مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط

لتكن النقاط المثقلة (A, a) و (B, β) و (C, γ)

$$a + \beta + \gamma \neq 0$$

يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C حيث

$$a\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$$

• أيا كانت النقطة M فإن

$$a\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (a + \beta + \gamma)\vec{MG}$$

أيا كان $k \neq 0$ حيث k عدد حقيقي

$$ak\vec{GA} + \beta k\vec{GB} + \gamma k\vec{GC} = 0$$ فإن

* إذا كانت معامل الثقل للنقاط الثلاث A و B و C متساوية

$$a = \beta = \gamma$$

فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C منطبق على مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي متوسطاته) حيث يتحقق

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$$ وهو شرط مركز الثقل فقط

* بالنسبة لنقطتين فإن مركز الأبعاد المتناسبة يحقق

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{a + \beta}\vec{AB}$$

* أما بالنسبة لثلاث نقاط فإن G مركز الأبعاد المتناسبة يحقق

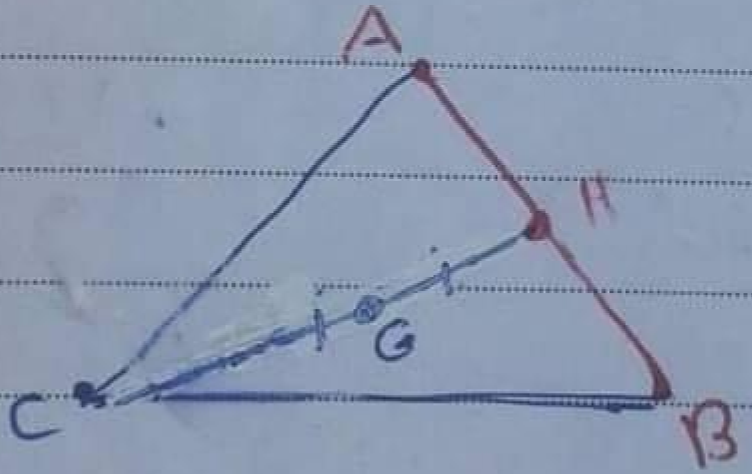
$$\vec{AG} = \frac{\beta}{a + \beta + \gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{a + \beta + \gamma}\vec{AC}$$

كيف نوجد مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

لتكن لدينا النقاط المثقلة $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 2)$

نوجد أولاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B فيكون (H)

$$\vec{AH} = \frac{1}{1+1}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$



أصبح لدينا النقطة H بثقلها $(1+1) = 2$

$(H, 2)$

نوجد الآن مركز الأبعاد المتناسبة لـ H و C

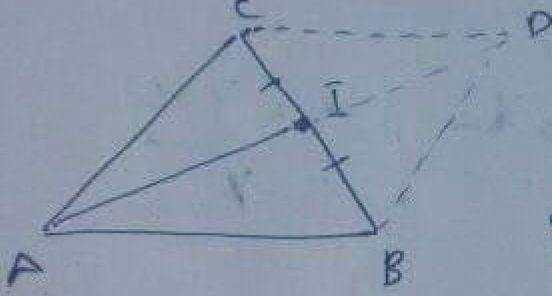
وليكن G

$$\vec{HG} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4}\vec{HC} = \frac{1}{2}\vec{HC}$$

فيكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C

منتصف [CH]

تدريب ص 25



تدريب

١

بإكمال الى متوازي

أضلاع فانه

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$$ وهو المطلوب.

اذا كانت A مركز الأبعاد المتناسبة يكون:

$$AB + AC - 2AI = 0$$

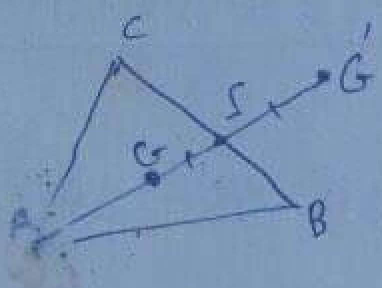
ولدينا معاملات الثقل

$\alpha + \beta + \gamma$

$= 1 + 1 - 2 = 0$

فإذاً لا يمكن أن تكون A مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط المطلوبة



