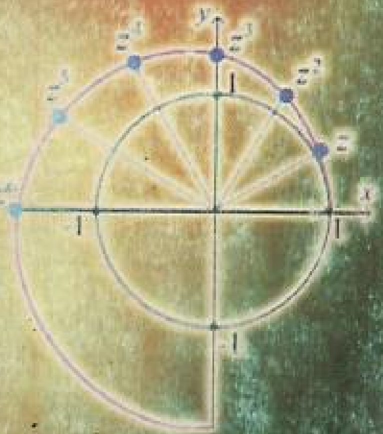
منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

التحليل المركب (العقدي) (١)



الدكتور
زكريا نوت
مدرس في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣٢هـ - ٢٠١١م

منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

التحليل المركب (العقدي)/١

الدكتور

زكريات نوت

مدرس في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الثالثة

فرع الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣٢هـ - ٢٠١١م

الفهرس

الفصل الثاني

التابع المركب بمتحول مركب

أساسيات التفاضل والتكامل في التحليل المركب

الفصل الثالث

التوابع الأولية المركبة وسلاسل القوى

الفصل الرابع

التوابع النظامية (التحليلية الوحيدة القيمة)

الفصل الخامس

سلسلة لوران والنقاط الشاذة للتوابع وحيدة القيمة

مقدمة الكتاب

يعتبر التحليل المركب واحداً من الفروع العصرية الهامة في التحليل الرياضي.

لماذا نحتاج إلى هذا الفرع من العلوم الرياضية؟

في الحقيقة لايمكن حصر الفوائد النظرية والعملية للتحليل المركب اذكر منها:

1) لايمكن تفسير الكثير من الخواص المعروفة في التحليل الحقيقي إلاّ بالانتقال إلى الساحة المركبة. على سبيل المثال لدينا التابع $f=\dfrac{1}{1+x^2}$ قابل للمفاضلة عدداً لانهائياً من المرات في كل نقطة $x \in \mathbb{R}$، في حين سلسلة ماك – لوران لهذا التابع $\dfrac{1}{1+x^2}=1+x+x^2+\cdots$ متباعدة عندما $|x|\geq 1$ أي ليست متقاربة على كل $\mathbb{R}$ رغم أن النقطتين $x=\pm 1$ اللتان تفصلان بين مجموعة التقارب $|x|<1$ ومجموعة التباعد $|x|\geq 1$ لاتملكان أية ميزة إضافية عن بقية نقاط $\mathbb{R}$ بالنسبة للتابع f ولايمكن تفسير هذه النتيجة إلاّ في الساحة المركبة وعندئذ نجد أن التابع $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ يؤول إلى اللانهاية في النقطتين $z=\pm i$ الواقعتين على حدود دائرة الوحدة $|z|=1$.

2) دراسة التوابع الأولية والعلاقات فيما بينها فقد تبين أن التوابع المثلثية والقطعية هي تراكيب خطية من التوابع النيبرية مثل:

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{x\cdot\sqrt{-1}}+e^{-x\cdot\sqrt{-1}}\right)$$

3) عدم إمكانية إجراء الدراسة الواضحة للتوابع المتعددة القيم ضمن الساحة الحقيقية وتصبح ممكنة وميسرة في الساحة المركبة.

4) التحليل المركب يقدم طرقاً جديدة وبسيطة في حل المسائل المعقدة مثل:

I) حساب تكاملات حقيقية ومركبة.

II) التقديرات التقريبية.

III) حل معادلات تفاضلية عادية وجزئية.

IV) حل مسائل في العلوم الفيزيائية والهندسية.

V) إعطاء التفسير الهندسي لحلول المسائل إذ إن التحليل المركب يجمع بين التحليل والهندسة والتبولوجيا.

بوشر ببناء التحليل المركب فعلياً في النصف الثاني من القرن الثامن عشر من قبل الرياضي ليونارد أولر لكن الأسس النظرية لهذا الفرع من العلوم كانت في القرن التاسع عشر على يد مجموعة من عظماء الرياضيات أمثال أغوستين كوشي وبرنارد ريمان وكارل فايرشتراس.

ونستطيع القول إن التحليل المركب ينقسم إلى ثلاثة أقسام: الأول يرتبط بالتوابع الوحيدة القيمة والثاني بالتوابع متعددة القيم، والثالث للتوابع متعددة المتحولات.

وفي هذا الكتاب نبحث القسم الأول مع البدء في القسم الثاني على أن نكمل الدراسة في الكتاب الثاني. أما القسم الثالث فإنه يخرج عن نطاق الخطة الدرسية المعدة ويترك للدراسات العليا.

من ناحية التطوير والبحث فلايزال العلماء يبحثون إلى يومنا هذا في حل مسائل أغلبها ناتج عن التطور التقني والمتطلبات اليومية الجديدة للبشرية.

قمت بإعداد هذا الكتاب: التحليل المركب – الجزء الأول وفق الخطة المقررة من قبل مجلس التعليم العالي، وقد حاولت تمييزه عن غيره بحيث يصلح كتاباً لطلاب الرياضيات ومرجعاً لطلاب العلم غير المختصين، حيث أكثرت من الأمثلة المحلولة، وقدمت التفسير الهندسي والرسوم التوضيحية بالتوازي مع العرض النظري إلى جانب الجزء العملي الذي يحتوي عدداً كبيراً من التمارين المحلولة وغير المحلولة.

يتكون الكتاب من خمسة فصول دراسية، عرضت وفق التسلسل التقليدي المعروف في التحليل الحقيقي. في الفصل الأول نشكل مجموعة الأعداد المركبة C وندرس خواصها الهندسية والتبولوجية ونركز على مجموعات نقطية جزئية مثل المنحنيات والساحات والمتتاليات، أما الفصل الثاني فقد خصص لعرض أساسيات علم التفاضل

والتكامل في التحليل المركب دون الدخول في التفاصيل الدقيقة، وبعد التعرف على التوابع الأولية المركبة وسلاسل القوى في الفصل الثالث نتابع في الفصل الرابع نتائج الفصل الثاني من خلال دراسة صف هام من التوابع المركبة هو التوابع النظامية أو التحليلية الوحيدة القيمة والذي سيكون العمود الفقري لكل الفصول القادمة في الكتاب الثاني وفي الفصل الختامي الخامس ندرس سلسلة لوران والنقاط الشاذة ذات الطبيعة الواحدة.

أشير الى الملاحظات التالية:

- جعلت التمارين غير المحلولة **محاكية** إلى حد كبير للتمارين المحلولة كي يسهل على الطالب حلها وبالتالي فهم المادة النظرية للكتاب.
- تركت حيزاً معقولاً لتفكير القارئ وبالتالي التفاعل مع المادة النظرية وجعله يستمتع بتقديم الاجابة بجهده الذاتي عن عبارتي **"لماذا؟"** و **"اترك تدريباً"** مع العلم أن أغلب الإجابات موجودة بشكل غير مباشر داخل النص لكني لم أشر إليها صراحة.
- يمكن للقارئ غير المختص في مجال العلوم الرياضية والذي لا يرغب في العمق النظري أن يتخطى الفقرات التي تحمل في عنوانها كلمة **"تتمة"** ولن ينقص هذا الإجراء شيئاً من تماسك الموضوعات.

ختاماً أود تقديم خالص الشكر والتقدير لكل من آذرني وشجعني ونصحني كي يخرج هذا العمل المتواضع إلى النور وأخص بالذكر جميع الإداريين والزملاء الكرام، وكذلك طلابي وأهلي وتلك المجموعة ممن شارك في الطباعة والرسوم وسأكون ممتناً لكل من يلحظ بعض الهفوات الأدبية والعلمية والتي لابد من أن تكون موجودة حتى أتجاوزها في طبعات لاحقة.

أرجو أن أكون قد قدمت كتاباً نافعاً لجيل وطننا الغالي وعذراً على كل تقصير.

حلب في 2011/8/11 والله ولي التوفيق

المؤلف :د. زكريا نوت

الفصل الأول

مجموعة الأعداد المركبة (العقدية) والمستوى المركب

The complex numbers and the complex plane

ندرس في هذا الفصل التأسيسي مجموعة الأعداد المركبة C والعمليات عليها وخواصها التحليلية والهندسية والتبولوجية وتتعرف على المجموعات النقطية في المستوى المركب لاسيما المنحنيات والساحات والمتتاليات.

(1-1) الشكل الديكارتي لعدد مركب:

(1-1-1) جبر الأعداد المركبة:

نبني في هذه الفقرة مجموعة الأعداد المركبة C جبرياً ثم نستنتج الشكل الديكارتي ونعرض بعض المفاهيم الأساسية.

تعريف (1): مجموعة الأعداد المركبة C هي أسرة **كل الأزواج المرتبة** (x,y) من الأعداد الحقيقية x و y بحيث تتم عمليتا الجمع (+) والضرب (.) وعلاقة التساوي فيها كما يلي:

لأي عددين مركبين (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) فإن:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \qquad (1)$$

$$(x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1) \qquad (2)$$

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1=x_2 \ \& \ y_1=y_2 \qquad (3)$$

ينتج من هذا التعريف الحالات الخاصة:

-1 $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0) \ \& \ (x_1,0).(x_2,0)=(x_1.x_2,0)$

بالتالي تتطابق عملية الجمع والضرب في الأعداد المركبة ذات الشكل $(x,0)$ مع عملية الجمع والضرب في الأعداد الحقيقية x ونكتب:

$$\mathbb{R}\subset C\ ,\ (x,0)=x \qquad (4)$$

2- إذا كان λ عدداً حقيقياً فإن:

$$(\lambda,0)(x,y)=\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \tag{5}$$

3- بما ان: $(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$ فان العدد المركب $i=(0,1)$ أو $i=\sqrt{-1}$ هو أحد جذري المعادلة $z^2+1=0$ في المجموعة C علماً بأن المعادلة $x^2+1=0$ لاتقبل الحل في $\mathbb{R}$.

يسمى i **الوحدة التخيلية**.

4- استناداً لما سبق نجد أنه إذا كان $z=(x,y)$ عدداً مركباً فإن:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$$

تعريف (2): **الشكل الديكارتي** للعدد $z=(x,y)$ هو:

$$z=x+iy \quad ; \quad i=\sqrt{-1}\ ,\ x,y\in\mathbb{R} \tag{6}$$

القسم الحقيقي للعدد $z=x+iy$ هو $x=\operatorname{Re}z$ **وقسمه التخيلي** هو $y=\operatorname{Im}z$.

تأخذ العمليات (+) و (.) و (=) في (1) و (2) و (3) ديكارتياً الشكل التالي على الترتيب:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{7}$$

$$(x_1+iy_1).(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \tag{8}$$

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2\ \ \&\ \operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2 \tag{9}$$

حيث $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$.

الأعداد الحقيقية الصرفة هي التي قسمها التخيلي معدوم $z=x$. والأعداد **التخيلية الصرفة** هي التي قسمها الحقيقي معدوم $z=iy$.

مرافق العدد المركب $z=x+iy$ هو العدد المركب:

$$\bar{z}=x-iy \tag{10}$$

وطويلته هي العدد الحقيقي غير السالب :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{11}$$

واضح أن العدد الحقيقي الصرف والتخيلي الصرف في آن معاً والوحيد في المجموعة C هو $z = 0$ وأن:

$$\overline{z} = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \tag{12}$$

ولكل عدد مركب z يكون:

$$\overline{z} = x \Leftrightarrow z = x \tag{13}$$

بالتالي تتطابق طويلة العدد المركب z مع قيمته المطلقة إذا وفقط إذا كان z حقيقياً صرفاً $|z| = |x| = \sqrt{x^2}$. كما أنه لكل z :

$$\overline{\overline{z}} = z \, , \, |\overline{z}| = |z| \tag{14}$$

$$z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \tag{15}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} = x \, , \, \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i} = y \tag{16}$$

نشير إلى أنه يمكن التعامل مع جداء عددين مركبين كتعاملنا مع كثيرتي حدود حيث نستبدل i^2 بـ -1 ونترك i في مكانها على النحو التالي:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

وعليه فإنه لاتوجد ضرورة لحفظ قاعدة الضرب في (2) أو (8).

نأتي الآن إلى تعريف عملية الطرح والقسمة في المجموعة C.

تعريف (3): **الطرح في المجموعة C** هو عملية معاكسة للجمع بالمعنى التالي:

لكل عددين z_1 و z_2 يوجد عدد وحيد z يحقق المعادلة:

$$z + z_2 = z_1 \tag{17}$$

نسميه حاصل طرح z_2 من z_1 ونكتب: $z = z_1 - z_2$

بملاحظة أن $(-z)+0 - z = 0 + (-z)$ فإن $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$، وعليه فإن الطرح هو حالة خاصة من الجمع وتأخذ عملية الطرح ديكارتياً الشكل:

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{18}$$

القسمة في المجموعة C هي مقلوب عملية الضرب بالمعنى التالي:

لكل عددين z_1 و z_2 حيث $z_2 \neq 0$ يوجد عدد وحيد z يحقق المعادلة:

$$z.z_2 = z_1 \tag{19}$$

نسميه حاصل قسمة z_1 على z_2 ونكتب $z = \frac{z_1}{z_2}$.

بملاحظة أن $\frac{z_1}{z_2} = z_1.\frac{1}{z_2}$ فإن القسمة حالة خاصة من الضرب وعندما $z_2 = 0$ لاتكون عملية القسمة معرفة كما كان الحال في $\mathbb{R}$.

لإيجاد الشكل الديكارتي لعملية القسمة نضع $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ في المعادلة (19) ونوجد x و y بحل جملة المعادلتين:

$$x_2 x - y_2 y = x_1 \quad \& \quad y_2 x + x_2 y = y_1$$

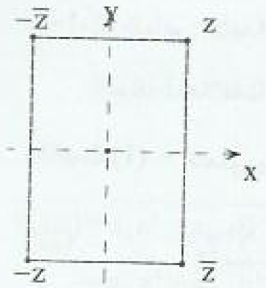
الحل موجود لأن معين الأمثال أكبر من الصفر $(x_2^2 + y_2^2) > 0$ ونجد:

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \tag{20}$$

لكن لاتوجد ضرورة لهذا العمل إذ يكفي ضرب البسط z_1 والمقام z_2 بمرافق المقام $\overline{z}_2$:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2} \quad ; \quad z_2 \neq 0 \tag{21}$$

تنتج وحدانية حاصل الطرح أو القسمة لعددين مركبين من (18) أو (20) ومن وحدانية حاصل الطرح أو القسمة لعددين حقيقيين على الترتيب.



الشكل (1)

هندسياً: بما أن العدد المركب z هو زوج (ثنائية) مرتب من الأعداد الحقيقية (x,y) فإن z هو نقطة في جملة إحداثيات متعامدة xoy.

على سبيل المثال $\overline{z}$ نقطة تناظر z بالنسبة للمحور ox و z- تناظر z بالنسبة لنقطة الأصل 0 = z و $-\overline{z}$ تناظر z بالنسبة للمحور oy ... الخ. (الشكل 1).

مثال (1): ليكن $z_1 = 1 - i \quad , \quad z_2 = -1 + i$

1) أنجز العمليات الأربع على z_1 و z_2.

2) أوجد $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right)$ ، $\operatorname{Im}\left(2\overline{z}_1 - \overline{z}_2\right)$، $\left|\dfrac{z_1^3}{z_2}\right|$.

3) عيّن الثابتين α و β بحيث تتحقق المساواة: $2\alpha z_1 + \beta z_2 - \alpha - \beta + i = 2$

الحل:

1) بتطبيق قواعد العمليات (7)، (18)، (20) نجد:

$$z_1 + z_2 = 0 \; , \; z_1 - z_2 = 2 - 2i \; , \; z_1 . z_2 = 2i \; , \; \frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-i)(-1-i)}{2} = -1$$

2) $$\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right) = \operatorname{Re}(-2) = -2 \; , \; \operatorname{Im}\left(2\overline{z}_1 - \overline{z}_2\right) = \operatorname{Im}(3 + 3i) = 3$$

$$\left|\frac{z_1^3}{z_2}\right| = \left|\frac{-2-2i}{-1+i}\right| = 2$$

3) من تساوي عددين مركبين (9) نجد جملة المعادلتين:

$-2\alpha + \beta = -1 \quad \& \quad \alpha - 2\beta = 2$ والتي حلها المشترك هو $\alpha = 0$ و $\beta = -1$

ملاحظة (1): بخلاف مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المرتبة فإن المجموعة C لاتحقق خاصية الترتيب بالتالي لايجوز أن نسأل أيهما أكبر العدد z_1 أم z_2؟ واترك التأكد من ذلك تدريباً.

(2-1-1) خواص الأعداد المركبة ديكارتياً:

إضافة للعلاقات الواردة في (12) – (16) لدينا الخواص التالية:

الخاصة (1) – تتعلق بالمرافق: لكل n من الأعداد $k=\overline{1,n}$ ، $z_k=x_k+iy_k$ يكون:

$$\overline{z_1+z_2+\dots+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2\dots\bar{z}_n \quad \text{أو} \quad \overline{\sum_{K=1}^{n} z_k}=\sum_{1}^{n}\bar{z}_k \tag{22}$$

$$\overline{z_1.z_2.\dots.z_n}=\bar{z}_1.\bar{z}_2\dots\bar{z}_n \quad \text{أو} \quad \overline{\prod_{1}^{n} z_k}=\prod_{1}^{n}\bar{z}_k \tag{23}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad ; \quad z_2\neq 0 \tag{24}$$

مطلوب

البرهان: من أجل $n=2$ نجد:

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}\\&=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)\\&=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\bar{z}_1+\bar{z}_2\end{aligned}$$

ومن مبدأ الاستقراء الرياضي نحصل على المساواة (22) وبنفس الأسلوب نبرهن صحة المساواة (23).

أما (24) فنجدها كما يلي:

المقام عدد حقيقي و القوس الأكبر عدد عقدي

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2}{\bar{z}_2\bar{\bar{z}}_2}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad ; \quad z_2\neq 0$$

في الحالة الخاصة إذا كان $z=z_1=z_2=\dots z_n$ نجد من (22) و (23) أن:

$$\overline{nz}=n\,\bar{z} \quad , \quad \overline{z^n}=\bar{z}^n \tag{25}$$

هل تبقى (25) صحيحة عندما n عدد صحيح؟ لم تبق صحيحة — مطلوب

مثال (2): أثبت أنه إذا كان z_o جذراً لكثيرة الحدود المركبة:

$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_o$ وكانت جميع الأمثال $a_k;k=\overline{o,n}$ حقيقية صرفة فإن العدد المرافق $\bar{z}_o$ هو جذر آخر لـ P_n.

الحل: مطلوب

بما أن العدد z_o جذر لـ P_n، أي $P_n(z_o)=0$ فإن $\overline{P_n(z_o)}=\overline{0}=0$.

من جانب آخر من الخاصة (1) لدينا لكل z:

$$\overline{P_n(z)}=\overline{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_o}=\overline{a_n z^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+...+\overline{a_o}$$

$$=\overline{a_n}\,\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}}+...+\overline{a_o}=a_n\,\overline{z}^n+a_{n-1}\,\overline{z}^{n-1}+...+a_o=P_n(\overline{z})$$

حيث $\overline{a_k}=a_k$ لكل $k=\overline{o,n}$ لأن a_k ثوابت حقيقية صرفة.

في الحالة الخاصة بوضع $z=z_o$ في المساواة $\overline{P_n(z)}=P_n(\overline{z})$ الصحيحة لكل z

نجد $\overline{P_n(z_o)}=P_n(\overline{z_o})=0$ مما يعني أن $\overline{z}_o$ هو جذر لكثيرة الحدود P_n.

هل يبقى $\overline{z}_o$ جذراً لـ P_n إذا لم تكن جميع الأمثال a_k حقيقية صرفة؟ لا

نثبت في (2-5-5) المبرهنة الأساسية في الجبر: " لكل كثيرة حدود مركبة من الدرجة n تماماً n من الجذور في المجموعة C مع مراعاة عدد تكرار كل جذر".

مثال (3): حل المعادلة $az^2+bz+c=0;\ a\neq 0$ في المجموعة C حيث c,b,a ثوابت مركبة.

الحل: كما هو الحال بالنسبة للمعادلات في المجموعة $\mathbb{R}$ نتمم إلى مربع كامل بالتقسيم على a نجد:

$$z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

حيث $\Delta=b^2-4ac$ و $\sqrt{\Delta}$ يرمز لإحدى قيمتي الجذر (انظر 1-4-1).

في الحالة الخاصة إذا كانت a و b و c حقيقية صرفة فإن $z_2=\overline{z_1}$ (المثال 2).

الخاصة (2) - تتعلق بالطويلة: لكل n من الأعداد $z_k=x_k+iy_k\ ,k=\overline{1,n}$ يكون:

$$\left|\prod_1^n z_k\right| = \prod_1^n |z_k| \quad \text{أو} \quad |z_1.z_2...z_n| = |z_1|.|z_2|...|z_n| \qquad (26)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad ; \quad z_2 \neq 0 \qquad (27)$$

البرهان: من أجل $n = 2$ لدينا:

$$|z_1z_2| = |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)|$$
$$= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$
$$= |x_1+iy_1||x_2+iy_2| = |z_1||z_2|$$

بالاستقراء الرياضي نجد المساواة (26).

أما لبرهان المساواة (27) فيكفي رد عملية القسمة إلى جداء $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1.\frac{1}{z_2}\right|$ واستخدام المبرهن أعلاه.

في الحالة الخاصة عندما $z = z_1 = z_2 = ... = z_n$ نجد من (26) أن:

$$|z^n| = |z|^n \qquad (28)$$

هل تبقى المساواة (28) صحيحة إذا كان n عدداً صحيحاً؟ نعم تبقى صحيحة

الخاصة (3) – تتعلق بالمتراجحات: لكل z و $k = \overline{1,n}$; $z_k = x_k + iy_k$ تصح المتراجحات المثلثية:

$$\text{Re}\,z \leq |\text{Re}\,z| \leq |z| \leq |\text{Re}\,z| + |\text{Im}\,z| \qquad (29)$$
$$\text{Im}\,z \leq |\text{Im}\,z| \leq |z| \leq |\text{Re}\,z| + |\text{Im}\,z| \qquad (30)$$
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (31)$$
$$\left|\sum_1^n z_k\right| \leq \sum_1^n |z_k| \qquad (32)$$

البرهان: مطلوب

بوضع $x = \text{Re}\,z$, $y = \text{Im}\,z$ في المتراجحات المعروفة:

$$x \le |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y|$$

$$y \le |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y|$$

نحصل على المتراجحات في (29) و (30).

لنبرهن صحة المتراجحات في (31) ابتداءً من المتراجحة: $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

لدينا:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right) = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

$2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \le |z_1\overline{z}_2| = |z_1||\overline{z}_2| = |z_1||z_2|$

بأخذ الجذر التربيعي الحسابي لطرفي المتراجحة $|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$ نجد المطلوب.

$Z_1 = 1 - i$
$Z_2 = -1 + i$

ثانياً – المتراجحة $|z_1 - z_2| \le |z_1 + z_2|$ واضحة (لماذا ؟). خاطئة لأن

ثالثاً – نبرهن صحة المتراجحة $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$.

من المبرهن أعلاه لدينا:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

$$|z_2| = |(z_2 - z_1) + z_1| \le |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow$$

$$|z_2| - |z_1| \le |z_1 - z_2| \ ; \ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

بملاحظة أن $|c| \le |z| \Leftrightarrow c \le |z| \ \& \ -c \le |z|$ ووضع $z = z_1 - z_2$ و $c = |z_1| - |z_2|$ نجد المتراجحة المطلوبة.

بالاستقراء الرياضي نحصل على المتراجحة المثلثية في (32).

الخاصة (4) – مفكوك ثنائي حد نيوتن: لكل عددين z_1 و z_2 يكون:

مطلوب

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k \ ; \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (33)$$

بدون برهان

أحياناً نكتب: $\binom{n}{k} = C_k^n = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

الخاصة (5) – لكل عدد صحيح غير سالب k يكون:

$$i^n = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 4k \\ i & ; \quad n = 4k+1 \\ -1 & ; \quad n = 4k+2 \\ -i & ; \quad n = 4k+3 \end{cases} \qquad (34)$$

اترك إثبات صحة الخاصتين تدريباً.

كيف تصبح (34) عندما k عدد صحيح سالب ؟

ملاحظة (2): من المعلوم أنه لدينا نوعين من الجداء في الأشعة:

الأول هو الجداء الداخلي (السلمي) $(z_1, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ والثاني هو الجداء الخارجي (الشعاعي) $[z_1, z_2] = x_1y_2 - x_2y_1$ لكن أياً من هذين النوعين لوحده لايحقق شروط الحقل في حين الجداء المركب $z_1.z_2$ وفق القاعدة (8) يجعل المجموعة C حقلاً (لماذا؟) يدعى حقل الاعداد المركبة ولدينا:

$$z_1z_2 = (\overline{z}_1, z_2) + i[\overline{z}_1, z_2] \qquad (35)$$

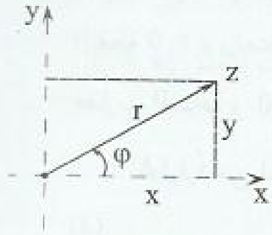
(2-1) الشكل القطبي لعدد مركب والمستوى المركب C:

(1-2-1) طويلة وزاوية عدد مركب:

إن النقطة (x,y) بالتالي العدد المركب z = (x,y) تتعين في المستوى الديكارتي xoy بفصلها x = Re z وترتيبها y = Im z أو في المستوى القطبي ببعد النقطة z عن نقطة الأصل o وليكن r والزاوية φ الكائنة بين الاتجاه الموجب للمحور ox والشعاع الذي يبدأ من o ويمر من z ونستطيع القول : **إن العدد المركب z هو نقطة أو متجه.**

تعريف (1): **المستوى المركب** C هو المستوى الديكارتي الذي تمثل عليه الأعداد المركبة كنقاط أو هو المستوى القطبي الذي تمثل عليه الأعداد المركبة كمتجهات وفي هذا المستوى نسمي ox **المحور الحقيقي** كونه يحمل عليه الأعداد الحقيقية

الصرفة x و oy المحور التخيلي الذي يحمل عليه الأعداد التخيلية الصرفة iy (الشكل 1).



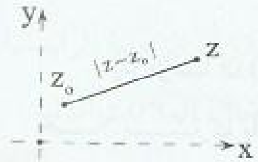
الشكل (1)

من المثلث القائم xoz ومبرهنة فيثاغورث لدينا:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

بالتالي تتطابق طويلة العدد z مع البعد بين النقطتين o و z .

بالتعميم :**البعد** بين النقطتين z_o و z في المستوى C هو:



الشكل (2)

$$|z - z_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \qquad (2)$$

حيث $z_o = x_o + iy_o \;,\; z = x + iy$. (الشكل 2).

واضح أنه في المستوى الديكارتي كل عدد مركب z يقابل نقطة وحيدة (x,y) وبالعكس ولدينا **تقابل واحد لواحد**.

أما في المستوى القطبي فإن لكل عدد z طويلة وحيدة r وعدد غير منته من الزوايا φ وهنا التقابل هو **واحد لمتعدد**، الأمر الذي يلعب دوراً مهماً في التحليل المركب لاسيما عند دراسة التوابع المتعددة القيم ، لذلك نتوقف أولاً عند زاوية عدد مركب.

تعريف (2): **الزاوية (السعة)** $\varphi = \arg z$ للعدد المركب غير الصفري z هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي كل عدد فيها يصلح أن يكون زاوية بين المحور ox^+ والمتجه z. فإذا كان φ_o هو أحد هذه الأعداد فإن:

$$\varphi = \varphi_o + 2\pi k \quad ; \quad k \in Z \qquad (3)$$

هندسياً نحصل على φ من φ_o بتدوير المتجه z عدداً صحيحاً من المرات حول النقطة $z = 0$ ونعتبر $\varphi > 0$ إذا كانت جهة الانتقال من ox^+ إلى z مخالفة لجهة دوران عقارب الساعة و $\varphi < 0$ بخلاف ذلك.

تحليلياً: من المثلث xoz (الشكل 1) لدينا:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \tag{4}$$

بالتالي $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ أو:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{5}$$

إذا فرضنا أن (x,y) معلومة فإنه لإيجاد الزاوية φ ينبغي حل جملة المعادلتين في (5) حلاً مشتركاً بالنسبة لـ φ، وإذا لاحظنا أن $\cos(\varphi+2\pi k) = \cos\varphi$ و $\sin(\varphi+2\pi k) = \sin\varphi$ فإن لهذه الجملة عدداً غير منته من الحلول $\varphi = \arg z$ مما يعني أن زاوية العدد المركب $z\,(z \neq 0)$ ليست وحيدة التعيين بل لانهائية التعيين.

لنلاحظ أن الزاوية φ تحقق المعادلة:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \tag{6}$$

لكن مجموعة حلول المعادلة (6) بالنسبة لـ φ لاتتطابق مع مجموعة حلول الجملة (5) بالنسبة لـ φ (لماذا ؟).

يجب التفريق بين الزوايا φ_o , $\varphi_o + 2\pi k$ المختلفة مثنى مثنى كأعداد حقيقية وبين المتجهات (r, φ_o) , $(r, \varphi_o + 2\pi k)$ المتطابقة هندسياً.

وهكذا فإن التقابل بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة النقاط (x,y) في المستوى الديكارتي هو تقابل أحادي، بينما التقابل بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة المتجهات (r, φ) في المستوى القطبي ليس أحادياً. وبغية الحصول على تقابل أحادي ندخل مبدئيا التعريف الهام التالي:

تعريف (3): الزاوية الرئيسية (العمدة) Arg z للعدد غير الصفري z هي تلك القيمة من بين قيم الزاوية arg z الواقعة ضمن المجال نصف المغلق $]-\pi,\pi]$:

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \tag{7}$$

ينتج مباشرة أن:

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k \quad ; \quad k \in Z \tag{8}$$

بالتالي بمعرفة الزاوية الرئيسية نستطيع إيجاد الزاوية.

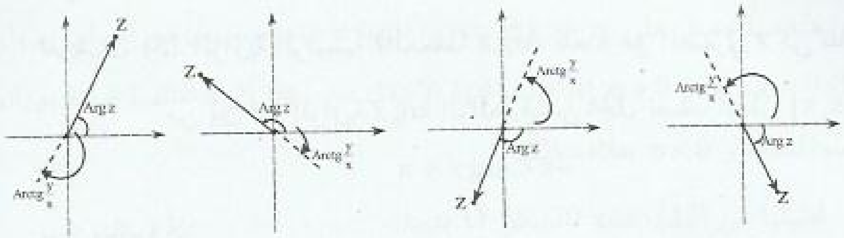
إذا فرضنا أن $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$ هي القيمة الرئيسية لـ $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ أي تلك الواقعة ضمن المجال $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ نجد من الجملة (5) والتعريف (3) (الشكل 3) أن الزاوية الرئيسية Argz تحسب تبعاً لموقع النقطة $z = x + iy$ في المستوى C من خلال العلاقات التالية:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} & ; \quad x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} & ; \quad x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} & ; \quad x < 0, y < 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x \;;\; x > 0 \Leftrightarrow z \in ox^{+} \Leftrightarrow \operatorname{Arg} = 0 \\ z = iy \;;\; y > 0 \Leftrightarrow z \in oy^{+} \Leftrightarrow \operatorname{Arg} z = \pi/2 \\ z = x \;;\; x < 0 \Leftrightarrow z \in ox^{-} \Leftrightarrow \operatorname{Arg} z = \pi \\ z = iy \;;\; y < 0 \Leftrightarrow z \in oy^{-} \Leftrightarrow \operatorname{Arg} z = -\pi/2 \end{array}\right\} \tag{10}$$

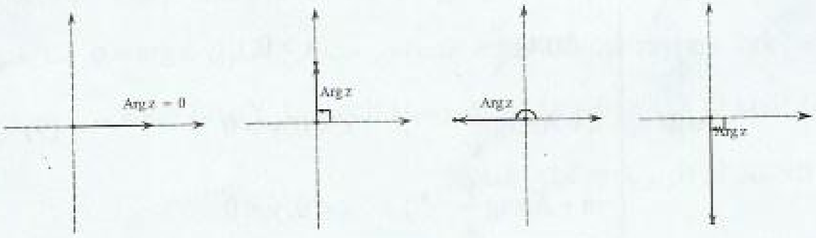
وهكذا، إذا وقعت النقطة z في الربع الأول (I) أو في الربع الرابع (IV) للمستوى المركب C فإننا نستخدم العلاقة الأولى في (9). وإذا وقعت z في الربع الثاني (II) نطبق العلاقة الثانية، وأخيراً العلاقة الثالثة تخص حالة وقوع z في الربع الثالث (III).

ولنلاحظ أن $\operatorname{Arg} z > 0$ في الربعين I و II وأن $\operatorname{Arg} z < 0$ في الربعين III و IV دوماً (الشكل 3).



الشكل (3)

أما القضايا في (10) فتبين أن الزاوية الرئيسية لعدد حقيقي موجب تساوي الصفر وتساوي $\frac{\pi}{2}$ عندما يكون العدد واقعاً على النصف الموجب oy^+ للمحور oy وتساوي π إذا كان العدد حقيقياً سالباً وأخيراً تساوي $-\frac{\pi}{2}$ عندما يقع العدد z على النصف السالب oy^- من المحور oy (الشكل 4).



الشكل (4)

ينتج مما سبق ما يلي:

1) لكل عدد مركب غير صفري z زاوية رئيسية وحيدة والتقابل بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة المتجهات (r,Arg z) هو تقابل أحادي.

ملحوظة: من أجل $z = 0$ الزاوية غير معينة.

2) أخذنا المجال نصف المغلق $(-\pi,\pi]$ في التعريف (3) للمحافظة على وحدانية التعيين للزاوية الرئيسية Arg z عندما $z \in ox^-$ وكان باستطاعتنا أخذ المجال $[-\pi,\pi)$ وعندئذ $\arg z = -\pi$ عندما $z \in ox^-$. أكثر من هذا إذا أخذنا مجالاً آخر فإن

العلاقات (9) و (10) تفقد صحتها (لماذا ؟) ويُستعاض عنها بصيغ تكاملية (انظر 3-2).

نلفت الانتباه إلى إننا نستخدم العلاقات التحليلية (9) عندما يتعذر علينا إيجاد الزاوية الرئيسية $\operatorname{Arg} z$ هندسياً. على سبيل المثال واضح أن : $\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$ (لماذا؟) في حين: $\operatorname{Arg}(-1+3i)=\pi-\operatorname{Arctg}3$.

مثال (1): أوجد الطويلة والزاوية لكل من الأعداد z التالية:

$$\pi \;,\; -ei \;,\; 1-i \;,\; i^{54} \;,\; -3-4i$$

الحل: لدينا:

$$|\pi|=\pi \;,\; |-ei|=e \;,\; |1-i|=\sqrt{2} \;,\; |i^{54}|=1 \;,\; |-3-4i|=5$$

بعد تحديد موقع النقطة نجد أن:

$$\operatorname{Arg}\pi=0 \;,\; \arg\pi=2\pi k$$

$$\operatorname{Arg}(-ei)=-\pi/2 \;,\; \arg(-ei)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$\operatorname{Arg}(1-i)=-\frac{\pi}{4} \;,\; \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$i^{54}=i^{4.13+2}=i^2=-1\Rightarrow \operatorname{Arg}i^{54}=\pi,\; \arg i^{54}=\pi+2\pi k$$

$$\operatorname{Arg}(-3-4i)=-\pi+\operatorname{Arctg}\frac{4}{3} \;,\; \arg(-3-4i)=\operatorname{Arctg}\frac{4}{3}-\pi+2\pi k$$

(2-2-1) علاقة أولر والشكل القطبي:

نظراً لحاجتنا المبكرة لعلاقة أولر نرغب بداية إثبات صحتها مستخدمين الخاصتين التاليتين للتابع e^z (انظر (3-5)): $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2} \;,\; \left(e^{g(z)}\right)'=g'(z)e^{g(z)}$

مبرهنة (1) – علاقة أولر: لكل عدد حقيقي $\varphi\in\mathbb{R}$ تصح العلاقة:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{11}$$

الإثبات: لمـ طلاع

من أجل $z_1 = x$ و $z_2 = iy$ نجد أن: $e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$

من جانب آخر بوضع $g(y) = iy$ نجد : $\left(e^{iy}\right)' = ie^{iy}$ و $\left(e^{iy}\right)'' = -e^{iy}$ مما يعني أن التابع $f(y) = e^{iy}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $f''(y) + f(y) = 0$ ونعلم أن الحل العام لهذه المعادلة هو: $f(y) = e^{iy} = A\cos y + B\sin y$.

