف على IR وفق: (60 درجة)

$f(x) = x \cdot e^{-x}$ المطلوب:

① - $\int_0^{\ln 3} f(x) \cdot dx$

② - أثبت أن التابع $y = f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

الحل: $\int_0^{\ln 3} f(x) \cdot dx = \int_0^{\ln 3} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} \cdot dx$

نطبق تجزئة

$u = x \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \xrightarrow{\int} v = -e^{-x}$

80 علامة

تمرين مهم: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج

$U_0 = 1$ $\quad U_{n+1} = 3U_n - 4$

1- احسب الحدود U_1 , U_2 ثم ادرس اطراد U_n

2 أثبت أن $V_n = U_{n+1} - U_n$ هندسية
عين حدها الاول و أساسها

3 اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

4 احسب نهاية المتتالية U_n هل هي متقاربة أم متباعدة؟

5 نعرف S_n بالعلاقة عبر عن بدلالة n

$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

1 الحل:

$U_1 = 3U_0 - 4 = 3 - 4 = -1$

$U_2 = 3(U_1) - 4 = -3 - 4 = -7$

نخمن أن المتتالية U_n متناقصة

$E(n)$: $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$U_1 \leq U_0 \Rightarrow -1 < 1$

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_{n+1} \leq U_n$ *

نبرهن صحة القضية من أجل n+1

$U_{n+2} \leq U_{n+1} \Rightarrow 3U_{n+1} - 4 \leq 3U_n - 4$

من * نجد $U_{n+1} \leq U_n$

$\xRightarrow[\times 3]{\text{نضرب}} 3U_{n+1} \leq 3U_n$

نطرح -4: $3U_{n+1} - 4 \leq 3U_n - 4$

$U_{n+2} \leq U_{n+1}$

U_n متناقصة

2 لإثبات V_n هندسية

$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$

$= 3U_{n+1} - \cancel{4} - 3U_n + \cancel{4}$

$= 3(U_{n+1} - U_n)$

$V_{n+1} = 3V_n$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 3 = q$

V_n هندسية أساسها $q = 3$

$V_0 = U_1 - U_0 = -1 - 1 = -2$

3 $V_n = V_0 \cdot q^n = -2(3)^n$

لدينا $V_n = U_{n+1} - U_n$

$-2(3)^n = 3U_n - 4 - U_n$

$U_n = 2 - (3)^n$

4 $\lim_{n \to +\infty} 2 - (3)^n = -\infty$

لأن $q = 3 > 1$

وبالتالي المتتالية U_n متباعدة أي $-\infty$

5 $S = q \, \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$ $\quad n \to n+1$ $\quad V_0 = -2$ $\quad q = 3$

$S_n = 2 \cdot \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = 1 - 3^{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty$

الأستاذ: أحمد تكروري
0994446057

تمرين: نرمز بـ $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد x. ليكن التابع المعرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

① اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

② أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$

③ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-E(x))^2}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x}$

الحل ①

$$E(x) = \begin{cases} 0 \; ; & x \in [0,1[\\ 1 \; ; & x \in [1,2[\\ 2 \; ; & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1[\quad (x \to 1,\ x = 0) \\ 1+(x-1)^2 & x \in [1,2[\quad (x = 1,\ x \to 2) \\ 2 & x = 2 \quad (x = 2) \end{cases}$$

② حتى يكون f مستمر على المجال $[0,2]$ يجب أن يكون مستمر على حدية صفه

$x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = x^2$$

$0 = 0$ محقق

f مستمر عند الصفر $\Longrightarrow$

$x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1 + (x-1)^2$$

$1 = 1$ محقق

f مستمر عند 1

$x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2} \left(1+(x-1)^2\right) = 2$$

$2 = 2$ محقق

f مستمر عند $2 \Longleftarrow f$ مستمر على المجال $[0,2]$

③ $x - 1 < E(x) < x$

نقسم على $x > 0$

$$\underset{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 1}}{\frac{x-1}{x}} < \frac{E(x)}{x} \le \underset{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 1}}{1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$ حسب الإحاطة ①

$E(x) \le x \le E(x)+1$

نطرح $E(x)$

$$0 \le (x - E(x))^2 \le 1$$

$$0 \le \frac{(x-E(x))^2}{x} \le \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-E(x))^2}{x} = 0$ حسب الإحاطة

الأستاذ: أحمد تكروري
0994446057

$$\int_0^{\ln 3} u \cdot v' = u \cdot v - \int_0^{\ln 3} v \cdot u' \, dx$$

$$= \left[-x \cdot e^{-x}\right]_0^{\ln 3} + \int_0^{\ln 3} e^{-x} \, dx$$

$$= \left(-\frac{\ln 3}{3} - 0\right) + \int_0^{\ln 3} e^{-x}$$

$$-\frac{\ln 3}{3} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 3}$$

$$= -\frac{\ln 3}{3} + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{2 - \ln 3}{3}$$

③ نلاحظ أن: $y = x \cdot e^{-x}$

$$y' = e^{-x} - x e^{-x}$$

$$y' + y' = e^{-x} - x e^{-x} + x \cdot e^{x}$$

$$= e^{-x}$$

سؤال: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$$

شرط الحل: $x > 0$ ، $y > 0$

$$2\ln x + \ln y = 7 \quad \times 5$$

$$+ \; 3\ln x - 5\ln y = 4 \quad \times 1$$

$$13\ln x = 39$$

$$\ln x = \frac{39}{13} = 3$$

$$x = e^3$$

نعوض قيمة $\ln x$ في المعادلة الأولى

$$2(3) + \ln(y) = 7$$

$$\ln(y) = 1$$

$$y = e$$

$$S\{(e^3, e^1)\}$$

سؤال: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e} e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

الحل: بفرض

$$X = e^x \qquad Y = e^y$$

$$-2X + \frac{2}{e}Y = -2$$

$$X - \frac{1}{e}Y = 1 \quad \text{---} ①$$

$$2X + Y = 4 + e \quad \text{---} ②$$

نضرب المعادلة ① بـ -2 ونجمع

$$\left(\frac{2}{e} + 1\right)Y = 2 + e \Rightarrow Y = e$$

$$X - \frac{1}{e} \cdot e = 1$$

$$X = 2 \Rightarrow e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

$$e^y = e \Rightarrow y = 1$$

هامة لهذا العام

هام 22

مسألة: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

② استنتج ما للخط C من مقاربات وعيّن القيمة الحدية

③ ارسم ما وجدته من مستقيمات ثم ارسم C

④ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين

$X=\frac{1}{e^2}$, $X=\frac{1}{e}$

الحل: f معرف ومستمر واشتقاقي في المجال $]0,e[\cup]e,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-x\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{0-(1\cdot[1-\ln x]+x[-\frac{1}{x}])}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$=\frac{-1+\ln x+1}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=0$

$x=1$

$f(1)=1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0

② $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى

③ الرسم:

1- مقاربات $x=e$ شاقولي

$y=0$ أفقي $x=0$ شاقولي

② نقاط الجدول

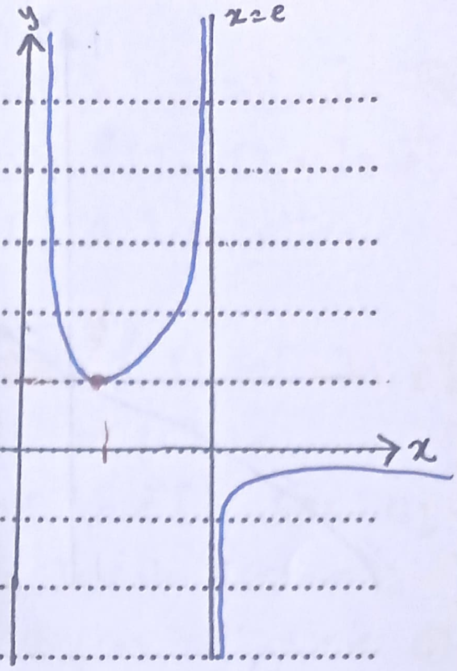
جزء ① $(0,+\infty)$ $(1,1)$ $(e,+\infty)$