تمرين 2

لدينا $\vec{AG} = 2\vec{GI}$

و $\vec{GG'} = 2\vec{GI}$

$\Rightarrow \vec{AG} = \vec{GG'}$

ومنه G منتصف $[AG']$

لدينا $\alpha \vec{G'A} + \beta \vec{G'B} + \gamma \vec{G'C} = \vec{0}$

لدينا $\vec{G'G} = \frac{1}{2}\vec{G'A}$

$\Rightarrow \vec{G'B} + \vec{G'C} = \vec{GG'} = \frac{1}{2}\vec{G'A}$

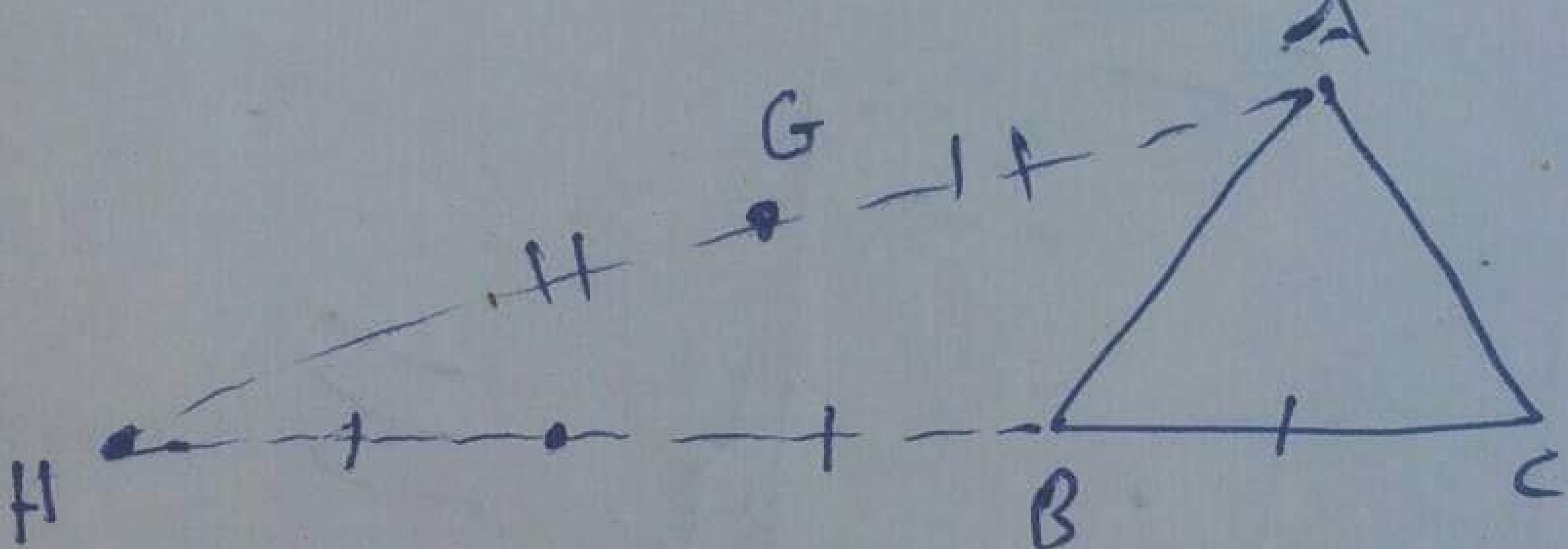
$\Rightarrow 2(\vec{G'B} + \vec{G'C}) = \vec{G'A}$

$\Rightarrow \vec{G'A} - 2\vec{G'B} - 2\vec{G'C} = \vec{0}$

ومنه G' هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A,1)(B,-2)$ و $(C,-2)$

تدريب 3



$$\vec{BH} = \frac{-3}{-3+4}\vec{BC} = \frac{-3}{1}\vec{BC} = -3\vec{BC}$$

و $$\vec{AG} = \frac{1}{1+1}\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AH}$$

احداثيات مركز الأبعاد المتناسبة.

لنسبة لنقطتين A و B

اذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A, a) و (B, β) فان احداثياته على معلم المستوي تكون

$$x_G = \frac{a x_A + \beta x_B}{a + \beta}$$

و

$$y_G = \frac{a y_A + \beta y_B}{a + \beta}$$

ومنه إذا كانت G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن احداثياته تكون

$$x_G = \frac{x_A + x_B}{2}$$

،

$$y_G = \frac{y_A + y_B}{2}$$

بالنسبة لثلاث نقاط (A, a) و (B, β) و (C, γ)

فإن $x_G = \dfrac{a x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{a + \beta + \gamma}$

و $y_G = \dfrac{a y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{a + \beta + \gamma}$

فإذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث منطبقة على مركز ثقل المثلث

فإن $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$

وتحقق $\boxed{x_A + x_B + x_C - 3x_G = 0}$

و $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

وتحقق $y_A + y_B + y_C - 3y_G = 0$

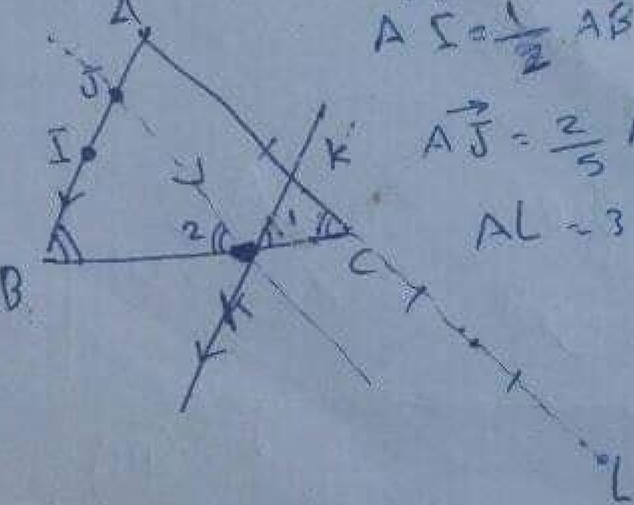
تمرين ، ص 28

1

$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AJ} = \frac{2}{5}\vec{AB}$

$\vec{AL} = 3\vec{AC}$



نعتبر المعلم مبدؤه A ومحور الفواصل $\vec{AB}$ ومحور التراتيب $\vec{AC}$

فيكون $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

فتكون احداثيات النقطة I هي $(\frac{1}{2}, 0)$

احداثيات النقطة L هي $(0, 3$

احداثيات

احداثيات النقطة K على المعلم.