الآن نحدد A و B.

من أجل $y = 0$ لدينا :

$$f(o) = e^{io} = A.\cos o + B.\sin o = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$f'(y)\big|_o = ie^{io} = -A\sin o + B.\cos o = i \Rightarrow B = i$$

بالتالي: $f(y) = e^{iy} = \cos y + i\sin y$ وباستبدال y بـ φ شكلياً نجد العلاقة (11).

بوضع $\varphi-$ بدلاً من φ في العلاقة (11) نجد:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \qquad (12)$$

هل تبقى العلاقة صحيحة إذا استبدلنا العدد الحقيقي φ بعدد مركب z؟

في الحالات الخاصة من (11) و (12) لدينا مثلاً:

$$\left.\begin{array}{l} e^{io} = e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = \dots = e^{2\pi k i} = 1 \\ e^{\pi i/2} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = i\ ,\ e^{\pi i} = e^{i(\pi+2\pi k)} = -1 \\ e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}\quad ;\quad \varphi \in \mathbb{R} \end{array}\right\}\ ;\ k \in Z \qquad (13)$$

بتعويض $x = r\cos\varphi$ و $y = r\sin\varphi$ في الشكل الديكارتي $z = x + iy$ نحصل على **الشكل القطبي المثلثي** للعدد غير الصفري z:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \qquad (14)$$

وباستخدام علاقة أولر (11) نجد **الشكل القطبي النيبري**:

$$z = re^{i\varphi} \qquad (15)$$

بإمكاننا وضع التعريف التالي:

تعريف (4): **الشكل القطبي** للعدد المركب غير الصفري z هو إما الشكل القطبي المثلثي في (14) أو الشكل القطبي النيبري في (15).

نتيجة (1): كل عدد مركب $z=(x,y)$ يكتب بشكل ديكارتي وبشكل قطبي وللانتقال من الشكل الديكارتي إلى الشكل القطبي ينبغي إيجاد الطويلة r والزاوية φ من عبارتيهما، أما للانتقال من الشكل القطبي إلى الديكارتي فيجب إيجاد القسم الحقيقي $x=\operatorname{Re} z$ والقسم التخيلي $y=\operatorname{Im} z$ باستخدام علاقة أولر.

نشير إلى أن طبيعة المسألة المدروسة تفرض الشكل الأنسب الذي يجب التعامل معه. على سبيل المثال عند التفسير الهندسي لعملية الضرب ورفع عدد مركب لأس كبير فإنه من الأفضل استخدام الشكل القطبي (انظر المثال 3 لاحقاً).

مثال (2):

1) اكتب كلاً من الأعداد z التالية في الشكل القطبي: $4+3i$, i^{54} , $-1-i$, e

والأعداد z التالية في الشكل الديكارتي: $\cos\frac{99\pi}{4}-i\sin\frac{99\pi}{4}$, $2e^{25\pi i/2}+i$, $-e^{i}$, e

الحل:

1) نعتبر $\varphi=\operatorname{Arg} z$

$$z=e\Rightarrow r=e\ ,\ \varphi=0\ ,\ z=ee^{io}$$

$$z=-1-i\Rightarrow r=\sqrt{2}\ ,\ \varphi=-\frac{3\pi}{4}\ ,\ z=\sqrt{2}e^{-3\pi i/4}$$

$$z=i^{54}=-1\Rightarrow r=1\ ,\ \varphi=\pi\ ,\ z=e^{\pi i}$$

$$z=4+3i\Rightarrow r=5\ ,\ \varphi=\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}\ ,\ z=5e^{i\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}}$$

(2

$$z=e=e+io\ ,\ \ z=-e^{i}=-\cos 1-i\sin 1$$

$$z=2e^{25\pi i/2}+i=2e^{\pi i/2}+i=2i+i=3i=0+3i$$

$$z=\cos\frac{99\pi}{4}-i\sin\frac{99\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

(3-2-1) خواص الأعداد المركبة قطبياً:

واضح هندسياً وتحليلياً أن **تساوي عددين** مركبين قطبياً يعني:

$$r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \ \ \& \ \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k \ \ ; k \in Z \tag{16}$$

بجمع علاقتي أولر (11) و (12) طرفاً لطرف ثم طرح العلاقة (12) من (11) نجد:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \ , \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \tag{17}$$

نتابع عرض الخواص للأعداد المركبة:

الخاصة (6): لكل n من الأعداد $z_k = r_k e^{i\varphi_k} \ ; \ k = \overline{1,n}$ يكون:

$$\prod_1^n e^{i\varphi_k} = e^{i\sum_1^n \varphi_k} \tag{18}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{19}$$

البرهان: مطلوب

من أجل $n = 2$ نجد حسب العلاقات المثلثية الحقيقية:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

ومن مبدأ الاستقراء الرياضي نجد أن العلاقة (18) صحيحة.

بملاحظة أن $\frac{1}{e^{i\varphi_2}} = e^{-i\varphi_2}$ نحصل على المساواة (19) لماذا؟.

في الحالة الخاصة إذا كان $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n$ نحصل على علاقة أولر – موافر:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{20}$$

أو:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$$

ولنلاحظ أن هذه العلاقة صحيحة لكل عدد صحيح n (لماذا؟) وأنها تحسب $\cos n\varphi$ أو $\sin n\varphi$ بدلالة $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$.

من جانب آخر من المساواة $|z_1z_2...z_n| = |z_1||z_2|...|z_n|$ و $r_k = |z_k|$ والعلاقة (18) نجد أن:

$$r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}...r_ne^{i\varphi_n} = r_1r_2...r_ne^{i(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)} \qquad (21)$$

ومن المساواة $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ والعلاقة (19) نجد:

$$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (22)$$

نتيجة (2): لكل n من الأعداد المركبة يكون:

$$\arg\left(\prod_1^n z_k\right) = \sum_1^n \arg z_k \qquad (23)$$

$$\arg\bar{z} = \arg\frac{1}{z} = -\arg z \quad \& \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \qquad (24)$$

في الحالة الخاصة:

$$\arg z^n = n\arg z \qquad (25)$$

هل تبقى المساواة (25) صحيحة إذا كان n عدداً صحيحاً؟

نشير إلى أنه لايمكن استبدال arg بـ Arg في أي من العلاقات الثلاث السابقة.

على سبيل المثال إذا كان $z_1 = i$ و $z_2 = -1$ فإن:

$$\text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} \neq \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 = \frac{3\pi}{2}$$

متى تستطيع المبادلة؟

مثال (3): احسب القيمة I للمقدار $\frac{1}{(1-i)^{23}}$.

الحل:

يظهر هذا المثال أهمية الانتقال إلى الشكل القطبي أولاً، لأنه بدون ذلك يتوجب تطبيق مفكوك ثنائي حد نيوتن (الخاصة 4) وهذا الإجراء يحتاج إلى زمن وجهد كبيرين للغاية.

لدينا:

$$I=(1-i)^{-23}=\left(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\right)^{-23}=\left(\sqrt{2}\right)^{-23}e^{23\pi i/4}$$

$$=-\left(\sqrt{2}\right)^{-23}e^{3\pi i/4}=-\left(\sqrt{2}\right)^{-23}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2^{12}}(1-i)$$

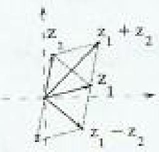
(3-1) التفسير الهندسي:

وجدنا أن المقدار الحقيقي غير السالب $|z-z_0|$ يمثل هندسياً البعد بين النقطتين z و z_0 في المستوى المركب C. إن هذا يمكننا من الحصول على الكثير من الخواص السابقة لاسيما المتعلقة بالمتراجحات، إضافة إلى إمكانية التعبير عن معادلات الدائرة والقطوع ...الخ بالصيغة المركبة مباشرة وقبل هذا كله نفسر العمليات في المجموعة C هندسياً.

1- التفسير الهندسي للعمليات الأربع:

إذا كان $z_k=x_k+iy_k \quad ; \quad k=1,2$ فإن:

$$z=x+iy=z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)\Leftrightarrow x=x_1\pm x_2 \quad \& \quad y=y_1\pm y_2$$



الشكل (1)

مما يعني هندسياً أن حاصل جمع العددين z_1 و z_2 هو متجه z ناتج عن جمع المتجهين z_1 و z_2 وفق قاعدة متوازي الأضلاع وإن حاصل طرح العدد z_2 من z_1 هو متجه ناتج عن جمع المتجهين z_1 و $-z_2$ وفق ذات القاعدة (الشكل 1).

إذا كان $z_k=r_k e^{i\varphi_k} \quad ; \quad k=1,2$ فإن:

$$z=re^{i\varphi}=z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\Leftrightarrow r=r_1r_2 \quad \& \quad \varphi=(\varphi_1+\varphi_2)+2\pi k$$

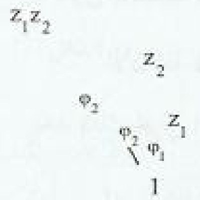
$$z=re^{i\varphi}=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\Leftrightarrow r=\frac{r_1}{r_2} \quad \& \quad \varphi=(\varphi_1-\varphi_2)+2\pi k$$

مما يعني هندسياً أن حاصل ضرب العددين z_1 و z_2 هو متجه z ناتج بتدوير المتجه z_1 زاوية قدرها φ_2 وضرب r_1 بـ r_2 (الشكل 2).

وحاصل قسمة العدد z_1 على $z_2(z_2 \neq 0)$ هو متجه z ناتج بتدوير المتجه z_1 زاوية $-\varphi_2$ وقسمة r_1 على r_2 (الشكل 3).

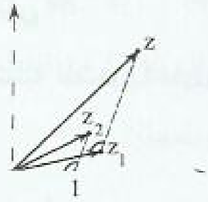
فمثلاً iz_1 هو دوران فقط لـ z_1 زاوية $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ و $-2z_1$ هو دوران لـ z_1 زاوية π وتكبير لـ r_1 بمقدار $r_2 = |-2| = 2$ و $(1+i)z_1$ دوران لـ z_1 زاوية $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ وضرب r_1 بـ $r_2 = \sqrt{2}$.

من أجل رسم متجه الجداء $z = z_1 z_2$ يكفي انطلاقاً من الضلع $[0, z_1]$ إنشاء المثلث oz_1z المشابه للمثلث $01z_2$ (الشكل 4).



الشكل (2)

الشكل (3)



الشكل (4)

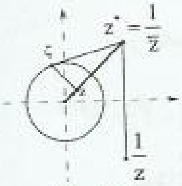
أما لرسم متجه القسمة $z = \frac{z_1}{z_2}$ أو متجه الجداء $z_1 . \frac{1}{z_2}$ فيكفي إنشاء المتجه $\omega = \frac{1}{z_2}$ انطلاقاً من المتجه z_2 وتطبيق حالة الجداء.

ليكن z متجهاً معلوماً ولنأخذ:

$$\omega = \frac{1}{z} \qquad (1)$$

أولاً نفرض أن $|z| > 1$. نرسم العمود على المتجه z والمار من النقطة z فيقطع الدائرة $|z| = 1$ في نقطة ζ ثم نرسم مماس الدائرة في ζ فيقطع هذا المماس امتداد المتجه z في نقطة z^* تحقق $\operatorname{Arg} z^* = \operatorname{Arg} z$ (لماذا؟).

من تشابه المثلثين $oz\zeta$ و $o\zeta z^*$ (الشكل 5) لدينا:



الشكل (5)

$\frac{|\zeta|}{|z|}=\frac{|z^*|}{|\zeta|}$ ولكن $|\zeta|=1$ بالتالي $|z^*|=\frac{1}{|z|}$

مما يعني هندسياً أن العدد z^* هو مرافق العدد $\frac{1}{z}$ (لماذا؟)

$$z^*=\frac{1}{z} \qquad (2)$$

الآن بأخذ نظيرة النقطة z^* بالنسبة للمحور ox نجد النقطة $\omega=\overline{z^*}=\frac{1}{z}$.

إن المساواة (2) هي عملية تناظرية بالنسبة لدائرة الوحدة، وعليه فإننا نجد النقطة ω في (1) من z بعمليتين تناظريتين متتابعتين:

الأولى بالنسبة لدائرة الوحدة، والثانية بالنسبة للمحور الحقيقي ox.

الآن إذا كان $|z|>1$ فإننا ننشئ العملية التناظرية بالنسبة للمحور الحقيقي، ثم بعد ذلك نجري العملية التناظرية الثانية.

أخيراً إذا كان $|z|=1$ فإن $z^*=\frac{1}{z}$ تتطابق مع z أي $z^*=z$

2- متراجحات المثلث:

المتراجحات الواردة في الخاصة (3) هي تعبير بلغة الأعداد المركبة عن حقائق معروفة في الهندسة التحليلية.

فمثلاً المتراجحة : $|\mathrm{Re}\,z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Jm}\,z|$

تعني أن طول وتر في المثلث القائم oxz أصغر أو يساوي مجموع طولي الضلعين القائمتين وأكبر أو يساوي طول أي من تلك الضلعين.

والمتراجحات: $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

تعني أن طول ضلع في المثلث الذي رؤوسه o , z_1 , z_1+z_2 أصغر أو يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين، وأكبر أو يساوي طول فرق طولي تلك الضلعين.

لنلاحظ أن المساواة في المتراجحات السابقة تتحقق إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$ أو كان أحد العددين z_2, z_1 صفراً (لماذا؟).

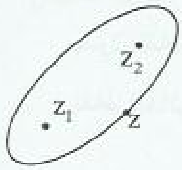
3- الدائرة والقطوع في المستوى المركب:

الشكل (6)

بناءً على تفسير المقدار $|z-z_0|$ فإن المعادلة (الشكل6):

$$|z-z_0| = r \quad ; \quad r>0 \tag{3}$$

تمثل في المستوى C الدائرة التي مركزها النقطة المثبتة z_0 ونصف قطرها r. والمعادلة:



الشكل (7)

$$|z-z_1| + |z-z_2| = 2r \quad ; \quad r > \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \tag{4}$$

(الشكل7) هي القطع الناقص الذي محرقاه z_1 و z_2 .

والمعادلة:

الشكل (8)

$$\big||z-z_1| - |z-z_2|\big| = 2r \quad ; \quad r < \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \tag{5}$$

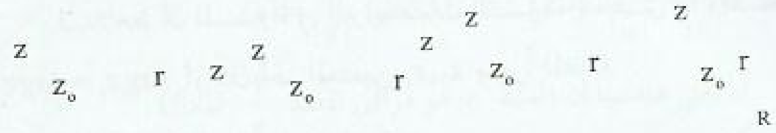
(الشكل 8) هي القطع الزائد الذي محرقاه z_1 و z_2.

بسهولة نفسر هندسياً متراجحات مرتبطة بالمعادلات السابقة.

فمثلاً المتراجحة: $K: |z-z_0| < r \ , \ r>0$ تمثل مجموع النقاط z الواقعة داخل الدائرة (3) بدون نقاط الدائرة ذاتها، أي قرص دائري مفتوح (الشكل 9).

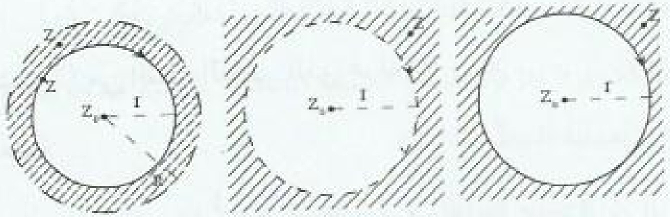
والمتراجحة: $\bar{K}: |z-z_0| \le r \ , \ r>0$ هي القرص السابق مع نقاط الدائرة، أي قرص دائري مغلق (الشكل 10). و $D: 0 < |z-z_0| < r, \ r>0$ هي القرص K بدون مركزه z_0 (الشكل 11).

و $D: r < |z-z_0| < R \ ; \ R > r > 0$ الحلقة الدائرية المفتوحة التي مركزها z_0 ونصف قطرها الصغير r والكبير R بدون نقاط حدودها (الشكل 12).



الشكل (9) الشكل (10) الشكل (11) الشكل (12)

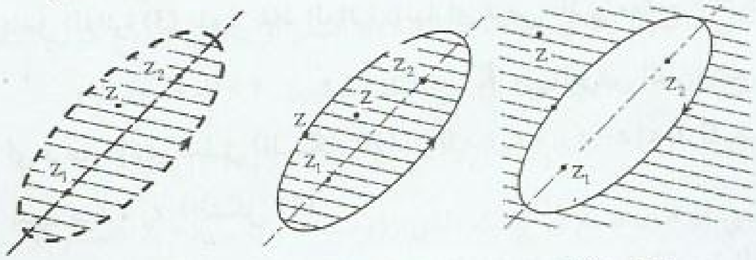
والمتراجحة $D: r \le |z-z_0| < R$ هي الحلقة السابقة مع نقاط الدائرة (3) فقط (الشكل13). والمتراجحة $K: |z-z_0| > r$ مجموعة النقاط z الواقعة خارج الدائرة (3) بدون نقاط الدائرة ذاتها (الشكل 14) و $K: |z-z_0| \ge r$ هي المجموعة السابقة مع نقاط الدائرة (الشكل 15).



الشكل (13) الشكل (14) الشكل (15)

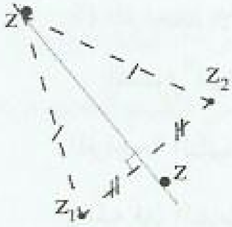
المتراجحة: $\{|z-z_1|+|z-z_2|\} < 2r$ هي داخلية القطع الناقص (4) بدون نقاط القطع (الشكل 16).

وتمثل المتراجحة: $\{|z_1-z_2|+|z-z_2|\} \le 2r$ داخلية القطع الناقص (4) مع نقاط القطع (الشكل 17) والشكل (18) يمثل خارجية القطع مع نقاط القطع.



الشكل (16) الشكل (17) الشكل (18)

أخيراً المعادلة: (الشكل19)



الشكل (19)

$$|z-z_1|=|z-z_2| \qquad (6)$$

تمثل مجموعة النقاط z المتساوية البعد عن النقطتين المثبتتين z_1 و z_2 فهي بالتالي معادلة المستقيم العمود على القطعة المستقيمة $[z_1, z_2]$ والمار من منتصفها.

لنلاحظ أن السهم في الرسوم تعني أن مجموعة النقاط موجهة أو مرتبة وبدونه نحصل على مجموعة نقاط جبرية.

مثال (1): أوجد الحل الهندسي في المستوى المركب لكل مما يلي:

1) $|z-2|=|z+i|$ ، 2) $|z+1-i|<\pi$

3) $\arg(z-3i)=\dfrac{\pi}{5}$ ، 4) $-\dfrac{\pi}{4}<\arg(z+i)\leq\dfrac{\pi}{2}$

5) $\begin{cases}\{\operatorname{Re} z+\operatorname{Re}(iz+1)\}\leq 2\\ |z-1-i|>2\end{cases}$

الحل:

1) المستقيم الذي يعامد القطعة [2,-i] ويمر من منتصفها ويصبح محورا لهذه القطعة بعد توجيهه.

2) القرص الدائري المفتوح الذي مركزه $-1+i$ ونصف قطره $\pi \approx 3.14$.

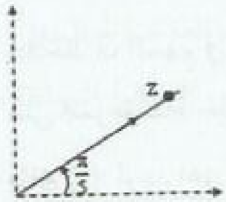
3) الشعاع غير المحدود الذي بدايته 3i وزاويته مع ox^+ تساوي $\dfrac{\pi}{5}$ (الشكل20).

4) تقاطع القطاعين الزاويين $\arg(z+i)\leq\dfrac{\pi}{2}$ و $-\dfrac{\pi}{4}<\arg(z+i)$ فهو القطاع الزاوي غير المحدود الذي رأسه $-i$ وضلعه السفلى $\arg(z+i)=-\dfrac{\pi}{4}$ والعليا $\arg(z+i)=\dfrac{\pi}{2}$ مع نقاط الضلع العليا فقط (الشكل21).

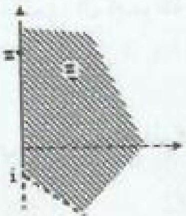
5) المتراجحة الأولى بعد أن نضع $z = x+iy$ تكافئ $y \geq x-1$ وهذه تمثل نصف المستوى الواقع فوق المستقيم $y = x-1$ مع نقاط المستقيم.

المتراجحة الثانية هي خارجية قرص دائري مفتوح مركزه $1+i$ ونصف قطره 2.

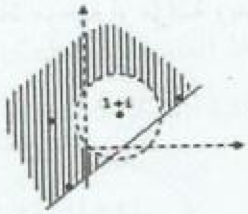
وعليه فإن التقاطع المشترك يكون المحل الهندسي المشترك للمتراجحتين (الشكل22).



الشكل (20)



الشكل (21)



الشكل (22)

نتيجة1: المعادلة $z - z_0 = re^{i\varphi}$ تعني هندسياً احدى الحالات:

- نقطة عندما r و φ مثبتان.
- شعاع زاويته φ عندما r متحول $0 \leq r \leq +\infty$ و φ ثابت
- منحنى ما بدايته z_0 عندما r و φ متحولين.
- دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r عندما r ثابت و φ متحول يغطي المجال $[0, 2\pi)$

في الحالات الخاصة يمكن أن تكون $z_0 = 1$ و $r = 1$ وحينئذ نحصل على دائرة الوحدة.

(4-1) قوة عدد مركب – الجذر النوني:

(1-4-1) اس القوة عدد عادي غير صحيح.

تساعدنا علاقة موافر $z^p = \left(re^{i\varphi}\right)^p = r^p e^{ip\varphi}$ في حساب قيمة القوة z^p عندما يكون الأس $p = m$ عدداً صحيحاً وتبين أن هذه القيمة وحيدة لكل عدد مفروض z $(z \neq 0)$ لكن إذا كان $p = \frac{m}{n}$ عدداً عادياً (كسرياً) بسيطاً فإن هذه العلاقة لن تفيد في حساب z^p والمبرهنة التالية تعطينا حل هذه المسألة وتظهر أن للقوة z^p تماماً n من القيم المختلفة مثنى مثنى.

مبرهنة (1): إذا كان $\varphi = \operatorname{Arg} z$; $z = re^{i\varphi}$ عـدداً مفروضـاً و $\frac{m}{n}$ عـدد عـادي بـسيط (بدون عوامل مشتركة) وغير صحيح فإن للقوة $z^{m/n}$ تماماً n من القيم المختلفـة مثنى مثنى وهذه القيم تعطى بالعلاقة:

$$z_k = z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m}\, e^{i\frac{m\varphi + 2\pi k}{n}} \quad ; \quad k = \overline{0, n-1} \qquad (1)$$

(موافر)

في الحالة الخاصة عندما $m = 1$ يكون:

Arg z

$$z_k = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad ; \quad k = \overline{0, n-1} \qquad (2)$$

مطلوب

الإثبات: بداية لدينا $\omega = z^{m/n}$ تكافئ المعادلة:

$$\omega^n = z^m \qquad (3)$$

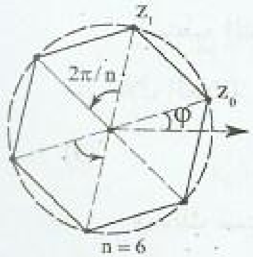
يتم المطلوب بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ ω .

من أجل ذلك نضع فيها $z = re^{i\varphi}$ و $\omega = \rho e^{i\theta}$ نجد:

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \left(re^{i\varphi}\right)^m \Rightarrow \rho^n e^{in\theta} = r^m e^{im\varphi} \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r^m} \;,\; \theta = \frac{m\varphi + 2\pi k}{n} \quad ; \quad k \in Z$$

أصبح لدينا:

$$\omega = z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m}\; e^{i\frac{m\varphi + 2\pi k}{n}} \quad ; \quad k \in Z$$



الشكل (1)

لكن القيم المختلفة مثنى مثنى في هـذه العلاقـة نجدها بإعطاء k القيم من 0 وحتى n-1 (لماذا؟) والعلاقـة (1) صحيحة.

بملاحظة أن $|z_k| = \sqrt[n]{r^m}$ لكل k فـإن النقـاط z_k هندسياً هي رؤوس مضلع نـوني منـتظم مرسـوم داخـل الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt[n]{r^m}$ (الشكل 1).

تعريـف **(1)**: **القيمة الرئيسية** للقوة $z^{m/n}$ هي العدد z_0 الـذي نحـصل عليـه بوضـع $k = 0$ في (1):

$$z_o=\sqrt[n]{r^m}e^{i\frac{m\varphi}{n}}\ ;\ \ \varphi=\operatorname{Arg} z \tag{4}$$

في الحالة الخاصة القيمة الرئيسية للقوة $z^{1/n}$ أو للجذر النوني $\sqrt[n]{z}$ هي:

$$z_o=\sqrt[n]{r}\,e^{i\varphi/n}\ \ ;\ \ \ \varphi=\operatorname{Arg} z \tag{5}$$

نشير إلى أننا بدلاً من العلاقة (1) نكتب أحياناً:

$$z^{m/n}=\{z_o,z_1,...,z_{n-1}\} \tag{6}$$

تطبيق (1) - قيم الجذر النوني للواحد: بوضع $z=1$ وملاحظة أن $r=1$ $\operatorname{Arg}1=0$ في العلاقة (2) نجد أن:

$$a_k=1^{1/n}=\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2\pi k}{n}}\ \ ;\ \ \ k=\overline{0,n-1}\Leftrightarrow$$
$$1^{1/n}=\{1,e^{2\pi i/n}\ ,\ e^{2\pi(2)i/n}\ ,...,e^{2\pi(n-1)i/n}\} \tag{7}$$

القيمة الرئيسية للقوة $1^{1/n}$ هي $a_o=1$.

لنلاحظ أن:

$$1^{1/n}=\{1,a_1,a_1^2,...,a_1^{n-1}\} \tag{8}$$

بالتالي يمكن استنتاج جميع القيم a_k من القيمة $a_1=e^{2\pi i/n}$.

نستطيع التعميم وحساب القيم z_k للقوة $z^{m/n}$ انطلاقاً من قيمتها الرئيسية z_o من خلال العلاقة:

$$z_j=z_{j-1}e^{2\pi i/n}\ \ ;\ \ \ j=\overline{1,n-1} \tag{9}$$

وبذلك نستغني عن تطبيق العلاقة الواردة في المبرهنة n مرة.

تبين العلاقة (9) أننا نجد z_j بتدوير المتجه z_{j-1} زاوية قدرها $\frac{2\pi}{n}$ ولنلاحظ أن:

$$z_k=z^{m/n}=\{z_o,z_oa_1,z_oa_1^2,...,z_oa_1^{n-1}\} \tag{10}$$

مثال (1): احسب: 1) $\sqrt[4]{i}$ 2) $(1+i)^{2/3}$ ومثل هندسياً.

تمرين هام

الحل:

1) لـــدينا $z=i$, $n=4$, $r=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. بالتـــالي القيمـــة الرئيـــسية هـــي: $z_o=e^{\frac{\pi i/2}{4}}=e^{\pi i/8}$. وعليه من (1) أو (9) نجد:

$$z_1=z_o e^{2\pi i/4}=e^{5\pi i/8}\ ,\ z_2=z_1 e^{2\pi i/4}=e^{9\pi i/8}$$
$$z_3=z_2 e^{2\pi i/4}=e^{13\pi i/8}$$

z_1

z_o

وهكذا فإن (الشكل 2):

z_2

$$i^{1/4}=\sqrt[4]{i}=\left\{e^{\pi i/8},e^{5\pi i/8},e^{9\pi i/8},e^{13\pi i/8}\right\}$$
$$=\left\{e^{\pi i/8},ie^{\pi i/8},-e^{\pi i/8},-ie^{\pi i/8}\right\}$$

z_3

الشكل (2)

2) لـــــدينا $z=1+i$, $n=3$, $m=2$, $r=\sqrt{2}$ و $.\varphi=\pi/4$

z_1 z_o

0

بالتالي القيمة الرئيسية هي:

$$z_o=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^2}\ e^{i\frac{2\pi/4}{3}}=\sqrt[3]{2}\,e^{\pi i/6}$$

z_2

الشكل (3)

ومنه نجد القيمتين المتبقيتين (الشكل 3):

$$z_1=z_o e^{2\pi i/3}=\sqrt[3]{2}\,e^{5\pi i/6}\ ,\ z_2=z_1 e^{2\pi i/3}=\sqrt[3]{2}\,e^{9\pi i/6}$$

وبهذا فإن:

$$z_k=(1+i)^{2/3}=\left\{\sqrt[3]{2}\,e^{\pi i/6},\sqrt[3]{2}\,e^{5\pi i/6},\sqrt[3]{2}e^{9\pi i/6}\right\}$$
$$=\left\{\sqrt[3]{2}\,e^{\pi i/6},i\sqrt[3]{2}\,e^{\pi i/6},-\sqrt[3]{2}i\right\}$$

انتبه: $\sqrt[3]{2}$ هنا حسابية وينسحب هذا على كل القادم.

مطلوب

(2-4-1) أسس القوة عدد مركب غير عادي- لوغاريتم عدد مركب.

ليكن $A\neq 0$ لماذا؟.وجدنا أن قيمة القوة A^P وحيدة عندما $P=n$ عـدد صـحيح. ولها n قيمة مختلفة مثنى مثنى إذا كان $P=\dfrac{m}{n}$ عدد عادي غير صحيح.

نتساءل كيف نحسب القوة A^P إذا كان $P = a$ عدد حقيقي غير عادي وغير صحيح أو كان $P = a = \alpha + i\beta;\ \alpha \neq 0$ ؟

بداية إذا كان $A = e$ العدد النيبري فإن:

$$e^a = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}\left(\cos\beta + i\sin\beta\right) \tag{11}$$

فمثلاً:
$$e^{1-i} = e\cdot(\cos 1 - i\sin 1)$$

***تعريف* (2):** نعرف **اللوغاريتم الطبيعي** a للعدد المركب A $(A \neq 0)$ بأنه العملية المعاكسة لرفع العدد النيبري e للأس a ونرمز له بـ lnA. أي هو ذلك الأس a للعدد e الذي يجعل القوة e^a مساوية لـ A :

$$e^a = A \Leftrightarrow \ln A = a \tag{12}$$

ينتج مباشرة أن:

$$\ln\left(A_1A_2\right) = \ln A_1 + \ln A_2 \tag{13}$$

لإيجاد صيغة رياضية تحسب lnA نضع في (13):

$$A_1 = |A|,\ A_2 = e^{i\arg A}\ ,\ A = A_1A_2 = |A|\, e^{i\arg A}$$

وعندئذ حسب (13) يكون $\ln A = \ln|A| + i\arg A$ ولكن $\arg A = \operatorname{Arg}A + 2\pi k$. بالتالي:

$$a_k = \ln A = \ln|A| + i\left(\operatorname{Arg}A + 2\pi k\right) \tag{14}$$

تبين (14) أن عدد القيم المختلفة مثنى مثنى للمقدار ln A غير منته ويأتي الاختلاف من Im lnA (لماذا؟).

كما أن الفرق بين قيمتين من القيم a_k هو الثابت التخيلي البحت $2\pi ki$.

على سبيل المثال:

$$\ln i = \ln|i| + i\left(\operatorname{Arg} i + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\ln 1 = 2\pi ki,\ \ln(-1) = i(\pi + 2\pi k);\ k \in Z$$

تعريف (3): نعرف القوة A^a عندما $a \in \mathbb{R}$ عدد غير عادي وغير صحيح أو $a=\alpha+i\beta$ عدد مركب قسمه التخيلي غير معدوم $\alpha \neq 0$ بالشكل:

$$A^a = e^{a\ln A}\ , \ A^o = 1 \qquad (15)$$

ينتج أن قيم القوة A^a مرتبط بـ $\ln A$.

على سبيل المثال:

$$1^i = e^{i\ln 1} = e^{-2\pi k}$$

$$(-1)^i = e^{i\ln(-1)} = e^{-(\pi+2\pi k)};\ k \in Z$$

لاحظ أن 1^i, $(-1)^i$ كذلك i^i ...إلخ. تمثل أعداداً حقيقية صرفة رغم وجود i.

ملخص: إن قيم A^P ترتبط بالأس P ولدينا ثلاث احتمالات:

الأول: فيه P عدد صحيح وعندئذ لـ A^P قيمة وحيلة.

الثاني: فيه $P=\dfrac{m}{n}$ عدد عادي بسيط غير صحيح وعندئذ لـ $A^{m/n}$ تماماً n من القيم المختلفة مثنى مثنى.

الثالث: فيه $P=a$ عدد حقيقي غير عادي أو $P=a=\alpha+i\beta;\ \alpha\neq 0$ وعندئذ لـ A^a عدد غير منته من القيم المختلفة مثنى مثنى لكل ثابت مركب مفروض A.

عندما $A=0$ فان 0^a غير معرف (لماذا؟).

تعريف (4): القيمة الرئيسية لـ $\ln A$، A^a هي تلك التي توافق $k=0$ ونرمز لها بـ $\operatorname{Ln}A$، $(A^a)_o$ على الترتيب.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Ln}A &= \ln|A| + i\operatorname{Arg}A \\ (A^a)_o &= e^{a\operatorname{Ln}A} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

ينتج من (14) و (16) أن:

$$\ln A = \operatorname{Ln}A + 2\pi k i \qquad (17)$$

بالتالي معرفة القيمة الرئيسية كافية لإيجاد بقية القيم على سبيل المثال.

$$\text{Ln}i=\frac{\pi i}{2},\ \left(1^i\right)_o=1,\ \left(i^i\right)_o=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

مثال (2): احسب $\ln A$ عندما تقع A على المحاور الإحداثية.

الحل:

$$A\in ox^+ \Leftrightarrow A=x\ ;\ x>0 \Rightarrow \text{Arg}x=0 \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{Ln}x=\ln|x|,\ \ \ln x=\ln|x|+2\pi ki;\ x>0$$

$$A\in oy^+ \Leftrightarrow z=iy;\ y>0 \Rightarrow \text{Arg}(iy)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ln}(iy)=\ln|y|+\frac{\pi i}{2},\ \ln(iy)=\text{Ln}iy+2\pi ki;\ y>0$$

$$A\in ox^- \Leftrightarrow z=x;\ x<0 \Rightarrow \text{Arg}x=\pi \Rightarrow$$
$$\text{Ln}x=\ln|x|+\pi i,\ \ln x=\text{Ln}x+2\pi ki;\ x<0$$

$$A\in oy^- \Leftrightarrow z=iy;\ y<0 \Rightarrow \text{Arg}(iy)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ln}(iy)=\ln|y|-\frac{\pi i}{2},\ln(iy)=\text{Ln}(iy)+2\pi ki;\ y<0$$

استنتج قيم A^a عندما تقع A على أحد المحاور ثم أعد حل التمرين بأخذ قيماً عددية لـ A, a.

في الختام نشير الى انه لا يمكن استبدال $\ln$ بـ Ln بشكل عام (لماذا؟) وبالتالي ينسحب هذا على $\left(A^a\right)_o$ أي أن :

$$\text{Ln}(A_1A_2)\neq \text{Ln}A_1+\text{Ln}A_2\quad,\quad \left[(A_1A_2)^a\right]_o\neq A_1^a A_2^a$$

متى تصح المساواة؟ وضح بقيم عددية.