جزء ② $(e,-\infty)$ $(+\infty,0)$

3- نقاط تقاطع لا يوجد

$D_f \not\ni x=0$

$f(x)\neq 0 \Leftarrow y=0$



$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\cdot dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\, dx$$

$$\frac{u'}{u} \Rightarrow -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\cdot dx$$

$$= -\left[\ln(1-\ln x)\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$S = -(\ln 2 - \ln 3)$$

$$S = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

مسألة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x\cdot e^{-x}$$

① - احسب نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم عين القيم الحدية ثم ارسم C

③ - احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=0$

④ بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين

⑤ لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً

$U_0 = 1 \qquad U_{n+1} = U_n\cdot e^{-U_n}$

ⓐ - أثبت أن $0 < U_n \leq 1$ وذلك مهما كان n

ⓑ - أثبت المتتالية U_n متناقصة ثم بين تقاربها واحسب نهايتها

الحل: ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{+x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = -\infty$$

② f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (-e^{-x}\cdot x) = (1-x)\, e^{-x}$$

$$f'(x) = 0$$

$(1-x)\,e^{-x}=0$

$e^{-x}>0$

$1-x=0$

$x=1$

$f(1)=\frac{1}{e}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1)=\frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى

الرسم: ① مقاربات

$y=0$ مقارب أفقي

② نقاط

$(-\infty,-\infty)\ (1,\frac{1}{e})\ (+\infty,0)$

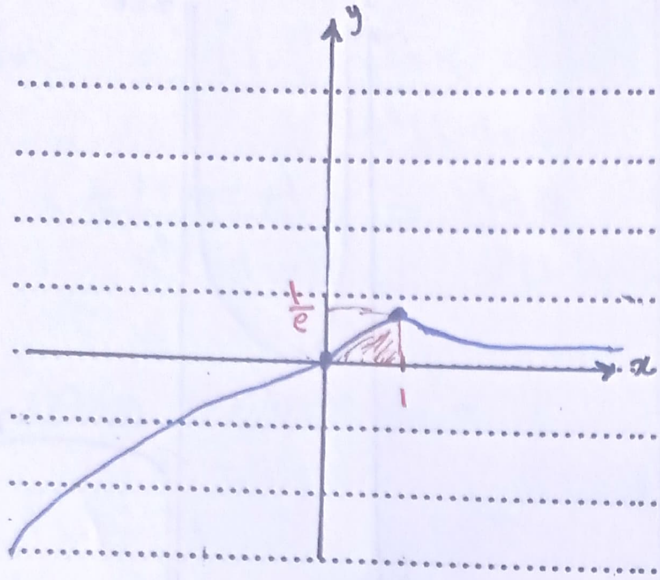
③ نقاط مساعدة

$x=0 \Rightarrow f(0)=0$

$(0,0)$

$y=0 \Rightarrow x\cdot e^{-x}=0$

$x=0 \quad \Leftarrow \quad e^{-x}>0$



③ $S=\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'}\cdot dx$

$u=x \xrightarrow{\ '\ } u'=1$

$v'=e^{-x} \xrightarrow{\int} v=-e^{-x}$

$S=[-x\cdot e^{-x}]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\cdot dx$

$=[-e^{-1}-0]-[e^{-x}]_0^1$

$S=-\frac{1}{e}-(\frac{1}{e}-1)$

$S=1-\frac{2}{e}$

④ بملاحظة : $f(0) = 0$

مستمر f والتابع $f(]0,1[) =]0, e^{-1}[$

ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$f(]1,\infty[) =]0, e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتناقص

تماماً على $]1,\infty[$

إذاً : يكفي $m \in]0, e^{-1}[$ كان للمعادلة

$f(x) = m$ حلين $x_2 \in]0,1[$ ، $x_1 \in]1,\infty[$

⑤ نرمز للقضية $E(n)$

$E(n): 0 < U_n \leq 1$

⑨ نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$0 < 1 \leq 1 \Rightarrow 0 < U_0 \leq 1$

نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$

$* \quad 0 < U_n \leq 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$0 < U_{n+1} \leq 1$

من * نجد $0 < U_n \leq 1$

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$ (f متزايد $[0,1]$)

$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e} \leq 1$

$0 < U_n+1 \leq 1$

⑥ لإثبات أن U_n متناقصة

$U_{n+1} - U_n \leq 0$

$E(n): U_{n+1} \leq U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$U_1 \leq U_0$

$U_1 \leq U_0 \Leftarrow 1 \leq \frac{1}{e}$

نفرض صحة القضية من أجل n

$** \quad E(n): U_{n+1} \leq U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): U_{n+2} \leq U_{n+1}$

من ** نجد

$U_{n+1} \leq U_n$

$f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$ (f متزايد)

$U_{n+2} \leq U_{n+1}$

فالمتتالية U_n متناقصة

بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى

فهي متقاربة

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

ما ستفعله اليوم سيقابل عنك غداً

قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً

مسألة: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

① - تحقق أن مجموعة تعريفه هي

$]1, 3[$

② أثبت أن $\forall x \in D$ $(4-x) \in D$

③ احسب المقدار $f(4-x) + f(x)$ (هامة)

واستنتج أن النقطة $A(2, 0)$ مركز تناظر للخط C

④ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

⑤ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

الحل: ① معرف بشرط

$$\frac{x-1}{3-x} > 0$$

$$(x-1)(3-x) > 0$$

$x = +1$ $x = 3$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & & 3 \\ \hline & & + & \end{array}$$

$D =]1, 3[$

②

$x \in]1, 3[$

$\xrightarrow{\text{نضرب بـ } -1} -x \in]-3, -1[$

$\xrightarrow{\text{نضيف } 4} 4-x \in]1, 3[$

$D \ni 4-x$

③ $f(4-x) + f(x)$

نعوض بدل كل x بـ $4-x$

$$\ln\left(\frac{4-x-1}{3-(4-x)}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

حسب خواص اللوغاريتم

$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$$\ln\left(\frac{\cancel{3-x}}{\cancel{-1+x}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{3-x}}\right)$$

$= \ln(1) = 0$

تكرورية: لإثبات أن (x_0, y_0) مركز تناظر يجب أن يتحقق الشرطين

①/ $2x_0 - x \in D_f$

②/ $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

لاثبات أن $A(2,0)$ مركز تناظر ل C :

① وجدنا محقق من الطلب الثاني $4 - x \in D$

② $f(4-x) + f(x) = 0$

محقق من الطلب الثالث

$A(2,0)$ مركز تناظر ل C

④ f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1,3[$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{0}{2}\right) = \ln(0^+)$$

$$= -\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x}$$

$(3-x)$ $(x-1)$

$$f'(x) = \frac{x-1+3-x}{(x-1)(3-x)}$$

$$\frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$ لا ينعدم

x	1		3
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ الرسم :

$x=1$ شاقولي $x=3$ شاقولي

"2" نقاط الجدول

$(1,-\infty)(3,+\infty)$

③ نقاط خاصة

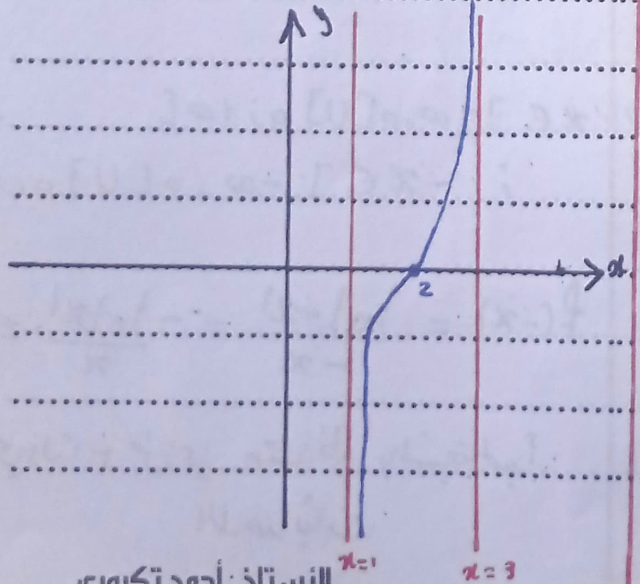
$x = 0 \notin D$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$$\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{3-x} = 1$$

$$3 - x = x - 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$(2,0)$



مسألة هامة : لهذا العام

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^* بالعلاقة

$$f(x)=\frac{\ln|x|}{x}$$

1) أثبت أن التابع f فردي وما الصفة الهندسية

2) ادرس تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$ دل على المقاربات والقيم الحدية لـ C