$JK \parallel AC$

ومنه فاصلة J هي نفس فاصلة K وهي $\frac{2}{5}$

كيف نوجد ترتيب النقطة K

نرسم مستقيماً موازياً لـ AB من K نقطع AC في K' فيكون ترتيب K نفس ترتيب K'.

حساب ترتيب K'

$\hat{B} = \hat{K_1}$ و $\hat{C} = \hat{K_2}$

$\Rightarrow \hat{J} = \hat{K}$

ومنه المثلثان $KK'C$ و JBK متشابهان.

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{JK}}{K'C} = \frac{\overrightarrow{JB}}{K'K}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AK'}}{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AK'}} = \frac{\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}}{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}$$

$JK = AK'$

$K'C = AC - AK'$

$\overrightarrow{JB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$KK' = AJ = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AK'} = 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AK'}$$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AK'} = 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AK'} = \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$$

ومنه ترتيب K هو نفس ترتيب K' هو $\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow K\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

- مركبات الشعاع $\overrightarrow{IK}$ هي

$$\begin{pmatrix} x_K - x_I \\ y_K - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

مركبات $\overrightarrow{KL}$

$$\begin{pmatrix} x_L - x_K \\ y_L - y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{2}{5} \\ 3 - \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$x'y - y'x =$$

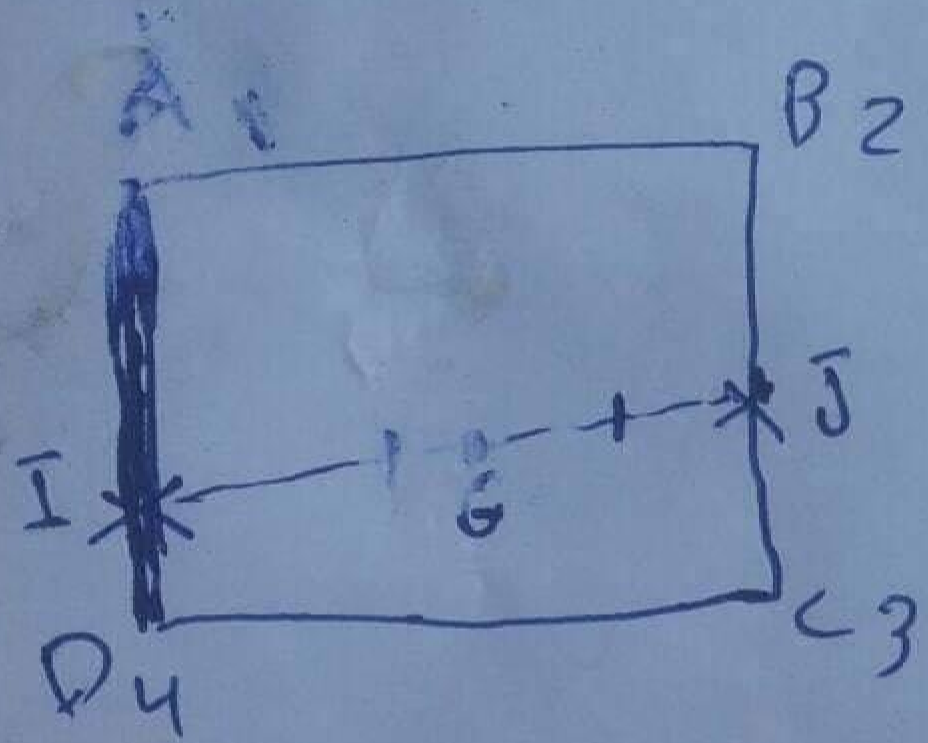
$$-\frac{1}{10}\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{50} = -\frac{6}{25}$$

و $$\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{25} + \frac{6}{25} = 0$$

إذا شعاعان $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{KL}$ مرتبطان خطيا ومشتركان بالنقطة K فالنقاط I و K و L على استقامة واحدة

تمرين 2 :



$$\vec{IA} + 4\,\vec{ID} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = \frac{4}{4+1}\vec{AD}$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = \frac{4}{5}\vec{AD}$$

$$\vec{Bj} = \frac{3}{3+2}\vec{BC} = \frac{3}{5}\vec{BC}$$

أصبح لدينا $(J, 5)$ وَ $(I, 5)$

$$\Rightarrow \vec{IG} = \frac{5}{5+5}\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{IJ}$$

ومنه G منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.