تمارين محلولة- المجموعة الأولى

مطلوب

تمرين(1): أوجد القسم الحقيقي والتخيلي والطويلة والزاوية لكل من الأعداد z التالية:

$$i^{102}-3i^{11}+\frac{1}{i^{9}}-\mathrm{Im}\frac{1}{1+i}\ (3\quad .-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\ (2\quad .\left(\frac{2+i}{3-i}-\frac{4-i}{1-2i}\right)\ (1$$

الحل:

1- بتوزيع إشارة المرافق على بسطي ومقامي العدد المعطى z نجد أن:

$$z=-\frac{7}{10}-\frac{9}{10}i\Rightarrow \mathrm{Re}\,z=-\frac{7}{10}\ ,\ \mathrm{Im}\,z=-\frac{9}{10},|z|=\sqrt{\frac{13}{10}}\ ,\ \mathrm{Arg}z=-\pi+\mathrm{arctg}\frac{9}{7}$$

-2 $$\mathrm{Re}\,z=-\cos\frac{\pi}{7}\ ,\ \mathrm{Im}\,z=\sin\frac{\pi}{7}\ ,\ |z|=1$$

بما أن z نقطة واقعة في الربع الثاني فإن:

$$\mathrm{Arg}z=\pi+\mathrm{arctg}\left(-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}\right)=\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$$

-3 $$z=i^{4.25+2}-3i^{4.2+3}+\frac{1}{i^{4.2+1}}-\mathrm{Im}\frac{1-i}{2}=i^{2}-3i^{3}+\frac{1}{i}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+2i\Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}\,z=-\frac{1}{2}\ ,\ \mathrm{Im}\,z=2\ ,\ |z|=\sqrt{17}/2\ ,\ \mathrm{Arg}z=\pi+\mathrm{artg}(-4)=\pi-\mathrm{arctg}\,4$$

تمرين(2): أثبت أن:

$\mathrm{Im}\frac{1}{z}<0\ ;\ \mathrm{Im}\,z>0\ ,\ z\neq0$ (2 $\qquad$ $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}\,z$ (1

$|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|\leq\sqrt{2}|z|$ (4 $\quad$.$z_2=0$ أو $z_1=0$ فإما $z_1z_2=0$ إذا كان (3

$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1\ ;\ |z|<1\ ,\ |a|<1$ (6 $\quad$ $|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm2\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$ (5

(7 $$\left[\sum_{1}^{n}|a_kb_k|\right]^2\leq\sum_{1}^{n}|a_k|^2\sum_{1}^{n}|b_k|^2\ ;\ a_k,b_k\in C$$

(8 $$\arg z-\arg(-z)=\pi(1+2k)\ ;\ z\neq0\ ,\ k\in Z$$

الحل:

1) $$\operatorname{Re}(iz)=\operatorname{Re}\left[i(x+iy)\right]=-y=-\operatorname{Im}z$$

2) $$\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\operatorname{Im}\frac{1}{x+iy}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

والمقدار الناتج أصغر من الصفر لأن $y=\operatorname{Im}z$ موجب فرضاً و $x^2+y^2>0$.

3) بفرض $z_2\neq 0$. عندئذ نجد:

$$z_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1z_2\overline{z}_2=0 \Leftrightarrow z_1|z_2|^2=0 \Leftrightarrow z_1=0\ \ ;|z_2|\neq 0$$

بنفس الأسلوب نجد أن $z_2=0$، عندما $z_1\neq 0$.

4) إذا كان $x=\operatorname{Re}z$ و $y=\operatorname{Im}z$ فإن:

$$(|x|+|y|)^2=|x|^2+2|x||y|+|y|^2$$

ولكن $2|x||y|\leq|x|^2+|y|^2$ وبالتالي:

$$(|x|+|y|)^2\leq|x|^2+|x|^2+|y|^2+|y|^2=2\left(|x|^2+|y|^2\right)$$

بأخذ الجذر التربيعي الحسابي نجد المطلوب.

5) $$|z_1\pm z_2|^2=\left(\overline{z_1\pm z_2}\right)(z_1\pm z_2)=$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2\pm\left(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_2z_1\right)=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right)$$

6) يكفي الاستفادة من المساواة السابقة(كيف ذلك؟).

7) بتصغير المقدار $\sum_1^n\left(|a_k|-\lambda|b_k|\right)^2$ نجد انه لكل $\lambda>0$ يكون:

$$0\leq\sum_1^n\left(|a_k|-\lambda|b_k|\right)^2=\sum_1^n|a_k|^2-2\lambda\sum_1^n|a_k||b_k|+\lambda^2\sum_1^n|b_k|^2=$$

$$=\sum_1^n|a_k|^2-\frac{\sum_1^n|a_kb_k|}{\sum_1^n|b_k|^2}-\left(\sum_1^n|a_k|^2\right)-\left[\lambda-\frac{\sum_1^n|a_kb_k|}{\sum_1^n|b_k|^2}\right]$$

في الحالة الخاصة بوضع $\lambda=\dfrac{\sum_{1}^{n}|a_k||b_k|}{\sum_{1}^{n}|b_k|^2}$ نجد المطلوب.

8) $\arg z-\arg(-z)=\arg\dfrac{z}{-z}=\arg(-1)=\pi(1+2k)\ ;\ k\in Z$

مطلوب

تمرين (3): اكتب كلاً من الأعداد التالية بصورة أخرى:

1) $1-3i$ ؛ 2) $-1-3i$. 3) $1+\cos\dfrac{2\pi}{3}-3i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. 4) $1-2e^{-\pi i/3}+3i$

الحل: نرمز بـ $\operatorname{arctg} z$ للقيمة الرئيسية.

1) $z=1-3i=\sqrt{10}e^{-i\operatorname{arctg}3}$

2) $z=-1-3i=\sqrt{10}\ e^{i(-\pi+\operatorname{arctg}3)}$

3) $z=1-\dfrac{1}{2}-3i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

4) $z=1-2\cos\dfrac{\pi}{3}+2i\sin\dfrac{\pi}{3}+3i=\left(\sqrt{3}+3\right)i$

مطلوب

تمرين (4): أثبت أن $|z|=2\ ;\ \dfrac{1}{3}\le\left|\dfrac{z^2+1}{z^3-1}\right|<\dfrac{6}{7}$

الحل: نقدر البسط $|z^2+1|$ من الأعلى والمقام $|z^3-1|$ من الأدنى نجد:

$$|z^2+1|\le|z|^2+|1|=5\ ,\ |z^3-1|\ge|z|^3-|-1|=7$$

بالتالي $\left|\dfrac{z^2+1}{z^3-1}\right|\le\dfrac{5}{7}<\dfrac{6}{7}$ وبالعكس نجد أن:

$$|z^2+1|\ge|z|^2-|1|=3\ ,\ |z^3-1|\le|z|^3+|-1|=9$$

بالتالي $\dfrac{1}{3}\le\left|\dfrac{z^2+1}{z^3-1}\right|$. بدمج المتراجحتين نجد المطلوب.

مطلوب

تمرين (5): بالاستفادة من المساواة: $z\ne1\ ;\ 1+z+z^2+\ldots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ وعلاقة أولر أوجد قيمة كل من المجموعين:

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\cos(\varphi+k\alpha)\ ,\ S_2=\sum_{o}^{n}\sin(\varphi+n\alpha)$$

الحل:

$$S=S_1+iS_2=\sum_{o}^{n}\left[\cos(\varphi+k\alpha)+i\sin(\varphi+k\alpha)\right]$$

$$=\sum_{o}^{n}e^{i(\varphi+k\alpha)}=e^{i\varphi}\left(1+e^{i\alpha}+...+e^{in\alpha}\right)$$

$$=e^{i\varphi}\frac{e^{i(n+1)\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}=e^{i\varphi}\frac{e^{i\frac{(n+1)\alpha}{2}}\left[e^{i\frac{(n+1)\alpha}{2}}-e^{-i\frac{(n+1)\alpha}{2}}\right]}{e^{i\alpha/2}\left(e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}\right)}=e^{i\left(\frac{n\alpha}{2}+\varphi\right)}\cdot\frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$S_1=\operatorname{Re}S=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right),\ S_2=\operatorname{Im}S=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)$$

مطلوب

تمرين (6): أجب عن الأسئلة التالية:

1) ما هو مركز ثقل n من الجسيمات المادية كتلتها $m_1,...,m_n$ ومتوضعة عند النقاط $z_1,...,z_n$ على الترتيب؟.

2) متى يكون المثلث الذي رؤوسه z_1,z_2,z_3 متساوي الأضلاع ثم قائم الزاوية؟

3) ماهو التفسير الهندسي لكل من $\left|\operatorname{Im}(\overline{z}_1z_2)\right|,\ \operatorname{Re}(\overline{z}_1z_2),\ ze^{i\alpha}$ ؟ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ؟

الحل:

1) مركز الثقل هو عند النقطة $z=\dfrac{m_1z_1+...+m_nz_n}{m_1+...+m_n}$

2) يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان: $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

ويكون قائم الزاوية في النقطة z_1 مثلاً إذا وفقط إذا كان:

$|z_2-z_3|^2=|z_2-z_1|^2+|z_3-z_1|^2$ (مبرهنة فيثاغورث)

3) بما أن $\overline{z}_1 z_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + i\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)$

$$S = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\left(\overline{z}_1 z_2\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$

فإن $\left|\operatorname{Im}\left(\overline{z}_1 z_2\right)\right| = 2S$ حيث S مساحة المثلث الذي رؤوسه $z_2, z_1, 0$.

ومن الواضح أن $\operatorname{Re}\left(\overline{z}_1 z_2\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ يمثل الجدار الداخلي للمتجهين $z_2 = \left(x_2, y_2\right)$ و $z_1 = \left(x_1, y_1\right)$.

ختاماً $ze^{i\alpha}$ هو دوران للشعاع z زاوية α حول المبدأ.

مطلوب

تمرين (7): أثبت صحة ما يلي:

1) تكون z_3, z_2, z_1 واقعة على منحن واحد إذا وفقط إذا كان:

$$z_3 - z_2 = c\left(z_2 - z_1\right) \ ; \ c \in \mathbb{R}$$

2) المستقيم L_1 المار من z_1 و z_2 يعامد المستقيم L_2 المار من z_3 و z_4 إذا وفقط إذا كان:

$$\arg\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \arg\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{3\pi}{2}$$

3) معادلة الدائرة في المستوى المركب لها الشكل:

$$z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + b = 0 \ ; \ a\overline{a} - b > 0, \ b \in \mathbb{R}$$

الحل:

1) نعلم أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الشعاعان $\overrightarrow{a_1}$ و $\overrightarrow{a_2}$ على منحن واحد هو أن يرتبطا خطياً أي $\overrightarrow{a_1} = c.\overrightarrow{a_2} \ ; \ c \in \mathbb{R}$. بوضع $a_1 = z_3 - z_2$ و $a_2 = z_2 - z_1$ نجد المطلوب.

2) لتكن $\varphi = \arg\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \ ; \ 0 \le \varphi < 2\pi$. عندئذ تكون:

$$\varphi = \arg\left(z_1 - z_2\right) - \arg\left(z_3 - z_4\right)$$

هي الزاوية الموجبة التي ضلعها الابتدائية منطبقة على الشعاع z_3-z_4 وضلعها النهائية منطبقة على الشعاع z_1-z_2. بالتالي يتعامد المستقيمان L_1 و L_2 إذا وفقط إذا كان $\varphi=\frac{\pi}{2}$ أو $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ (أو $\varphi=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$).

3) بتعويض $x=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$, $x^2+y^2=z\overline{z}$ في معادلة الدائرة المعروفة $\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta x+\gamma y+\delta=0$ نجد المعادلة المفروضة.

تمرين (8): ليكن $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, $z_1+z_2+z_3=0$.

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه z_3,z_2,z_1 متساوي الأضلاع.

متى يكون هذا المثلث مرسوماً داخل الدائرة $|z|=2$؟

الحل: علينا التحقق من أن $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

لنبين أن $|z_2-z_1|=|z_1-z_3|$

بوضع $z_k=\overline{OA_k}$ نجد أن: $\overline{A_1A_2}=z_2-z_1$, $\overline{A_2A_3}=z_3-z_2$, $\overline{A_3A_1}=z_1-z_3$

من جانب آخر من المساواة $z_1+z_2+z_3=0$ لدينا:

$$z_1=-z_2-z_3 \text{ أو } |z_1|=|-z_2-z_3|$$

ومن الفرض $|z_2|=|z_3|$. أصبح لدينا:

$$\begin{aligned}|z_2|=|z_3| &\Leftrightarrow |z_2|^2-|z_3|^2=0 \Leftrightarrow 3z_2\overline{z}_2-3z_3\overline{z}_3=0\\ &\Leftrightarrow |2z_2+z_3|=|2z_3+z_2| \Leftrightarrow |z_2+z_2+z_3|=|-z_2-z_3-z_3|\\ &\Leftrightarrow |z_2-z_1|=|z_1-z_3|\end{aligned}$$

بنفس الأسلوب نبرهن صحة المساواة $|z_3-z_1|=|z_3-z_2|$.

يكون المثلث السابق مرسوماً داخل الدائرة $|z|=2$ عندما $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$ والنقطة $z=0$ داخله.

تمرين (9): أوجد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة $1+i$ ومحرقاه $\pm i$ ثم معادلة القطع المكافئ الذي دليله $\operatorname{Im} z=-1$ ومحرقه i.

الحل: تعطى أسرة القطوع الزائدة التي محرقاها $\pm i$ بالمعادلة:

$$\big||z-i|-|z+i|\big|=r$$

لكن بما أن النقطة $1+i$ تقع على القطع فإن هذه النقطة تحقق المعادلة السابقة ونجد أن $r=\sqrt{5}-2$ والمعادلة المنشودة هي:

$$\big||z-i|-|z+i|\big|=\sqrt{5}-2$$

باستخدام تعريف القطع المكافئ نجد المعادلة $|z-i|=\operatorname{Im} z+1$.

تمرين(10): صف هندسياً مجموعة النقاط z التي تحقق كل مما يلي:

1) $|z+i|^2=\operatorname{Im}(z+2i)$ 2) $|z|=3|z-1|$

3) $\operatorname{Re} z^2=c\ ;\ c\in\mathbb{R}$ 4) $-\frac{\pi}{4}\le\arg(z-i)<\frac{2\pi}{3}$

5) $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Re}(iz+1)\le 2\\ \arg(z+1)>\frac{\pi}{6}\end{cases}$

الحل: بوضع $z=x+iy$ في المعادلات الثلاث الأولى نجد:

1) معادلة الدائرة $\frac{x^2}{5/4}+\frac{(y+1/2)^2}{5/4}=1$

2) القطع المكافئ $y^2=4x$.

3) المعادلة $x^2-y^2=c$ وتمثل المستقيمان $y=\pm x$ عندما $c=0$ وحزمة قطوع زائدة محورها المحرقي ox عندما $0<c$ وأخيراً حزمة قطوع زائدة محورها المحرقي oy عندما $0>c$.

4) القطاع الزاوي الذي رأسه i وضلعه الابتدائية $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ والنهائية $\arg(z-i)=\frac{2\pi}{3}$ مع نقاط الضلع الابتدائية فقط.

ارسم مطلوب

5) نضع $z=x+iy$ في المتراجحة الأولى نجد $y\geq x-1$ وهي نصف مستو مع حدوده $y=x-1$. أما المتراجحة الثانية فهي القطاع الزاوي الذي رأسه 1- وزاويته أكبر تماماً من $\frac{\pi}{6}$ وبدمج المتراجحتين نجد المحل الهندسي المطلوب.

تمرين (11): احسب قيمة (أو قيم) القوى التالية:

$$\left(\frac{1-i}{-1+i}\right)^{-20}\ (1 \qquad \left(\frac{1-i}{-2+2i}\right)^{1/6}\ (2 \qquad \left(\frac{i}{-1+i}\right)^{2/5}\ (3$$

$$\left(e^{-\pi i/4}\Big/2e^{2\pi i/3}\right)^{11}\ (4 \qquad \left(e^{-\pi i/4}\Big/2i\right)^{3/4}\ (5$$

الحل:

1) بما أن الأس 20- هو عدد صحيح فإن للمقدار قيمة وحيدة:

$$I=\left(\frac{-1+i}{1-i}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\Big/\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\right)^{20}=1$$

2) الأس $\frac{1}{6}$ عدد كسري بالتالي للمقدار 6 قيم مختلفة مثنى مثنى هي قيم الجذر $\sqrt[6]{\frac{1-i}{-2+2i}}$:

$$z_k=\left(\frac{1-i}{-2+2i}\right)^{1/6}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1/6}=\sqrt[6]{-\frac{1}{2}}=\sqrt[6]{\left|-\frac{1}{2}\right|}e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}}\quad ;\quad k=\overline{0,5}$$

3) للمقدار 5 قيم مختلفة مثنى مثنى:

$$z_k=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2/5}=\sqrt[5]{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2}e^{i\frac{-2.\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}}=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{5}};k=\overline{0,4}$$

$$z=\frac{1}{2^{11}}\left(e^{-i\pi/4}.e^{-2\pi i/3}\right)^{11}=2^{-11}e^{-121\pi i/12}=2^{-11}e^{-\pi i/12}\qquad (4$$

$$z_k=\left(\frac{e^{-\pi i/4}}{2e^{\pi i/2}}\right)^{3/4}=\left|\frac{1}{2}\right|^{3/4}\left[e^{i\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{3/4}=\frac{1}{\sqrt[4]{|2|^3}}\left(e^{-3\pi i/4}\right)^{3/4}=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}(i)^{3/4}\qquad (5$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}e^{i\frac{3\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{4}}\quad ;\quad k=\overline{0,3}$$

تمرين(12): لتكن $a_k\ ;\ k=0\ \overline{n-1}$ قيم $\sqrt[n]{1}$. أثبت أن:

$$(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_{n-1})=1+z+\dots+z^{n-1} \tag{1}$$

$$1+a_k+a_k^2+\dots+a_k^{n-1}=0\quad ;\quad a_k\neq 1 \tag{2}$$

الحل: لدينا:

$$1+a_k+a_k^2+\dots+a_k^{n-1}=\frac{1-a_k^n}{1-a_k} \tag{*}$$

من جانب آخر، بما أن أول n قيمة للجذر $\sqrt[n]{1}$ مختلفة مثنى مثنى.

وفي الوقت نفسه يوجد للمعادلة $1-z^n=0$ تماماً n من الجذور المختلفة واحد جذورها هو $a_0=1$ فإن كل قيمة a_k تكون جذراً لكثيرة الحدود $\frac{1-z^n}{1-z}=1+z+\dots+z^{n-1}$.

2) من المساواة (*) وبعد ملاحظة أن $a_k^n-1=0$ أو $1-a_k^n=0$ نجد المطلوب.

تمرين (13): حل كل من المعادلات التالية:

1) $z^8=1+i\sqrt{3}$. 2) $z^2-(1+i)z+5i=0$. 3) $z^4+2z^2+1=0$

$Z^4+Z^2+1=0$

الحل:

1) $$z_k=\sqrt[8]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[8]{|2|}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{8}}\quad ;\quad k=\overline{0,7}$$

2) $$\Delta=-18i\ ,\ z_1=\frac{1+i+\sqrt{-18i}}{2}=2-i\ ,\ z_2=\frac{1+i-\sqrt{-18i}}{2}=-1+2i$$

حيث $\sqrt{-18i}=3-3i$ إحدى قيمتي الجذر، ماهي القيمة الثانية لهذا الجذر؟

3) بوضع $z^2=t$ نجد المعادلة $t^2+t+1=0$ ولأجلها:

$$\Delta = 1-4=-3 \ , \ \sqrt{\Delta} = \sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$$

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \ , \ t_2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

بالتالي للمعادلة المفروضة اربعة جذور ماهي؟.

تمرين (14): احسب ما يلي:

1) $\ln e$ ، 2) $\ln\left(\frac{i}{1-i}\right)^{10}$ ، 3) $\left(i^{100}\right)^{-5}$ ، 4) $(1-i)^i$

الحل:

1) لدينا $Arg e = 0$ لأن $e > 0$ بالتالي:

$$a_k = \ln e = \ln|e| + i(0+2\pi k) = \ln|e| + 2\pi k i = ?$$

2) لدينا

$$\left(\frac{i}{1-i}\right)^{10} = \left[\frac{i(1+i)}{2}\right]^{10} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{|2|}}e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)^{10} = \frac{1}{2^5}e^{\frac{30\pi i}{4}} = \frac{-1}{2^5}i$$

$$a_k = \ln\left(\frac{i}{1-i}\right)^{10} = \ln\left(\frac{-1}{2^5}i\right)$$ (اترك متابعة الحل تدريباً).

3) الأس في القوة $\left(i^{100}\right)^{-5}$ هو عدد صحيح 500- بالتالي لدينا قيمة واحدة (ماهي؟)

4)
$$(1-i)^i = e^{i\ln(1-i)} = e^{i\left[\ln|\sqrt{2}| + \pi i\left(-\frac{1}{4}+2k\right)\right]}$$

تمارين غير محلولة - المجموعة الأولى

تمرين (1)

a) أوجد Rez , Imz , $|z|$, $argz$ لكل من: -1 ، $-2-5i$. -2 $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$

b) احسب: -1 $(1-i)(1-2i)(1-3i)$. -2 $i^{1000}-\frac{1}{i^{999}}$

تمرين (2): أثبت أن: 1) $Im(iz)=-Rez$. 2) $Re\frac{1}{z}>0;\ Rez>0\ ,\ z\neq 0$

3) اذا كان z_1z_2, z_1+z_2 عددان حقيقيان سالبان فإن z_2, z_1 هما عددان حقيقيان.

4) $Re\left(\frac{2}{1-z}\right)=1\ ;\ |z|=1\ ,\ z\neq 1$

5) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ (ماهو معناها الهندسي؟)

6) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \arg z_1=\arg z_2$

7) مساواة لاغرانج: $\left|\sum_1^n a_k.b_k\right|^2=\sum_1^n |a_k|^2\sum_1^n |b_k|^2-\sum_{1\leq j<k\leq n}|a_j\bar{b}_k-a_k\bar{b}_j|^2$

لأي ثوابت مركبة $b_k, a_k, k=\overline{1,n}$

8) $\arg z+\arg\bar{z}=2\pi k\ ;\ k\in Z$

تمرين (3): اكتب الأعداد $\frac{-3\sqrt{3}i}{2+2i}$ ، $\frac{-\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{3}+i}$ ، $i-3e^{\pi i/12}$ ، $e-2i+e^{-i\pi}$

بابسط شكل ممكن.

تمرين (4): بفرض $|z|=3$. أوجد حداً أدنى وحداً أعلى للمقدار $\left|\frac{z^4+z^2-z}{z^5-3}\right|$.

تمرين (5): استفد من علاقة أولر لإيجاد قيمة كل من:

$$S_1=\sum_0^{n-1} a^k\cos k\varphi\ ,\ S_2=\sum_1^{n-1} a^k\sin k\varphi$$

تمرين (6): أجب عما يلي:

1) ما هو مركز ثقل أربع جسيمات كتلها 2، 5،3،1 متوضعة عند النقاط 1+i ، i ، 0 ، 2- على الترتيب.

2) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه $z_1 = 1\ ,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ متساوي الأضلاع ثم حدد نوع المثلث الذي رؤوسه النقاط $4+4i, 6, 3+i$.

3) احسب الجداء الداخلي للمتجهين z_1 و z_2 ومساحة المثلثين السابقين. ثم النقطة z^* الناتجة بتدوير $-2+3i$ زاوية $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

تمرين (7): أجب عما يلي:

1) حدد قيمة a بحيث إن المستقيم المار من النقطتين $-i, 1+$ يوازي المستقيم المار من $a, -1$.

2) حدد قيمة a بحيث يتعامد المستقيمان السابقان.

3) بيّن أن معادلة المستقيم في المستوى المركب لها الشكل:

$$\bar{a}z + \bar{a}z + b = 0\ ;\ \ a \neq 0\ \ ,\ b \in \mathbb{R}$$

تمرين (8): أثبت أن المثلث الذي رؤوسه z_3, z_2, z_1 يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

تمرين (9): a) أوجد معادلة المستقيم الذي يعامد القطعة $[-i, 1-2i]$ ويمر من منتصفها ثم معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة i ومحرقاه ± 1.

b) برهن أن النقاط 2+i ، 4+i ، 6+9i، 8+16i، 10+25i، تقع على قطع زائد واحد.

تمرين (10): أوجد مجموعة النقاط z التي تحقق:

1) $|z| = \mathrm{Re}\,z + 3$ 2) $2|z| = 3|z+1|$

$$\mathrm{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0 \quad (4 \qquad\qquad \mathrm{Re}\frac{1}{z}=c\ ;\ c\in\mathbb{R} \quad (3$$

$$\left|\mathrm{Im}\frac{2+i}{z-i}\right|\le \mathrm{Re}(i\bar{z}-3) \quad (6 \qquad\qquad \begin{cases}\mathrm{Im}\,z-\mathrm{Im}(iz-1)\ge 2\\ |z-1+i|>2\end{cases} \quad (5$$

تمرين (11): a) احسب قيمة كل من القوى ذات الأسس الصحيحة التالية:

$$\left(2\cos\frac{\pi}{4}-3i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-10} \quad (2 \qquad\qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{20} \quad (1$$

b) احسب قيم كل من القوى ذات الأسس الكسرية التالية:

$$\left(2\cos\frac{\pi}{4}-3i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{4/5} \quad (2 \qquad\qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{3/4} \quad (1$$

تمرين (12): إذا كانت $k=\overline{0,6}\ ;\ a_k=e^{2\pi ki/7}$. احسب:

$$S_k=a_k+a_k^2+a_k^4\ ,\ \ \sigma_k=a_k^2+a_k^5+a_k^6$$

تمرين (13): حل كل من المعادلات:

$$z^2+2iz-2=0 \quad (2 \qquad\qquad z^6+8=0 \quad (1$$

$$z^{3/2}-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i=0 \quad (4 \qquad\qquad (z+1)^3=z^3 \quad (3$$

$$i^z=2^i \quad (6 \qquad\qquad z^i=i^i \quad (5$$

تمرين (14): احسب ما يلي:

$$\frac{\ln(-2)}{(-2)^{1+i}}\ ,\ \left(\frac{1}{i}\right)^{10i}\ ,\ \ln(\pi-e)$$

تمارين إضافية:

تمرين (1): حل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}(1-i)z_1+3z_2=2-3i\\ iz_1+(1+2i)z_2=1\end{cases}$$

تمرين (2): أثبت أنه إذا كان $\overline{z}^2=z^2$ فإن z إما عدد حقيقي صرف أو تخيلي صرف.

تمرين (3): برهن أن النقاط z_4,z_3,z_2,z_1 تقع على دائرة واحدة إذا وفقط إذا كان العدد $\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}\Big/\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ حقيقياً صرفاً.

تمرين (4): بفرض n عدد صحيح موجب. أثبت أن:

$$\left|\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|\le n\ ;\ \varphi\neq 0\,,\pm 2\pi,...$$

تمرين (5): أثبت أن الفرضية $\omega=z+\frac{p}{3}$ ترد المعادلة التكعيبية $z^3+pz^2+qz+r=0$ إلى الشكل النموذجي $\omega^3+a\omega+b=0$ وإن جذور هذه المعادلة هي:

$$\omega_1=A+B\ ,\ \omega_2=-\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\sqrt{3}i\ ,\ \omega_3=-\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\sqrt{3}i$$

حيث $D=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$, $B=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-D}$, $A=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+D}$ ثم طبق ذلك في إيجاد جذور المعادلة $\omega^3-19\omega+30=0$.

تمرين (6): أثبت أن مسار النقطة z التي تحقق المعادلة:

$$|z-r|=k\,.\,\mathrm{Re}\,z\ ;\ k,r>0$$

هو:

1) قطع ناقص عندما $0<k<1$. 2) قطع زائد عندما $1<k<+\infty$

3) قطع مكافئ عندما $k = 1$.

تمرين (7): بفرض أن $\omega_k = z_k e^{\pi i/3}$. أثبت أن المثلث الذي رؤوسه منتصفات القطع المستقيمة $[\omega_1, z_2]$، $[\omega_2, z_3]$، $[\omega_3, z_1]$ متساوي الأضلاع.

تمرين (8): احسب قيمة كل من المجموعين:

$$S_1 = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\varphi \ , \ S_2 = \sum_{1}^{n} \binom{n}{k} \sin k\varphi$$

تمرين (9): اكتب المبرهنة الهندسية التالية بلغة الأعداد المركبة : مجموع مربعات أطوال الأقطار في متوازي أضلاع يساوي مجموع مربعات أطوال أضلاعه.

تمرين (10): أثبت صحة مبرهنة انستروم – كاكيا:

إذا كانت $P_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_o$ كثيرة حدود بحيث إن $a_o > a_1 > \ldots > a_n > 0$ فإن الجذور z_k لكثيرة الحدود P_n تقع خارج دائرة الوحدة.

تمرين (11): بفرض أن $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. أثبت أنه لكل z يكون:

$$\sum_{0}^{n} \left(z + \varepsilon^k\right)^n = \left(z+1\right)^n + n\left(z^n + 1\right)$$

(5-1) المستوى المركب الموسع $\overline{C}$ – فضاءات المستوى المركب:

نحتاج في بعض المسائل لجعل المستوى المركب متراصاً بإضافة نقطة قاصية عليه .

نقوم في هذا البند بتوسيع المستوى C ثم نمثل التوسعة الناتجة (المستوى الموسع $\overline{C}$) هندسياً من خلال الإسقاط الاستيريوغرافي على كرة الأعداد ومن بعد ذلك نرد المستوى C أو $\overline{C}$ إلى فضاء متري وإلى فضاء تبولوجي.

(1-5-1) التمثيل الهندسي للمستوى الموسع $\overline{C}$ والإسقاط الاستيريوغرافي:

نقبل مبدئياً بالتعريف التالي لنقطة اللانهاية (النقطة القاصية).

تعريف **(1): نقطة اللانهاية** $z=\infty$ هي تلك النقطة التي نجدها عندما تقترب النقطة ζ من الصفر في التحويل $z=\dfrac{1}{\xi}$ (انظر(2-1-3)).

$$z=\infty=\lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{\zeta} \tag{1}$$

المستوى الموسع $\overline{C}$ هو المستوى C مضافاً له النقطة ∞:

$$\overline{C}=C\cup\{\infty\} \tag{2}$$

بخلاف مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\overline{\mathbb{R}}$ التي تحوي نقطتي لانهاية $\pm\infty$ فانه في المستوى $\overline{C}$ لاتوجد إلاّ نقطة لانهاية واحدة $z=\infty$ ولايجوز وضع إشارة (+) أو (-) أمام الرمز ∞ والسبب عدم وجود علاقة ترتيب في الأعداد المركبة. كذلك يجب التعامل مع الرمز ∞ كنقطة وليس كعدد مركب وأخيراً في المستوى الموسع $\overline{C}$ ننظر إلى المستوى C على أنه $\overline{C}$ الموخوذ (المثقوب) في النقطة ∞:

$$C=\overline{C}\setminus\{\infty\} \tag{3}$$

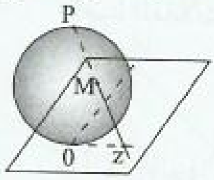
بعبارة اخرى لا توجد للمجموعة $\overline{C}$ حدود بينما حدود C هي $z=\infty$.

تتوضح الأفكار السابقة بإعطاء تصور هندسي للمستوى الموسع $\overline{C}$ ولهذا الغرض نأخذ الفضاء الثلاثي $\xi\eta\zeta$ ذي المحاور الإحداثية $o\xi \equiv ox$, $o\eta \equiv oy$ و $o\zeta$. حيث xoy منطبق على المستوى C و الكرة التي معادلة سطحها هي :

$$S:\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \qquad (4)$$

وتمس المستوى C في المبدأ وقطرها يساوي الواحد.

كل نقطة $z=(x,y)\in C$ تقابلها بنقطة $M=(\xi,\eta,\zeta)$ ناتجة عن تقاطع السطح S مع الشعاع الواصل بين القطب الشمالي للكرة $p=(0,0,1)$ والنقطة z. عندما نجعل النقطة z تمسح (تغطي) المستوى C فإن M سوف تغطي كامل السطح S باستثناء النقطة p ونحصل على تقابل واحد لواحد (الشكل 1).



الشكل (1)

$$z=(x,y,o)\leftrightarrow M=(\xi,\eta,\zeta)\ ,\ C\leftrightarrow S|\{p\} \qquad (5)$$

ولايوجد نقطة $z\in C$ تقابل النقطة $p\in S$. لذلك نعتبر p تقابل نقطة بعيدة (نائية – قاصية) نرمز لها بالرمز $z=\infty$ ونحصل بذلك على التقابل الأحادي:

$$z=\infty\leftrightarrow p=(0,0,1)\ ,\ \overline{C}\leftrightarrow S \qquad (6)$$

الإسقاط الاستيريوغرافي أو التجسيمي هو الإجراء الهندسي السابق وهنا تسمى S كرة الأعداد أو **كرة ريمان**، M مسقط z على S و z مسقط M في المستوى $\overline{C}$.

بمعرفة أحد المسقطين z أو M نستطيع إيجاد الآخر.

مبرهنة (1): إذا كانت $z=(x,y,0)$ نقطة معلومة في المستوى C فإن إحداثيات مسقطها الاستيريوغرافي $M=(\xi,\eta,\zeta)$ على كرة ريمان S تعطى بالعلاقات:

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2}\ ,\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2}\ ,\ \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \qquad (7)$$

أما إذا كانت النقطة M معلومة على الكرة $S\setminus\{p\}$ فإن إحداثيي مسقطها $z=(x,y)$ في المستوى C تعطى بالعلاقتين:

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}\ ,\ \ y=\frac{\eta}{1-\zeta} \tag{8}$$

الإثبات: معادلة المستقيم المار من النقطتين $p=(0,0,1)$ و $z=(x,y,0)$ في الفضاء الثلاثي هي $\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=1-\zeta$ أو وسيطياً.

$$\xi=t.x,\eta=t.y\ ,\ \ \zeta=1-t \tag{9}$$

لكن النقطة M تقع على هذا المستقيم وعلى السطح S في آن معاً بالتالي إذا عوضنا المعادلات (9) في المعادلة (4) نجد:

$$t^2x^2+t^2y^2+(1-t)^2=1-t \Rightarrow t=\frac{1}{1+x^2+y^2}$$

هذا يعني أنه في النقطة M لدينا:

$$t=\frac{1}{1+|z|^2} \tag{10}$$

بالتعويض في (9) نحصل على العلاقات (7).

الآن إذا كانت $M=(\xi,\eta,\zeta)$ معلومة فإنه من : $\frac{1}{1+|z|^2}=1-\zeta$

نجد ان العلاقتين في (8) صحيحة.

مثال (1): أوجد مسقط النقطة $z=1-2i$ على كرة ريمان.

الحل:

بوضع $x=1$, $y=-2$ في العلاقات (7) نجد $\zeta=\frac{5}{6}$، $\eta=-\frac{1}{3}$، $\xi=\frac{1}{6}$

وبالتالي $M=\left(\frac{1}{6},\frac{-1}{3},\frac{5}{6}\right)$.

ملاحظة1: يمكن الوصول الى النقطة ∞ هندسياً اذا تحركت z بدءاً من z_0 على مسار غير محدود كيفي في $\overline{C}$. كم هو عدد تلك المسارات؟.

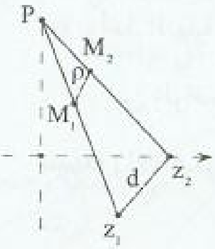
(2-5-1) المستوى المركب كفضاء متري:

من المعلوم أنه كي نجعل مجموعة ما E فضاءً مترياً يجب تعريف تابع مسافة عليها.

تعريف (2): **المسافة في المجموعة C** بين النقطتين z_1 و z_2 هي المسافة الإقليدية المستوية المعروفة.

$$d(z_1,z_2)=|z_2-z_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (11)$$

والمسافة في المجموعة $\overline{C}$ بين النقطتين z_1 و z_2 هي المسافة الكروية بين مسقطيهما $M_1=(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ و $M_2=(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$ على كرة ريمان S:



الشكل (2)

$$\rho(z_1,z_2)=d(M_1,M_2) \qquad (12)$$

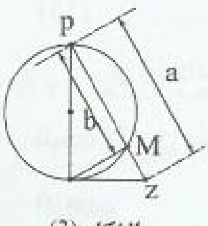
أو: $$\rho(z_1,z_2)=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}$$

مبرهنة (2): تعطى العلاقة بين المسافة الإقليدية (في C) والمسافة الكروية (في $\overline{C}$) بالعلاقة (الشكل2):

$$\rho(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}} \qquad (13)$$

ويمكن تعميم العلاقة (13) على المجموعة $\overline{C}$ بوضع:

$$\rho(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \qquad (14)$$



الشكل (3)

الإثبات: غير مطلوب

من المثلثين المتشابهين ozp و OMP لدينا (الشكل3):

$$\frac{b}{1}=\frac{1}{a} \text{ أو } ab=1 \text{ حيث } b=pM, a=pz$$

بالتالي من أجل النقاط z_1, z_2, M_1, M_2 يكون: $a_1b_1=1$, $a_2b_2=1$ أو $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1}$.

من جانب آخر، من المثلثين المتشابهين M_1pM_2, z_1pz_2 (الشكل2) نجد:

$$\frac{\rho(z_1,z_2)}{d(z_1,z_2)}=\frac{b_1}{a_2}=\frac{1}{a_1a_2}$$

بملاحظة أن a_1 هي البعد بين النقطتين $(0,0,1)$ & $(x_1,y_1,0)$ و a_2 البعد بين $(0,0,1)$ و $(x_2,y_2,0)$ نحصل على العلاقة (13).

نجد العلاقة (14) من العلاقة (13) بوضع $z_1=z$ ثم تقسيم البسط والمقام على z_2 وأخذ النهاية عندما $z_2\to\infty$ (انظر (2-1- 3)).