3) اكتب معادلة المماس C في نقطة منه فاصلتها $x=1$

4) ارسم الخط البياني للتابع f على Df

تناظر

5) استنتج رسم الخط البياني للتابع

$$g(x)=\frac{\ln|x|+x}{x}$$

الحل: تذكرة: لإثبات أن التابع فردي:

1) $\forall x\in D_f \; ; -x\in D_f$

2) $f(-x)=-f(x)$

والتابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

1) $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

$; \; -x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

$$f(-x)=\frac{\ln|-x|}{-x}=-\frac{\ln|x|}{x}=-f(x)$$

وبالتالي التابع فردي متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$ لأن $x>\ln x$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$1-\ln x=0$$

$$1=\ln x \Longrightarrow x=e$$

$$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(e)=\frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى

الأستاذ: أحمد تكروري
0994446057

③ $f(1) = 0 = y_0$

$f'(1) = \frac{1}{1} = 1 = m$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = 1(x-1)$

$T: y = x-1$

④ الرسم:

ا- مقاربات + معادلة مماس

$x=0$ شاقولي مقارب $y=0$ أفقي مقارب

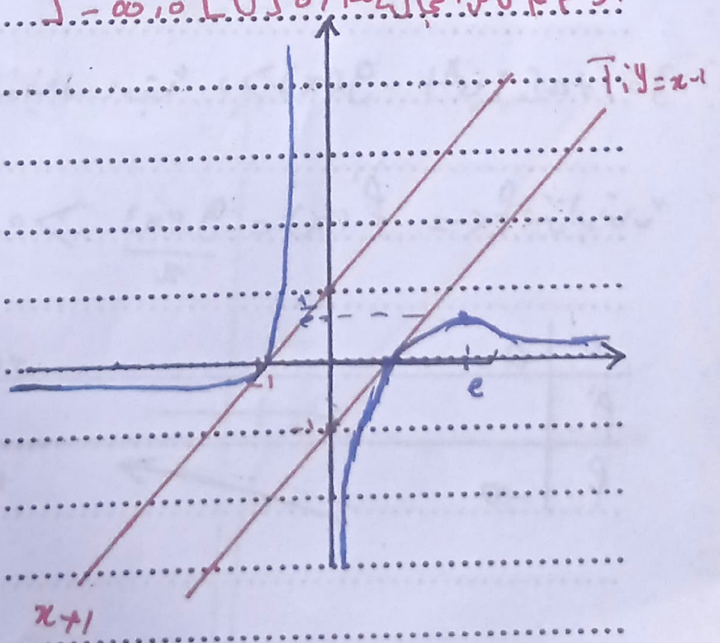
$T: y = x-1$

x	0	1
y	-1	0

② نقاط الجدول

$(0,-\infty)$ $(e, \frac{1}{e})$ $(+\infty, 0)$

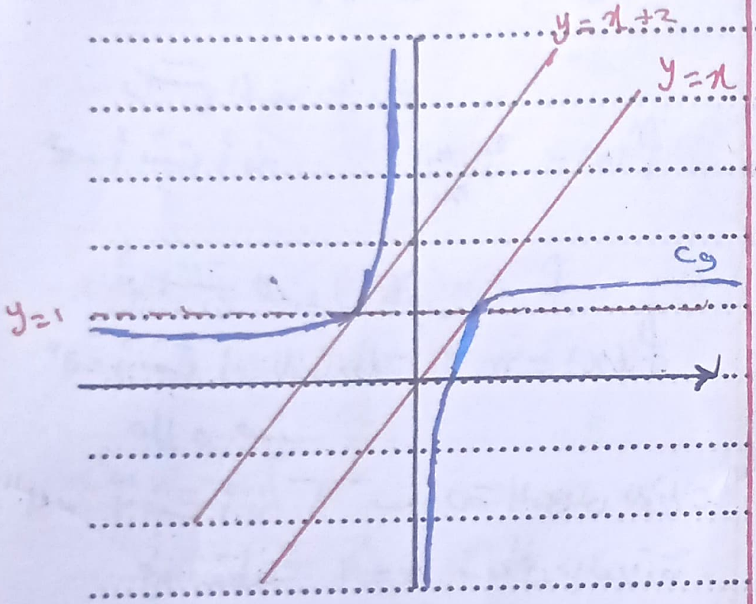
الرسم على كامل المجال $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$



⑤ $g(x) = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{x}{x}$

$g = f(x) + 1$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو انسحاب للخط f بمقدار واحد للأعلى



مسألة

① ليكن التابع $g(x) = xe^{x} + 1$

ادرس اطراد التابع g ثم استنتج $g(x) > 0$

② ليكن C الخط البياني f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x) = e^{x} + \ln x$$

1- احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

واستنتج المقاربات

2- أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

ثم استنتج جدول تغيرات f

3- أثبت أن المعادلة $f(x) = m$

حل وحيد

4- أثبت أن T معادلة المماس للخط C

في نقطة $x = 1$ تعطى بالعلاقة

$$y = ex + x - 1$$

5- ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C

الحل: ① $g(x) = xe^{x} + 1$

$g'(x) = e^{x} + xe^{x} = (x+1)e^{x}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$g(-1) = -e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1$

$g(-1) = \frac{e-1}{e}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(x) > \frac{e-1}{e} > 0$

من جدول الاطراد

② $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

$f'(x) = e^{x} + \frac{1}{x} = \frac{xe^{x}+1}{x}$

$= \frac{g(x)}{x}$

لدينا بسابقة $g(x) > 0$ على المجال $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0 \Rightarrow f$ "متزايد"

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3 - التابع f معرف ومستمر ومتزايد على المجال $]0,+\infty[$

$$f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

$m \in]-\infty,+\infty[$

إذاً المعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد

4 - معادلة المماس نحتاج

نقطة تماس — ميل

$f(1)=e$ $\qquad f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$

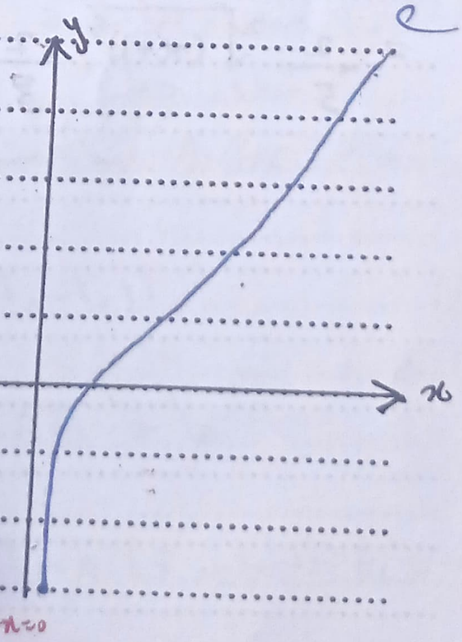
$f'(1)=e+1$

$x_0=1 \qquad y_0=e \qquad m=e+1$

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-e=(e+1)(x-1)$

$y=ex+x-1$



تمرين هام

ليكن لدينا التابع المعرف على $R\setminus\{-1,2\}$

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$$

① عين الأعداد الحقيقية a, b, c التي تحقق

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

② احسب $\int f(x)\,dx$

① : بما أن درجة البسط > درجة المقام $\Rightarrow$ قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x^2-x-2 & x^3-x^2+x-3 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \pm 2x \\ \hline & 0+0+3x-3 \end{array}$$

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$$

$$f(x)=x+\frac{3x-3}{x^2-x-2} \quad x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$\frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}=\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

نوحد المقامات ونختصر

$$3x-3=Bx-2B+Cx+C$$

$3x-3 = (B+C)x - 2B + C$

① $3 = B + C$

② $-3 = -2B + C$

$+6 = 3B$

$B = \frac{6}{3} = 2$

نعوض قيمة B في ①

$3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 1$

$f(x) = x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}$

② $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx$

$\left[\frac{x^2}{2} + 2\ln x+1 + \ln(2-x)\right]$

$\left[\frac{1}{2} + 2\ln 2\right] - \left[\ln 2\right]$

$= \frac{1}{2} + \ln 2$

سؤال مهم

احسب التكامل

$\int x\sqrt{x+1}\,dx$

الحل:

$I = \int x(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$I = \int (x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$I = \int \left[(x+1)-1\right](x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$I = \int \left[(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

