أجب عن جميع الأسئلة القصيرة التالية بوضوحٍ واختصار (عشر درجات لكل سؤال):

1 في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$، أوجد كلاً مما يلي (لا داعي للشرح أوالتعليل):

$\{1,2,3\}^\circ$, $\overline{\{1,2,3\}}$, $[4,5[^\circ$, $\overline{[4,5[}$, $\mathbb{N}^\circ$, $\overline{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Q}^\circ$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\left([0,\sqrt{2}\,]\cap\mathbb{Q}\right)^\circ$, $\overline{[0,\sqrt{2}\,]\cap\mathbb{Q}}$

2 أثبت أن كل مجموعة وحيدة العنصر في فضاء متري ستكون مجموعة مغلقة.

3 بفرض τ_2,τ_1 كل منهما تبولوجيا على X ، أثبت أن $\tau_1\cap\tau_2$ تبولوجيا على X.

4 **أولاً:** هاتِ مثالاً على فضائين تبولوجيين $(X,\tau_2),(X,\tau_1)$ بحيث أن $\tau_1\cup\tau_2$ ليست تبولوجيا على X.

ثانياً: في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$، هل المجموعة $]0,1[$ مترابطة، تامة، متراصة ؟ (علل كل إجابة).

5 بيِّن فيما إذا كانت $\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5$ تشكل تبولوجيا على $\mathbb{R}$ (علِّل إجابتك في حال النفي فقط، أما في حال الإيجاب فيكفي أن تقول نعم هي تبولوجيا دون أي تعليل أو تفسير)

$$\tau_1=\{\emptyset,\mathbb{R},]-\infty,0],[0,+\infty[\},\quad \tau_2=\{\,]a,+\infty[:a\in\mathbb{R}\},\quad \tau_3=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\mathbb{R}\}$$

$$\tau_4=\{\mathbb{R}\}\cup\{A\subset\mathbb{R}:\text{منتهية } A\},\qquad \tau_5=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{\,]a,b[:a,b\in\mathbb{R},a<b\}$$

6 أثبت أن d المعرف كما يلي هو مسافة على $\mathbb{R}^2$

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2:d\big((x,y),(x',y')\big)=|x-x'|+|y-y'|$$

7 في تبولوجيا $\mathbb{R}^2$ المألوفة : عرِّف نقطة تجمع مجموعة، ثم أثبت أنه إذا كانت A مغلقة في $\mathbb{R}^2$، فإن $A'\subset A$.

8 ليكن الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X=\{a,b,c,d\}$، $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b,c\},\{a,d\},\{d\}\}$.

أوجد $\overline{\{b,d\}}^\circ,\{b,d\}$. هل $\{a,d\}$ مترابطة في (X,τ)؟ هل الفضاء التبولوجي (X,τ) متور؟ (علِّل إجاباتك).

أثبت أن التابع التالي f غير مستمر : $f:(X,\tau)\to(X,\tau),\ f(a)=f(d)=d,f(b)=f(c)=a$

9 لتكن $\mathbb{R}$ مزودةً بتبولوجيا زارسكي τ، بيِّن (مع التعليل) أي المجموعات التالية مفتوحة، مغلقة في $(\mathbb{R},\tau)$:

$$\{1,7,9\},\qquad \mathbb{R}^*,\qquad [0,1],\qquad \{a\in\mathbb{R}:a^{17}-5a^2+a-20=0\}$$

ثم بيِّن مع التعليل فيما إذا كان العنصر 7 نقطة تجمع للمجموعة $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\right\}$ في تبولوجيا زارسكي على $\mathbb{R}$.

10 **أولاً :** بيِّن (مع التعليل) أي الفضائين التبولوجيين التاليين متوراً $(\mathbb{N},\{\emptyset,\mathbb{N}\})$, $\big(\mathbb{N},P(\mathbb{N})\big)$.

حيث $P(\mathbb{N})$ هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

ثانياً: إذا علمت أن $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ مسافة على $\mathbb{R}$ فأثبت أن هذه المسافة غير مولدة من نظيم.

****

انتهت الأسئلة، مع تمنياتي لكم بالنجاح و التوفيق

مدرس المقرر : د. وسام طلب