من الواضح أنه لكل z_1 و $z_2 \in \bar{C}$ يكون $\rho(z_1,z_2)\le 1$.

نتيجة (1): المجموعة C او $\bar{C}$ مزودة بأي من تابعي المسافة (11) أو (12) تشكل فضاء مترياً.

البرهان:

يكفي التحقق من صحة شروط تابع المسافة وفي الحالة الخاصة متراجحة المثلث للمسافة (11) تكافئ المتراجحة المعروفة $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

تعريف (3): تسمى $E\subset\bar{C}$ مجموعة **محدودة** إذا وجد ثابت موجب $o<R$ بحيث:

$$|z|\le R \quad \forall z\in E \tag{15}$$

أو اذا كانت $E\not\ni\infty$.

نتيجة (2): في المجموعات المحدودة يتطابق تابع المسافة الإقليدية مع تابع المسافة الكروية.

البرهان: حذف

لتكن E مجموعة محدودة. عندئذ لكل $z_1,z_2\in E$ يكون $|z_1|\le R$، $|z_2|\le R$ ومن العلاقة (13) نجد المتراجحات:

$$\frac{d(z_1,z_2)}{1+R^2}\le\rho(z_1,z_2)\le d(z_1,z_2) \tag{16}$$

التي تؤدي إلى المطلوب (لماذا؟).

بناءً على هذه النتيجة تستخدم المسافة الكروية في المجموعات غير المحدودة فقط. أي عندما تكون إحدى النقطتين z_2, z_1 منطبقة على نقطة اللانهاية.

بتعبير آخر عندما $z_1 \neq \infty$ و $z_2 \neq \infty$ نعتبر المسافة الإقليدية $d(z_1, z_2)$ في C ام $\overline{C}$: $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \rho(z_2, z_1)$

سؤال هام للدكتور

وهذا يجعل إمكانية حل المسائل في المستوى الموسع $\overline{C}$ لايختلف عن حلها في C وتتم دراسة وضع النقطة ∞ بشكل مستقل وهذا ما نفعله في كل دراستنا.

(3-5-1) **تبولوجيا المستوى المركب:**

في الفقرة السابقة (2-5-1) عرفنا على المجموعتين C و $\overline{C}$ تابعي مسافة وحصلنا على فضاءين متريين.

نرغب هنا في جعل كل من C و $\overline{C}$ فضاءً تبولوجياً، الأمر الذي يتم كما نعلم بتعريف المجموعات المفتوحة أو أسرة الجوارات عليها.

تعريف (4): **الجوار** ε للنقطة $z_0 \in C$ (في المسافة الإقليدية) هو مجموعة النقاط $z \in C$ الواقعة داخل الدائرة التي نصف قطرها ε ومركزها z_0. أي:

$$S(z_0, \varepsilon) = \{|z - z_0| < \varepsilon \;\; ; \;\; z \in C\} \tag{17}$$

الجوار ε للنقطة $z_0 \in \overline{C}$ (في المسافة الكروية) هو مجموعة النقاط $z \in \overline{C}$ التي تحقق المتراجحة:

$$S(z_0, \varepsilon) = \{\rho(z, z_0) < \varepsilon \;\; ; \;\; z \in \overline{C}\} \tag{18}$$

الجوار ε **الموخوذ** للنقطة $z_0 \in C$ هو الجوار في (17) باستثناء z_0 أي:

$$S^*(z_0, \varepsilon) = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon \, , \, z \in C\} \tag{19}$$

الجوار ε الموخوذ للنقطة $z_0 \in \overline{C}$ هو الجوار في (18) باستثناء z_0:

$$S^*(z_0, \varepsilon) = \{0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon \, , \, z \in \overline{C}\} \tag{20}$$

من العلاقة (14) نجد أن:

$$\rho(z,\infty)<\varepsilon \Leftrightarrow |z|>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^{2}}-1} \qquad (21)$$

مما يعني أن الجوار ε للنقطة $z=\infty$ في $\overline{C}$ هو خارجية دائرة مركزها المبدأ ومضافاً لها النقطة ∞ وفي C هو نفس السابق بدون النقطة ∞.

نستنتج أن الجوار $S(z_0,\varepsilon)$ في $\overline{C}$ هو ذاته في C عندما $z \neq \infty, z_0 \neq \infty$ ويمثل مجموعة النقاط z التي تحقق:

$$S(z_0,\varepsilon)=\{d(z,z_0)<\varepsilon \ ; \ z \in C\} \qquad (22)$$

في الحالة العامة الجوار هذا هو مجموعة النقاط z الواقعة داخل دائرة تحتوي z_0 ونصف قطرها ε ومركزها النقطة $\dfrac{z_0}{1-\varepsilon^{2}\left(1+|z_0|^{2}\right)}$ (لماذا؟).

لكننا في دراستنا نعتبر المركز هو z_0.

اختصاراً: الجوار ε للنقطة z_0 هو قرص دائري مفتوح مركزه z_0 ونصف قطره ε أي: $|z-z_0|<\varepsilon$ والجوار R للنقطة ∞ في $\overline{C}$ هو خارجية قرص دائري مركزه المبدأ ونصف قطره R. أي: $|z|> R$

وفي C نحذف ∞ من ذلك الجوار. أي: $R<|z|<+\infty$

بعض خواص الإسقاط:

الخاصة 1: ينقل الإسقاط الاستيريوغرافي $S \leftrightarrow \overline{C}$ الدائرة في $\overline{C}$ إلى دائرة على S وبالعكس.

حذف ~~**البرهان:**~~ لتكن:

$$a\left(x^{2}+y^{2}\right)+bx+cy+d=0 \ ; a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad (23)$$

معادلة دائرة في $\overline{C}$.

عندما $a=0$ نحصل على معادلة مستقيم.

لإيجاد مسقط هذه الدائرة على سطح الكرة S نعوض في تلك المعادلة

$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ نحصل على معادلة مستوى في الفضاء الثلاثي:

$$b\xi + c\eta + (a-d)\zeta + d = 0 \tag{24}$$

وبضم معادلة S لهذه المعادلة نجد أن مجموعة النقاط المشتركة (ξ,η,ζ) تشكل دائرة على S.

وبالعكس نجد أن مسقط الدائرة:

$$\begin{aligned} &\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0 \\ &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta \end{aligned} \tag{25}$$

على $\overline{C}$ هو الدائرة.

$$(\gamma+\delta)(x^2+y^2) + \alpha x + \beta y + \delta = 0 \tag{26}$$

وعندما $\gamma + \delta = 0$ نحصل على معادلة مستقيم في $\overline{C}$ ويتحقق هذا إذا وفقط إذا كانت الدائرة (23) تمر من القطب الشمالي $P(0,0,1)$ للكرة S .أي أن الإسقاط الاستيريوغرافي ينقل دائرة تمر من P إلى مستقيم في $\overline{C}$ وينقل دائرة تمر من P و 0 إلى مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات.

نشير إلى أنه لانفرق بين الدائرة والمستقيم في المستوى الموسع $\overline{C}$ إذ إن المستقيم هو دائرة نصف قطرها يساوي $+\infty$.

الخاصة 2: الإسقاط الاستيريوغرافي يحفظ الزاوية قيمة واتجاهاً بين منحنيين (أو شعاعين) متقاطعين.

في الحالة الخاصة الزاوية في نقطة اللانهاية $z=\infty$ هي ذاتها الزاوية في النقطة P.

اترك البرهان تدريباً.

الخاصة 3: هندسياً التحويل $\omega = \frac{1}{z}$ يمثل دوراناً للكرة S حول المحور $ox \equiv o\xi$ زاوية مقدارها π.

البرهان:

لنلاحظ بداية أن $0 \ni S$ هي نقطة غير متحركة (ثابتة) عند الإسقاط . بالتالي يتطابق مماسا منحنيين (أو شعاعين) في $\overline{C}$ متقاطعين عند $z = 0$ مع مماسي مسقطيهما على S.

بتدوير S زاوية π حول القطر الموازي لـ $o\xi$ نجد أن:

قطاع رأسه $0 \rightarrow$ قطاع رأسه P ، $P \rightarrow 0$

$$M(\xi,\eta,\zeta) \rightarrow M_2(\xi,-\eta,1-\zeta) \tag{27}$$

لنفرض أن المسقط الاستيريوغرافي على $\overline{C}$ للنقطة $M_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ هي النقطة $\omega = x_1 + iy_1$. عندئذ كون $x_1 = \frac{\xi_1}{1-\zeta_1}$, $y_1 = \frac{\eta_1}{1-\zeta_1}$ بالتالي :

$$\omega = x_1 + iy_1 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{1-\zeta_1} = \frac{\xi - i\eta}{\zeta} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

وهكذا فإن $\omega = \frac{1}{z}$ هو تحويل واحد لواحد من $\overline{C}_z$ الى $\overline{C}_\omega$ ويقابله تدوير S زاوية π حول $o\xi$ ولأجله $z = \infty \leftrightarrow \omega = 0$ وقيمة الزاوية التي رأسها $z \ni \overline{C}$ هي نفسها الزاوية التي رأسها ω ومن المعلوم أن مثل هذا التحويل يسمى متماثلاً. أي أن $\omega = \frac{1}{z}$ تحويل متماثل ينقل $\overline{C}_z$ إلى $\overline{C}_\omega$ وفي حالة خاصة ينقل $z = \infty$ إلى $\omega = 0$ مع حفظ قيمة الزاوية.

مثال (2): اكتب المعادلة الديكارتية لدائرة في الصيغة المركبة، ثم بين أن صورتها وفق $\omega = \frac{1}{z}$ هي دائرة. ماذا تلاحظ؟

الحل:

نعلم أن معادلة دائرة في المستوى xoy لها الشكل:

$$a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=o$$

حيث d,c,b,a ثوابت حقيقية (عندما $a=o$ نحصل على معادلة مستقيم).

بوضع $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}, x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}$ نجد الصيغة المركبة:

$$az\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\beta=o\ ;\ \alpha=\frac{b-ic}{2}$$

لإيجاد صورة هذه الدائرة يكفي تعويض $z=\dfrac{1}{\omega}$ لنجد:

$$d.\omega.\overline{\omega}+\overline{\alpha}\omega+\alpha\overline{\omega}+a=o$$

وهي أيضاً معادلة دائرة.

نلاحظ الآتي:

عندما $a\neq o$ و $d\neq o$ فإن صورة الدائرة هي دائرة.

عندما $a=o$ و $d\neq o$ فإن صورة المستقيم هي دائرة.

عندما $a\neq o$ و $d=o$ نجد أن صورة الدائرة هي مستقيم.

أخيراً عندما $a=o$ و $d=o$ نجد أن صورة المستقيم هي مستقيم وفق التحويل $\omega=\dfrac{1}{z}$.

نقدم بعض المفاهيم التبولوجية التي نحتاجها في دراستنا:

1- يُقال إن $z_o\in C$ (أو $z_o\in\overline{C}$) هي **نقطة تراكم** للمجموعة $E\subset C\left(E\subset\overline{C}\right)$ إذا كان كل جوار موخوذ لـ z_o بمفهوم التبولوجيا في C (في $\overline{C}$) توجد نقطة واحدة على الأقل من E .وهذا يكافئ إن كل جوار موخوذ يحتوي عدداً لانهائياً من نقاط E .

مثال $E=\{(-1)^n\}$

واضح أن المجموعة المنتهية لاتملك أية نقاط تراكم وإن نقطة تراكم مجموعة قد لاتنتمي للمجموعة.

تسمى E **مجموعة مغلقة إذا احتوت جميع نقاط تراكمها.**

لصاقة المجموعة E هي اتحاد E مع نقاط تراكمها ونرمز لها بـ $\overline{E}$.

على سبيل المثال مجموعة الأعداد الصحيحة $Z=\{0,\pm1,...\}$ لاتملك في C أية نقاط تراكم بالتالي فإن Z مغلقة في C، أما في $\overline{C}$ فإن $z=\infty$ هي نقطة تراكم لـ Z وبما أن $\infty \notin Z$ فإن Z غير مغلقة في $\overline{C}$.

في المستوى الموسع $\overline{C}$ كل مجموعة غير منتهية تملك نقطة تراكم واحدة على الأقل (مبدأ التراص) وفي C مبدأ التراص غير صحيح . كما يظهر ذلك المجموعة Z ويكون صحيحاً من أجل المجموعات غير المنتهية المحدودة فقط ومثل هذه المجموعات تسمى متراصة.

من المتراجحات (16) نجد أن النقطة $z_0\ (z_0 \neq \infty)$ تكون نقطة تراكم للمجموعة E في التبولوجيا C إذا وفقط إذا كانت نقطة تراكم لـ E في التبولوجيا $\overline{C}$.

بتعبير آخر عند إيجاد نقاط التراكم المحدودة لمجموعة نستطيع استخدام المسافة الإقليدية أو المسافة الكروية على حد سواء.

2- يُقال إن المجموعة E من C (أو من $\overline{C}$) **مفتوحة** إذا كان:

من أجل كل نقطة $z_0 \in E$ يوجد جوار لـ z_0 ينتمي إلى E.

نتيجة(3): مفهوم المجموعة المفتوحة السابق يجعل كل من C و $\overline{C}$ فضاءً تبولوجياً.

نترك البرهان لمقرر اخر.

3- تسمى z_0 **نقطة داخلية** للمجموعة E من C (أو من $\overline{C}$) إذا وجد لـ z_0 جوار يقع كلياً ضمن E . والداخلية E^o هي مجموعة النقاط الداخلية لـ E.

نستنتج أن المجموعة E تكون مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية.

مكملة المجموعة E في المستوى C هي $C\backslash E$ ، وفي $\overline{C}$ هي $\overline{C}\backslash E$.

خارجية E هي داخلية مكملتها.

تسمى z_0 **نقطة حدودية** للمجموعة E إذا كان كل جوار لـ z_0 يحتوي نقاطاً من E ونقاطاً ليست من E° ، و**الحدود** للمجموعة E هي مجموعة نقاطها الحدودية.

4- يُقال إن E **مجموعة متصلة** إذا لم نستطع تقسيمها إلى مجموعتين غير خاليتين E_1 و E_2 بحيث $\overline{E}_1 \cap E_2 = \phi$ و $E_1 \cap \overline{E}_2 = \phi$، وتسمى E **مجموعة متصلة خطياً** إذا أمكن الوصل بين أية نقطتين منها بخط منكسر (أو بمنحنى) واقع كلياً ضمن E.

واضح أنه إذا كانت E مجموعة مفتوحة فإن مفهوم الاتصال الخطي يتطابق مع مفهوم الاتصال للمجموعة E.

مركبات المجموعة E هي أسرة كل المجموعات الجزئية الأعظمية المتصلة أو هي المجموعات الجزئية من E التي كل منها لا تكون محتواة تماماً في أية مجموعة جزئية متصلة أخرى.

يبرهن أن كل مجموعة E تكتب على شكل اتحاد لعدد منته أو غير منته من المركبات.

5- **البعد بين المجموعتين** E_1 و E_2 في المستوى $\overline{C}$ هو:

$$d(E_1,E_2)=\inf \rho(z_1,z_2) \quad z_1 \in E_1 \ , \ z_2 \in E_2 \qquad (28)$$

أي هو أقصر مسافة بين مجموعة نقاط E_1 من جهة وبين مجموعة نقاط E_2 من جهة أخرى.

واضح أنه إذا كان $E_1 \cap E_2 = \phi$ فإن $d(E_1,E_2)>0$.

البعد بين النقطتين z_1 و z_2 في المجموعة $\overline{E}$ هو طول أقصر خط منكسر يصل بين z_1 و z_2 ويقع في E، وفي الحالة الخاصة التي لأجلها تقع القطعة المستقيمة (z_1, z_2) ضمن E فإن البعد بين z_1 و z_2 هو:

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| \qquad (29)$$

(6-1) المنحنيات والساحات في المستوى المركب:

نحتاج بصورة رئيسية إلى ثلاث مجموعات نقطية في المستوى المركب هي المنحنيات والساحات والمتتاليات.

ندرس في هذا البند أول مجموعتين ونترك المتتاليات للبند القادم.

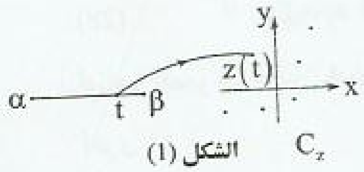
إن ما يجمع بين مفهوم المنحنى ومفهوم المتتالية هو أن كل منهما تابع مركب بمتحول حقيقي.

(1-6-1) التابع المركب بمتحول حقيقي:

بدون الدخول في التفاصيل نقدم مفهوم التابع المركب بمتحول حقيقي، وما يتعلق به من نهاية واستمرار وقابلية المكاملة وقابلية المفاضلة ، لأننا سوف نبحث الحالة الأعم وهي التوابع المركبة بمتحول مركب بشكل مفصل ومستقل في الفصل القادم.

التابع المركب بمتحول حقيقي هو علاقة رياضية $z = z(t)$ تنقل كل نقطة t من مجموعة $\mathbb{R} \supseteq E_1$ إلى نقطة $z(t)$ في مجموعة $\overline{C} \supseteq E_2$.

نعتبر $E_1 = [\alpha, \beta]$ مجال حقيقي (الشكل1).



الشكل (1)

بعزل القسم الحقيقي عن التخيلي في عبارة $z(t)$ المفروضة نجد:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad ; \quad t \in [\alpha, \beta] \qquad (1)$$

أي أن التابع المركب بمتحول حقيقي يكافئ تابعين حقيقيين بمتحول حقيقي.

$$z=z(t) \Leftrightarrow x=x(t) \ \& \ \ y=y(t) \tag{2}$$

مفهوم النهاية: نعرف نهاية التابع $z(t)$ في النقطة t_o بالعلاقة:

$$\lim_{t\to t_o} z(t)=\lim_{t\to t_o} x(t)+i\lim_{t\to t_o} y(t) \tag{3}$$

بالتالي إذا كانت $a=a_1+ia_2$ فإن:

$$\lim_{t\to t_o} z(t)=a \Leftrightarrow \lim_{t\to t_o} x(t)=a_1 \ \& \ \lim_{t\to t_o} y(t)=a_2 \tag{4}$$

النهاية $\lim_{t\to t_o} z(t)=a$ بلغة ε (بمفهوم كوشي) تعني:

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta(\varepsilon)>0 : 0<|t-t_o|<\delta \Rightarrow |z(t)-a|<\varepsilon \tag{5}$$

أما بلغة المتتاليات (بمفهوم غينة) فإنها تعني(انظر(1-7-1)):

$$\forall\{t_n\};\ t_n\in[\alpha,\beta], t_n\neq t_o, \lim_{n\to\infty} t_n=t_o \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z(t_n)=a \tag{6}$$

كيف تعرف النهاية من اليمين $\lim_{t\to t_o+0} z(t)$ والنهاية من اليسار $\lim_{t\to t_o+0} z(t)$ ؟

نعتبر : $\lim_{t\to\beta} z(t)=\lim_{t\to\beta-0} z(t) \ \& \ \lim_{t\to\alpha} z(t)=\lim_{t\to\alpha+0} z(t)$

نستنتج أن خواص النهاية $\lim_{t\to t_o} z(t)$ تشبه خواص النهاية لتابع حقيقي بمتحول حقيقي (ما هي؟).

مفهوم الاستمرار: يقال إن التابع $z=z(t)$ المعرف في المجال $[\alpha,\beta]$ أنه مستمر في النقطة t_o (أو في المجال $[\alpha,\beta]$) إذا كان كل من التابعين $x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)$ و $y(t)=\mathrm{Im}\,z(t)$ مستمراً في t_o (أو في $[\alpha,\beta]$).

هذا يعني أن استمرار التابع $z(t)$ في النقطة $t_o\in(\alpha,\beta)$ هو:

$$\lim_{t\to t_o} z(t)=\lim_{t\to t_o} x(t)+i\lim_{t\to t_o} y(t)=x(t_o)+iy(t_o) \Leftrightarrow \lim_{t\to t_o} z(t)=z(t_o) \tag{7}$$

واستمرار $z(t)$ في المجال $[\alpha,\beta]$ يعني استمراره في كل نقطة من المجال المفتوح (α,β) واستمراره من اليمين في النقطة α واستمراره من اليسار في β.

اترك صياغة تعريف الاستمرار بلغة ε وبلغة المتتاليات وذكر خواص التوابع المستمرة تدريباً.

مفهوم الاستمرار المنتظم: يُقال إن التابع $z(t)$ المعرف على المجال $[\alpha,\beta]$ مستمر بانتظام على ذلك المجال إذا كان كل من التابعين $x(t)$ و $y(t)$ مستمراً بانتظام على $[\alpha,\beta]$، أو إذا كانت $\delta=\delta(\varepsilon)$ مستقلة عن النقطة $t \in [\alpha,\beta]$ في تعريف الاستمرار بلغة ε. أو إذا تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ ;\ \forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]\ ;\ t_1\neq t_2\,,\,|t_1-t_2|<\delta \\ \Rightarrow |z(t_1)-z(t_2)|<\varepsilon \tag{8}$$

واضح أن كل تابع مستمر بانتظام على مجال هو تابع مستمر على المجال والعكس بشكل عام غير صحيح. متى يصح العكس؟

مفهوم قابلية المفاضلة: يُقال إن التابع $z(t)$ المعرف في النقطة t_0 (في المجال $[\alpha,\beta]$) **قابل للمفاضلة** في t_0 (على $[\alpha,\beta]$) إذا كان كل من قسمه الحقيقي $x(t)$ وقسمه التخيلي $y(t)$ قابل للمفاضلة في t_0 (في المجال $[\alpha,\beta]$) وعندئذ مشتقه في كل نقطة $t \in [\alpha,\beta]$ هو:

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t)\ ;\ t\in[\alpha,\beta] \tag{9}$$

كيف تعرف قابلية المفاضلة بدلالة النهاية؟وما هي خواص التوابع القابلة للمفاضلة؟

مفهوم قابلية المكاملة: نعرف **تكامل** التابع المحدد $z(t)$ على المجال المحدود $[\alpha,\beta]$ بالعلاقة:

$$\int_\alpha^\beta z(t)\,dt=\int_\alpha^\beta x(t)\,dt+i\int_\alpha^\beta y(t)\,dt \tag{10}$$

متى يكون التكامل موجوداً؟

نلفت الانتباه إلى وجود خواص في التوابع الحقيقية غير صحيحة في التوابع المركبة بشكل عام. نذكر منها : مبرهنات رول ولاغرانج والقيمة الوسطى.

على سبيل المثال: لنأخذ التابع $z(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ والمجال $[0,2\pi]$.

إن e^{it} يحقق جميع شروط مبرهنة رول إذ إنه:

1- قابل للمفاضلة في كل نقطة $t\ni[0,2\pi]$ ومشتقه هو: $z'(t)=\left(e^{it}\right)'=ie^{it}$.

2- تتطابق قيمته في طرفي المجال $z(0)=z(2\pi)=1$.

ومع ذلك فإن $z'(t)\neq 0$ لكل t لأن $|z'(t)|=1$.

كذلك فإن e^{it} يحقق شروط مبرهنة القيمة الوسطى:

1) فهو قابل للمكاملة على $[0,2\pi]$. 2) قيمة التكامل معدومة $\int_0^{2\pi} e^{it}dt=0$.

ومع ذلك فإن $z(t)\neq 0$ لكل $t\ni[0,2\pi]$.

هندسياً يمكن النظر للتابع $z(t):E_1\to E_2$ على أنه **تحويل** أو تطبيق ينقل مجموعة تعريفه E_1 إلى مجموعة القيم E_2. وعليه فإن $z(t)=(x(t),y(t))$ تابع شعاعي(اتجاهي)، وبذلك تصبح المفاهيم السابقة هي ذاتها الموجودة في التوابع الشعاعية لكن تم صياغتها بلغة الأعداد المركبة.

في التحويل $z(t)$ نسمي E_2 **بيان التحويل**، وفي الحالة الخاصة إذا كانت $E_1=[\alpha,\beta]$ و $z(t)$مستمر في $[\alpha,\beta]$ فإن البيان E_2 يكون طريقاً أو منحنى في المستوى المركب.

(2-6-1) الطرق والمنحنيات:

1) الطرق

من المعلوم أن الطريق γ في المستوي xoy هو مجموعة النقاط المرتبة (x,y) التي تحقق $F(x,y)=0$ حيث F تابع مستمر بمتحوليه x و y أو:

$$\gamma: y=f(x)\,;\, F_y\neq 0\,,\, x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$$

أو:

$$\gamma: x=g(y)\,;\, F_x\neq 0\,,\, y\in[c,d]\subset\mathbb{R}$$

بوضع $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}, y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ نجد $F\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$ وهي الصورة المركبة لمعادلة الطريق γ.

على سبيل المثال طريق دائرة الوحدة $x^2+y^2=1$ في المستوى $\overline{\mathbb{C}}$ هي $z\overline{z}=1$.
ووجدنا أيضاً $|z|=1$ أو: $z=e^{i\varphi}\,;\,0\le\varphi<2\pi$.

بشكل عام معادلة طريق الدائرة:

$$a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=0$$

في $\overline{\mathbb{C}}$ هي:

$$az\overline{z}+vz+\overline{vz}+d=0\;;\;a=\overline{a},d=\overline{d}$$

$$v=\frac{b-ic}{2}\,.$$

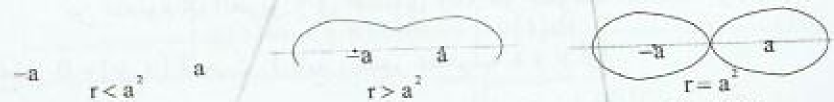
لاحظ عندما $a=0$ نحصل على معادلة طريق مستقيم في $\overline{\mathbb{C}}$.

بنفس الطريقة نجد أن:

$$|R(z)|=\left|\frac{(z-z_1)\cdots(z-a_n)}{(z-b_1)\cdots(z-b_m)}\right|=\text{const}$$

هي معادلة طريق **الكاسيني** في $\overline{\mathbb{C}}$ وكحالة خاصة $|z^2-a^2|=r;\,a\in\mathbb{R}$ تمثل طريق **الليمنسكات**. وهنا إذا كان $a^2>r$ فإن الليمنسكات يتكون من طريقين مغلقين منفصلين يحيطان بـ $\pm a$ (الشكل2). وإذا كان $a^2<r$ نجد فرعاً واحداً (الشكل3)، وأخيراً عندما $r=a^2$ نجد ليمنسكاتاً فيه $z=0$ مكررة مرتين(الشكل4).

ما هو الفرق بين الطريق والمجموعة الجبرية الممثلة له؟.



الشكل (2) الشكل (3) الشكل (4)

رغم أن الاستخدامات التطبيقية ستكون غالباً مع قطع مستقيمة موجهة أو أقواس دوائر موجهة لكن الدراسة النظرية تتطلب قدراً أكبر من المعرفة حول الطرق والمنحنيات في المستوى المركب.

$z(\beta)$

$z(t)$

$\alpha \quad t \quad \beta \quad z(\alpha)$

الشكل (5)

تعريف (1): الطريق في المستوى المركب C (أو $\overline{C}$) هو بيان γ لتحويل أو لتابع مركب بمتحول حقيقي، مستمر على مجال $\mathbb{R} \supseteq [\alpha,\beta]$ (الشكل5):

$$\gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t) \;\; ; \;\; t \in [\alpha,\beta] \qquad (11)$$

وهنا تسمى (11) **المعادلة الوسيطية** للطريق γ وبحذف t من جملة المعادلتين:

$$x = x(t) = \operatorname{Re} z(t) \; , \; y = y(t) = \operatorname{Im} z(t) \qquad (12)$$

نحصل على **المعادلة الديكارتية** المعروفة للطريق γ في المستوى .

بتعبير أدق يُقال إن التابع $z = z(t)$ يمثل طريقاً في المستوى الموسع $\overline{C}$ إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; ; \; |t - t_0| < \delta \Rightarrow \rho(z(t), \infty) < \varepsilon \; ; \; z(t_0) = \infty \qquad (13)$$

ويمثل $z = z(t)$ طريقاً في المستوى C إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; ; \; |t - t_0| < \delta \Rightarrow d(z(t), z(t_0)) < \varepsilon \qquad (14)$$

حيث d المسافة الإقليدية و ρ المسافة الكروية.

نذكر بتطابق الشرطين (13) و (14) عندما تكون مجموعة القيم E_2 محدودة.

$a = z(\alpha)$

z_2

z_1

γ

$b = z(\beta)$

الشكل (6)

طرفا الطريق(11) هما النقطتان $a = z(\alpha)$, $b = z(\beta)$، وعندما $\alpha < \beta$ فإن a تسمى نقطة البداية، و b نقطة النهاية، وفي الحالة الخاصة إذا كانت a=b فإن الطريق γ تسمى **مغلقة**. توجه الطريق γ في (11) عادة وفق تزايد t فنقول إن النقطة $z_2 = z(t_2)$ تلي النقطة $z_1 = z(t_1)$ على γ إذا كان $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$ (الشكل6).

تسمى الطريق γ **محدودة** إذا كان بيانها مجموعة محدودة، أي إذا كانت مجموعة النقاط $E_2 = \{z(t)\}$ محدودة.

$$\exists R > 0 \; ; \; \forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow |z(t)| \leq R \qquad (15)$$

تعريف (2): تسمى الطريق γ في (11) **بسيطة إذا تحقق الشرط:**

$$\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta) \; ; \; t_1 \neq t_2 \Rightarrow z(t_1) \neq z(t_2) \qquad (16)$$

بالإضافة لذلك يجب أن يكون $z(\alpha) = z(\beta)$ إذا كانت γ مغلقة (الشكل7).

هندسياً: تكون الطريق γ بسيطة إذا لم تتقاطع مع نفسها في أية نقطة باستثناء حالة تطابق نقطة البداية a على نقطة النهاية b عندما تكون γ مغلقة.

$z(\alpha)=z(\beta)$

γ

الشكل (7)

ملاحظة (1): من المهم التفريق بين الطريق γ وبين المجموعة النقطية الجبرية $M(\gamma) = \{z(t)\} = E_2$ الممثلة لها من حيث:

أولاً – الطريق γ بحسب تعريفها هي مجموعة نقطية موجهة أو مرتبة وهذا ليس ضرورياً للمجموعة الجبرية $M(\gamma)$.

ثانياً – إذا لم تكن γ بسيطة فإنه في نقطة تقاطع γ مع نفسها يكون لدينا أكثر من نقطة واحدة على γ (الشكل8) وهذه النقاط تقابل نقطة واحدة في المجموعة $M(\gamma)$ (لماذا؟). بالتالي إذا كانت الطريق γ بسيطة فإن $M(\gamma) \equiv \gamma$ بعد مراعاة إن γ موجهة.

b

γ

a

الشكل (8)

مثال (1): صف هندسياً المعادلات التالية:

1) $z = z(t) = e^{it} \; ; \; t \in [0, \pi]$

2) $z = z(t) = e^{it} \; ; \; t \in [0, 2\pi]$

3) $z = z(t) = e^{it} \; ; \; t \in [0, 3\pi]$

4) $z = z(t) = \cos t \; ; \; t \in [2\pi, 3\pi]$

5) $z = z(t) = \cos t \; ; \; t \in [\pi, 4\pi]$

6) $z = z(t) = \cos t \; ; \; t \in \left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

(7

$$z=z(t)=\begin{cases} e^{it} & ; \quad t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \left(\dfrac{4t}{\pi}-1\right)i & ; \quad t=\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right] \end{cases}$$

هل هذه الطريق بسيطة؟

الحل:

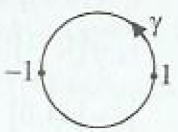
بما أن أي من التوابع المفروضة هو تابع مستمر على المجال المفروض (لماذا؟) فإن هذه التوابع تمثل طرقاً في المستوى المركب.

1- بحذف t من جملة المعادلتين $y(t)=\sin t\ ,\ x(t)=\cos t$ نجد المعادلة الديكارتية $x^2(t)+y^2(t)=1$ وعندما $t\in[0,\pi]$ لدينا طريق النصف العلوي لدائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة (إيجاباً).

نقطة البداية $a=e^{i0}=1$ والنهاية $b=e^{\pi i}=-1$ وهذه الطريق غير مغلقة ومحدودة وبسيطة (الشكل9).

2- طريق دائرة الوحدة الموجهة إيجاباً فهي مغلقة ومحدودة وبسيطة (الشكل10).

الشكل (9)



الشكل (10)

3- طريق دائرة الوحدة الموجهة إيجاباً ونصفها العلوي مكرر مرتين وبملاحظة أن نقطة البداية $a=e^{i0}=1$ مختلفة عن نقطة النهاية $b=e^{3\pi i}=-1$ فإن الطريق غير مغلقة – رغم أنها تبدو مغلقة في الرسم الهندسي – وهي محدودة وغير بسيطة.لاحظ امكانية رسمها بأسلوبين في (الشكل 11).

الشكل (11)

4- الطريق هي القطعة المستقيمة الموجهة [1- ,1] وهـي غـير مغلقـة ومحـدودة وبـسيطة (الشكل12).

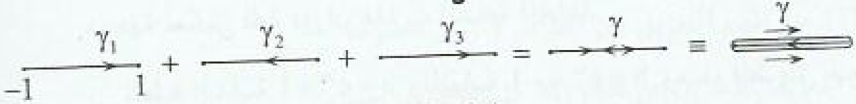
الشكل (12)

5- القطعـة المـستقيمة الموجهـة [1,1-] مكـررة ثـلاث مـرات

حيث: $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$

$$\gamma_1 = [-1,1] \; ; \; t \in [\pi, 2\pi]$$
$$\gamma_2 = [1,-1] \; ; \; t \in [2\pi, 3\pi]$$
$$\gamma_3 = [-1,1] \; ; \; t \in [3\pi, 4\pi]$$

نقطة البداية $a = \cos\pi = -1$ مختلفة عن نقطة النهاية $b = \cos 4\pi = 1$ والطريق γ غير مغلقة ومحدودة وغير بسيطة (الشكل13).

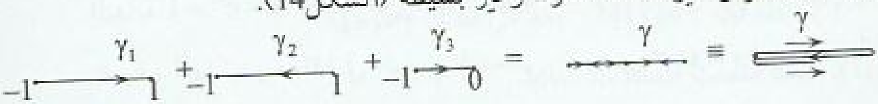


الشكل (13)

6- الطريق هي $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ حيث:

$$\gamma_1 = [-1,1] \; ; \; t \in [-\pi, 0]$$
$$\gamma_2 = [1,-1] \; ; \; t \in [0, \pi]$$
$$\gamma_3 = [-1,0] \; ; \; t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

بالتالي γ هي القطعة المستقيمة [1,1-] مكررة مرتين كاملتين مـضافاً لهـا القطعـة $[-1,0]$ والطريق غير مغلقة محدودة وغير بسيطة (الشكل14).



الشكل (14)

7- الطريق هي اتحاد لطريقين $\gamma=\gamma_1\gamma_2$ حيث γ_1 الجزء الموجه إيجاباً من دائرة الوحدة التي بدايته $e^{-\pi i/2}=-i$ ونهايته $e^{\pi i/2}=i$.

$\gamma_2=[i,2i]$ (لماذا؟) و γ طريق غير مغلقة محدودة (الشكل15).

الشكل (15)

لنلاحظ أن $M(\gamma)\equiv\gamma$ في 1) و 2) و 4) و7) $M(\gamma)\neq\gamma$ في بقية الحالات لماذا؟.

2) صف الطرق المتكافئة في $\overline{C}$:

ليكن لدينا الطريقان:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: z=z_1(t):[\alpha_1,\beta_1]\to\overline{C}\\ \gamma_2 &: z=z_2(t):[\alpha_2,\beta_2]\to\overline{C}\end{aligned} \tag{17}$$

ولنفرض أن مجموعة النقاط $z_1(t)$ تتطابق هندسياً مع مجموعة النقاط $z_2(t)$ في المستوى المركب ونتساءل متى يكون الطريقان γ_1,γ_2 متكافئتين أو متساويتين تحليلياً؟

تعريف (3): يقال إن الطريقين في (17) **متكافئتان** ونكتب $\gamma_1\equiv\gamma_2$ إذا وجد تابع (تحويل) مستمر ومتزايد تماماً $\tau=\tau(t)$ بحيث:

$$\tau(t):[\alpha_1,\beta_1]\to[\alpha_2,\beta_2] \tag{18}$$

$$z_1(t)=z_2(\tau(t))\ ;\ t\in[\alpha_1,\beta_1] \tag{19}$$

بعبارة أخرى إذا تمكنا من الحصول على γ_1 من γ_2 بإجراء تغيير المتحول في (18) و (19).