$I = \int \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

$= \frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{5}\sqrt[2]{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{(x+1)^3} + c$

تمرين: نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط

$A(1,5,4)$ $B(10,4,3)$

$C(4,3,5)$ $D(0,4,5)$

① بين أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

② بين أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوي واحد

③ استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) (B,β) (C,γ) حيث α,β,γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

الحل: ①

$\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$

$$\frac{9}{3} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$$

المركبات غير متناسبة الأشعة $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطياً

فالنقاط A,B,C تعين مستوي (ABC)

②

$\overrightarrow{AD}(-1,-1,1)$

$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b$

$(-1,-1,1) = a(9,-1,-1) + b(3,-2,1)$

$(-1,-1,1) = (9a+3b, -a-2b, -a+b)$

$-1 = 9a+3b$ --- ①

$-1 = -a-2b$ --- ②

$1 = -a+b$ --- ③

تذكرة: عندما يكون لدينا ثلاث معادلات في مجهولين نحل معادلتين ونعوض في الثالثة للتأكد

$-1 = -a-2b$

$1 = -a+b$ $-$

$-2 = -3b$

$\boxed{b = \frac{2}{3}}$

نعوض في ②

$-1 = -a - \frac{4}{3}$

$a = -\frac{4}{3} + 1$

$a = -\frac{1}{3}$

$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

فالأشعة مرتبطة خطياً فهي تقع في مستوي واحد

تكرورية: للإثبات أن D م-أ-م ضمن علاقة يجب أن نتحقق

$$\alpha \vec{DA} + \beta \vec{DB} + \gamma \vec{DC} = \vec{0}$$

③ من العلاقة السابقة

$$\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \quad \times 3$$

$$3\vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$$

حسب شال D D

$$3\vec{AD} = -(\vec{AD}+\vec{DB}) + 2(\vec{AD}+\vec{DC})$$

$$3\vec{AD} = -\vec{AD} - \vec{DB} + 2\vec{AD} + \vec{DC}$$

$$-\vec{AD} - \vec{DB} + 2\vec{AD} + \vec{DC} - 3\vec{AD} = 0$$

$$-2\vec{AD} - \vec{DB} + 2\vec{DC} = 0$$

$$2\vec{DA} - \vec{DB} + 2\vec{DC} = 0$$

ومنه D مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(C, 2)$ $(B, -1)$ $(A, 2)$

تمرين: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط

$A(1, 0, -1)$ $B(2, 2, 3)$

$C(3, 1, -2)$ $D(-4, 2, 1)$

① - أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

② - أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2, -3, 1)$ ناظم المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

③ احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

① $\vec{AB}(1, 2, 4)$
$\vec{AC}(2, 1, -1)$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (1,2,4)(2,1,-1)$$
$$2 + 2 - 4 = 0$$
$$0 = 0$$

فالمثلث قائم في الزاوية A

$$AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$
$$AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

② إثبات أن $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC)

$\vec{AB}\cdot\vec{n} = (1,2,4)(2,-3,1)$

$= 2-6+4 = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{n}$

$\vec{AC}\cdot\vec{n} = (2,1,-1)(2,-3,1)$

$= 4-3-1 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{n}$

ونلاحظ أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطياً

معادلة المستوي تحتاج

ناظم $\vec{n}(2,-3,1)$ ، نقطة تنتمي إليه

$A(1,0,-1)$

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$

$(ABC): 2x-3y+z-1=0$

③ بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

$$dist(D,ABC) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2(-4)-3(2)+1(1)-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \sqrt{14}$$

حجم الرباعي

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \sqrt{14}$$

$V = 7$

تمرين هام

المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق:

$L: \begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \; ; t\in R \\ z=1-2t \end{cases}$ $\quad L': \begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \; ; s\in R \\ z=-1+2s \end{cases}$

①- أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيينها

② أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L'

-1

الحل: $4-5s=-1$ ---①

$3-2s=1-t$ ---②

$-1+2s=1-2t$ ---③

من ① نجد $s=1$

نعوض في ③ نجد $t=0$

نعوض في ② للتأكد

$3-2=1-0$

$1=1$ محقق

نعوض t في L $(-1,1,1)$

-2 نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{U_1}(0,-1,-2)$ $\quad \vec{U_2}(-5,-2,2)$

$\vec{n}\cdot\vec{U_1}=0 \Rightarrow -b-2c=0$ ---"1"

$\vec{n}\cdot\vec{U_2}=0 \Rightarrow -5a-2b+2c=0$ ---"2"

نجمع "1" و "2" نجد $-5a-3b=0$ نفرض $b=10$

$a=-6$ ، $c=-5$ ومنه $\vec{n}(-6,10,-5)$

$P: -6(x+1)+10(y-1)-5(z-1)=0$

$P: -6x+6y-5z-11=0$

مسألة هامة

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط

$A(3,2,6)$ $B(1,2,4)$

$C(4,-2,5)$ $D(1,1,-1)$

والمستوي P الذي معادلته $2x+y-2z=-4$

1- أثبت أن النقاط A، B، C تعين مستوياً وبين أن هذا المستوي هو P

2- أثبت أن المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته

3- عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على P استنتج إحداثيات K المسقط القائم لـ D على P

4) احسب حجم الرباعي $ABCD$

5) أثبت أن النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,7),(B,-9),(C,-2)$

الحل: (1)

$\vec{AB}(-2,0,-2)$

$\vec{AC}(1,-4,-1)$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{-2}{-1}$$

المركبات غير المتناسبة ⇐ الأشعة غير مرتبطة خطياً ⇐ A,B,C تعين مستوياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -2a-2c=0$ —(1)

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow a-4b-c=0$ —(2)

من (1) نجد

$a=-c$

نفرض

$c=2$

$a=-2$

$b=-1$ نعوض في (2)

$\vec{n}(-2,-1,2)$

معادلة المستوي P

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-2(x-3)-1(y-2)+2(z-6)=0$

$-2x+6-y+2+2z-12=0$

$-2x-y+2z=4$ $\times -1$

$P: 2x+y-2z=-4$

(2) حتى يكون المثلث ABC قائم

$\vec{AB}\perp\vec{AC}$ أي $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$

$(-2,0,-2)(1,0,-1)=0$

$-2+0+2=0$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A

$$S(ABC)=\frac{AC\cdot AB}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{1+16+1}}{2}=\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{\cancel{2}}=6$$

③ بما أن المستقيم d عمودي على المستوي P فإن $\vec{u}_d = \vec{n}_P(2,1,-2)$ بالتالي

$$d \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t-1 \end{cases}$$

لإيجاد إحداثيات K نعوض إحداثيات d في P

$4t+2+t+1+4t+2 = -4$

$t = -1$

نعوض قيمة t في d

$K(-1,0,1)$

④ $dist(D,P) = \frac{|2+1+2+4|}{\sqrt{4+1+4}}$

$= \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$

$V = \frac{1}{3} S_{(ABC)} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6$

$V = 6$

⑤ لإثبات أن النقطة K مركز أبعاد متناسبة

$7\vec{KA} - 9\vec{KB} - 2\vec{KC} \overset{?}{=} \vec{0}$ *

$\vec{KA}(4,2,5)$

$\vec{KB}(2,2,3) \qquad \vec{KC}(5,-2,4)$

نعوض في *

$7(4,2,5) - 9(2,2,3) - 2(5,-2,4) \overset{?}{=} 0$

$(28,14,35) - (18,18,27) - (10,-4,8) = 0$

$(28-18-10, 14-18+4, 35-27-8) = 0$

$(0,0,0)$

$7\vec{KA} - 9\vec{KB} - 2\vec{KC} = 0$

سؤال: لتكن النقطة $A(1,-2,1)$ والمستوي $P: x+2y+z=0$

① احسب بعد A عن P

② أوجد معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس P

$dist(A,P) = \frac{|1-4+1|}{\sqrt{6}}$

$= \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{6}$

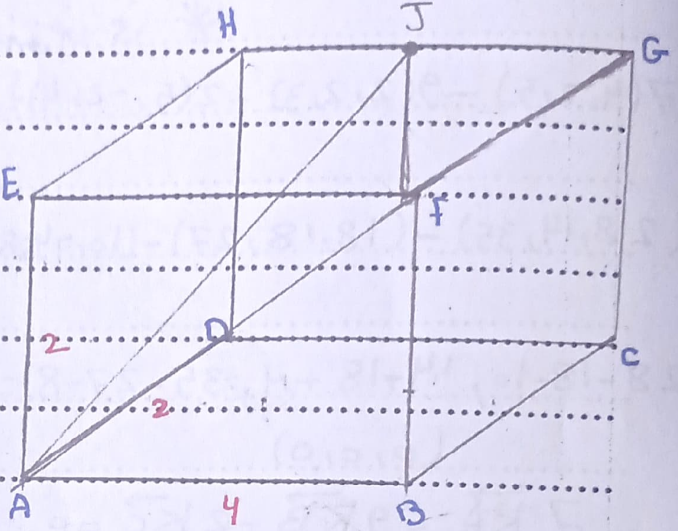
② معادلة الكرة تحتاج

$A(1,-2,1)$ مركز $\qquad R = dist = \frac{2}{\sqrt{6}}$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \frac{4}{6}$