واضح أن صف الطرق المتكافئة $\{\gamma_k\}$ يمثل هندسياً منحنى واحد او مجموعة نقطية واحدة ويشكل علاقة تكافؤ في $\overline{C}$. أكثر من هذا فإن:

مبرهنة (1) لتكن الطريق المفروضة:

$$\gamma: z=z(t):[\alpha,\beta]\to\overline{C}$$

عندئذ:

1) صف الطرق $\{\gamma_k\}$ المكافئة لـ γ غير منته.

2) تعطى الطريق $\gamma_1 : z = z_1(t) : [\alpha_1 \beta_1] \to \overline{C}$ المكافئة لـ γ من خلال التابع:

$$\tau(t) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} t + \frac{\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{20}$$

الإثبات:

1) واضح لأنه يمكن أخذ $[\alpha_1, \beta_1]$ مجال كيفي.

2) إن $\gamma \equiv \gamma_1$ لأنه يمكن اختيار λ و μ في التحويل الخطي

$$\tau(t) = \lambda \cdot t + \mu \tag{21}$$

بحيث $\tau : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta] \;\; ; \;\; \beta_1 > \alpha_1$

وبالتحديد فإن: $\lambda = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} \;\; , \;\; \mu = \dfrac{\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$

ومن جانب آخر $\tau(t)$ مستمر كتابع خطي وبما أن $\tau'(t) = \lambda > 0$ فإن التابع $\tau(t)$ متزايد تماماً في المجال $[\alpha_1, \beta_1]$.

ولدينا $z_1(t) = z(\tau(t))$ حيث:

$$\gamma : z = z(t) \quad ; t \in [\alpha, \beta]$$
$$\gamma_1 : z = z_1(t) \;\; ; t \in [\alpha_1, \beta_1]$$

بملاحظة أن الفرق بين الطريقين γ, γ^- هو الجهة فإنه للحصول على معادلة γ^- من معادلة γ يكفي استبدال t بـ $\alpha + \beta - t$:

$$\gamma^- : z = z(\alpha + \beta - t) \; ; \; t \in [\alpha, \beta] \tag{22}$$

أو اختصاراً بالشكل:

$$\gamma^- : z = z(-t) \;\; ; \; t \in [-\beta, -\alpha] \tag{23}$$

حالة خاصة هامة: التحويل الخطي

$$\tau=\frac{1}{\beta-\alpha}t-\frac{\alpha}{\beta-\alpha} \qquad (24)$$

ينقل الطريق المفروضة γ والمعرفة على $[\alpha,\beta]$ إلى طريق مكافئة لها معرفة على المجال القياسي $[0,1]$ = $[\alpha_1,\beta_1]$.

لذلك لن تنقص عمومية الدراسة إذا اعتبرنا الطريق γ معرفة على المجال $[0,1]$.

مثال (2): أعطِ أمثلة على طرق متكافئة.

الحل:

الطرق التالية متكافئة:

$$\gamma_1:\ z_1(\tau)=\cos\tau \quad ; \quad \tau\in[\pi,2\pi]$$
$$\gamma_2:\ z_2(\eta)=\eta \quad ; \quad \eta\in[-1,1]$$
$$\gamma_3:\ z_3(t)=2t-1 \quad ; \quad t\in[0,1]$$

لأن التحويل $\eta=\cos\tau$ مستمر ومتزايد وينقل المجال $[\pi,2\pi]$ إلى المجال $[-1,1]$

والتحويل $\eta=2t-1$ أو $t=\frac{1}{2}(\eta+1)$ ينقل $[-1,1]$ إلى $[0,1]$ وتحصيل التحويلين

أي: $t=\frac{1}{2}(\cos\tau+1)$ مستمر ومتزايد ويجعل الطريقين γ_1 و γ_3 متكافئتان.

مطلوب **مثال** (3): حدد الطرق المتكافئة من بين الطرق التالية:

1) $\gamma_1: z_1(t)=t\ ;\ t\in[0,1]$ 2) $\gamma_2: z_2(t)=\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

3) $\gamma_3: z_3(t)=\cos t\ ;\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 4) $\gamma_4: z_4(t)=\sin t, t\in[0,\pi]$

أعطِ تمثيلاً وسيطياً للطريق الممثلة ديكارتيا بالمعادلة: $y=f(x)$ موضحاً بمثال من عندك.

الحل:

المجموعة $M(\gamma)$ الممثلة للطرق الأربع واحدة وهي مجموعة نقاط القطعة المستقيمة $[0,1]$ (لماذا؟).

إن γ_1 تكافئ γ_2 في حين γ_3 و γ_4 لاتكافئان γ_1 وكذلك γ_2 و γ_3 لاتكافئان γ_4 بينما γ_1 تكافئ γ_3 وأخيراً الطريق γ_2 تكافئ γ_3 .

نحصل على تمثيل وسيطي بوضع $x(t)=t$, $y(t)=f(t)$ في المعادلة $z(t)=x(t)+iy(t)$ فمثلاً اذا كانت الطريق γ معطاة ديكارتيا بالمعادلة $y=x^3 ; 0\le x\le 1$ فان $z(t)=t+it^3 \; ; \; 0\le t\le 1$ هي تمثيل وسيطي لـ γ .

تعريف (4)– **إضافي**: يقال إن الطريق γ **جوردانية** إذا كان التحويل:

$$z(t):[\alpha,\beta]\to M(\gamma) \qquad (25)$$

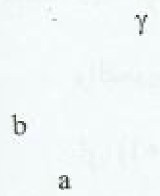
واحداً لواحد وتسمى γ **قابلة للمفاضلة** إذا كان المشتق $z'(t)$ موجوداً لكل $t \in [\alpha,\beta]$ وهنا نأخذ المشتق من اليمين في $t=\alpha$ والمشتق من اليسار في النقطة $t=\beta$.

تعريف (5): يقال إن الطريق γ في (11) **ملساء** إذا تحقق:

1) التابع $z(t)$ قابل للمفاضلة – مستمر.

2) المشتق $z'(t)$ لاينعدم لكل $t \in [\alpha,\beta]$:

$$z'(t)\neq 0 \quad \forall t\in[\alpha,\beta] \qquad (26)$$



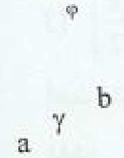
الشكل (16)

بالإضافة لذلك يجب أن يكون $z'(\alpha)=z'(\beta)$ عندما γ مغلقة وتسمى γ **ملساء – جزئياً** إذا تحقق:

1) المشتق $z'(t)$ موجود ومستمر – جزئياً في المجال $[\alpha,\beta]$.

2) الشرط (26)

هندسياً تكون الطريق γ ملساء – جزئياً إذا أمكن تقسيم المجال $[\alpha,\beta]$ إلى عدد منته من المجالات الجزئية المغلقة بحيث إن مقصور التابع $z(t)$ على كل مجال جزئي من تلك المجالات يحدد طريقاً ملساء (الشكل16). والطريق γ تكون ملساء إذا كان المماس (من الجهتين) في كل نقطة موجود (الشكل17) باستثناء طرفي γ عندما تكون غير



الشكل (17)

مغلقة حيث المماس فيهما موجود من جهة واحدة وتكون ملساء – جزئياً إذا لم يتحقق ذلك لعدد منته من النقاط.

النقطة العادية للطريق هي النقطة التي تكون فيها الطريق ملساء أي تلك التي زاوية مماسيها من الجهتين تساوي $\mp\pi$ و**النقطة الشاذة أو الرأسية** هي كل نقطة ليست عادية. في الحالة الخاصة اذا كانت الزاوية في نقطة من طريق تساوي 0 أو 2π فان النقطة تسمى **تراجعية**.

وعليه فان النقاط الشاذة لطريق تشمل الطرفين ونقاط التقاطع والتماس والنقاط الرأسية والتراجعية.

تعريف (6)- **إضافي**: يقال إن الطريق γ في (11) **قابلة للقياس** إذا تحقق:

1) التابع $z(t)$ قابل للمفاضلة تقريباً في كل مكان من المجال $[\alpha,\beta]$.

2) $z'(t)$ تابع قابل للمكاملة مطلقاً (بمفهوم ليبغ) أي أن التكامل:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)|dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \qquad (27)$$

موجود ومحدود وقيمته $\ell(\gamma)$ تساوي طول الطريق γ.

يبرهن أن كل طريق محدودة ملساء أو ملساء – جزئياً هي طريق قابلة للقياس.

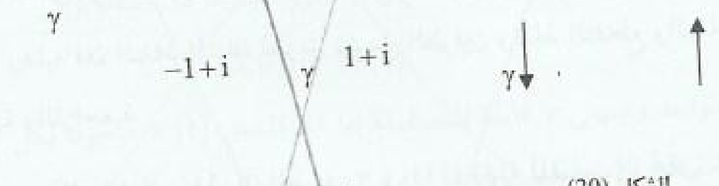
توضح الأفكار الواردة في التعاريف الثلاثة السابقة بالأمثلة التالية:

طريق **الدائرة أو القطع الناقص أو المستقيم** ملساء وطريق الخط المنكسر كالمثلث والمستطيل ملساء – جزئياً ورؤوسها نقاط شاذة. كذلك الطريق في المثال (1) الحالة (7) أملس – جزئياً فيه $z = i$ نقطة شاذة (رأسية)، والطرق $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ في المثال (3) جوردانية فيما الطريق γ_4 في ذلك المثال ليست جوردانية.

الطريق الوردية ذات الأربع وريقات $z(t)=\cos(2t)e^{it}\ ,\ t\in[0,2\pi]$ ملساء غير جوردانية مغلقة (الشكل 18).

الطريـق الكأسـية $z(t)=t^2(t+i),\ t\in[-1,1]$ جوردانيـة قابلـة للمفاضـلة – مستمرة و ملساء – جزئياً (الشكل19).

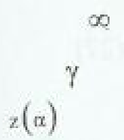
الطريق $z(t)=t\left(1+i\sin\frac{1}{t}\right),\ t\in\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]$ جوردانية غير قابلة للقياس، فهي بالتالي ليست ملساء – جزئياً (الشكل20).



الشكل (18) الشكل (19) الشكل (20)

في كل ما مضى كانت الطريق محدودة باستثناء الطريق المستقيم والشكل (20) غير المحدودة.

نضع التعريف الدقيق التالي للطريق غير المحدودة.



الشكل (21)

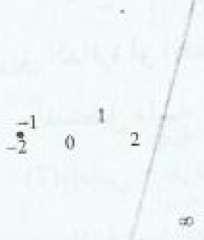
تعريف (7): لتكن الطريق:

$$\gamma: z=z(t)\ \ ;\ t\in[\alpha,+\infty] \tag{28}$$

تسمى γ **غير محدودة** في المجال $[\alpha,+\infty]$ إذا كانت المجموعة $\{z(t)\}$ غير محدودة، أي إذا تحقق (الشكل21).

1) $z(t)$ مستمر في كل مجال $[\alpha,\beta]$ حيث $\beta>\alpha$.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t)=\infty$ أو $z(+\infty)=\infty$



الشكل (22)

على سبيل المثال: الطريق الحلزونية التي بدايتها $z_0=0$:

$$z(t)=\frac{t}{\pi}e^{it}\ ;\ 0\le t\le+\infty$$

غير محدودة في $[0,+\infty]$ (الشكل 22).

بنفس الأسلوب نعرف الطريق غير المحدودة في المجال $(-\infty,\alpha)$ أو في المجال $(-\infty,\infty)$.

تذكر بأن الطريق غير المحدودة في المجال $(-\infty,\infty)$ تعتبر في المستوى $\overline{\mathbb{C}}$ مغلقة في نقطة اللانهاية $z=\infty$ مثل طريق المحور ox أو oy حيث النقطتين $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ منطبقتان على النقطة $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

3) المنحنيات:

يوجد أكثر من مفهوم للمنحنى في المستوى المركب والمفهوم الذي نعتمده هو التالي:

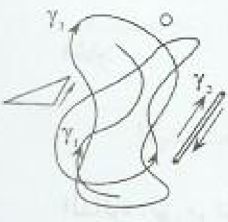
تعريف **(8)**: المنحنى γ في المستوى المركب هو اتحاد عدد منته من الطرق γ_k ; $k=\overline{1,n}$ المغلقة وغير المغلقة ومتقاطعة وغير متقاطعة ومحدودة وغير محدودة ينتج مباشرة:

1- كل طريق هي منحنى فيها $n=1$ لذلك **نستغني عن كلمة طريق ونستبدلها بمنحنى**.

2- يتحدد اتجاه المنحنى γ من اتجاه الطرق γ_k المشكلة له.

3- يمكن لنقطة واحدة أو أكثر من γ أن تقع على أكثر من طريق واحدة في آن معاً.

4- النقاط المعزولة والقطوع هي من أنواع الطرق γ_k (الشكل23):



الشكل (23)

زيادة في الشمولية:

المنحنى γ في المستوى المركب هو صف الطرق المتكافئة أو هو مجموعة النقاط من $\overline{\mathbb{C}}$ التي يمكن أن تكون صورة لمجال حقيقي مغلق $[\alpha,\beta]$ وفق تحويل مستمر ومتزايد $z=z(t)$ والمنحنى الجورداني هو صف الطرق التي تكافئ طريقاً جوردانية.

بملاحظة أن التحويل المستمر المتزايد قد ينقل طريقاً ملساء إلى طريق ليست ملساء فإن مفهوم المنحنى الأملس يتطلب قليلاً من التدقيق:

تعريف **(9):** المنحنى الأملس هو صف الطرق التي تنتج عن طريق ملساء تحت تأثير كل التحويلات المستمرة المتزايدة $z = z(t)$ و $z(t)$ تابع قابل للمفاضلة – مستمر ومشتقه موجب.

بالأسلوب ذاته نعرف المنحنى الأملس – جزئياً والمنحنى القابل للقياس، ففي الأول يجب أن يكون $z'(t)$ مستمراً باستثناء عدد منته من النقاط على الأكثر والتي فيها يكون المشتق موجوداً من جهة واحدة، أما في الثاني فيجب أن تكون التحويلات $z(t)$ مستمرة مطلقاً.

اختصاراً نقول: المنحنى الجورداني الأملس أو الأملس جزئياً أو القابل للقياس هو مجموعة النقاط $M(\gamma)$ في المستوى المركب التي هي صورة لمجال حقيقي $[\alpha,\beta]$ وفق تحويلات $z = z(t)$ تحدد طرقاً جوردانية ملساء أو ملساء – جزئياً أو قابلة للقياس على الترتيب.

مثال (4): ادرس هندسياً مجموعة النقاط المرتبة التي يمثلها التابع:

$$z(t)=\begin{cases} 3e^{it} & ; \quad t\in[0,\pi/2] \\ y=3x+3 & ; \quad -1\le x\le 0, 0\le y\le 3 \\ |z-3i|=\sqrt{10} & ; \quad x<0, y>0 \end{cases}$$

ح /

الحل:

لدينا المنحنى $\gamma=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ حيث: $\gamma_1 : z(t)=3e^{it}\ ,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ طريق جزء من الدائرة التي مركزها $z = 0$ ونصف قطرها 3 ونقطة بدايتها $a = 3e^{i0} = 3$ ونهايتها $b_1 = 3e^{\pi i/2} = 3i$ و $\gamma_2 :[3i,-1]$ وأخيراً $\gamma_3 : |z-3i| = \sqrt{10}$ هو طريق جزء الدائرة التي مركزها $3i$ ونصف قطرها $\sqrt{10}$ وبدايتها $a_1 = -1$ ونهايتها $b = \left(\sqrt{10}+3\right)i$.

وعليه فإن γ هو منحنى غير مغلق بسيط أملس – جزئياً

فيه نقطتين رأسيتين $z_2 = -1, z_1 = 3i$ (الشكل24).

γ_3

$3i$

γ_2 γ_1

-1 3

الشكل (24)

(3-6-1) **الساحات:**

نعرض بشيء من التفصيل للنوع الثاني الهام من أنواع المجموعات النقطية في المستوى المركب والذي هو الساحة.

تعريف (10): **الساحة** D في المستوى $\overline{C}$ (أو C) هي كل مجموعة مفتوحة ومتصلة

نذكر هنا بالآتي:

النقاط الحدودية للساحة D هي تلك التي لاتنتمي لـ D لكنها نقاط تراكم ومن الواضح أن الحدود Γ لساحة D هي مجموعة مغلقة دوماً وإن اللصاقة $\overline{D}$ هي اتحاد نقاط D مع نقاط حدودها Γ.

$$\overline{D} = D \cup \{\Gamma\} \tag{29}$$

النقاط الخارجية للساحة D هي النقاط التي لاتنتمي لـ D ولأجل كل نقطة يوجد جوار لايحتوي أية نقاط من D (الشكل25).

تسمى الساحة D محدودة إذا وجد ثابت موجب $R > o$ بحيث:

$$|z| < R \qquad \forall z \in D \qquad \text{(الشكل26)}. \tag{30}$$

حدودية

خارجية

داخلية

Γ

Γ

الشكل (25) **الشكل (26)**

نستنتج ما يلي:

1) كل نقطة من ساحة مغلقة $\overline{D} = D \cup \Gamma$ هي نقطة تراكم لها ولاتوجد نقاط تراكم خارجها.

2) المستوى الموسع $\overline{C}$ هو ساحة بدون حدود والمستوى C هو ساحة حدودها النقطة المعزولة $z=\infty$.

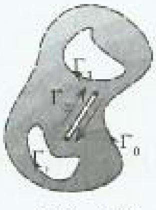
3) تتكون الحدود Γ للساحة D من منحنيات ملساء – جزئياً:

$$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\ldots\cup\Gamma_n=\bigcup_1^n\Gamma_k \tag{31}$$

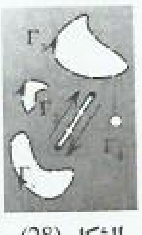
ويمكن أن يدخل في هذه الحدود نقاطاً معزولة (ثقوبا) أو قطوعاً.

تنويه هام: يتم توجيه الحدود Γ للساحة D بحيث تبقى نقاط D على جهة اليسار في كل دراستنا. فاذا كانت Γ_k مغلقة غير متقاطعة مثنى مثنى و Γ_0 يحتوي البقية Γ_k كما في الشكل (27) فان Γ_0 يوجه ايجاباً (بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة) والبقية توجه سلباً، وأما اذا كانت D غير محدودة (Γ_0 غير موجودة) كما في الشكل (28) فان Γ_k توجه سلباً. واخيراً عندما Γ_0 موجود لكنه غير محدود والبقية Γ_k مغلقة ومحدودة فان التوجيه يتم كما في الشكل (29).

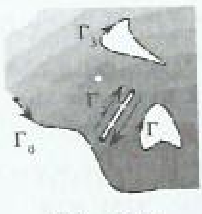
تعريف (11): تسمى الساحة D وحيدة الاتصال في المستوى الموسع $\overline{C}$ إذا كانت حدودها Γ تشكل مجموعة متصلة وبخلاف ذلك تسمى متعددة الاتصال وعندئذ درجة الاتصال هي عدد المركبات المتصلة غير المتقاطعة مثنى مثنى لحدودها $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ وهذا العدد قد يكون منتهياً $n<+\infty$ وقد يكون لانهائياً $n=+\infty$.



الشكل (27)



الشكل (28)



الشكل (29)

على سبيل المثال الشكل (27) هو ساحة رباعية الاتصال في C وفي $\overline{C}$ والشكل (28) هو ساحة خماسية الاتصال في $\overline{C}$ وسداسية في C والشكل (29) ساحة خماسية في C وفي $\overline{C}$ لماذا؟.هل يمكنك اعطاء ساحة فيها $n=+\infty$؟.

ملاحظة: التوجيه دائماً بحيث تكون الساحة ع يسار المنحني

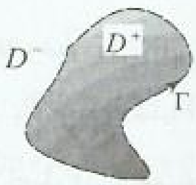
هندسياً الساحة الوحيدة الاتصال في المستوى C هي التي يمكن رد كل منحنى مغلق γ فيها إلى نقطة بإعادة تشكيل مستمر (هوموتوبية) مع البقاء ضمن D انظر (3-1-1) والساحة الوحيدة الاتصال في $\overline{C}$ هي عندما تكون إعادة التشكيل المستمر للمنحنى المغلق γ نحو نقطة اللانهاية $z=\infty$ منفذة على كرة ريمان S.

ينتج:

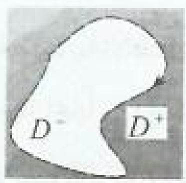
1- إذا كانت الحدود Γ للساحة D تتكون من منحنى مغلق واحد في $\overline{C}$ (قد لايكون Γ محدوداً) أو من نقطة معزولة واحدة فإن D تكون وحيدة الاتصال في $\overline{C}$.

2- المنحنى المغلق Γ (قد لا يكون محدوداً) يقسم المستوى $\overline{C}$ إلى ساحتين كل منهما وحيدة الاتصال الأولى D^+ أو D_1 وتقع على يسار Γ والثانية D^- أو D_2 وتقع على يمين Γ. في الحالة الخاصة إذا كان المنحنى المغلق Γ محدوداً فإن D^+ تسمى داخلية Γ و D^- خارجية Γ (انظر الأشكال 32,31,30).

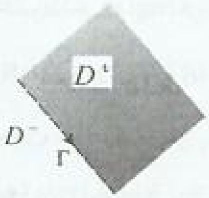
3- درجة الاتصال n للساحة D قد تختلف تبعاً لموقع الساحة D في المستوى $\overline{C}$ أم في المستوى C فمثلاً: إذا كانت D ساحة غير محدودة وحدودها Γ محدودة أو نقاط معزولة وكانت درجة اتصالها في $\overline{C}$ هي n فإن درجة اتصالها في المستوى C تكون n+1 .



الشكل (32)



الشكل (31)



الشكل (30)

4- نستطيع تصور الساحة الوحيدة الاتصال كصفيحة ورقية يمكن لحدودها أن تحتوي قطوعاً، لكن بدون ثقوب أو فجوات منفصلة عن الحدود في الداخل.

5- يستثنى المستوى الموسع $\overline{C}$ والمستوى C مما ذكر أعلاه إذ كل منهما ساحة وحيدة الاتصال.

تعريف (12) – اضافي : تسمى الساحة D **جوردانية** إذا كانت حدودها $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ تتكون من منحنيات جوردانية مغلقة وتسمى **متراصة** إذا وجدت داخل دائرة نصف قطرها ثابت موجب $o < R$ ويقال إن المجموعة E **واقعة بتراص** في الساحة D إذا كانت E وحدودها محتواة تماماً في D وتراص الساحة D هو الساحة المغلقة $\bar{D}$.

ملاحظة (2): عندما لانذكر موقع الساحة D في $\bar{C}$ أم في C فإننا نعني أن العبارة صحيحة في أي منهما، وفي كل دراستنا نعتبر الساحة المأخوذة في المستوي C على أن ننظر إلى C بأنه $\bar{C}$ الموخوذ في النقطة ∞.

مثال (5): قدم أمثلة توضح فيها المفاهيم السابقة (في المستوى الموسع $\bar{C}$ والمستوى C).

الحل:

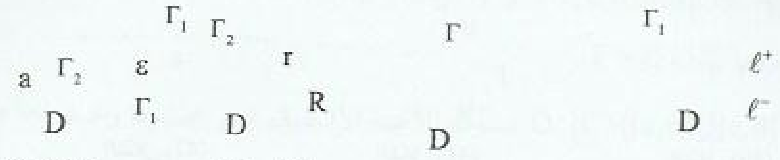
1- $D: |z-a| < \varepsilon$ ساحة وحيدة الاتصال محدودة وحدودها $\Gamma: |z-a| = \varepsilon$ محدودة وموجهة إيجاباً.

2- $D: o < |z-a| < \varepsilon$ ساحة ثنائية الاتصال مغلقة ومحدودة وحدودها $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ محدودة حيث $\Gamma_1 : |z-a| = \varepsilon$ موجهة إيجاباً و $\Gamma_2 = \{\overset{a}{o}\}$ نقطة معزولة (الشكل 33).

3- $D: o < r < |z - \overset{a}{z}| < R$ ساحة ثنائية الاتصال محدودة وحدودها $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ محدودة حيث $\Gamma_1 : |z-a| = R$ موجهة إيجاباً و $\Gamma_2 : |z-a| = r$ موجهة سلباً (الشكل34).

4- $D: |z| > R$ ساحة وحيدة الاتصال في $\bar{C}$ وثنائية الاتصال في C، غير محدودة وحدودها $\Gamma: |z| = R$ موجهة سلباً (الشكل 35).

5- $D: \{|z| < r \text{ , } o < \arg z < 2\pi\}$ ساحة وحيدة الاتصال محدودة وحدودها $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ell^{\pm}$ محدودة حيث $\Gamma_1 : |z| = r$ مستثنى منها النقطة $z = r$ وموجهة إيجاباً و $\ell^{+} = [o, r]$, $\ell^{-} = [r, o]$ (الشكل 36).



الشكل (33) الشكل (34) الشكل (35) الشكل (36)

6- $D:\operatorname{Im}z<r;\ r\in R$ ساحة وحيلة الاتصال غير محدودة حدودها $\Gamma:\operatorname{Im}z=r$ غير محدودة موجهة من اليمين إلى اليسار (الشكل37).

7- $D:\operatorname{Re}z>r$ ساحة وحيلة الاتصال غير محدودة حدودها $\Gamma:\operatorname{Re}z=r$ موجهة من أعلى إلى أسفل (الشكل 38).

8- $D:|\operatorname{Im}z|<r$ ساحة وحيلة الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ حيث $\Gamma_1:\operatorname{Im}z=-r$ موجهة من اليسار إلى اليمين و $\Gamma_2:\operatorname{Im}z=r$ موجهة من اليمين إلى اليسار ، لاحظ أن Γ_1 يلتقي مع Γ_2 عند النقطة $z=\infty$ في $\overline{C}$ (الشكل 39).

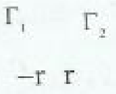
الشكل (37) الشكل (38) الشكل (39)

9- $D:|\operatorname{Re}z|>r$ ساحة وحيلة الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ حيث $\Gamma_1:\operatorname{Re}z=-r$ موجهة من أسفل إلى أعلى و $\Gamma_2:\operatorname{Re}z=r$ موجهة من أعلى إلى أسفل (الشكل40).

10- $D:\{|\operatorname{Im}z|<r, \operatorname{Re}z>0\}$ ساحة وحيلة الاتصال غير محدودة وحدودها Γ كما في الشكل (41) .

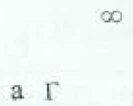
11- $D:\overline{C}\setminus\{a\};\ a\neq\infty$ ساحة وحيلة الاتصال غير محدودة وحدودها النقطة المعزولة $\Gamma=\{a\}$.

12- $D:C\setminus\{a\}$ ساحة ثنائية الاتصال غير محدودة وحدودها النقطتين المعزولتين $\Gamma=\{a\}\cup\{\infty\}$ (الشكل 42).



الشكل (40)

الشكل (41)



الشكل (42)

13- $D:\overline{C}\setminus\{a,b\}\ ;\ a\neq b$ ساحة ثنائية الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\{a\}\cup\{b\}$.

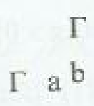
14- $D:C\setminus\{a,b\}\ ;\ a\neq b$ ساحة ثلاثية الاتصال غير محدودة وحدودها هي $\Gamma=\{a\}\cup\{b\}\cup\{\infty\}$ (الشكل 43).

15- $D:\overline{C}\setminus[a,b];\ a\neq\infty, b\neq\infty$ ساحة وحيدة الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\ell^{\pm}$ حيث $\ell^{-}=[b,a], \ell^{+}=[a,b]$.

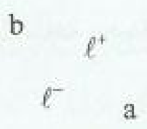
16- $D:C\setminus[a,b];a\neq b$ ساحة ثنائية الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\ell^{\pm}\cup\{\infty\}$ حيث $\ell^{+}=[a,b], \ell^{-}=[b,a]$ (الشكل 44).

17- $D:\overline{C}\setminus[a,\infty)$ ساحة وحيدة الاتصال غير محدودة حدودها $\Gamma=\ell^{\pm}$ حيث $\ell^{+}=[a,+\infty), \ell^{-}=(+\infty,a]$.

18- $D:C\setminus[a,\infty)$ ساحة وحيدة الاتصال غير محدودة حدودها $\Gamma=\ell^{\pm}$ وكذلك بالنسبة للساحة $D=C\setminus\widehat{0,\infty}$ حيث $\widehat{0,\infty}$ قطع على طول منحنى يصل بين 0 و ∞ (الشكل 45).



الشكل (43)



الشكل (44)

الشكل (45)

19- $D:\{\overline{C}\setminus((-\infty,a]\cup[b,+\infty))\}$ ساحة وحيدة الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\ell_1^{\pm}\cup\ell_2^{\pm}$ حيث $\ell_1^{+}=(-\infty,a], \ell_1^{-}=[a,-\infty), \ell_2^{+}=[b,+\infty), \ell_2^{-}=(+\infty,b]$.

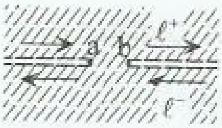
20- $D:\{C\setminus((-\infty,a]\cup[b,+\infty))\}$ ساحة كما في الشكل (46).

21- $D:\{\overline{C}\setminus([a,b]\cup[c,d])\}$ و $[a,b]\cap[c,d]=\phi$ ساحة ثنائية الاتصال غير محدودة وحدودها $\Gamma=\ell_1^{\pm}\cup\ell_2^{\pm}$.

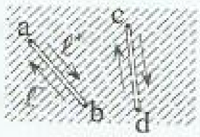
22- $D:\{C\setminus([a,b]\cup[c,d])\}$ ساحة ثلاثية الاتصال غير محدودة وحدودها هي $\Gamma=\ell_1^{\pm}\cup\ell_2^{\pm}\cup\{\infty\}$ (الشكل47).

23- $D:\{\overline{C}\setminus([a,b]\cup\{c\})\}$ و $[a,b]\not\ni c$ ساحة ثنائية الاتصال غير محدودة وحدودها هي $\Gamma=\ell^{\pm}\cup\{c\}$.

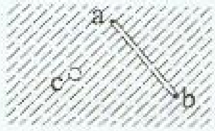
24- $D:\{C\setminus([a,b]\cup\{c\})\}$ ساحة ثلاثية الاتصال غير محدودة وحدودها هي $\Gamma=\ell^{\pm}\cup\{c\}\cup\{\infty\}$ (الشكل 48).



الشكل (46)



الشكل (47)



الشكل (48)

25- كمثال على ساحة درجة اتصالها لانهائية يمكن أن نأخذ داخلية مربع مستثنى منها عدد غير منته من القطع المستقيمة مثل الشكل (49) :

$$D:\{o<x<1, o<y<1\}\setminus\left\{x=\frac{1}{2^n}, \frac{1}{3}\le y\le\frac{2}{3}\right\}$$

كذلك الأمر بالنسبة للساحة $D=C\setminus Z$ (الشكل 50).

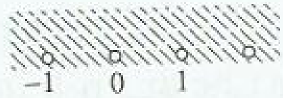
26- داخلية المستطيل $D_1:\left\{|x|<2, |y|<\frac{3}{2}\right\}$ ساحة واقعة بتراص في الشريط $D:|\operatorname{Im}z|<3$ لأن $D\supset\overline{D}_1$ (الشكل 51). بينما الشريط $D_2:|\operatorname{Im}z|<\frac{3}{2}$ يقع في D لكن بدون تراص (الشكل52).

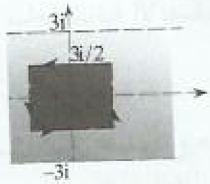
27 - داخلية الليمنسكات (الشكل 53) ليست ساحة رغم ان حدودها مجموعة متصلة لماذا؟

28- (الشكل 54) هو ساحة. صفها؟

2/3

1/3





$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

الشكل (49) الشكل (50) الشكل (51)

3i

3i/2

−3i

الشكل (52) الشكل (53) الشكل (54)

(7-1) المتتاليات العددية المركبة:

نبحث أخيراً النوع الثالث الهام من أنواع المجموعات النقطية في المستوى المركب.

إذا استبدلنا في تعريف الطريق (أو المنحنى) المجال $[\alpha,\beta]$ بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ واستغنينا عن شرط الاستمرار نجد متتالية عددية مركبة.

تعريف (1): **المتتالية العددية المركبة** $\{z_n\}$ هي تابع مركب بمتحول حقيقي معرف في $\mathbb{N}$ ويأخذ قيمة z_n في مجموعة الأعداد المركبة.

إذا كانت $\{z_n\}$ متتالية فإن عناصرها هي $z_1,\dots,z_n,\dots$ ودليلها n وحدها العام أو النوني هو z_n.

1 2 n → z_n

الشكل (1)

هندسياً المتتالية $\{z_n\}$ هي مجموعة نقطية في المستوى المركب (الشكل 1). ونذكر ثانية بضرورة التفريق بين عدد عناصر المتتالية الذي هو غير منته دوماً وبين عدد عناصر المجموعة الجبرية $M(\{z_n\})$ الممثلة لنقاطها التي يمكن أن يكون منتهياً. على سبيل المثال عدد عناصر

المتتالية $\{i^n\}$ غير منته في حين مجموعة عناصرها منتهية وتتكون من أربعة عناصر فقط $M(\{z_n\}) = \{i, -1, -i, 1\}$.

(1-7-1) تقارب متتالية في المستوى C والمتتاليات اللامتناهية في الصغر

تعريف (2): يقال إن المتتالية $\{z_n\}$ **متقاربة** ونهايتها العدد المركب $a = a_1 + ia_2$ ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ أو $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ إذا تحقق أحد الشرطين:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0 \qquad (2)$$

واضح أن العدد a يكون نهاية للمتتالية $\{z_n\}$ إذا كانت a هي نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة M الممثلة لعناصر المتتالية.

هندسياً فإن $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ تعني وقوع جميع عناصر المتتالية في الجوار $S(a, \varepsilon)$ باستثناء عدد منته من العناصر على الأكثر (الشكل 2).

الشكل (2)

كل متتالية ليست متقاربة في المستوى C تسمى متباعدة.

نلاحظ أن تعريف تقارب متتالية عددية مركبة $\{z_n\}$ يكافئ تعريف تقارب متتالية نقاط $\{(x_n, y_n)\}$ في المستوى xoy إنما صيغ بلغة الأعداد المركبة.

في الحالة الخاصة إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ فإن $\{z_n\}$ تسمى **لامتناهية في الصغر**.

نذكر بأن المتتالية $\{z_n\}$ تكون محدودة إذا تحقق الشرط:

$$\exists\, R > o \Rightarrow |z_n| < R \qquad \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

أي اذا أمكن حصر جميع عناصرها بلا استثناء ضمن دائرة.

بالتالي لاتكون المتتالية $\{z_n\}$ محدودة إذا تحقق الشرط:

$$\forall R > o\ \ \exists\, n_k \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_{n_k}| > R \qquad (4)$$

على سبيل المثال $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i^n}{n}=0$ ومحدودة لأن $\left|\frac{i^n}{n}\right|=\frac{1}{n}<2$ والمتتالية $\{i^n\}$ متباعدة ومحدودة (لماذا؟) والمتتالية $\{ni^n\}$ متباعدة وغير محدودة (لماذا؟).

مثال (1): أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+ni}{3n}=\frac{i}{3}$

الحل: لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2+ni}{3n}-\frac{i}{3}\right|=\frac{i}{3}$$

والشرط (2) محقق.

تعريف (3): تسمى $\left\{z_{n_k}\right\}$ **متتالية جزئية** من المتتالية $\{z_n\}$ إذا كانت جميع عناصرها تنتمي للمجموعة $\{z_n\}$. فالمتتالية $\left\{(-1)^n\right\}$ جزئية من المتتالية $\{i^n\}$.

المبرهنة التالية تعطي العلاقة بين المتتالية المركبة $\{z_n\}$ والمتتاليتين الحقيقيتين $\{y_n\}=\{\operatorname{Im} z_n\}$ & $\{x_n\}=\{\operatorname{Re} z_n\}$ ونشير إلى أنه يمكن أخذها كتعريف لتقارب متتالية مركبة.

مبرهنة (1): لتكن $z_n=x_n+iy_n$ و $a=a_1+ia_2$ عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} z_n=a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=a_1 \ \& \ \lim_{n\to\infty} y_n=a_2 \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+i\lim_{n\to\infty} y_n=a_1+ia_2 \tag{6}$$

إثبات لزوم الشرط: بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-a|=0$.

من جهة ثانية بأخذ النهاية عندما $n\to\infty$ في طرفي متراجحات المثلث:

$$|x_n-a_1|=|\operatorname{Re}(z_n-a)|\le|z_n-a|$$
$$|y_n-a_2|=|\operatorname{Im}(z_n-a)|\le|z_n-a|$$

نجد المطلوب.

إثبات كفاية الشرط: بما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = a_2$ فإن $\lim_{n\to\infty}|x_n - a_1| = 0$ و $\lim_{n\to\infty}|y_n - a_2| = 0$ وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ في طرفي متراجحة المثلث.

$$|z_n - a| = |(x_n - a_1) + i(y_n - a_2)| \le |x_n - a_1| + |y_n - a_2|$$

نجد المطلوب.

مثال (2): أوجد القيمة I للنهاية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n} - \frac{i}{n}\right)$

الحل: لدينا: $x_n = \frac{2n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, $y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

توحي المبرهنة (1) أن خواص المتتاليات المركبة المتقاربة تشبه خواص المتتاليات الحقيقية المتقاربة.

الخاصة (1): كل متتالية متقاربة تكون محدودة والعكس بشكل عام غير صحيح، وبالتالي كل متتالية غير محدودة تكون متباعدة (في المستوى C).

البرهان:

لتكن $\{z_n\}$ متتالية متقاربة، أي $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ عندئذ يتحقق الشرط (I) لكل ثابت موجب $\varepsilon > 0$. وتؤدي المتراجحة $|z_n - a| < \varepsilon$ لكل ε إلى وجود ثابت موجب $R > 0$ بحيث $|z_n| < R ; \forall n$ ويعني ذلك أن $\{z_n\}$ متتالية محدودة.

كمثال على متتالية محدودة لكنها متباعدة يمكن أخذ $\{i^n\}$ والمتتالية $\{n i^n\}$ غير محدودة بالتالي فهي متباعدة.

الخاصة (2): لأي متتالية $\{z_n\}$ يكون:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}|z_n| = |a| \qquad (7)$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n| = 0 \qquad (8)$$

في المتتالية المتباعدة $\{i^n\}$ لدينا $\lim_{n\to\infty}|i^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ وهذه تبين أن تقارب المتتالية $\{|z_n|\}$ قد لايؤدي إلى تقارب $\{z_n\}$.

الخاصة (3): – **معيار كوشي:** تكون المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة (في C) إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_o(\varepsilon) \in N\ ;\ \forall n > n_o + p\ ,\ p \in N \Rightarrow |z_n - z_{n+p}| < \varepsilon \qquad (9)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_o(\varepsilon) \in N\ ;\ \forall n > n_o\ ,\ \forall m > n_o \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon \qquad (10)$$

إثبات لزوم الشرط: بما إن $\{z_n\}$ متقاربة فان:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o\ \forall P \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon/2$$

لكن عندها $|z_{n+p} - a| < \varepsilon/2$ لأن $n + p > n > n_o$ أصبح لدينا:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o .\ \forall P \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$|z_{n+p} - z_n| = |(z_{n+p} - a) - (z_n - a)| \le |z_{n+p} - a| + |z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

مما يعني أن الشرط (9) محقق.

اترك إثبات كفاية الشرط والخاصة(2) تدريباً.

الخاصة (4): إذا كانت المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة من العدد a فإن كل متتالية جزئية $\{z_{n_k}\}$ تكون متقاربة ونهايتها العدد a ذاته لماذا؟. البرهان غير مطلوب

بالتالي اذا وجدت متتاليتان جزئيتان متقاربتان من عددين مختلفين فان المتتالية الأصل متباعدة.

ذكرنا في الخاصة (1) أن المتتالية المحدودة قد لاتكون متقاربة. الخاصة التالية تبين وجود متتالية جزئية متقاربة.

الخاصة (5): من كل متتالية محدودة $\{z_n\}$ (في المستوى C) يمكن استخلاص متتالية جزئية متقاربة $\{z_{n_k}\}$.

البرهان:

بما أن المتتالية $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ محدودة فإن كل من $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تكون محدودة ومن التحليل الحقيقي توجد في $\{x_n\}$ متتالية جزئية متقاربة $\{x_{n_k}\}$ وفي $\{y_n\}$ متتالية جزئية متقاربة $\{y_{n_k}\}$ وعندئذ $\{z_{n_k}\} = \{x_{n_k} + iy_{n_k}\}$ متتالية جزئية متقاربة.

الخاصة (6): العمليات الحسابية: إذا كانت $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ و $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = b$ (في C) و c_1، c_2 ثابتان مركبان فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_1 z_n \pm c_2\zeta_n\right) = c_1 \lim_{n\to\infty} z_n \pm c_2 \lim_{n\to\infty}\zeta_n = c_1 a \pm c_2 b \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n\zeta_n\right) = \lim_{n\to\infty} z_n . \lim_{n\to\infty}\zeta_n = a.b \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n} = \frac{a}{b} \quad ; \quad b \neq 0 \, , \, \zeta_n \neq 0 \tag{13}$$

اتركُ البرهان تدريباً.

إلى الآن كان تعاملنا مع الصورة الديكارتية للحد النوني $z_n = x_n + iy_n$ ولقيمة النهاية $a = a_1 + ia_2$ لكن إذا كان $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ و $a = \rho e^{i\alpha}$ فإن المبرهنة (1) تفقد صحتها ونحصل على مبرهنة بديلة تعطي الشرط الكافي للتقارب فقط.

مبرهنة (2) – الشرط الكافي للتقارب: لتكن $z_n = r_n e^{i\varphi_n} ; \varphi_n = \arg z_n$ و $a \neq 0$ عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \rho \neq 0 \ \& \ \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \alpha \ \begin{matrix}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{matrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \rho e^{i\alpha} \neq o \tag{14}$$

الإثبات: من علاقة أولر والتحليل الحقيقي نجد:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty}\left[r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} r_n . \cos\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\right) + i\lim_{n\to\infty} r_n . \sin\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\right) \\ &= \rho\cos\alpha + i\rho\sin\alpha = \rho e^{i\alpha}\end{aligned}$$

نذكر بأنه إذا كانت $a = 0$ فإن $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

وإذا كانت $z_n \to a$ فإن $r_n = |z_n| \to |a| = \rho$

بالتالي تأتي عدم صحة العكس في المبرهنة من متتالية الزوايا $\{\varphi_n\}$ والمثال التالي يوضح ذلك.

هام جداً

مثال (3): ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $z_n = -1 + (-1)^n \frac{i}{n}$ وهل النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ موجودة أم لا؟

الحل:

لدينا: $$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(-1 + (-1)^n \frac{i}{n}\right) = e^{\pi i} = -1 \; ; \rho = 1, \alpha = \pi$$

والمتتالية المفروضة متقاربة $a = -1$.

لندرس متتالية الزوايا $\varphi_n = \arg z_n \; ; -\pi < \varphi_n \le \pi$.

عندما $n = 2k$ عدد زوجي فإن النقاط z_n تقع في الربع الثاني II وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_{2k} = \lim_{n\to\infty} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{(-1)^{2k}/2k}{-1}\right) = \pi$$

أما عندما $n = 2k+1$ عدد فردي فإن النقاط z_n تقع في الربع الثالث III وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(-\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1}\right) = -\pi$$

وعليه فإن $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ غير موجودة لأنها تتعلق بالدليل n.

هام

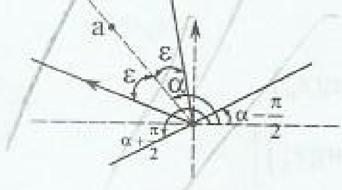
لنلاحظ أنه اذا أخذنا المتتالية (φ_n) بحيث $0 \le \varphi_n < 2\pi$ فإنها تصبح متقاربة ويكون: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \pi$ لماذا؟. وبشكل عام يصح الآتي:

نتيجة (1):

إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \ne 0$ فإنه من أجل القيمة المثبتة $\alpha = (\arg a)_0$ يمكن استخلاص متتالية من بين المتتاليات $\{\varphi_n\} = \{\arg z_n\}$ متقاربة من الثابت α.

البرهان:

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ و $\alpha=(\arg a)_o$ مثبتة فإنه بدءاً من دليل $n=n_o$ تقع جميع حدود $\{z_n\}$ ضمن قطاع زاوي رأسه المبدأ وضلعه $\alpha\pm\frac{\pi}{2}$ وبالتالي من أجل $\arg z_{n_o+1}, \arg z_{n_o+2}, \dots$ ، يمكن اختيار القيم $\varphi_{n_o+1}, \varphi_{n_o+2}, \dots$ بحيث $\left|\varphi_{n_o+m}-\alpha\right|<\frac{\pi}{2}$ ولكن حينئذ سيكون $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\alpha$ لأنه بأخذ $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ يوجد $n_1\geq n_o$ بحيث جميع الحدود z_n ذات الأدلة $n>n_1$ تقع ضمن القطاع الزاوي $\alpha\pm\varepsilon$ الذي يحتوي a (الشكل 3).



الشكل (3)

تطبيق:

أثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kz}{n}\right)^{n/k}=e^z$$

الحل: نعلم أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ (في الحالة الخاصة $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{k/n}=e\simeq 2,71$).

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{n/2}=e^x$$

$$\arg z_n=\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=n\arg\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}i\right)$$

من أجل n كبيرة $(n\to\infty)$ نستطيع اعتبار $0<1+\frac{x}{n}$ وعندئذ :

$$\arg z_n = n \operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n} = n \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}$$

وبملاحظة أن $\lim\limits_{n\to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha = 0$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{ny}{n+x} = y$$

مما سبق نستنتج أن:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} |z_n| \lim_{n\to\infty} e^{i\arg z_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} |z_n| \cdot \lim_{n\to\infty}[\cos\arg z_n + i\sin\arg z_n] \\ &= e^x\left[\cos\left(\lim_{n\to\infty}\arg z_n\right) + i\sin\left(\lim_{n\to\infty}\arg z_n\right)\right] \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy} = e^z\end{aligned}$$

لنلاحظ أنه عندما $y = 0$ نجد e^x ومن أجل $x = 0$ نحصل على علاقة أولر.

وهكذا إذا كانت المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة من عدد a $(a \neq 0)$ غير سالب، فإن لكل قيمة مثبتة α من قيم $\arg a$ توجد متتالية $\varphi_n = (\arg z_n)_* = \arg z_n$ متقاربة ونهايتها العدد α وبهذا المعنى يجب أن نفهم العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg a = \alpha \tag{15}$$

(2-7-1) تقارب متتالية في المستوى الموسع $\overline{C}$ والمتتاليات اللا متناهية في الكبر:

إن تقارب متتالية $\{z_n\}$ من عدد مركب a $(a \neq \infty)$ في المستوى $\overline{C}$ هو ذاته في C (لماذا؟) لذلك يكفي دراسة التقارب من نقطة اللانهاية $z = \infty$.

تعريف (4): تسمى المتتالية $\{z_n\}$ **متقاربة من نقطة اللانهاية** $z = \infty$ (في $\overline{C}$) أو لامتناهية في الكبر ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ إذا تحقق أحد الشرطين:

$$\forall R > 0\ \exists n_o(R) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o \Rightarrow |z_n| > R \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty \tag{17}$$

هندسياً يعني ذلك وقوع جميع عناصر المتتالية في الجوار $S(\infty, R)$ لكل $0 < R$ باستثناء عدد منته من العناصر على الأكثر (الشكل 4).

نتيجة (2): بمراعاة مفهومي الجوار عندما $a \neq \infty$ و $a = \infty$ نستطيع دمج تعريفي التقارب (2) و (4) كما يلي:

يقال إن المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة من النقطة a (في $\overline{C}$)

إذا كان كل جوار لـ a يحتوي جميع العناصر باستثناء عدد منته على الأكثر.

الشكل (4)

ملاحظة (1): إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ فإن:

1) المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة في $\overline{C}$ وفي C عندما $a \neq \infty$.

2) المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة في $\overline{C}$ ومتباعدة في C عندما $a = \infty$.

للمتتاليات اللامتناهية في الكبر خواص مختلفة عن الخواص السابقة لأن النقطة $z = \infty$ ليست عدداً وبدون الدخول في التفاصيل نذكر الآتي:

الخاصة (1): **العلاقة بين المتتاليات اللامتناهية في الكبر واللامتناهية في الصفر** لأي $z_n \neq 0\ ;\ n = 1, 2, ...$ يكون:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0 \qquad (18)$$

برهان لزوم الشرط: بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ فإن:

$$\forall R > 0\ \exists n_o(R) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o \Rightarrow |z_n| > R$$

بالتالي:

$$\forall R > 0 \exists n_o(R) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o \Rightarrow \left|\frac{1}{z_n}\right| < \frac{1}{R} = \varepsilon$$

مما يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$

اترك إثبات كفاية الشرط تدريباً.

الخاصة (2): من كل متتالية $\{z_n\}$ (محدودة كانت أم غير محدودة) في $\overline{C}$ يمكن استخلاص متتالية جزئية متقاربة $\{z_{n_k}\}$.

البرهان:

إذا كانت المتتالية $\{z_n\}$ محدودة نحصل على الخاصة (5) ويتم المطلوب.

أما إذا كانت $\{z_n\}$ غير محدودة فإن:

$$\forall R > 0\ \exists\ n_k(R) \in \mathbb{N} \Rightarrow\ |z_{n_k}| > R$$

مما يعني أن $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$ و $\{z_{n_k}\}$ متتالية جزئية متقاربة في $\overline{C}$.

تبين هذه الخاصة أن المستوى $\overline{C}$ متراص بخلاف المستوى C (لماذا؟).

الخاصة (3)- العمليات الحسابية: إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = a \neq \infty$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + \zeta_n) = \infty \quad \& \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\zeta_n}{z_n} = 0 \tag{19}$$

وإذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = a \neq 0, \infty$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n . \zeta_n) = \infty \quad \& \quad \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{\zeta_n} = \infty \tag{20}$$

اترك البرهان تدريباً. البرهان محذوف

ملاحظة (2): رغم عدم جواز كتابات من الشكل $\infty + \infty, z.\infty, z + \infty$ ...الخ لكننا نستخدم ترميزات خاصة من الشكل: $(\beta - \infty, \beta + \infty)$ وتعني المستقيم $\operatorname{Im} z = \beta$ وكحالة خاصة $(-\infty, \infty)$ يرمز للمستقيم $\operatorname{Im} z = 0$ المنطبق على المحور ox.

$(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$ تعني المستقيم $\operatorname{Re} z = \alpha$ وكحالة خاصة $(-i\infty, i\infty)$ يرمز للمستقيم $\operatorname{Re} z = 0$ المنطبق على المحور oy.

(8-1) السلاسل العددية المركبة:

يرتبط مفهوم تقارب سلسلة عددية مركبة بمفهوم تقارب متتالية، وتتم دراستنا للسلاسل في المستوى C فقط.

تعريف (1): لتكن $\{z_n\}$ متتالية مفروضة. **السلسلة العددية** المركبة هي المجموع غير المنتهي التالي:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{1}$$

حيث z_1 الحد الأول، z_n الحد العام أو النوني، n الدليل.

متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ للسلسلة في (1) هي المتتالية التي حدها العام هو:

$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum_{1}^{n} z_k \tag{2}$$

سلسلة **الباقي** النوني للسلسلة (1) هي الناتجة بعد حذف أول n حد أي:

$$z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1} z_k \tag{3}$$

سلسلة القيم المطلقة أو **سلسلة الطويلات** للسلسلة (1) هي:

$$|z_1| + |z_2| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \tag{4}$$

هل التسمية : سلسلة القيم المطلقة دقيقة في التحليل المركب ؟ ولماذا ؟.

(1-8-1) تقارب سلسلة عددية:

تعريف (2): يقال إن السلسلة (1) **متقاربة** ومجموعها هو العدد المركب a إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{s_n\}$ متقاربة ونهايتها هي العدد a ونكتب:

$$\sum_{1} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n = a \tag{5}$$

السلسلة المتباعدة هي كل سلسلة غير متقاربة.

مثال (1): أثبت أن السلسلة $\sum_{0} \dfrac{1}{(1+i)^n}$ متقاربة مستخدماً التعريف.

الحل: نوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية :

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

نضرب الطرفين بالعدد $z = \frac{1}{1+i}$ نجد:

$$\frac{1}{1+i} S_n = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}$$

بالتالي:

$$S_n - \frac{1}{1+i} S_n = \left(1 - \frac{1}{1+i}\right) S_n = 1 - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} - \frac{\frac{1}{(1+i)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+i}}$$

عندما $n \to \infty$ نجد أن الحد الثاني يؤول إلى الصفر لأن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^{n+1}} = 0$ كون

$\left|\frac{1}{1+i}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ والحد الأول مستقل عن n.

بالتالي السلسلة متقاربة ولدينا:

$$a = \sum_{0} \frac{1}{(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = 1 - i$$

بشكل عام وبنفس بالأسلوب نجد أن السلسلة الهندسية $\sum\limits_{0} z^n$ تكـون متقاربـة في كل نقطة z تحقق $|z|<1$ ومجموعها يساوي حدها الأول $z_0 = 1$ مقسوماً على حاصل طرح أساسها z من الواحد. (لماذا؟)

$$\sum_{0} z^n = \frac{1}{1-z} \quad ; \qquad |z|<1 \tag{6}$$

وعندما $|z| \geq 1$ فإن السلسلة تكون متباعدة (انظر المثال4).

فالسلسلة $\sum_{1}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{n}$ متباعدة بينما $\sum_{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ متقاربة. ما هو مجموعها؟.

مثال (2): أثبت أن السلسلة $\sum_{1} a^{n}e^{in\varphi}, 0<a<1$ متقاربة وأوجد مجموعها.

الحل: لدينا سلسلة هندسية $z=\left(ae^{i\varphi}\right)^{n} \Rightarrow |ae^{i\varphi}|=|a|<1$

حدها الأول $ae^{i\varphi}$ وأساسها $z=ae^{i\varphi}$ أقل من الواحد بالطويلة، بالتالي فالسلسلة متقاربة ومجموعها هو:

$$a=\frac{ae^{i\varphi}}{1-ae^{i\varphi}}=\frac{a}{1-2a\cos\varphi+a^{2}}(\cos\varphi-a+i\sin\varphi)$$

مبرهنة (1): لتكن $z_n=x_n+iy_n$ و $a=a_1+ia_2$ عندئذ:

$$\sum_{1} z_n=a \Leftrightarrow \sum x_n=a_1 \quad \& \quad \sum y_n=a_2 \tag{7}$$

$$\sum_{1} z_n=\sum\left(x_n+iy_n\right)=\sum x_n+i\sum y_n=a_1+ia_2 \tag{8}$$

الإثبات: ينتج مباشرة من المبرهنة (1) في (1-7-1) والتعريف (2).

يمكن أخذ المساواة (8) كتعريف لتقارب سلسلة.

مثال (3): ادرس تقارب كل من السلسلتين:

1) $\sum\frac{(-1)^{n}+2i}{n^{2}}$ 2) $\sum\frac{(-1)^{n}+2i}{n}$

الحل:

1) السلسلة متقاربة لأن $\sum x_n=\sum\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}$ متقاربة حسب اختبار ليبنتز و $\sum y_n=\sum\frac{2}{n^{2}}$ متقاربة (لماذا؟).

2) السلسلة متباعدة لأن $\sum x_n=\sum\frac{(-1)^{n}}{n}$ متقاربة بينما السلسلة $\sum y_n=\sum\frac{2}{n}$ متباعدة (لماذا؟).

(2-8-1) **خواص السلاسل المتقاربة:**

يمكن استنتاج خواص السلاسل من خواص المتتاليات:

الخاصة (1)- معيار كوشي: تكون السلسلة $\sum z_n$ متقاربة إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين:

$$\forall \varepsilon > o\ \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > n_o\ ,\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon \qquad (9)$$

$$\forall \varepsilon > o\ \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall m > n > n_o \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| < \varepsilon \qquad (10)$$

الخاصة (2) – شرط التباعد:

1) إذا كانت السلسلة $\sum z_n$ متقاربة فإن حدها العام يؤول إلى الصفر والعكس بشكل عام غير صحيح بالتالي إذا كان الحد العام z_n لايؤول إلى الصفر عندما $n \to \infty$ فإن السلسلة تكون متباعدة.

$$\text{متقاربة } \sum z_n \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad (11)$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \neq 0 \Rightarrow \text{ متباعدة } \sum z_n \qquad (12)$$

2) إذا كانت السلسلة $\sum z_n$ متقاربة فإن المجموع R_n لباقيها يؤول إلى الصفر والعكس بشكل عام غير صحيح.

$$\sum z_n \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} R_n = 0 \qquad (13)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = a \neq 0 \Rightarrow \text{ متباعدة } \sum z_n \qquad (14)$$

حيث:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

~~البرهان~~: حذفا

1) بما أن السلسلة متقاربة فإن الشرط (9) محقق لكل عدد طبيعي P وفي الحالة الخاصة من أجل P = 1 نجد ابتداءً من دليل معين n إن $|z_n| < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > o$ وهذه تعني أن $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ (لماذا؟).

عدم صحة العكس بشكل عام تبينه السلسلة المتباعدة $\sum \frac{i}{n}$ رغم أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

اترك إثبات (2) تدريباً.

مثال (4): بين أن السلسلة الهندسية $\sum\limits_{0} z^n$ متباعدة عندما $|z|\geq 1$.

الحل: بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0$ عندما $|z|\geq 1$ فإن السلسلة متباعدة.

توضيح: السلسلة $\sum\limits_{0}(1+i)^n$ متباعدة لأن $|z|=|1+i|=\sqrt{2}>1$.

الخاصة (3) – العمليات الحسابية: إذا كانت $\sum z_n = a$ و $\sum \zeta_n = b$ و c_1, c_2 ثابتان مركبان فإن:

$$\sum(c_1 z_n \pm c_2\zeta_n) = c_1\sum z_n \pm c_2\sum\zeta_n = c_1 a \pm c_2 b \qquad (15)$$

$$\sum z_n \sum \zeta_n = \sum_{1}(z_1\zeta_n + z_2\zeta_{n-1} + \dots + z_n\zeta_1) = ab \qquad (16)$$

تعريف (3): تسمى السلسلة $\sum z_n$ **متقاربة مطلقاً** إذا كانت السلسلة $\sum |z_n|$ متقاربة وتسمى **متقاربة شرطياً** إذا كانت متقاربة وسلسلة طويلاتها $\sum |z_n|$ متباعدة.

الخاصة (4): كل سلسلة متقاربة مطلقاً تكون متقاربة والعكس بشكل عام غير صحيح.

$$\sum z_n \text{ متقاربة } \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \sum |z_n| \text{ متقاربة} \qquad (17)$$

البرهان: بما أن $\sum |z_n|$ متقاربة فإن الشرط (9) محقق:

$$\forall\varepsilon>o\ \exists n_o(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ ;\ \forall n>n_o, \forall P\in\mathbb{N}\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+P}|z_k|\right|<\varepsilon$$

لكن من متراجحة المثلث لدينا: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+P} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+P}|z_k|<\varepsilon$

أصبح لدينا: $\forall\varepsilon>o\ \exists n_o(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ ;\ \forall n>n_o, \forall p\in\mathbb{N}\Rightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|z_k|<\varepsilon$

والسلسلة $\sum z_n$ تحقق الشرط (9) فهي متقاربة حسب الخاصة (1).

السلسلة $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ المتقاربة شرطياً (تقاربها غير مطلق) تثبت عدم صحة العكس بشكل عام.

الخاصة (5) – الشرط الكافي للتقارب: لتكن $z_n = a_n . b_n$ ولنفرض أن:

1) المتتالية $\{a_n\}$ محدودة، أي $|a_n| < R \quad ; \quad \forall n$

2) المتتالية $\{b_n\}$ لامتناهية في الصغر $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

3) السلسلة $\sum\limits_{1}\left(b_n - b_{n+1}\right)$ متقاربة.

عندئذ تكون السلسلة $\sum z_n$ متقاربة (قد يكون تقاربها شرطياً أو مطلقاً). اترك الإثبات تدريباً.

الخاصة (6) – اختبارات التقارب المطلق:

إن اختبارات التقارب المطلق (وبالتالي التقارب حسب الخاصة (4)) لسلسلة مركبة تؤول إلى اختبارات التقارب لسلسلة حقيقية ذات حدود موجبة وتشبه مثيلاتها في التحليل الحقيقي، لذلك أكتفي بذكر البعض من تلك الاختبارات تاركاً البرهان وذكر البقية تدريباً.

1- تكون السلسلة $\sum z_n$ متقاربة مطلقاً إذا وفقط إذا كانت متتالية الأعداد الحقيقية ذات الحدود الموجبة $\{\sigma_n\}$ محدودة حيث:

$$\sigma_n = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n| \tag{18}$$

2- اختبار المقارنة: لنفرض أن $\sum r_n$ سلسلة حقيقية ذات حدود موجبة ومتقاربة وليكن $|z_n| \le r_n$ بدءاً من دليل معين n. عندئذ تكون السلسلة $\sum z_n$ متقاربة مطلقاً. بالتالي إذا كانت $|\zeta_n| \le |z_n|$ بدءاً من دليل n وكانت السلسلة $\sum \zeta_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum z_n$ تكون متباعدة.

3- اختبار النسبة (دالامبير): نص أول: إذا كانت $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le r < 1$ بدءاً من دليل n فإن السلسلة $\sum z_n$ تكون متقاربة مطلقاً.

نص ثاني: إذا كانت $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\ell<1$ بدءاً من دليل n فإن السلسلة $\sum z_n$ تكون متقاربة. بالتالي إذا كانت $\ell>1$ فإن السلسلة متباعدة.

4- اختبار الجذر (كوشي):

نص أول: إذا كانت $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}\le r<1$ بدءاً من دليل n فإن السلسلة $\sum z_n$ تكون متقاربة.

نص ثان:ما هو؟.

ملاحظات:

1) إذا كان $\ell=1$ في اختبار النسبة أو اختبار الجذر نلجأ إلى اختبار آخر.

2) إذا كانت النهاية العادية $\lim\limits_{n\to\infty}$ موجودة في اختبار الجذر أو النسبة فإنها تساوي النهاية العليا $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$.

3) اختبار الجذر أشمل من اختبار النسبة (لماذا؟).

(3-8-1) إضافات في السلاسل – التتمة 1:

تعريف (4): لتكن $\{k_n\}$ ولنشكل السلسلة.

$$z_{k_1}+z_{k_2}+\ldots+\sum_{n=1} z_{k_n}\quad ;\quad k_1<k_2<\ldots\ ;\ \ k_k\in\mathbb{N} \tag{19}$$

عندئذ تسمى السلسلة في (19) **سلسلة جزئية من السلسلة** $\sum z_n$.

تعريف (5): لتكن لدينا السلسلتين $\sum\limits_{0} z_n$ و $\sum\limits_{0}\zeta_n$ ولنأخذ الجداءات:

$$z_k.\zeta_\ell\ \ ;\ \ k=0,1,\ldots,\ell=0,1,\ldots$$

عندئذ نستطيع تشكيل متتاليات مختلفة $\{p_n\}$ من هذه الجداءات بطرق متنوعة.

لنقوم بترتيب الجداءات تلك كما هو الحال في المحددات بشكل أسطر (k رقم السطر) وأعمدة (ℓ رقم العمود) كما يلي:

$$
\begin{array}{ccccc}
z_o\zeta_o & z_o\zeta_1 & z_o\zeta_2 & \ldots & z_o\zeta_\ell \\
& \swarrow\!\!\nearrow & \nearrow & & \\
z_1\zeta_o & z_1\zeta_1 & z_1\zeta_2 & \ldots & z_1\zeta_\ell \\
& \swarrow & & & \\
z_2\zeta_o & z_2\zeta_1 & z_2\zeta_2 & \ldots & z_2\zeta_\ell \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
z_k\zeta_o & z_k\zeta_1 & z_k\zeta_2 & \ldots & z_k\zeta_\ell
\end{array} \tag{20}
$$

الجداءات التي من أجلها يأخذ المجموع $k+\ell$ القيم 2,1,0,... على التوالي تقع على الخطوط المائلة. بأخذ هذه الجداءات بدءاً من أعلى إلى أسفل نحصل على المتتاليات $\{p_n\}$ مرتبة حسب الخطوط المائلة.

بطريقة أخرى وبالترتيب حسب المربعات التي تقبل الخطوط المائلة أقطاراً لها نحصل على جداءات من أجلها يأخذ كل من k و ℓ القيمة 0 ثم قيمة أصغر أو تساوي 1 ثم قيمة أصغر أو تساوي 2 ... الخ.

تسمى $\sum p_n$ **سلسلة حاصل ضرب السلسلتين** $\sum z_n$ و $\sum \zeta_n$

في الحالة الخاصة **سلسلة الضرب لكوشي** التي نتعامل معها غالباً هي:

$$\sum_{o}\left(z_o\zeta_n + z_1\zeta_{n-1} + z_n\zeta_o\right) \tag{21}$$

نضيف الخواص التالية:

الخاصة (7): إذا كانت السلسلة $\sum z_n$ متقاربة مطلقاً ومجموعها العدد a فإن سلسلة الحدود المتبادلة $\sum \zeta_n$ تكون متقاربة مطلقاً ومجموعها هو a ذاته. بعبارة أخرى فإن تبديل مواضع الحدود في سلسلة متقاربة مطلقاً لايؤثر في تقاربها المطلق ولا في مجموعها.

الخاصة (8): إذا كانت كل من السلسلتين $\sum z_n$ و $\sum \zeta_n$ متقاربة مطلقاً ومجموعها b,a على الترتيب فإن سلسلة حاصل الضرب $\sum p_n$ تكون متقاربة مطلقاً ومجموعها هو a.b:

$$\sum p_n = \sum z_n . \sum \zeta_n = a.b \tag{22}$$

الخاصة (9): إذا كانت السلسلة $\sum z_n$ متقاربة مطلقاً ومجموعها a و $\sum \zeta_n$ سلسلة تنتج عن الأولى بدمج الحدود أي أن:

$$\zeta_1 = z_1 + \ldots + z_{k_1},\ \zeta_2 = z_{k_1+1} + \ldots + z_{k_2}, \ldots, \zeta_n = z_{k_{n-1}} + \ldots + z_{k_n}, \ldots$$

فإن $\sum \zeta_n$ تكون متقاربة مطلقاً ومجموعها هو a ذاته.

بعبارة مختصرة: تجميع الحدود في سلسلة متقاربة مطلقاً لايؤثر في تقاربها المطلق ولا على مجموعها.

الخاصة (10): إذا كانت كل من السلسلتين $\sum z_n$ و $\sum \zeta_n$ متقاربة مطلقاً فإن سلسلة الضرب لكوشي تكون متقاربة مطلقاً.

الخاصة (11) – للسلاسل المضاعفة. لتكن لدينا المصفوفة:

$$(z_{k\ell}) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13}\ldots \\ z_{21} & z_{22} & z_{23}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{k_1} & z_{k_2} & z_{k_\ell}\ldots \end{pmatrix} \qquad (23)$$

ولنفرض أننا قمنا بترتيب عناصرها بشكل متوالية بسيطة $\{z_n\}$.

إذا كانت $\sum z_n$ متقاربة مطلقاً فإن كل سلاسل الأسطر

$$\sum_{\ell=1} z_{k\ell} = I_k \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots$$

وكل سلاسل الأعمدة:

$$\sum_{k=1} z_{k\ell} = I_\ell \ , \quad \ell = 1, 2, \ldots$$

تكون متقاربة مطلقاً، كما أن كل من السلسلتين $\sum I_k$ و $\sum I_\ell$ تكون متقاربة مطلقاً ويكون:

$$\sum_{k=1} I_k = \sum_{\ell=1} I_\ell = \sum_{k=1} z_n \qquad (24)$$

تمارين محلولة – المجموعة الثانية

تمرين (1): أوجد مسقط كل مما يلي على كرة ريمان S:

1) النقطة $-3+2i$ 2) الدائرة $6\left(x^2+y^2\right)+2x-y+2=0$

الحل:

1) لدينا $x=-3$, $y=2$ بالتالي:

$$\xi=\frac{-3}{1+13}=-\frac{3}{14}\ ,\ \eta=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}\ ,\ \zeta=\frac{13}{14}$$

2) بتعويض $a=6$, $b=2$, $c=-1$, $d=2$ في معادلة المستوى (أي مستوى نقصد؟)

نجد:
$$2\xi-\eta+(6-2)\zeta+2=0$$

وتقاطع المستوى $2\xi-\eta+4\zeta+2=0$ مع معادلة الكرة S هي الدائرة المطلوبة.

تمرين (2): a) صف المجموعات التالية:

1) $|\operatorname{Im} z|>1$ 2) $|z|\le \operatorname{Re} z+2$

3) $\{|z|<2\}\cup\{-3\}$ 4) $2\sqrt{2}\le|z-1|+|z+1|<3$

5) $\operatorname{Re}(2z+i-1)\ge 1$

b) صف المنحنيات التالية:

1) $$\gamma_1: z(t)=\sin t+i\quad ;-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}.$$

2) $$\gamma_2: z(t)=2\cos t-i\sin t\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

3) $$\gamma_3: z(t)=\begin{cases}1+t-i & ;\quad -1\le t\le 0\\ 1-i(1-t) & ;\quad 0\le t\le 1\end{cases}$$

ثم أثبت تحليلياً أن المنحني γ_2 أملس.

الحل: a)

1) مجموعة مفتوحة وحيدة الاتصال غير محدودة وحدودها المستقيمان الموجهان $y=\operatorname{Im} z=\pm 1$.

2) مغلقة وحيدة الاتصال غير محدودة وحدودها القطع المكافئ الموجه $|z|=\operatorname{Re} z+2$.

3) ليست مغلقة وليست مفتوحة وحدودها النقطة $z=-3$ والدائرة $|z|=2$.

4) ليست مغلقة وليست مفتوحة متعددة الاتصال وحدودها القطع الناقص $|z-1|+|z+1|=3$ الموجه إيجاباً والقطع الناقص: $|z-1|+|z+1|=2\sqrt{2}$ الموجه سلباً.

5) المجموعة $x\geq 1$ مغلقة وحيلة الاتصال غير محدودة وحدودها المستقيم $x=1$ الموجه من أعلى إلى أسفل.

(b

-1 لدينا $x(t)=\sin t\ ,\ y(t)=1\ ;\ -\frac{\pi}{2}\leq t\leq \frac{3\pi}{2}$ عندما تمسح t المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ نجد أن x ترسم القطعة [-1, 1] وعندما $t\ni\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ نجد أن x ترسم [1,-1] وفي الحالتين $y=1$ ثابت بالتالي المنحنى هو القطعة $[-1+i,1+i]$ مغطاة مرتين بالجاهين متعاكسين.

-2 بحذف t من الجملة $x(t)=2\cos t$ و $y(t)=-\sin t$ نجد القطع الناقص $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. عندما $t\ni[0,\pi]$ نجد $x\ni[2,-2]$ و $y<0$ وعندما $t\ni[\pi,2\pi]$ نجد أن $x\ni[-2,2]$ و $y>0$ مما يعني أن القطع موجه سلباً.

-3 $\gamma=[-i,1-i]\cup[1-i,1]$

التابع $z'(t)=(2\cos t)'-i(\sin t)'=-2\sin t-i\cos t$ مستمر في المجال $[0,2\pi]$ وبما أن: $|z'(t)|^2=4\sin^2 t+\cos^2 t=4-3\cos^2 t\neq 0\quad \forall t\in[0,2\pi]$ و $z'(0)=z'(2\pi)$ فإن المنحنى γ_2 أملس على المجال $[0,2\pi]$.

تمرين (3): 1) مستفيداً من التمثيل الوسيطي للقطعة $[z_1,z_2]$:

$$\gamma: z(t)=z_1+t(z_2-z_1)\ ;\ 0\leq t\leq 1$$

أوجد تمثيلاً وسيطياً للقطعة $[0,1+i]$ ثم تمثيلاً لطريق المثلث الذي رؤوسه $i,1,0$ والموجه ايجاباً والمعرّف في $[0,1]$.

2) أعطِ تمثيلات وسيطية متكافئة للقطعة $[0,1+i]$.