متوازي مستطيلات فيه ABCDEFGH

$AB = 4$ و $AE = AD = 2$ ولتكن J منتصف [HG]



ولنأخذ معلم متجانس $(A, \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$

① - أوجد إحداثيات النقاط A, F, C, J

② ⓐ احسب الطولين [AJ] و [JF]

ⓑ أثبت أن المثلث AFJ قائم في J واحسب مساحته

③ - ⓐ أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ ثم اكتب معادلته

ⓑ احسب بعد C عن المستوي AFJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه AFJC

④ - أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF)

---

① $A(0,0,0)$ $F(4,0,2)$

$C(4,2,0)$ $J(2,2,2)$

② ⓐ $\vec{JF}(2,-2,0)$

$\vec{AJ}(2,2,2)$

وبالتالي $\|\vec{AJ}\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\|\vec{JF}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ⓑ $\vec{AJ}\cdot\vec{JF} = (2,2,2)(2,-2,0)$

$= 4-4+0 = 0$

فالمثلث AFJ قائم في J

$S(AFJ) = \frac{AJ\cdot JF}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}{2}$

$= 2\sqrt{6}$

③ ⓐ $\vec{n} \perp \vec{AJ} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AJ} = 0$

$(1,1,-2)(2,2,2) = 2+2-4$

$= 0$

$\vec{n}\cdot\vec{JF} = (1,1,-2)\cdot(2,-2,0)$

$2-2 = 0$

وبالتالي $n(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ

معادلته $x+y-2z = 0$

ⓑ $dist(C,AFJ) = \frac{|4+2+0|}{\sqrt{1+1+4}}$

$= \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3} S(AFJ)\cdot h = \frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$

$V = 4$

نفرض $N(x, y, z)$

نوجد التمثيل الوسيطي لـ $(\overrightarrow{AF})$

$\overrightarrow{AF}(4, 0, 2)$

$$d\begin{cases} x = 4t \\ y = 0 \quad ; t \in R \\ z = 2t \end{cases}$$

$E(0, 0, 2)$

$\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

$(x, y, z-2)(4, 0, 2) = 0$

$4x + 2z - 4 = 0 \quad *$

نعوض d في $*$

$16t + 4t - 4 = 0$

$20t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{20}$

$t = \frac{1}{5}$

نعوض في d ينتج N

$x = \frac{4}{5} \quad y = 0 \quad z = \frac{2}{5}$

$N\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$

تمرين: ليكن لدينا المستوي $P: 3x - 4z = 1$

والكرة $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z + 9 = 0$

① عين I مركز S واحسب نصف قطرها ثم أثبت أن P يمس S

② اكتب معادلة المستوي Q الموازي لـ P ويمر بـ I

$x^2 + y^2 + 6y + z^2 - 2z + 9 = 0$

$x^2 + \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{\text{جذر جذاء جذر}} - 9 + \underbrace{z^2 - 2z + 1}_{\text{جذر جذاء جذر}} - 1 + 9 = 0$

$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 - 1 = 0$

$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 1$

$R = 1 \qquad$ مركز $I(0, -3, 1)$

$dist(I, P) = \frac{|0 - 4 - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$

وبالتالي P يمس الكرة S

② بما أن المستوي Q يوازي P فإن

$\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{n_P}(3, 0, -4)$

معادلته

$Q: 3x - 4z + 4 = 0$

المسألة التكرورية :

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط $C(3, 1, -2)$, $B(2, 2, 3)$, $A(1, 0, 1)$

$D(-4, 2, 1)$

(1) بين أن A , B , C تعين مستوياً

(2) اكتب معادلة المستوي (ABC)

(3) - أثبت أن ABC قائم واحسب مساحته

(4) عين بعد D عن المستوي (ABC)

(5) - احسب حجم الهرم $DABC$

(6) - عين W مركز الكرة التي معادلتها

$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$

واحسب R

(7) احسب بعد W عن (ABC)

(8) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ

المار من W ويعامد (ABC)

(9) ليكن لدينا المستوي $Q: x + y + z - 1 = 0$

بين أن Q و (ABC) متعامدان

(10) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ'

الفصل المشترك لـ Q , (ABC)

(11) - ادرس الوضع النسبي لـ Δ , Δ'

(12) أعط المعادلة الديكارتية للمستوي

المحوري للقطعة $[MN]$ حيث

$N(-1, 0, 2)$ $M(1, 0, 0)$

(13) عين نقطة تقاطع المستويات

(ABC) , Q , P

(14) عين احداثيات G مركز ثقل المثلث

ABC

(15) وعين احداثيات G مركز ابعاد المتناسبة للنقاط

$(C, 1)$ $(B, -1)$ $(A, 3)$

(16) - عين مجموعة النقاط M

$\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} \| = 6$

الحل:

(1) $\vec{AC} = (2, 1, -1)$

$\vec{AB} = (1, 2, 4)$

نلاحظ أن $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$ المركبات غير متناسبة

الاشعة غير مرتبطة خطياً

$\Leftarrow$ A , B , C تعين مستوياً

(2) معادلة المستوي نحتاج

نقطة $A(1, 0, 1)$ ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a, b, c)(1, 2, 4) = 0$

$a + 2b + 4c = 0$ --- (1)

$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$(a, b, c)(2, 1, -1) = 0$

$2a + b - c = 0$ --- (2)

نفرض $c = 1$ نعوض في (1) و (2)

$a + 2b + 4 = 0$ --- (1)

$2a + b - 1 = 0$ --- (2)

$a = -2b - 4$ --- *

$-4b - 8 + b - 1 = 0$

$-3b-9=0$

$b=-3$

نعوض في * $a=2$

$\vec{n}(2,-3,1)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-1)-3(y-0)+1(z-1)=0$

$2x-2-3y+z-1=0$

$2x-3y+z-1=0$

③ حتى يكون المثلث ABC قائم

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$

$(1,2,4)(2,1,-1)=4-4=0$

$\vec{AB}\perp\vec{AC} \Leftarrow$ المثلث ABC قائم في A

$S_{(ABC)}=\frac{AC\cdot AB}{2}=\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}}{2}$

$S=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

④ $dist(D,ABC)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$dist=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}$

$=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

⑤ حجم الهرم

$V=\frac{1}{3}S_{(ABC)}\cdot h \rightarrow dist(ABC,D)$

$V=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{14}}{2}\cdot\sqrt{14}$

$V=7$

⑥ $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

$x^2+y^2+2y+1-1+z^2-6z+9-9-15=0$

$x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$

معادلة الكرة مركزها $W(0,-1,3)$ ونصف قطرها $R=5$

⑦ $dist(W,(ABC))=\frac{|0+3+3-1|}{\sqrt{14}}$

$=\frac{5}{\sqrt{14}}$

⑧ معادلة المستقيم تحتاج

نقطة $W(0,-1,3)$

شعاع توجيه $\vec{u}(2,-3,1)$

تذكرة: عندما يعامد مستقيم مستوي $\vec{n}=\vec{u}$

$$\Delta \begin{cases} x=2s \\ y=-3s-1 \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z=s+3 \end{cases}$$