الحل:

1) $$\gamma=[0,1+i]:z(t)=(1+i)t\ \ ;\ \ 0\le t\le 1$$

لدينا $\gamma=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ حيث: $\gamma_1=[0,1],\gamma_2=[1,i],\gamma_3=[i,0]$ عندئذ:

$$\gamma_1:z_1(t)=t\ ,\ \gamma_2:z_2(t)=1+t(i-1),\ \gamma_3:z_3(t)=i-ti;\ 0\le t\le 1$$

بتعريف γ_1 على $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ و γ_2 على $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ و γ_3 على $\left[\frac{2}{3},1\right]$ نجد المنحنى

$$\gamma:z(t)=\begin{cases}3t & ;\ 0\le t\le\frac{1}{3}\\ 1+3\left(t-\frac{1}{3}\right)(i-1) & ;\ \frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}\\ i-3\left(t-\frac{2}{3}\right)i & ;\ \frac{2}{3}\le t\le 1\end{cases}$$

2) يمكن إعطاء القطعة $[0,1+i]$ بإحدى التمثيلات المتكافئة:

$$\gamma:z_1(t)=t+it\quad ;\ 0\le t\le 1$$

$$\gamma:z_2(t)=2t+2ti\quad ;\ 0\le t\le\frac{1}{2}$$

$$\gamma:z_3(t)=\mathrm{tg}t+i\,\mathrm{tg}t\quad ;\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}$$

تمرين (4): ليكن:

$$\gamma:z(t)=\begin{cases}1+it & ;\ 0\le t\le 1\\ (2-t)+i & ;\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

1) احسب: $\int_\gamma x\,dz\ ;\ z'(t)$

2) خذ تمثيلاً آخر للمنحنى γ واحسب قيمة التكامل السابق عليه. ماذا تلاحظ؟

3) احسب قيمة التكامل على القطعة $[0,i]$. ماذا تستنتج؟

الحل: 1) $$z'(t)=\begin{cases}i & ;\ 0\le t\le 1\\ -1 & ;\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

$$\int_\gamma x dz=\int_\gamma x(dx+idy)=\int_0^1 i dt+\int_1^2 (2-t)(-1)dt=-\frac{1}{2}+i$$

2) لنأخذ التمثيل:

$$\gamma:z(t)=\begin{cases}1+i\lg t & ; \quad 1\le t\le e\\ 2-\frac{t}{e}+i & ; \quad e\le t\le 2e\end{cases}$$

عندئذ: $$\int_\gamma x dz=\int_1^e \frac{i}{t}dt+\int_e^{2e}\left(2-\frac{t}{e}\right)\left(-\frac{1}{e}\right)dt=-\frac{1}{2}+i$$

نلاحظ أن قيمة التكامل لن تتغير.

3) بأخذ التمثيل $\gamma:z(t)=(1-t)+it \ ; 0\le t\le 1$ للقطعة $[0,i]$ نجد أن:

$$\int_\gamma x dz=\int_0^1 (1-t)(-1+i)dt=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

نستنتج أن قيمة التكامل قد تغيرت عن قيمتها السابقة رغم أن للمنحنيات التكاملية الثلاث نفس نقطة البداية 0 ونفس نقطة النهاية i مما يعني أن المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل (مبرهنة نيوتن - ليبنتز) المعروفة للتوابع الحقيقية ليست صحيحة بشكل عام للتوابع المركبة.

تمرين (5):

1) أوجد الساحة واتجاه الحدود إذا كانت هذه الساحة تحتوي النقطة i والحدود معطة بالمعادلة $|\arg z|=\frac{\pi}{4}$. $\arg z=\pm\frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow$

2) ليكن $u(x,y)$ تابع حقيقي معرف في الساحة D ويحقق $u_x=u_y=0$ لكل نقطة (x,y) من D. أثبت أن $u\equiv \text{const}$ في D ثم أعطِ مثالاً تبين فيه أن هذه القضية ليست صحيحة إذا لم تكن D ساحة.

الحل:

1) المعادلة المفروضة هي اتحاد الشعاعين $\arg z=\frac{\pi}{4}$ و $\arg z=-\frac{\pi}{4}$ بتوجيه الحدود من أسفل إلى أعلى نجد أن الساحة هي جزء المستوى الواقع على اليسار والذي يحتوي i.

2) بما أن $u_x = 0$ فإن $u \equiv const$ على كل قطعة أفقية واقعة في D وبما أن $u_y = 0$ فإن $u \equiv const$ على كل قطعة شاقولية واقعة في D. وبالتالي $u \equiv const$ على كل خط منكسر أضلاعه توازي المحاور الإحداثية ويقع في D.

لكن كل قطعة مستقيمة يمكن تقريبها بعدد منته من القطع المستقيمة الأفقية والشاقولية، مما يعني أن $u \equiv const$ في الساحة D.

لنأخذ المجموعة $E = \{|z|<2\} \cup \{|z|>2\}$ ونعرف عليها التابع:

$$u = \begin{cases} 1 & ; \quad |z|<1 \\ 0 & ; \quad |z|>2 \end{cases}$$

عندئذ $u_x = u_y = 0$ في E ومع ذلك فإن u لايطابق الثابت في E والسبب في ذلك هو أن E ليست متصلة.

تمرين (6): اذكر بعض الخواص التبولوجية لمجموعة نقاط E في المستوى المركب.

الحل:

1) تقاطع عدد منته أو اتحاد عدد عدود من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

2) مبرهنة بولزانو – فايرشتراوس. لكل مجموعة محدودة غير منتهية E في C يوجد نقطة تراكم واحدة على الأقل.

3) مبرهنة غينة – بوريل. من كل تغطية مفتوحة (G) للمجموعة المتراصة E في C يمكن استخلاص تغطية جزئية منتهية لـ E.

4) مبرهنة غينة – بوريل – ليبنغ : تكون E متراصة في المستوى الموسع $\overline{C}$ إذا وفقط إذا أمكن عزل تغطية منتهية من كل تغطية غير منتهية (G) لـ E.

5) تكون a نقطة تراكم لـ E إذا وفقط إذا وجدت متتالية $\{(x_n, y_n)\}$ من نقاط E متقاربة من a.

6) كل مجموعة غير منتهية E ومحدودة في C تحتوي متتالية متقاربة.

الحفظ

7) كل مجموعة غير منتهية E في $\overline{C}$ تملك نقطة تراكم واحدة على الأقل.

وبشكل عام كل متتالية من مجموعة متراصة E في $\overline{C}$ تملك نقطة تراكم واحدة على الأقل.

تمرين (7): أي من المتتاليات التالية متقاربة وماهي نهايتها؟

$$1)\ \left\{\left(\frac{1-i}{4}\right)^n\right\} \qquad 2)\ \left\{e^{2\pi n i/5}\right\} \qquad 3)\ \left\{\operatorname{Arg}\left[\frac{(-1)^n}{n}+i\right]\right\}$$

الحل:

1) متقاربة من 0   2) متباعدة   3) متقاربة من $\frac{\pi}{2}$.

تمرين (8): **a)** أوجد مجموع كل من السلاسل المتقاربة التالية:

$$1)\ \sum_{1}\left(\frac{i}{3}\right)^n \qquad 2)\ \sum_{0}\frac{3}{(1+i)^n} \qquad 3)\ \sum_{0}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$4)\ \sum_{14}\left(\frac{1}{2i}\right)^n \qquad 5)\ \sum_{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \qquad 6)\ \sum_{0}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

b) ادرس تقارب كل من السلاسل التالية:

$$1)\ \sum_{0}\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^n \qquad 2)\ \sum_{1}\frac{(-1)^n n^3}{(1+i)^n} \qquad 3)\ \sum_{1}\left(i^n-\frac{1}{n^2}\right)$$

الحل: a)   1) $-\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$ 2) $3-3i$ 3) $\frac{3}{5}$

4) $\frac{-2+i}{5.2^{13}}$ 5) $\frac{9}{8}$ 6) -1

b)   1) متباعدة   2) متقاربة   3) متباعدة

تمارين غير محلولة – المجموعة الثانية

تمرين (1) أوجد مسقط كل مما يلي على كرة ريمان S:

1) النقطة $e^{i\alpha}$ 2) نصف المستوى $\operatorname{Im} z \ge 0$

3) المستقيم $2y - 4x = 3$

ثم ما هو مسقط النصف الأيسر للكرة على المستوى المركب؟

تمرين (2): a) صف المجموعات التالية:

2) $|z-1| < \operatorname{Im} z$ 2) $(\operatorname{Re} z)^2 \ge 1$

3) $|2z-1+3i| \le 6$ 4) $|2z+4i-1| + |2z+3-2i| = 8$

b) صف المنحنيات التالية:

1) $\gamma_1 : z(t) = t + it^{-1} \quad ; \quad -\infty < t < 0$

2) $\gamma_2 : z(t) = i\cos t \quad ; \quad -\pi \le t \le 5\pi$

3) $\gamma_3 : z(t) = 2\operatorname{sh} 2t - i\operatorname{ch} 2t \quad ; \quad -\infty < t < +\infty$

ثم أثبت تحليلياً أن المنحنى $\gamma : z(t) = 3t^2 - i\cos t \; ; \; 0 < t < +\infty$ أملس.

تمرين (3): أعطِ عدداً من التمثيلات الوسيطية المتكافئة لكل من المنحنيين:

1) القطعة $[-2i, 1-2i]$ 2) $y = x^3 \; ; \; 1 < x < 2$

تمرين (4): a) احسب $\int xdz \, , \int ydz \, , \int \bar{z}dz$ على كل من المنحنيات:

1) القطعة $[0, 1-i]$ 2) $|z| = 1$ 3) $|z-a| = r$

b) احسب $\int_\gamma ydz$ حيث $\gamma[1,i]$ ثم γ القوس من الربع الأول للدائرة $|z| = 1$ من النقطة 1 وحتى i. ماذا تستنتج؟

تمرين (5)

1) أوجد الساحة التي حدودها معطاة بالمعادلة $y = x$ وبحيث $z = -2$ نقطة داخل تلك الساحة.

2) ليكن $u\ (x,y)$ تابع معرف في الساحة D بحيث إن $u_x = y$ و $u_y = x$ لكل نقطة (x,y) من D. أثبت أن:

$$u = xy + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

تمرين (6): اذكر بقية الخواص الأساسية التبولوجية لمجموعة نقطية في المستوى المركب.

تمرين (7): أي من المتتاليات التالية متقاربة وماهي نهايتها؟

1) $\left\{\left(1+\frac{i}{3}\right)^n\right\}$ 2) $\left\{\frac{n^2+n!i}{2^n}\right\}$ 3) $\frac{(n-1)(1-ni)^n}{n^2}$

تمرين (8): a) أوجد مجموع كل من السلاسل ~~المتقاربة~~ التالية: إن وجد

1) $\sum_1 \left(\frac{n}{2}\right)^n$ 2) $\sum_0 \frac{5}{(-1+i)^n}$ 3) $\sum_1 \mathrm{Arg}\left[\frac{1}{n}+(-1)^n i\right]$

b) ادرس تقارب كل من السلاسل التالية:

1) $\sum_1 \frac{1}{n^2.3^n}$ 2) $\sum_1 \frac{ni^n}{2n+1}$ 3) $\sum_1 \frac{(3+i)^n}{n!}$

الفصل الثاني

التابع المركب بمتحول مركب

أساسيات التفاضل والتكامل في التحليل المركب

Complex function with one complex variable.

The principle of differential and integral in complex analysis

خصص هذا الفصل للتعرف على أهم المفاهيم والتراكيب الرياضية لعلم التفاضل والتكامل في الساحة المركبة كالنهاية والاستمرار وقابلية المكاملة وقابلية المفاضلة لتابع مركب.

(2-1) النهاية:

(2-1-1) مفاهيم أساسية:

1) **التابع المركب بمتحول مركب واحد الوحيد القيمة** $\omega = f(z)$ هو علاقة رياضية f تنقل كل عنصر أو نقطة $z \in E_1$ إلى عنصر وحيد $\omega \in E_2$، **والتابع المركب المتعدد القيم** هو علاقة تنقل كل عنصر إلى أكثر من عنصر واحد، حيث E_1 و E_2 مجموعتان نقطيتان في المستوى المركب $\overline{C}$ وتسمى النقطة ω صورة النقطة الأصل z وفق f و E_1 **مجموعة التعريف** و E_2 **مجموعة القيم** (بيان التابع).

إذا كان $\omega = f(z)$ تابعاً مركباً وحيد القيمة، معرفاً في المجموعة E_1 ويأخذ قيمه في E_2 فاننا نكتب:

$$f : E_1 \subseteq \overline{C}_z \to E_2 \subseteq \overline{C}_\omega \qquad (1)$$

هندسياً التابع $\omega = f(z)$ هو تحويل او تطبيق ينقل E_1 إلى E_2.

بوضع $z = x + iy$، $\omega = f(z) = u + iv$ نجد أن:

$$\begin{aligned} &\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Leftrightarrow \\ &u = u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)\ ,\ v = v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) \end{aligned} \qquad (2)$$

$f = z^2 + i$, $E_1 \equiv C_z$ ← تابع وحيد القيمة
مجموعة تعريفه
$E_1 = \overline{C}_z$ عندئذ $f(\infty) = \infty$ اعتبرنا أن ... $E_2 \equiv C$ مجموعة قيم
$= \overline{C}_w$ مجموعة قيمه

$u = x^2 - y^2$
$v = (2xy + 1)$

$F = (x+iy)^2 + i = (x^2 - y^2) + i(2xy + 1)$ $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$

$\arg f = \arg w$ مما يعني أن كل تابع مركب بمتحول مركب يقابله تابعين حقيقيين v,u كل منهما بمتحولين حقيقيين y,x . بالتالي لتمثيل بيان التابع f نحتاج إلى أربعة أبعاد ولأن ذلك غير ممكن نأخذ مستويين مركبين: الأول C_z محوره الحقيقي ox والتخيلي oy وفيه تقع النقطة الأصل z، أي: $\overline{C}_z \supseteq E_1$ والثاني C_ω محوره الحقيقي ou والتخيلي ov ، وفيه تقع النقطة الصورة ω أي: $\overline{C}_\omega \supseteq E_2$ (الشكل1).

الشكل (1)

نقبل مبدئيا بالمفهوم التالي:

2) **الفرع** للتابع المتعدد القيم $\omega = F(z)$ هو تابع وحيد القيمة f قيمته في كل نقطة $z \ni E_1$ تتطابق مع إحدى قيم F في z .

إذا كان التابع المتعدد القيم F يأخذ n قيمة مختلفة مثنى مثنى $(n \neq +\infty)$ في كل نقطة $z \ni E_1$ فإننا نقول إن التابع F **ذو n قيمة** في E_1 وهنا F منته القيم ، أما إذا كان F يأخذ عدداً لانهائياً من القيم المختلفة مثنى مثنى $(n = +\infty)$ في كل نقطة $z \ni E_1$ فنقول إن F **لانهائي القيم** في E_1.

في الحالة الخاصة عندما $n = 1$ يكون $F = f$ وحيد القيمة في E_1 .

على سبيل المثال كثيرات الحدود $P_n(z)$ هي توابع وحيدة القيمة و يكون :

$$E_1 \equiv \overline{C}_z \xrightarrow{P_n} E_2 \equiv \overline{C}_\omega \quad ; \quad P_n(\infty) = \infty \qquad (3)$$

والتابع الكسري العادي البسيط $f = \dfrac{P_n(z)}{q_m(z)}$ وحيد القيمة ، معرف في الساحة $E_1 = C_z \setminus \{q_m(z) = 0\}$.

في (3-2) نجد أن تابع الزاوية $F(z) = \arg z$ لانهائي القيم في الساحة $E_1 = \overline{C} \setminus \{0, \infty\}$ وتابع الجذر $F(z) = \sqrt{z}$ ثنائي القيم في الساحة E_1. وأخيراً التابع اللوغاريتمي $F = \ln z$ لانهائي القيم في ذات الساحة E_1 وهذا ينتج أيضاً من وجود

$f = \sqrt{z}$ $z \in E_1 = C \setminus \{0\}$ تابع ثنائي القيمة :
وهنا لكل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصرين من المستقر.

تابع الزاوية اللانهائي القيم في الصيغ الرياضية لتلك التوابع التي وردت سابقاً بعد اعتبار z متحولاً بدلاً من ثابت . ما هي؟.

نبحث فروع هذه التوابع بالتفصيل لاحقا لاسيما في الفصل الأول من الجزء الثاني.

3) وحدانية الصفحة لتابع وحيد القيمة في ساحة:

يقل إن التابع $\omega=f(z)$ **وحيد الصفحة** في المجموعة E_1 إذا كان معرفاً في E_1 ويحقق أحد الشرطين المتكافئين:

$$f(z_1)=f(z_2) \Rightarrow z_1=z_2 \quad \forall z_1,z_2 \in E_1 \tag{4}$$

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2) \quad \forall z_1,z_2 \in E_1 \tag{5}$$

4) **التابع العكسي** f^{-1} للتابع وحيد القيمة $\omega=f(z)$ هو مجموعة حلول المعادلة $f(z)=\omega$ بالنسبة لـ z .

كما هي العادة عند دراسة التابع f^{-1} بصورة مستقلة عن التابع f نستبدل شكلياً مواضع z و ω في حلول المعادلة.

نلاحظ مباشرة أنه إذا كان f^{-1} هو التابع العكسي للتابع f فإن:

$$f\left[f^{-1}(\omega)\right]\equiv\omega \quad ; \quad \forall\omega\in E_2 \tag{6}$$

$$f^{-1}\left[f(z)\right]\equiv z \quad ; \quad \forall z\in E_1$$

يتم الحصول على توابع متعددة القيم بشكل عام عندما نأخذ التابع العكسي لتابع وحيد القيمة ففي الفقرة (3-4) و (3-5) نجد أن التابع العكسي للتابع الوحيد القيمة z^2 هو تابع الجذر التربيعي الثنائي القيم والتابع العكسي للتابع النيبري e^z هو التابع اللوغاريتمي اللانهائي القيم بعد تثبيت فرع وحيد القيمة.

مثال (1): ليكن التابع $a\neq 0$; $\omega=f(z)=az+b$

1- عيّن أوسع ساحة يكون فيها التابع f وحيد الصفحة.

2- أوجد التابع العكسي f^{-1} للتابع f.

الحل:

1) التابع المعطى كثيرة حدود (تابع خطي) فهو وحيد القيمة في كل $\overline{C}_z$ ولدينا:

$$\overline{C}_z \xrightarrow{f} \overline{C}_\omega \quad ; \quad f(\infty)=\infty$$

وبما أن:

$$f(z_1)=f(z_2) \Rightarrow az_1+b=az_2+b \Rightarrow$$
$$z_1=z_2 \quad \forall z_1,z_2 \in C_z$$

فإن التابع f وحيد الصفحة في كل المستوى $E_1 \equiv \overline{C}_z$.

2) التابع العكسي f^{-1} هو مجموعة حلول المعادلة $az+b=\omega$ بالنسبة لـ z أي:

$$f^{-1}(z)=\frac{1}{a}\omega-\frac{b}{a}$$

باستبدال مواضع z و ω نجد عبارة التابع العكسي:

$$f^{-1}(z)=\frac{1}{a}z-\frac{b}{a}$$

اترك تدريباً إثبات صحة الخواص التالية للتوابع وحيدة القيمة:

الخاصة (1): إذا كان f وحيد الصفحة في المجموعة E_1 فإنه يكون وحيد الصفحة في كل مجموعة جزئية من E_1.

الخاصة (2): تحصيل تابعين كل منهما وحيد الصفحة هو تابع وحيد الصفحة وبالتحديد إذا كان التابع $\zeta=f(z):E_1\to E_2$ وحيد الصفحة في E_1 و $\omega=g(\zeta):E_2\to E_3$ وحيد الصفحة في $\overline{C}_\zeta \supseteq E_2$ فإن تابع التحصيل (التركيب) $\omega=g(f(z)):E_1\to E_3$ يكون وحيد الصفحة في المجموعة E_1.

الخاصة (3): الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع (التحويل) $\omega=f(z)$ وحيد الصفحة في المجموعة E_1 هو أن يكون تابعه العكسي f^{-1} وحيد القيمة في المجموعة E_2 حيث $f: E_1\to E_2$.

تنويه: سوف نستخدم هذه الخاصة بكثرة لسهولة تطبيقها.

فالتابع $f(z)=az+b$ وحيد الصفحة في كل $\overline{C}_z$ لأن تابعه العكسي $f^{-1}=\frac{1}{a}\omega-\frac{b}{a}$ وحيد القيمة في كل المستوى المركب $\overline{C}_\omega$.

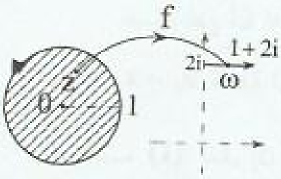
تهمنا عملياً الحالة عندما E_1 ساحة.

مثال (2):

1) أوجد صورة الساحة $E_1=\{|z|\le 1\}$ وفق $f=x^2+2i$.

2) أوجد صورة الساحة $E_1=\{|z|\le 2, \operatorname{Im} z\ge 0\}$ وفق $f=z^3$.

الحل:



الشكل (2)

1- لدينا $-1\le x\le 1$; $u=x^2$ وتبقى v ثابتة $v=2$.

عندما تغطي النقطة z كامل القرص E_1 فإن النقطة u ترسم القطعة المستقيمة الموجهة $[0,1]$ و$v=2$ دوماً. بالتالي الصورة $\omega=[0+2i,1+2i]$ ترسم القطعة المستقيمة الموجهة التالية (الشكل2).

$$E_2=[0+2i,1+2i]=[2i,1+2i]$$

هل التحويل f وحيد الصفحة في القرص E_1؟

2- التابع $f=z^3$ ككثيرة حدود معرف في كل $\overline{C}_z$ والساحة المعطاة E_1 مجموعة جزئية من $\overline{C}_z$.

لدينا:

$$|z|\le 2 \xrightarrow{z^3} |\omega|\le 8$$

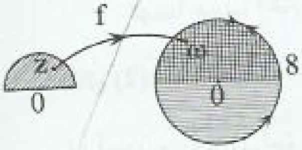
$$0\le \arg z\le \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{z^3} 0\le \arg \omega\le 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{3}\le \arg z\le \pi \xrightarrow{z^3} 2\pi\le \arg \omega\le 3\pi$$

بملاحظة أن $\{0 \le \arg\omega \le \pi\} \equiv \{2\pi \le \arg\omega \le 3\pi\}$ وأن:

$$E_1 = \left\{0 \le \arg z \le \frac{2\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} \le \arg z \le \pi\right\}$$

نجد أن صورة الساحة E_1 هي القرص الدائري $|\omega| \le 8$:E_2، حيث نصفه العلوي مغطى مرتين (الشكل 3). بالتالي f ليس وحيد الصفحة في القرص E_1 لماذا؟.



الشكل (3)

(2-1-2) **النهاية في المستوى C:**

لن نبالغ القول إن فرع التحليل الرياضي بما في ذلك التحليل المركب يعتمد على مفهوم النهاية.

نفرض أن $f(z) = u + iv$ تابع معرف في المجموعة E_1 من C_z و $z_o = x_o + iy_o$ **نقطة تراكم** لـ E_1.

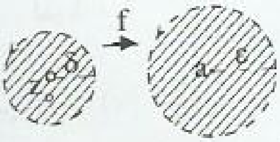
تعريف **(1):** يُقال إن العدد $a = a_1 + ia_2$ هو **نهاية التابع f** عند النقطة z_o (أو عندما $z \to z_o$) ضمن E_1 ونكتب $\lim\limits_{z \to z_o, z \in E_1} f(z) = a$ (أو اختصاراً $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = a$ أو $\left(f \xrightarrow[z \to z_o]{} a\right)$) إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة:

$$\lim_{z \to z_o} |f - a| = 0 \tag{7}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ ;\ \forall z \in E_1\ ,\ 0 < |z - z_o| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon \tag{8}$$

$$\forall \{z_n\};\ z_n \in E_1\ ,\ z_n \ne z_o\ ,\ \lim_{n \to \infty} z_n = z_o \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(z_n) = a \tag{9}$$

الشرط في (8) هو تعريف النهاية بلغة ε (شرط كوشي) (الشكل4) والشرط في (9) هو تعريف النهاية بلغة المتتاليات (شرط غينه).



الشكل (4)

حيث النهاية في التعريف مستقلة عن مسار z
نحو z_o وأن عدد المسارات غير منتهية

إذا لم يتحقق التعريف (1) يقال إن النهاية $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ غير موجودة في C_z.

مثال (3): أثبت أن $\lim\limits_{z\to 3} \frac{z-1}{z-2}=2$ وأن $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2}$ غير موجودة.

الحل:

لدينا التابع $f=\frac{z-1}{z-2}$ معرف في الساحة $E_1=\overline{C}_z\setminus\{2\}$ حيث $f(\infty)=1$ و $z_0=3$ نقطة تراكم لـ E_1 و $a=2$.

نفرض أن $\varepsilon>0$ عدد مفروض و $0<|z-3|<\delta$ ولنوجد δ بدلالة ε بحيث تتحقق المتراجحة $|f(z)-a|<\varepsilon$. لدينا:

$$|f(z)-a|=\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|=\left|\frac{3-z}{z-2}\right|=\left|\frac{z-3}{z-2}\right|<\frac{\delta}{|z-2|}$$

لكن عندما $\delta<\frac{1}{2}$ لدينا:

$$|z-2|=|1-(3-z)|\geq 1-|z-3|>1-\delta>\frac{1}{2}$$

أصبح لدينا:

$$|f(z)-a|<\frac{\delta}{\frac{1}{2}}=2\delta \quad ; \quad \delta<\frac{1}{2}$$

ولجعل $2\delta<\varepsilon$ يكفي أن نختار $\delta\leq\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

التابع $f=\frac{z^2}{|z|^2}$ معرف في كل الساحة $E_1=C\setminus\{0\}$ و $z_0=0$ نقطة تراكم لـ E_1. لكن عندما $z\to 0$ على المسار $z=iy$ نجد أن:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

وعندما $z\to 0$ على المسار $z=x$ مثلاً نجد أن:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

بالتالي $\lim_{z\to 0} f(z)$ تتعلق بمسار z نحو الصفر فهي إذن غير موجودة.

تعطي المبرهنة التالية العلاقة بين نهاية تابع مركب ونهاية تابع حقيقي ويمكن أخذها كتعريف للنهاية.

مبرهنة (1): إذا كان $f=u+iv$ تابع معرف في جوار موخوذ للنقطة $z_0=x_0+iy_0$ و $a=a_1+ia_2$ عدد مركب فإن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u=a_1 \;\&\; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v=a_2 \qquad (10)$$

إثبات لزوم الشرط: بما أن $\lim_{z\to z_0} f(z)=a$ فإن $\lim_{z\to z_0}|f(z)-a|=0$ ونجد المطلوب بأخذ النهاية عندما $z\to z_0$ في طرفي المتراجحتين المثلثين:

$$|u-a_1|\le|f-a| \;\&\; |v-a_2|\le|f-a|$$

كفاية الشرط: بما أن $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|u-a_1|=0$ و $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|v-a_2|=0$ فإنه بأخذ النهاية عندما $z\to z_0$ (أو $(x,y)\to(x_0,y_0)$) في طرفي المتراجحة:

$$|f-a|\le|u-a_1|+|v-a_2|$$

نجد المطلوب.

مثال (4): أوجد قيمة النهاية $\lim_{z\to i}(i\bar{z}-3)$

الحل: لدينا:

$$\begin{aligned}
&f(z)=i\bar{z}-3=(y-3)+ix=u+iv \Rightarrow\\
&u=y-3,\; v=x \Rightarrow \lim_{z\to i} f(z)=\lim_{(x,y)\to(0,1)}(y-3)+i\lim_{(x,y)\to(0,1)} x\\
&=(1-3)+i0=-2
\end{aligned}$$

لنلاحظ في تعريف النهاية للتابع f عند النقطة z_0 لم نشترط أن يكون f معرفاً في z_0 بل يكفي أن تكون النقطة z_0 نقطة تراكم لمجموعة التعريف E_1. على سبيل المثال

التـابع $f=\dfrac{z^2+1}{z+i}$ غـير معـرف في نقطـة التراكـم $z_0=-i$ لمجموعـة التعريـف $E_1=C\setminus\{-i\}$ ومع ذلك فإنه عندما $z\neq -i$ يكون:

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z+i}=\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z-i)}{z+i}=\lim_{z\to -i}(z-i)=-2i$$

العمليات على النهايات في المستوى C تشبه مثيلاتها في $\mathbb{R}$:

إذا كانت $\lim_{z\to z_0}f(z)=a$ و $\lim_{z\to z_0}g(z)=b$ و c ثابت مركب فإن:

$$\lim_{z\to z_0}(c.f(z))=c.\lim_{z\to z_0}f(z)=c.a \tag{11}$$

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=\lim_{z\to z_0}f(z)\pm\lim_{z\to z_0}g(z)=a\pm b \tag{12}$$

$$\lim_{z\to z_0}(f(z).g(z))=\lim_{z\to z_0}f(z).\lim_{z\to z_0}g(z)=a.b \tag{13}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim_{z\to z_0}f(z)}{\lim_{z\to z_0}g(z)}=\frac{a}{b}\quad;\quad b\neq 0 \tag{14}$$

البرهان:

يمكن إثبات صحة العلاقات باستخدام التعريف (1) أو المبرهنة (1).

المساواة (11) واضحة.

لنبرهن صحة حالة الجمع في (12). بما أن:

$$\lim_{z\to z_0}g(z)=b\quad\&\quad\lim_{z\to z_0}f(z)=a$$

فإن:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1(\varepsilon)>0\ ;\ \forall z\in E_1\ ,\ o<|z-z_0|<\delta_1\Rightarrow|f-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2(\varepsilon)>0\ ;\ \forall z\in E_1\ ,\ o<|z-z_0|<\delta_2\Rightarrow|g-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

بالتالي:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)=\min\{\delta_1,\delta_2\}\ ;\ \forall z\in E_1\ ,\ o<|z-z_0|<\delta\Rightarrow$$

$$|(f+g)-(a+b)|\leq|f-a|+|g-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

بنفس الأسلوب نبرهن حالة الطرح.

لبرهان صحة حالة الضرب (13) نكتب:

$$|f.g-a.b|=|f.g-f.b+f.b-ab|$$
$$=|f\cdot(g-b)+b\cdot(f-a)|\le|f|\cdot|g-b|+|b|\cdot|f-a|$$

لكل $0<\varepsilon_2$ & $o<\varepsilon_1$ لدينا $|f-a|<\varepsilon_1$ و $|g-b|<\varepsilon_2$ فرضاً

و $|f|=|(f-a)+a|\le|f-a|+|a|<\varepsilon_1+|a|$: أصبح لدينا:

$$|f.g-ab|<(\varepsilon_1+|a|)\varepsilon_2+|b|\varepsilon_1$$

وهذه المتراجحة تعني أن المساواة (13) صحيحة (لماذا؟).

اترك تدريباً إثبات حالة القسمة.

(3-1-2) النهاية في المستوى الموسع $\overline{C}$:

درسنا في الفقرة السابقة (2-1-2) نهاية تابع مركب $f(z)$ عند نقطة z_o في المستوى C، أي عندما $z_o\neq\infty$ و $a\neq\infty$ وهذه النهاية واحدة في C وفي $\overline{C}$ عندما يكون كل من z_o و ω عددان مركبان.

تؤول دراسة النهاية $\lim\limits_{z\to z_o}f(z)$ في المستوى الموسع $\overline{C}$ إلى دراستها في الحالات التالية:

1) $z_o=\infty$ و $a\neq\infty$ 2) $z_o\neq\infty$ و $a=\infty$

3) $z_o=\infty$ و $a=\infty$

نفترض فيما يلي أن التابع $\omega=f(z)$ معرف في مجموعة E_1 من المستوى الموسع $\overline{C}_z$ ويأخذ قيمه E_2 من المستوى الموسع $\overline{C}_\omega$ و z_o نقطة تراكم لـ E_1.

تعريف **(2): النهاية المتعلقة بنقطة اللانهاية** ∞ هي واحدة مما يلي:

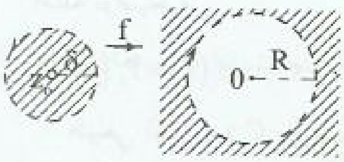
$$\lim_{z\to\infty}f(z)=a\ ;\ a\neq\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists k(\varepsilon)>0\ ;\ \forall z\in E_1 \tag{15}$$
$$|z|>k\Rightarrow|f-a|<\varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \; ; \; z_0 \neq \infty \Leftrightarrow \forall R > 0 \; \exists \delta(R) > 0 \; ; \; \forall z \in E_1$$
$$; \; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f| > R \tag{16}$$

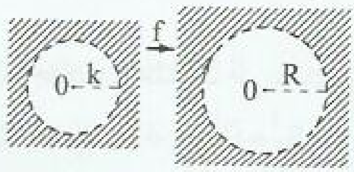
$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall R > 0 \; \exists k(R) > 0 ; \; \forall z \in E_1$$
$$|z| > k \Rightarrow |f| > R \tag{17}$$

الشكل (5)

هندسياً الشروط (8), (15), (16), (17) تعني أن الجوار الذي نصف قطره ثابت مفروض $0 < r$ ومركزه النقطة a في المستوى $\overline{C}_\omega$ هو صورة لجوار موخوذ مركزه النقطة z_0 ونصف قطره ثابت يتعلق بـ r في $\overline{C}_z$ وفق التحويل f(z) مع مراعاة مفهومي جوار نقطة، انظر الأشكال (7,6,5).



الشكل (6)



الشكل (7)

من المفيد الإشارة إلى ما يلي:

1) المساواة $f(\infty) = \omega_0$ تعني أن التابع $\omega = g(z_1) = f\left(\frac{1}{z_1}\right)$ يأخذ القيمة ω_0 في النقطة $z_1 = 0$ أي: $g(0) = \omega_0$.

2) المساواة $f(z_0) = \infty$ تعني أن التابع $\omega_1 = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{f(z)}$ يأخذ القيمة $\omega_1 = 0$ في النقطة $z = z_0$.

3) المساواة $f(\infty) = \infty$ تعني أن التابع $\frac{1}{g(z_1)} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\omega} = \omega_1$ يأخذ القيمة $\omega_1 = 0$ في $z_1 = 0$.

هامة جداً:

نتيجة (1): تعطى العلاقة بين التوابع اللامتناهية في الصغر وبين التوابع اللا متناهية في الكبر كما يلي:

$$\lim_{z\to\infty} f = a;\ a \neq \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \tag{18}$$

$$\lim_{z\to z_0} f = \infty;\ z_0 \neq \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f} = 0 \tag{19}$$

$$\lim_{z\to\infty} f = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0 \tag{20}$$

نستطيع بمعرفة العمليات على الأعداد المركبة إيراد أمثلة لتوابع وحيدة القيمة أو متعددة القيم وإيجاد مجموعة التعريف E_1 ومجموعة القيم E_2.

أمثلة توضيحية:

1) $\omega = f(z) = P_n(z)$ كثيرة الحدود من الدرجة n هي عمليات جمع وجداء ورفع لأس طبيعي لكل $z \in C$ وبوضع $P_n(\infty) = \infty$ نجد أن $E_1 \equiv \overline{C}_z, E_2 \equiv \overline{C}_\omega$:

$$E_1 \equiv \overline{C}_z \to E_2 \equiv \overline{C}_\omega$$

2) $\omega = f(z) = |z|$ تابع وحيد القيمة فيه $E_1 \equiv C_z, E_2 = \mathbb{R}^+ U\{0\}$.

3) المتتالية $\omega = f(z) = \{z_n\}$ تابع فيه $E_1 \equiv N, E_2 \equiv C_\omega$.

4) $\omega = f(z) = \sqrt[n]{z}$ تابع ذو n قيمة وفيه $E_1 \equiv C_z \setminus \{0\}, E_2 \equiv C_\omega \setminus \{0\}$.

5) $\omega = \ln z = \mathrm{L}n\, z + 2\pi k i$ لانهائي القيم وفيه $E_1 \equiv C_z \setminus \{0\}, E_2 \equiv C_\omega$.

مثال (5): أثبت أن $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} = 0$ و $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^n} = \infty$ حيث $n \in \mathbb{N}$ مستخدما التعريف.

الحل:

لدينا $f = \frac{1}{z^n}$, $z_0 = \infty$, $a = 0$ لذلك نطبق الشرط (15).

بفرض أن $\varepsilon > 0$ عدد مفروض ولنعين $k = k(\varepsilon)$ بحيث إنه إذا كان $|z| > k$

فإن:

$$|f - a| = \left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n} < \varepsilon$$

لدينا:

$$|f - a| = \frac{1}{|z|^n} < \frac{1}{k^n} < \frac{1}{k} \;\; ; \;\; k > 1$$

بالتالي يتحقق المطلوب أي: $\frac{1}{k} < \varepsilon$ بأخذ $k \geq \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}$.

لدينا في النهاية الثانية $a = \infty, z_0 = 0, f = \frac{1}{z^n}$ ولنتأكد من أن الشرط (16) محقق.