(9) $\vec{n}_Q = (1,1,1)$ $\quad n_{BAC} = (2,-3,1)$

$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_1 = 3-3=0$

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}$ نجد (ABC) و Q متعامدان

(10) $x+y-z-1=0$

$2x-3y+z-1=0$

نختار $x=0$

$y-z-1=0$

$-3y+z-1=0 \quad +$

$-2y-2=0$

$\boxed{y=-1} \Rightarrow z=-2$

$A'(0,-1,-2)$

نكرر العملية ونختار $y=0$

$x-z-1=0$

$2x+z-1=0 \quad +$

$3x-2=0$

$x=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}-z-1=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{3}$

$B'\left(\frac{2}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$

معادلة المستقيم D'

$\overrightarrow{A'B'}\left(\frac{2}{3},1,\frac{5}{3}\right) \quad A'(0,-1,-$

$$D': \begin{cases} x=\frac{2}{3}t+0 \\ y=t-1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=\frac{5}{3}t-2 \end{cases}$$

(11) الوضع النسبي بين D , D'

$u'\left(\frac{2}{3},1,\frac{5}{3}\right) \quad u(2,-3,1)$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} \neq \frac{\frac{1}{1}}{\frac{-3}{1}} \neq \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{1}}$$

$$\frac{2}{6} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{5}{3}$$

D , D' غير متوازيان

$\frac{2}{3}t = 2s \quad ---(1)$

$t-1 = -3s-1 \quad ---(2)$

$\frac{5}{3}t-2 = s+3 \quad ---(3)$

من (1) نجد

$t = \frac{2s}{\frac{2}{3}} = \frac{6s}{2}$

(3) نعوض $t=3s$ *

$\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}s-2 = s+3$

$5s-s=5 \Rightarrow 4s=5$

$s=\frac{5}{4}$

نعوض قيمة s في ✳

$t = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$

نعوض في ② للتأكيد

$\frac{15}{4} - 1 \overset{?}{=} -\frac{15}{4} - 1$

محقق

⑫ منتصف $[MN] \Rightarrow I(0,0,1)$

$\vec{nP} = \vec{MN}(-2,0,2)$

$P: -2x + 2z - 1 = 0$

⑬ $Q: x + y + z - 1$

$P: -2x + 2z - 1 = 0$

$(ABC): 2x - 3y + z - 1 = 0$

نضرب المعادلة الأولى بـ 2 ونجمعها مع الثانية

نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونجمعها مع الثالثة

$x + y + z - 1 = 0$

$2y + 4z - 3 = 0$

$-5y - z + 1 = 0$

نضرب المعادلة الثانية بـ 5

ونضرب المعادلة الثالثة بـ 2 ونجمعها

$x + y + z - 1 = 0$

$2y + 4z - 3 = 0$

$18z - 13 = 0$

$z = \frac{13}{18}$ من ③ نجد

نعوض في ②

$2y + 4\left(\frac{13}{18}\right) - 3 = 0$

$2y + \frac{26}{9} - 3 = 0$

$2y + \frac{26 - 27}{9} = 0$

$2y = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{18}$

نعوض في ①

$x + \frac{1}{18} + \frac{13}{18} - 1 = 0$

$x + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{18}, \frac{13}{18}\right)$

⑭ G مركز ثقل المثلث ABC

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+2+3}{3} = 2$

$y_G = \frac{0+2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$z_G = \frac{-1+3-2}{3} = 0$

$G(2,1,0)$

(15) G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A, 3)$ $(B, -1)$ $(C, 1)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$= \frac{3\cdot1 - 1\cdot2 + 1\cdot3}{3-1+1} = \frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{3\cdot0 - 1\cdot2 + 1\cdot1}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$z_G = \frac{3(-1) - 1\cdot3 + 1\cdot(-2)}{3} = \frac{-8}{3}$$

$$G'\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$

(16) $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$

حسب خواص مركز الثقل

$\|(1+1+1)\vec{MG}\| = 6$

$\|3\vec{MG}\| = 6$

$3\vec{MG} = 6$

$\vec{MG} = 2$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها 2

سؤال: $ABCD$ رباعي وجوه G مركز ثقله

I منتصف AD و J منتصف BC

أثبت أن G , J , I على استقامة واحدة

الحل:

I منتصف AD وثقل $A = 1$ ، $D = 1$

$(I, 2)$ م أ م لـ AD

وبما أن J منتصف BC وثقل $B = 1$ و $C = 1$

$(J, 2)$ م أ م لـ BC

وحسب الخاصة التجميعية فإن

G م أ م لـ IJ

$(G, 4)$

بما أن G م أ م

فإن G , I , J على استقامة واحدة

تمرين: لتكن المعادلة

$$z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$$

① - أوجد الجذر التربيعي للعدد العقدي

$w = 8 - 6i$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

③ لتكن النقطتين A ، B نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة أثبت أن OAB قائم ومتساوي الساقين

الحل:

$w = 8 - 6i$

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$x^2 - y^2 = a = 8$

$x \cdot y = -3$

لـ $x.y$ إشارتين مختلفتين

نجمع ① و ②: $2x^2 = 18$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \mp 3$

نعوض في ①

$9 + y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 1$

$y = \mp 1$

$w_1 = 3 - i$

$w_2 = -3 + i$

② $\Delta = (1+3i)^2 - 4(-4+3i)$

$= 1 + 6i - 9 + 16 - 12i$

$= 8 - 6i = w$

$z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3i+3-i}{2}$

$z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i$

$z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3i-3+i}{2}$

$= \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i$

③ $\|\vec{OA}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\|\vec{OB}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

وبالتالي OAB متساوي الساقين

$\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg\left(\dfrac{-1+2i}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i}\right)$

$\arg\left(\dfrac{-2+i+4i+2}{4+1}\right)$

$\arg\left(\dfrac{5i}{5}\right) = \arg(i)$

وبالتالي $OA \perp OB$

وبالتالي OAB متساوي الساقين وقائم

تمرين:

ليكن العدد العقدي $Z = \frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$

① اكتب العددين العقديين $Z_1 = -1+i$ و $Z_2 = \sqrt{3}+i$ بالشكل المثلثي

② اكتب العدد العقدي Z بالشكل الجبري وبالشكل المثلثي

③ استنتج النسب المثلثية $\sin\frac{7\pi}{12}$

$Z_1 = -1+i$

$r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

① ربع ثاني

② $\theta' = \frac{\pi}{4}$

③ $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$Z_2 = \sqrt{3}+i$

$r_2 = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$

① ربع أول

② $\theta = \frac{\pi}{6}$

$Z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ ②

$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$

الشكل الجبري

$Z = \frac{(-1+i)}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$

$Z = \frac{-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+1}{3+1}$

$Z = \frac{-\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$

③ تكميلية: عندما يطلب استنتاج النسبة

الجبري $\boxed{}$ = المثلثي $\boxed{}$

$\frac{-\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

تمرين هام: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان العقديان

$a = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $\qquad$ $b = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$

وليكن I منتصف القطعة المستقيمة [AB]

① - ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة OAB

② استنتج قياس $(\vec{u},\vec{OI})$

③ أوجد الشكل الجبري والأسي للعدد العقدي z_I الممثل للنقطة I

④ استنتج $\cos\frac{\pi}{24}$ و $\sin\frac{\pi}{24}$

$a = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

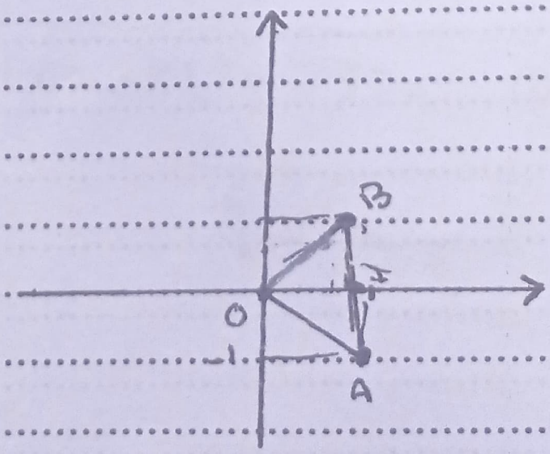
$2\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

$2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = \sqrt{3} - i$

③ $b = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$A(\sqrt{3},-1)$ $\qquad$ $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$



$OA = OB = |a| = |b| = 2$

وبالتالي OAB متساوي الساقين

② $(\vec{u},\vec{OI}) = (\vec{u},\vec{OA}) + (\vec{OA},\vec{OI})$

بما أن I منتصف القطعة المستقيمة [AB]

فإن OI متوسط في متساوي الساقين

فهو منصف

$(\vec{OA},\vec{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{OA},\vec{OB})$

$= \frac{1}{2}(\arg b - \arg a) + \arg a$

$(\vec{u},\vec{OI}) = \frac{1}{2}\arg a + \frac{1}{2}\arg b$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{6}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\right]$

$= -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24}$

$z_I = \frac{a+b}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3} - i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

لتكن النقطة M التي تمثل العدد العقدي $Z = 2 - i$

أثبت أن a الذي يمثل النقطة A صورة M وفق تحاكي مركزه O ونسبته $k = -2$

جد العدد العقدي b الذي يمثل B صورة M وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$

جد العدد العقدي c الذي يمثل C التي تجعل M مركز ثقل المثلث ABC

① التحاكي ← مركزه O

← نسبته $k = -2$

$$a - o = k(Z - o)$$

$$a = -2Z = -2(2 - i)$$

$$a = -4 + 2i$$

② دوران ← مركزه A

← وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$$b - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z - a)$$

$$b = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z - a) + a$$

$$b = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right](2 - i + 4 - 2i) - 4$$

$$b = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right](6 - 3i) - 4 + 2i$$

$$= 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i - 4 + 2i$$

$$b = \frac{3\sqrt{2} - 8}{2} + i\,\frac{4 - 9\sqrt{2}}{2}$$

③ العدد العقدي C الذي يمثل

$$Z = \frac{a + b + c}{3}$$

$$c = 3Z - a - b$$

$$c = 3(2 - i) - (-4 + 2i) - \left[\frac{3\sqrt{2} - 8}{2} + i\,\frac{4 - 9\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \left(6 + 4 - \frac{3\sqrt{2} - 8}{2}\right) + i\left(-3 - 2 - \frac{4 - 9\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{28 - 3\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{9\sqrt{2} - 14}{2}\right)$$

سؤال: في أحدى صفوف مدرسية 12 طالبة و 9 طالبات، نريد تأليف لجنة مكونة من 3 أشخاص

① بكم طريقة يمكن تأليف هذه اللجنة

② بكم طريقة يمكن تأليف لجنة مكونة من طالب واحد وطالبتين

③ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة إذا علمت أنها مكونة من رئيس ونائب رئيس وأمين سر

① $\binom{21}{3} = \frac{21\times20\times19}{3\times2\times1}$

$= 1330$

② $\binom{12}{1}\binom{9}{2} = 12 \cdot \frac{9\cdot 8}{2\times1}$

$= 432$

③ $21\times20\times19 = 7980$

سؤال: عين الحد الثابت المختلف عن x في منشور $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)^{15}$ ثم احسب أمثال x^5 في حد المنشور

$a = x^4 \quad b = \frac{1}{x} \quad n = 15$

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$

$T_r = \binom{15}{r} (x^4)^{15-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$

$= \binom{15}{r} \cdot (x)^{60-4r} \cdot x^{-r}$

$= \binom{15}{r} x^{60-5r}$

الحد الثابت عن x

$60 - 5r = 0 \Rightarrow r = 12$

$T_{12} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}$

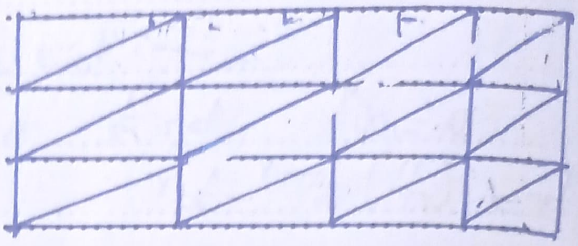
$= 455$

$60 - 5r = 5$ أمثال x^5 تحقق

$r = 11$

$T_r = \binom{15}{11} x^5 = 1365\,x^5$

سؤال: تأمل الشكل المجاور ثم أجب:
ما عدد المستطيلات في هذا الشكل؟ ما عدد المثلثات؟



عدد المستطيلات

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2} = \frac{5\times 4}{2}\times\frac{4\times 3}{2}$$

$= 60$ مستطيلات

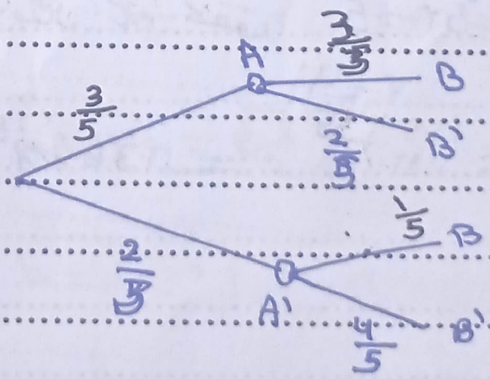
كل مستطيل يعطي مثلثين بالتالي عدد المثلثات

$60\times 2 = 120$

سؤال: أكمل مخطط الشجرة المجاور ثم أجب

1- احسب احتمال كل من الحدثين B و $A\cap B$

2- هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل



الحل: (1) $P(A) = 1 - P(A')$

$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(A\cap B) = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$P(B) = P(A\cap B) + P(A'\cap B)$

$= \frac{3}{5}\times\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{5}$

$= \frac{9}{25} + \frac{2}{25} = \frac{11}{25}$

(2) $P(A).P(B) = \frac{3}{5}\times\frac{11}{25}$

$= \frac{33}{125} \neq \frac{9}{25} = P(A\cap B)$

وبالتالي الحدثين A و B غير مستقلين

تمرين: يحوي صندوق 6 كرات مرقمة $(0,1,1,1,2,2)$ نسحب عشوائياً ودفعة واحدة كرتين من الصندوق وليكن X متحول عشوائي الذي يدل على جداء رقمي الكرتين المسحوبتين

اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب $E(X)$ ، $V(X)$

$X = \{0, 1, 2, 4\}$

$P(X=0) = P(0,1) + P(0,2)$

$$= \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1} + \binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}$$

$$= \frac{3+2}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = P(1,1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$P(X=2) = P(1,2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}$$

$$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=4) = P(2,2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}$$

$$= \frac{1}{15}$$

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
$E(x)$				

$$E(x) = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{2}{5} + 3\cdot\frac{1}{15}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$E(x^2) = \frac{12}{5}$$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5}$$

سؤال: ليكن X متحول عشوائي لتجربة برنولي الجدول المجاور هو القانون الاحتمالي العشوائي X والمطلوب:

① - أكمل الجدول المجاور

② - احسب توقعه الرياضي وتباينه المتحول العشوائي

x	0	1	2	3
$P(x)$				$\frac{8}{27}$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} p^3 \cdot q^0$$

$$p = \frac{2}{3} \quad , \quad q = \frac{1}{3}$$

$$P(X=0) = \binom{3}{0} p^0 \cdot q^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{27}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{6}{27}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$= \frac{12}{27}$$

$$E(X) = n\cdot p = 3\cdot\frac{2}{3} = 2$$

$$V(x) = n\cdot q\cdot p = 3 \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$V(x) = \frac{2}{3}$$

سؤال هام لبند العام

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي العشوائي لـ x , y إذا علمت X , Y مستقلان

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0,08	0,02	0,1	0,2
1	0,28	0,07	0,35	0,7
2	0,04	0,01	0,05	0,1
قانون Y	0,4	0,1	0,5	1

مسألة: نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد 3, 2, 1 ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة 2, 3, 4, 5 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني:

① اكتب الفضاء العينة المرتبطة بهذا التجربة.

② ليكن A الحدث: الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3.

③ وليكن B الحدث: مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5.

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً

③ نعرف متحول عشوائي X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين، اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول الاحتمالي ثم توقعه وتباينه

① الحل: لحساب الفضاء العينة

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

② نلاحظ أن:

$A = \{(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(2,3),(1,3)\}$

$B = \{(1,5),(2,5),(2,4),(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$A \cap B = \{(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12}$

$P(A \cap B) = \frac{n(B \cap A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{3}{12} = \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12}$

③ مجموعة قيم X هي

$\Omega(X) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

X	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

$E(x) = \frac{11}{2}$

$V(x) = \frac{23}{12}$

تمرين: يحوي صندوق 7 بطاقات مرقمة

0, 0, 2, 2, 3, 3, 3

نسحب بطاقتان على التتالي دون إعادة

① إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته ما احتمال أن يكون هذا الرقم 3.

3 و 3

ما احتمال أن يكون الرقم 3 و تحملان الرقم ذاته

البطاقتان تحملان الرقم ذاته

0,0 أو 2,2 أو 3,3

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$P(A\cap B) = 3,3$

$$= 1 \times \frac{P_3^2}{P_7^2}$$

$$= \frac{3\times 2}{7\times 6} = \frac{3}{21}$$

$P(B) =$ 0,0 أو 2,2 أو 3,3

$$1\times\frac{P_2^2}{P_7^2} + 1\times\frac{P_2^2}{P_7^2} + 1\times\frac{P_3^2}{P_7^2}$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{3}{21}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{3}{\cancel{21}}}{\frac{5}{\cancel{21}}} = \frac{3}{5}$$

لا تقلقوا

تمرين هامة

يحوي صندوق على خمس كرات ثلاث كرات سوداء وتحمل الارقام 3, 2, 1 وكرتين حمراء تحملان 1, 2 نسحب معاً كرتين

① ما احتمال الحدث A ؟ الحصول على كرتين لهما اللون ذاته

② ما احتمال الحدث B ؟ الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 3 ؟

③ ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع؟

① إما 2 سوداء أو 2 حمراء

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$$

$$= \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10}$$

② كرة رقمها 1 وكرة رقمها 2

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

③

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

احتمال مجموع الكرتان 3 و لهما ذات اللون

احتمال الكرتان لهما اللون ذاته

إما الكرتان حمراء أو كرة سوداء رقمها ① وكرة سوداء ②

$$\frac{4}{10}$$

$$= \frac{\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}}{\frac{4}{10}}$$

$$= \frac{\frac{1+1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{4}$$

تمرين: يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالارقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 نسحب عشوائياً بطاقتين بالتتالي دون إعادة ليكن X متحول عشوائي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين

1- عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي

2- احسب التوقع الرياضي والتباين

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2	1		2	2	2	2
3	1	2		3	3	3
4	1	2	3		4	4
5	1	2	3	4		5
6	1	2	3	4	5	

دون إعادة

X	1	2	3	4	5
	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

$$E(x) = \frac{10}{30} + \frac{16}{30} + \frac{18}{30} + \frac{16}{30} + \frac{10}{30}$$

$$= \frac{7}{30}$$

$$V(x) = \frac{14}{9}$$

تمرين: نتأمل النقاط D، C، B، A الممثلة للأعداد العقدية

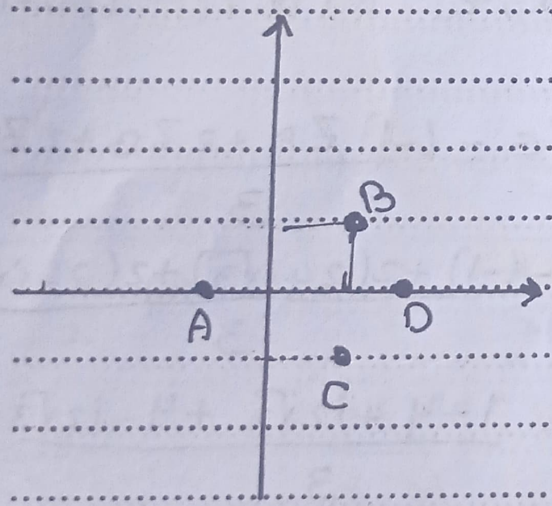
$a = -1$ $b = 2 + i\sqrt{3}$

$c = 2 - i\sqrt{3}$ $d = 3$

1- ارسم النقاط D، C، B، A ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC

2- عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC

3- أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ $(B,2)$ $(C,2)$



$$AB = |b - a| = |3 + i\sqrt{3}|$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$BC = |c - b| = |-2i\sqrt{3}|$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$AC = |c-a| = |3-i\sqrt{3}|$

$= 2\sqrt{3}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$

$\arg\left(\frac{i\sqrt{3}\,\cancel{(1+i\sqrt{3})}}{\cancel{1+i\sqrt{3}}}\right) =$

$\arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

فالمثلث ADC قائم في C

③ نفرض أن G م . أ . م للنقاط $(A,-1)$ $(B,2)$ $(C,2)$

$$Z_G = \frac{(-1)Z_A + 2Z_B + 2Z_C}{3}$$

$$= \frac{-(-1)+2(2+i\sqrt{3})+2(2-i\sqrt{3})}{3}$$

$$= \frac{1+4+i2\sqrt{3}+4-i2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{9}{3} = 3 = Z_D$$

أي أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,2)$

تمرين:

ليكن كثير الحدود

$P(z) = z^3-(2+2i)z^2+(2+4i)z-4i$

① أثبت أن $z_0 = 2i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$

② عين كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (z-2i)\,Q(z)$

③ حل المعادلة في C المعادلة $P(z)=0$

الحل: $P(2i) = (2i)^3-(2+2i)(2i)^2+(2+4i)(2i)-4i$

بعد النشر $0=0$

$$\begin{array}{r|l} & z^2-2z+2 \\ z-2i & z^3-(2+2i)z^2+(2+4i)z-4i \\ & \underline{z^3 \mp 2iz^2} \\ & -2z^2+(2+4i)z-4i \\ & \underline{\pm 2z^2 \mp 4iz} \\ & 2z+4i \\ & \underline{2z \mp 4i} \\ & 0 \end{array}$$

$P(z) = (z-2i)(z^2-2z+2)$

إما $z = 2i$

أو $\Delta = 4-8 = -4$

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ | $z_2 = \frac{2-2i}{2}$

$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ | $z_2 = 1-i$

تمرين: لتكن النقاط A، B، C، D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$d = -4-2i \qquad c = 4+2i$

$b = -1+7i \qquad a = 2-2i$

① لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $m = -1+2i$ أثبت وقوع النقاط A، B، C، D على دائرة مركزها M ونصف قطرها 5

② ليكن e العدد الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$ احسب e وبرهن

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

③ ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC

الحل: يكفي أن نبرهن أن:

$$|Z_{\overrightarrow{MA}}| = |Z_{\overrightarrow{MB}}| = |Z_{\overrightarrow{MC}}| = |Z_{\overrightarrow{MD}}| = 5$$

$|Z_{\overrightarrow{MA}}| = |a-m| = |2-2i+1-2i|$
$= |3-4i| =$
$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{MA}}| = \sqrt{9+16} = 5$

$|Z_{\overrightarrow{MB}}| = |d-m| = |-4-2i+1-2i|$
$= |-3-4i|$
$= \sqrt{9+16} = 5$

$|Z_{\overrightarrow{MC}}| = |c-m| = |4+2i-2i+1|$
$= |5| = \sqrt{25} = 5$

$|Z_{\overrightarrow{MB}}| = |b-m| = |-1+7i+1-2i|$
$= |5i| = \sqrt{25} = 5$

ومنه تقع A، B، C، D على دائرة مركزها M ونصف قطرها يساوي 5

② $$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

$$e = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}$$

نضرب ×2

$$\frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{7-i}{3-9i}$$

$$\frac{1-3i}{-3-3i} = \frac{7-i}{3-9i}$$

Sidra

$$\frac{1-3i}{-3-3i}\cdot\frac{-3+3i}{-3+3i}=\frac{7-i}{3-9i}\cdot\frac{3+9i}{3+9i}$$

$$\frac{-3+9i+3i+9}{9+9}=\frac{21-3i+63i+9}{81+9}$$

$$\div 6\ \frac{6+12i}{18}=\frac{30+60i}{90}\ \div 60$$

$$\frac{1+2i}{3}=\frac{1+2i}{3}$$

③ من العلاقة السابقة

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$

بأخذ arg الطرفين لأن العلاقة صحيحة

$$\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right)=\arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

$$\arg\left(\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{ED}}\right)=\arg\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EA}}\right)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$$

سؤال:

لتكن المجموعة $S=\{0,1,3,5,8\}$

① بكم طريقة يمكن تشكيل رقم يكون من منزلتين من عناصر S

② بكم طريقة تشكيل عدد زوجي مؤلف من منزلتين من عناصر S

① $5\times 4=20$

② $3\times 4=12$

ما تستطعه اليوم سيقال عنك غداً فخور أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً

التكروري