بفرض $R > 0$ عدد مفروض ولنعين $\delta = \delta(R)$ بحيث إذا كان $0 < |z - 0| < \delta$

فإن: $|f| = \left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n} > R$. لدينا:

$$|f| = \frac{1}{|z|^n} > \frac{1}{\delta^n} > \frac{1}{\delta} \;\; ; \;\; \delta < 1$$

ولجعل $\frac{1}{\delta} > R$ يكفي اختيار $\delta \geq \max\left\{1, \frac{1}{R}\right\}$

ملاحظة (1): إذا لم يكن التابع f معرفاً في نقطة التراكم z_0 لمجموعة التعريف E_1 في المستوي الموسع $\overline{C}_z$ ولكن النهاية $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ موجودة في المستوى $\overline{C}_z$ فإنه بالإمكان إعادة تعريف التابع f في النقطة z_0 بأخذ التابع الممدد:

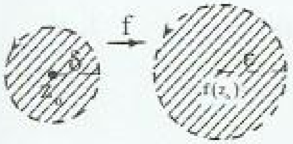
$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & ; \;\; z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) & ; \;\; z = z_0 \end{cases}$$

وعندئذ تنقلب النقطة الشاذة z_0 إلى نقطة عادية ولهذا السبب تسمى z_0 في هذه الحالة نقطة شاذة **قابلة للإصلاح** للتابع f وكثيرا ما يرمز للممدد بالرمز f نفسه.

(2-2) الاستمرار:

فكرة الاستمرار هي تفسير لحالة خاصة من حالات النهاية في المستوى $\overline{C}_z$.

(2-2-1): الاستمرار في مجموعة:



الشكل (1)

ليكن $f=u+iv$ تابع معرف في المجموعة E_1 من المستوى C_z و z_0 نقطة كيفية من مجموعة التعريف E_1.

تعريف **(1)**: **يُقال أن التابع f مستمر في النقطة** z_0 إذا تحقق أحد الشرطين (الشكل 1):

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(z_0,\varepsilon)>0\ ;\ \forall z\in E_1\ ;\ |z-z_0|<\delta\Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \tag{1}$$

$$\forall\{z_n\};\ z_n\in E, z_n\neq z_0, \lim_{n\to\infty} z_n=z_0\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0) \tag{2}$$

ويسمى f **مستمراً في المجموعة** E_1 إذا كان مستمراً في كل نقطة $z \in E_1$.

عنلما يكون f مستمراً في كل مجموعة تعريفه E_1 نقول إن f مستمر (دون أن نذكر المجموعة E_1).

في الحالة الخاصة الهامة إذا كانت z_0 نقطة تراكم للمجموعة E_1 و $z_0 \in E_1$ كأن تكون $E_1 = D$ ساحة فإن استمرار التابع f في النقطة z_0 يعني أن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \tag{3}$$

هنا بالمقارنة مع تعريف النهاية في نقطة نجد أن مفهوم الاستمرار في نقطة هو نهاية مع تحقق شرطين:

الأول أن يكون التابع f معرفاً في النقطة z_0 **والثاني** أن تكون قيمة النهاية $\lim_{z\to z_0} f(z)$ تساوي قيمة f في النقطة z_0.

مثال (1): ادرس بالتفصيل استمرار التابع $f(z)=z^n$ في $\overline{C}$ ، حيث $n\geq 1$ عدد صحيح.

الحل:

إن التابع z^n معرف في كل C وبوضع $t=\dfrac{1}{z}$ نجد أن التابع $g(t)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}=t^n$

معرف في $t=0$ وإن $g(0)=0$ بالتالي z^n معرف في $\overline{C}$ وقيمته في كل نقطة محدودة $z_o \in C$ هي العدد z_o^n وأن $f(\infty)=\infty$.

لنبرهن أن z^n مستمر في كل نقطة من C وفي النقطة ∞.

لتكن $z_o \in C$ نقطة كيفية و $\varepsilon>0$. علينا إيجاد $\delta>0$ بحيث $|z^n-z_o^n|<\varepsilon$ عندما $|z-z_o|<\delta$.

لدينا:

$$\begin{aligned}\left|z^n-z_o^n\right| &= \left|z-z_o\right|\left|z^{n-1}-z^{n-2}\cdot z_o+\cdots+z_o^{n-1}\right| \\ &<\delta\left\{|z|^{n-1}+|z|^{n-2}|z_o|+\cdots+|z_o|^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

واضح من الشكل(2):

$$\begin{aligned}|z|&<op=|z_o|+\delta=r_o+\delta \\ |z_o|&=r_o<r_o+\delta\end{aligned}$$

p

δ

z_o

$|z_o|$

0

الشكل (2)

بالتالي:

$$|z^n-z_o^n|<\delta n\left(r_o+\delta\right)^{n-1}$$

وعليه من أجل العدد المفروض $\varepsilon>0$ يمكن اختيار δ من المتراجحة:

$$\delta n\left(r_o+\delta\right)^{n-1}\leq\varepsilon$$

عندما $z=\infty$ نأخذ $|z|>k$ جواراً لـ ∞ نجد:

$$\rho(f,\infty)=\rho(z^n,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^{2n}}}<\frac{1}{\sqrt{1+k^{2n}}}$$

وتتحقق المتراجحة $\rho(z^n,\infty)<\varepsilon$ باختيار k من : $\varepsilon \le (1+\delta^{2n})^{-1/2}$.

مثال (2): ادرس بالتفصيل استمرار التابع الكسري $\frac{p_n(z)}{q_m(z)}$ في C و $\overline{C}$:

الحل:

1) ليكن $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$ $\quad f(z)=R(z)=\frac{p_n(z)}{q_m(z)}=\frac{a_n z^n+\cdots+a_o}{b_m z^m+\cdots+b_o}$

لتكن $\{\zeta\}$ مجموعة جذور كثيرة الحدود q_m أي تلك التي تحقق $q_m(\zeta)=0$.

إن ساحة تعريف R(z) هي كل $\overline{C}$.

عندما $z_o \in C$ و $z_o \neq \zeta$ يأخذ R(z) قيماً محدودة $R(z_o)=\frac{p_n(z_o)}{q_m(z_o)}$.

أما من أجل $z=\zeta$ نستطيع اعتبار $R(\zeta)=\infty$ لأنه من أجل التابع $g(z)=\frac{1}{R(z)}$ لدينا $g(\zeta)=\frac{q_m(\zeta)}{p_n(\zeta)}$.

عند $z_1=\frac{1}{z}$ ومن أجل:

$$g_1(z_1)=R\left(\frac{1}{z_1}\right)=z_1^{m-n}.\frac{a_o z_1^n+\cdots+a_n}{b_o z_1^m+\cdots+b_m}$$

يكون : $g_1(0)=\frac{a_n}{b_n}$ عندما $n=m$

ويكون: $g_1(0)=0$ عندما $m>n$.

وعليه فإن: $R(\infty)=\frac{a_n}{b_n}$ عندما $n=m$ و $R(\infty)=0$ عندما $m>n$.

إذا كان : $m > n$ ومن أجل التابع $g_2(z_1)=\frac{1}{R\left(\frac{1}{z_1}\right)}$ يكون : $g_2(0)=0$ أي:

$R(\infty)=\infty$.

إن التـابع $R(z)$ مـستمر في كـل نقطـة $C \ni z_o$ حيـث $z_o \neq \zeta$ كنـسبة تـابعين مستمرين بشرط $q_m(z_o) \neq 0$.

بنفس الأسلوب يكون $R(z)$ مستمراً في $z_o = \infty$ عندما $m \geq n$ لأن هذا يكـافئ استمرار التابع $g_1(z_1) = R\left(\frac{1}{z_1}\right)$ في $z_1 = 0$.

في النقاط $\{\zeta\}$ التابع $R(z)$ مستمر (بالمفهوم $\overline{C}$) لأنه عندما $|z-\zeta| < \delta$ يكون:

$$\rho[R(z), R(\zeta)] = \rho[R(z), \infty]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+|R(z)|^2}} = \frac{1}{|R(z)|} \frac{1}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{R(z)}\right|^2}}$$

والتابع $g(z) = \frac{1}{R(z)}$ مستمر في ζ كتابع كسري في نقطة لاتعدم المقام.

ملحوظة: نعتبر في دراستنا للأستمرار على أنـه في C ولـيس في $\overline{C}$ ان لم نـشر صـراحة خلاف ذلك.

يمكن بسهولة التأكد من صحة الآتي:

1) يكون التابع $f = u + iv$ مستمراً في نقطة التراكـم $z_o = x_o + iy_o$ للمجموعـة E_1 إذاً وفقط إذا كان كل من u و v مستمراً في النقطة (x_o, y_o).

في الحالة عندما $E_1 = D$ ساحة و $D \ni z_o$ يكون:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u = u(x_o, y_o) \;\&\; \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v = v(x_o, y_o) \quad (4)$$

أو:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u + i \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v = u(x_o, y_o) + iv(x_o, y_o) \quad (5)$$

2) **العمليات الحسابية:** إذا كان f و g تابعان مستمران في النقطة $C \ni z_o$ فإن $f.g, f \pm g$ و f/g (حيث هنا $g(z_o) \neq 0$) هي توابع مستمرة في z_o وتحصيل تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

3) إذا كان التابع f مستمراً في المجموعة المغلقة E_1 فإن:

I- التابع f محدود في E_1.

II- يأخذ التابع $|f|$ قيمه القصوى: العظمى $\max|f|$ والصغرى $\min|f|$ في نقاط واقعة ضمن E_1 أي يتحقق الشرط:

$$\exists z_1, z_2 \in E_1 \Rightarrow |f| \le f(z_1) \ \& \ |f| \ge f(z_2) \quad \forall z \in E_1 \tag{6}$$

مثال (3): ادرس استمرار التوابع التالية:

$$|z|,\ \bar{z},\ p_n(z),\ \operatorname{Im} z,\ \operatorname{Re} z,\ z$$

$$f = \begin{cases} \dfrac{z^2+9}{z-3i} & ; \quad z \ne 3i \\ 6 & ; \quad z = 3i \end{cases}$$

الحل:

التوابع $|z|, \bar{z}, p_n(z), \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} z, z$ مستمرة (في كل مجموعة التعريف التي هي الساحة $E_1 \equiv C_z$) لماذا؟

بالنسبة للتابع الأخير فإنه من الواضح أن f مستمر في الساحة $C\backslash\{3i\}$ ولدراسة استمراره في النقطة $z = 3i$ نبحث عن نهايته فيها. لكل $z \ne 3i$ لدينا:

$$\lim_{z\to 3i} f = \lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} = 6i$$

من جانب آخر لدينا $f(3i) = 6$ فرضاً، وبما أن:

$$\lim_{z\to 3i} f = 6i \ne f(3i) = 6$$

فان الشرط (3) غير محقق والتابع غير مستمر في النقطة $z = 3i$.

لنلاحظ أنه اذا استبدلنا العدد 6 بالعدد 6i في عبارة f نحصل على تابع مستمر في كل المستوى C_z بما في ذلك عند النقطة $z = 3i$.

ملاحظة (1): إذا كان التابع f معرفاً ومستمراً في النقطة z_0 فإننا نجد قيمة النهاية $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ بتعويض $z = z_0$ مباشرة في عبارة f.

أمـا إذا كانـت نتيجـة التعـويض هـي حالـة مـن حـالات عـدم التعـيين $\infty-\infty, 1^{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty$ ... الخ فإننـا نزيـل عـدم التعـيين هـذا بـالطرائق المعروفـة في التحليل الحقيقي، حيث ان قواعد اشتقاق التوابع الأولية المركبة تشبه مثيلاتها المعروفـة للتوابع الحقيقية (انظر خواص التوابع المركبة القابلة للمفاضلة).

مثال (4): احسب $\lim_{z\to -3}\frac{z^2+9}{z+3i}$, $\lim_{z\to -3i}\frac{z^2+9}{z+3i}$

الحل:

التابع $f=\frac{z^2+9}{z+3i}$ مستمر في النقطة $z=-3$ بالتالي:

$$\lim_{z\to -3}\frac{z^2+9}{z+3i}=\frac{(-3)^2+9}{-3+3i}=-\frac{27}{5}-\frac{9}{5}i$$

من أجل التابع f لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ في النقطـة $z=-3i$ وبالتـالي: انظر (4-2).

$$\lim_{z\to -3i}\frac{z^2+9}{z+3i}=\lim_{z\to -3i}\frac{(z^2+9)'}{(z+3i)'}=-6i$$

ملاحظة (2): إذا كان التابع $f=u+iv$ مستمراً في الساحة D فإنه يكون مستمراً في كل x باعتبار y ثابت ومستمراً في كل y باعتبـار x ثابـت، لكـن العكـس بـشكل عـام غـير صـحيح، أي أن الاسـتمرار بالنـسبة للمتحـول x في النقطـة $z_0=x+iy$ والاسـتمرار بالنسبة للمتحول y في النقطة z_0 في آن معاً لايضمن الاستمرار بالنسبة للمتحول z في النقطة z_0 والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (5): ابحث استمرار التابع:

$$f=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad z\neq 0\\ 0 & ; \quad z=0\end{cases}$$

في النقطة $z=0$.

الحل: بالنسبة للمتحول $z=(x,y)$ وعندما $z\to 0$ على المسار $y=mx$ مثلاً نجد أن:

$$\lim_{z\to 0} f=\lim_{z\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\ ;\ z\neq 0$$ وبالتالي f غير مستمر في النقطة $z = 0$ لأن نهايته فيها تتعلق بالمسار.

الآن إذا اعتبرنا f تابع بالنسبة للمتحول x ($y=0$ ثابت) نجد أن:

$$f(z)=f(x+i0)=\varphi(x)=\frac{0.x}{x^2}=0\ ;\ x\neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(z)=\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0=f(0)=\varphi(0)$$

وبالتالي التابع $\varphi(x)$ مستمر في النقطة $z_0=(0,0)$.

بالنسبة للمتحول y والثابت $x=0$ نجد أن:

$$f=f(0+iy)=\psi(y)=\frac{0.y}{y^2}=0\ ;\ y\neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0} f(z)=\lim_{y\to 0}\psi(y)=0=f(0)=\psi(0)$$

وبالتالي التابع $\psi(y)$ مستمر في النقطة (0,0).

مؤجل

(2-2-2) استمرار تابع الزاوية الرئيسي Arg z والاستمرار المنتظم:

التابع $f(z) = \operatorname{Arg} z$ معرف في الساحة $\overline{C}\setminus\{0,\infty\}$ ويأخذ قيمه ضمن المجال $(-\pi,+\pi]$ ولذلك تتم دراسة الاستمرار في C فقط.

مبرهنة (1): التابع Argz مستمر في كل نقطة $z_0 \in C$ و $z_0 \notin ox^-$ أي في المستوى المقطوع على طول النصف السالب من المحور الحقيقي وكل نقطة من هذا النصف هي نقطة انقطاع من النوع الأول بقفزة مقدارها الثابت 2π.

الإثبات:

ليكن $\varepsilon>0$ ولنختار $\delta>0$ نصف قطر أكبر دائرة ممكنة مركزها z_0 وتقع ضمن القطاع الزاوي الذي رأسه نقطة المبدأ ومقدار زاويته 2ε. عندئذ إذا كان $|z-z_0|<\delta$ فإن: $|\operatorname{Arg}z-\operatorname{Arg}z_0|<\varepsilon$ لماذا؟.

عندما $z_o = x_o \in ox^-$ لدينا $\operatorname{Arg} x_o = \pi$ ولكن النهاية $\lim\limits_{z\to x_o} \operatorname{Arg} z$ غير موجودة.

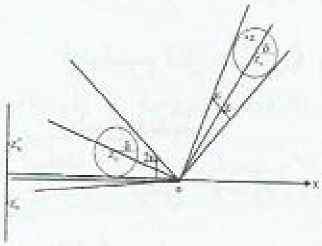
للتحقق من هذا نختار متتاليتين مختلفتين كل منهما متقاربة من x_o ولتكن:

$$\{z_n^+\} = \left\{x_o + iy_n \;\; ; \;\; y_n > 0 \, , \, \lim_{n\to\infty} y_n = 0\right\}$$

$$\{z_n^-\} = \{x_o - iy_n\} = \left\{\overline{z_n^+}\right\}$$

ونوجد متتاليتي صورهما $\{f(z_n^+)\}$ و $\{f(z_n^-)\}$

عندما تقع z_n^+ في الربع الثاني II يكون (الشكل3):



الشكل (3)

$$f(z_n^+) = \operatorname{Arg} z_n^+ = \pi + \operatorname{Arctg}\frac{y_n}{x_o}$$

وعندما تقع z_n^+ في الربع الثالث III يكون:

$$f(z_n^-) = \operatorname{Arg} z_n^- = -\pi + \operatorname{Arctg}\frac{y_n}{x_o}$$

بالتالي:

$$f^+(x_o) = \lim_{n\to\infty} f(z_n^+) = \pi$$

$$f^-(x_o) = \lim_{n\to\infty} f(z_n^-) = -\pi$$

ومنه $f^+(x_o) \neq f^-(x_o)$ والنقطة $x_o \in ox^-$ الكيفية هي نقطة انقطاع للتابع $\operatorname{Arg} z$ والقفزة تساوي:

$$f^+(x_o) - f^-(x_o) = 2\pi$$

نعمم العرض السابق في البند (3- 2) بدراسة تابع الزاوية بشكل عام.

التفسير الهندسي:

إذا كان العددان ω, z معطيان ديكارتياً $\omega = u + iv, z = x + iy$ فإنه بدلاً من دراسة التابع المركب $\omega = f(z) = u(z) + iv(z)$ يمكن أخذ المساواتين:

هفو

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y)$$

اللتان تمثلان تغيراً في المتحولين x و y أي: هما تعنيان – هندسياً – انتقل إحداثيات (x,y) إلى إحداثيات (u,v).

أو اذا كان ω,z معطيان قطبياً $\omega=\rho e^{i\theta}=(\rho,\theta),z=re^{i\varphi}=(r,\varphi)$ فانه بدلاً من التابع ω يمكن أخذ المساواتين:

$$u=u(r,\varphi),\ v=v(r,\varphi)$$

اللتان تعنيان انتقال إحداثيات (r,φ) الى احداثيات (ρ,θ).

للتوضيح نمثل على C_ω و C_z شبكة قطبية وديكارتية مرتبطة بالتابع z^2.

تطبيق هندسي:

ليكن $\omega=f(z)=z^2$ و $D:\operatorname{Im}z>0$

قطبياً: لنضع:

$$\omega=\rho e^{i\theta}\ ,\ z=re^{i\varphi}\ ,\ 0<\varphi<\pi$$

نجد أن:
$$\rho=r^2\ ,\ \theta=2\varphi$$

بالتالي التحويل z^2 ينقل نصف دائرة إلى دائرة مستثنى منها نقطة

$$r=r_o,\ 0<\varphi<\pi\rightarrow\rho=r_o^2\ ;\ 0<\varphi<2\pi$$

وينقل شعاع إلى شعاع.

$$0<r<+\infty\ ,\ \varphi=\varphi_o\rightarrow 0<\rho<\infty\ ,\ \varphi=2\varphi_o$$

وينقل النصف العلوي إلى المستوى باستثناء $0u^+$ لماذا؟!

ديكارتياً: بوضع $\omega=u+iv\ ,\ z=x+iy$ نجد أن:

$$u=x^2-y^2\ ,\ v=2xy$$

بالتالي z^2 ينقل مستقيم أفقي إلى قطع مكافئ:

$$y = y_o \to u = \frac{v^2}{4y_o^2} - y_o^2$$

وينقل شعاع (نصف مستقيم موجه) شاقولي إلى جزء من قطع مكافئ:

$$x = x_o \ , \ 0 < y < +\infty \to u = x_o^2 - y^2, \ v = 2x_o y$$

لنلاحظ أننا أخذنا D النصف العلوي للمستوى مع أن z^2 معرف في كل C والسبب في هذا هو أن التابع وحيد الصفحة في D وغير وحيد الصفحة في كل C بل هو ليس وحيد الصفحة في أي ساحة تحتوي زوجاً $z_o, -z_o \ (z_o \neq 0)$ لماذا؟.

في(3-4) ندرس هذا التابع بصورة مفصلة.

الاستمرار المنتظم: كان العدد δ في التعريف (1) يرتبط بالنقطة المدروسة z_o إلى جانب تعلقه بالعدد الكيفي ε ولذلك يسمى هذا النوع من الاستمرار استمراراً نقطياً او عاديا تمييزاً له عن الاستمرار المنتظم.

تعريف (2): ليكن $f = u + iv$ تابع معرف في المجموعة E_1.

يقال إن استمرار التابع f **منتظماً** في المجموعة E_1 إذا كان $\delta = \delta(\varepsilon)$ في تعريف الاستمرار (1) مستقلاً عن النقطة $z \in E_1$.

بتعبير آخر نقول إن التابع f مستمر بانتظام في E_1 إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ ; \ \forall z_1, z_2 \in E_1 \ , |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \qquad (7)$$

ينتج من هذا التعريف الآتي :

1) التابع المستمر بانتظام في مجموعة هو تابع مستمر في تلك المجموعة والعكس بشكل عام غير صحيح، لكن إذا كان التابع مستمراً في مجموعة وكانت المجموعة مغلقة ومحدودة فإنه مستمر بانتظام في تلك المجموعة.

2) التابع المستمر في مجموعة هو تابع مستمر بانتظام في كل مجموعة جزئية مغلقة.

مثال (6): أثبت أن التابع $f = z^2$ مستمر بانتظام في الساحة $E_1: |z|<1$ والتابع $f = \frac{1}{z}$ مستمر لكن استمراره غير منتظم في الساحة $E_1: 0<|z|<1$.

الحل:

ليكن $\varepsilon > 0$ عدد مفروض. علينا إيجاد العدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إذا كان $|z_1 - z_2| < \delta$ فإن $|z_1^2 - z_2^2| < \varepsilon$ لكل z_1 و $z_2 \in E_1$.

لدينا:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2|$$
$$\leq |z_1 - z_2|(|z_1| + |z_2|) < 2|z_1 - z_2| < 2\delta; |z_1| < 1, \ |z_2| < 1$$

باختيار $\varepsilon = 2\delta$ أو $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ نجد المطلوب.

نأتي إلى التابع $f = \frac{1}{z}$.

واضح أن هذا التابع مستمر في E_2.

لنفرض أن $\varepsilon > 0$ عدد مفروض ولنبين أنه يوجد عددين z_1 و $z_2 \in E_1$ بحيث $\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right| > \varepsilon$ عندما $|z_1 - z_2| < \delta$.

من أجل $0 < \delta < 1$ و $z_1 = \delta$ و $z_2 = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$ مثلاً نجد أن z_1 و $z_2 \in E_1$ وأن:

$$|z_1 - z_2| = \left|\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta\right| < \delta$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| > \varepsilon \ ; \ \delta < 1$$

هذا يعني أن استمرار f في E_1 غير منتظم.

في البند التالي ندرس بشيء من التفصيل حالتين خاصتين من استمرار تابع في مجموعة: الأولى تكون المجموعة منحنى والثانية تكون ساحة مغلقة.

(3-2-2) الاستمرار على منحنى والاستمرار في ساحة حتى حدودها:

ليكن المنحنى:

$$\gamma : z = z(t) \;\; ; \;\; t \in [\alpha, \beta] \tag{8}$$

ولنفرض أن $\omega = \psi(t)$ تابع مركب بمتحول حقيقي معرف في المجال $[\alpha, \beta]$.

عندئذ يمكن النظر إلى $\psi(t)$ كتابع معرف على المنحني γ حيث أنه ينقل كل نقطة $z(t) = z_t \ni \gamma$ إلى عدد مركب $\omega = \psi(t)$ ولكي يتعرف لدينا تابع مركب بمتحول مركب على γ نحتاج إلى تابعين حقيقيين بمتحول حقيقي.

$$\gamma : z = z(t) \;\; \& \;\; \omega = \psi(t) \quad t \in [\alpha, \beta] \tag{9}$$

تعريف **(3):** يُقال إن التابع $\omega = \psi(t) \;\; ; \;\; t \in [\alpha, \beta]$ **مستمر على المنحنى** γ إذا كان مستمراً في المجال $[\alpha, \beta]$، وبالإضافة لذلك يجب أن يكون $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ إذا كان γ مغلقاً.

كيف تعرف استمرار تابع مركب بمتحول مركب على منحنى γ؟.

تعريف **(4):** ليكن $\omega = f(z)$ تابع معرف في الساحة D.

يُقال إن f **مستمر في الساحة D حتى حدودها** Γ إذا كان مستمراً في كل نقطة من D وكان:

$$\lim_{d_D(z,a) \to 0, z \in D} f(z) = f(a) \;\; , \;\; \forall a \in \Gamma \tag{10}$$

حيث $d_D(z,a)$ هو البعد بين النقطتين $z \ni D$ و $a \ni \Gamma$ في D.

اترك تدريباً إثبات صحة الآتي:

1) إذا كان التابع f مستمراً على كل منحنى γ واقع في الساحة D فإنه مستمر في D، وبالعكس إذا كان f مستمراً في ساحة D فإنه يكون مستمراً على كل منحنى $\gamma \subset D$.

2) إذا كانت الحدود Γ للساحة D بسيطة فإن مفهوم الاستمرار للتابع f في الساحة D حتى الحدود Γ يتطابق مع مفهوم استمرار f في الساحة المغلقة $\bar{D}$ (لصاقة D) وعندئذ:

$$\lim_{d_D(z,a)\to 0, z\in D} f(z) = \lim_{z\to a, z\in D} f(z) \tag{11}$$

أما إذا لم يكن Γ بسيطاً فإن استمرار f في الساحة D حتى حدودها Γ لا يضمن استمرار f في $\bar{D}$ والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (7): لتكن D القرص الدائري $|z|<3$ المقطوع على طول $[0,3]$.

أثبت أن التابع:

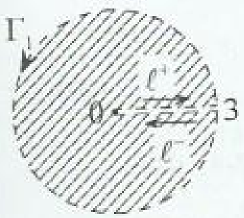
$$f=\sqrt{z} \quad ; \quad z=re^{i\varphi} \quad , \quad 0\le\varphi\le 2\pi \tag{12}$$

مستمر في الساحة D حتى حدودها Γ لكنه غير مستمر في $\bar{D}$.

الحل: لدينا:

$$f=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\varphi/2}=\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}+i\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}$$

إن كل من: $u=\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}$, $v=\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}$ يمثل تابعا مستمرا وبالتالي f هو تابع مستمر في D لماذا؟



الشكل (4)

الحدود Γ للساحة D هي $\Gamma=\Gamma_1\cup\ell^\pm$ حيث $\Gamma_1: |z|=3$ موجهة إيجاباً و ℓ^+, ℓ^- صفة القطع العليا والسفلى وهنا Γ ليس بسيطاً، حيث كل نقطة من المجال $[0,3]$ مكررة مرتين، وبالتالي يمكن أن تأتي حالة عدم استمرار f فقط عندما النقطة $a \ni [0,3]$ أي $a \ni \ell^+$ أو $a \ni \ell^-$ (الشكل4).

على ℓ^+. لدينا $a=x=x^+=x+i0$ و $\varphi=0$، بالتالي:

$$\lim_{d(z,x)\to 0, z\in D} f = \lim_{z\to x, \operatorname{Im} z>0} f = f(x+i0)=\sqrt{x}=\sqrt{x}>0$$

على ℓ^-. لدينا: $\varphi = 2\pi \text{ ,} a = x = x^- = x - i0$ بالتالي:

$$\lim_{d(z,x)\to 0, z\in D} f = \lim_{z\to x, \operatorname{Im} z<0} f = f\left(x - i0\right) = \sqrt{x}e^{\pi i} = -\sqrt{x} < 0$$

هذا يعني أن النقطة الكيفية $[0,3]\ni z = x$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع $\sqrt{z}$ والقفزة فيها هي:

$$\Delta = f\left(x + i0\right) - f\left(x - i0\right) = 2\sqrt{x} \; ; \; x > 0$$

إذن التابع f غير مستمر في المجال $[0,3]$ الذي هو جزء من الحدود Γ فهو غير مستمر في $\bar{D}$ رغم استمزاره في الساحة D حتى الحدود.

هنا لانستطيع إبقاء f مستمراً عندما تعبر z القطع $[0,3]$ من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

يمكن التعميم: إذا كانت D المستوى المقطوع على طول شعاع بدايته 0 فإن كل نقطة من هذا الشعاع هي نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع $\sqrt{z}$ وسنجد إن هذه النتيجة صحيحة لتابع الجذر النوني وللتابع اللوغاريتمي (انظر الفصل الثالث).

(4-2-2) التحويل بتابع مستمر والهومومبورفيزمات – التتمة2:

ليكن $\omega = f\left(z\right) : E_1 \to E_2$ تابع مستمر ولنتساءل: إذا كانت المجموعة E_1 متصلة أو مفتوحة أو مغلقة فهل E_2 تملك نفس الخاصة؟.

في الواقع يمكن التحقق من أن:

الخاصة 1 : صورة مجموعة متصلة وفق تحويل مستمر f هي مجموعة متصلة.

الخاصة2 : صورة مجموعة متراصة وفق تحويل مستمر f هي مجموعة متراصة.

إن هذا غيرصحيح من أجل المجموعة المغلقة أو المجموعة المفتوحة E_1.

على سبيل المثال:

1) إذا كانت $E_1 = \{x \geq 0 \text{ , } y = 0\}$

$$\omega = f(z) = u + iv = y + \frac{i}{1+x}$$

فإن f مستمر في E_1 و E_1 مغلقة . بالمقابل فإن الصورة :

$E_2 = \{u = 0 \ , \ 0 < v \leq 1\}$ غير مغلقة لماذا؟.

2) إذا كانت $E_1 \equiv \mathbb{R}$ و $\omega = \frac{1}{1+z^2}$ فإن E_1 مجموعة مفتوحة و f مستمر في E_1 بينما الصورة $E_2 = (0,1]$ مجموعة ليست مغلقة ولا مفتوحة لماذا؟.

يبرز السؤال: متى نضمن أن تكون صورة مجموعة مفتوحة أو مغلقة هي مجموعة لها نفس الصفة؟

يمكن إيجاد صف من التحويلات المستمرة التي تحقق هذا الغرض والذي يدعى صف التحويلات التبولوجية أو الهومومورفيزمات.

***تعريف* (5) :** يسمى التحويل $\omega = f(z)$ **هومومورفيزماً** من E_1 إلى E_2 إذا كان:

1) واحدا لواحد.

2) f ، f^{-1} تابعان مستمران في E_1،E_2 على الترتيب.

على سبيل المثال التحويلات بكثيرات الحدود $f = P_n(z)$ هي تحويلات هومومورفيزمية لماذا؟.

الخاصة 3: اذا كانت E_1 مجموعة متراصة وكان f تحويل مستمر وواحد لواحد في E_1 فان f هو هومومورفيزم.

الخاصة4 : تحويل الإسقاط الاستيريوغرافي هو هومومورفيزم.

نشير إلى أنه إذا لم تكن مجموعة التعريف E_1 للتحويل f متراصة، أي إذا كانت E_1 غير مغلقة $(C \supset E_1)$ أو إذا كانت E_1 غير محدودة فإن الخاصة 3) تفقد صحتها.

على سبيل المثال:

إذا كانت $(-1,+1) = E_1 \supset C$ و

$$\omega = f(z) = \begin{cases} 1+iz & ; \quad z \in (-1,0] \\ e^{2\pi iz} & ; \quad z \in [0,1) \end{cases}$$

فإن f تحويل واحد لواحد ومستمر في (1,1-)، لكن تحويله العكسي f^{-1} غير مستمر في النقطة $\omega = 1$ لماذا؟.

نعتبر فيما يلي $E_1 = D$ ساحة في $\bar{C}$.

عند حل المسألة:

هل التحويل بتابع هومومورفيزم f للساحة D هي ساحة $f(D) = G$؟، نستخدم قضيتين:

1) إذا كان لدينا تحويلان هومومورفيزميان فيما بينهما لمجموعتين، بحيث إن إحدى المجموعتين تحتوي نقاطاً داخلية للثانية فإن الأخرى سوف تحتوي نقاطاً داخلية للأولى (هذا غير صحيح في فضاء هلبرت).

2) تكون المجموعة المفتوحة $\bar{C} \supset D$ متصلة وبالتالي ساحة إذا وفقط إذا أمكن الوصل بين كل نقطتين منها بطريق مستمرة واقعة في تلك المجموعة.

الآن يمكن إثبات صحة الخواص:

الخاصة5 : صورة ساحة وفق تحويل هومومورفيزم هي ساحة.

الخاصة6 : إذا كان $\omega = f(z)$ تحويل مستمر في الساحة $E_1 = D_1$ وينقل واحد لواحد D إلى مجموعة $E_2 = G$ فإن G ساحة، و $f : D \to G$ هو تحويل هومومورفيزم.

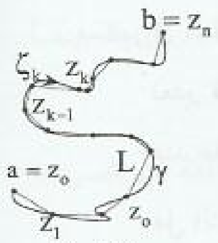
الخاصة7: إذا كان $\omega = f(z) : D \to G$ تحويل وحيد الصفحة في الساحة D ومستمر في $\bar{D}$ فإن $f : \partial D \to \partial G$ و $f(\partial D) = \partial G$.

إذا كانت الحدود ∂G معلومة فإنه لإيجاد G يجب أن نأخذ تلك الساحات في C_∞ التي حدودها هي ∂G ولتحديد الساحة المنشودة G من بين تلك الساحات نأخذ نقطة كيفية $D \ni z_0$ فتكون الساحة G تلك التي لأجلها $G \ni f(z_0)$.

الخاصة8 : التحويل بهوموميورفيزم يحفظ درجة اتصال الساحة.

(3-2) قابلية المكاملة:

يمكن التعبير عن مفهوم قابلية المكاملة لتابع مركب بمتحول مركب على منحنى بثلاث طرائق متكافئة.



الشكل (1)

الطريقة الأولى: استخدام مجموع ريمان التكاملي:

ليكن $f = u + iv$ تابع معرف على المنحنى $\gamma = \widehat{ab}$ ولنقسم γ بالنقاط $z_n = b, ..., z_1, z_o = a$ إلى n من الأجزاء $k = \overline{1,n}$, $\gamma_k : \widehat{z_{k-1}z_k}$ ونفرض أن $\ell = \max\limits_{1 \le k \le n} \ell(\gamma_k)$ ولنختار على كل جزء γ_k نقطة كيفية ζ_k (قد تكون ξ_k أحد الطرفين z_{k-1} أو z_k) ثم نشكل مجموع ريمان التكاملي.

$$f(\zeta_1)(z_1 - z_o) + f(\zeta_2)(z_2 - z_1) + ... = \sum_1^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (1)$$

إذا وجدت نهاية وحيلة ومحدودة عندما $\ell \to 0$ للمجموع (1) وكانت قيمتها مستقلة عن النقاط ζ_k, z_k فيقال إن التابع f **قابل للمكاملة** على المنحنى γ وإن قيمة التكامل تساوي قيمة النهاية ونكتب:

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\ell \to 0} \sum_1^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (2)$$

الطريقة الثانية (ديكارتية):

نضع في المجموع (1): $z = x + iy$ ، $z_k = x_k + iy_k$ ، $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ، $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ، $\zeta_k = \nu_k + i\mu_k$ ، $u_k = u(\nu_k, \mu_k)$ ، $v_k = v(\nu_k, \mu_k)$ نجد:

$$\sum_1^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_1^n (u_k.\Delta x_k - v_k.\Delta y_k) + i\sum_1^n (v_k.\Delta x_k + u_k.\Delta x_k)$$

وعندما $\ell \to 0$ نجد العلاقة:

$f = u + iv \Rightarrow dz = dx + i\,dy$

$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+i\,dy)\,dz$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy \qquad (3)$$

الطريقة الثالثة (وسيطية):

إذا فرضنا أن المنحنى التكاملي γ معطى بالمعادلة:

$$\gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t) \ ; \ t \in [\alpha, \beta] \qquad (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في التكامل $\int_\gamma f dz$ بعد ملاحظة أن $dz = z'(t)dt$ نجد العلاقة:

$$\int_\gamma f\, dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)].z'(t)dt \qquad (5)$$

نلاحظ أن استخدام الطريقة الثالثة الوسيطية لحساب قيمة تكامل يتلخص في تعويض معادلة المنحنى التكاملي γ في عبارتي $f(z)$ و dz ونحصل على تكامل لتابع مركب بمتحول حقيقي ، وعندما لاتكون معادلة γ معطاة أو كانت معقدة فإننا نلجأ إلى الطريقة الأولى أو الثانية.

واضح أنه إذا كان التابع f مستمراً على المنحنى γ فإنه يكون قابلا للمكاملة على γ.

مثال (1): احسب: 1) $\int_\gamma dz$ ، 2) $\int_\gamma z dz$ ، حيث $\gamma = \widehat{ab}$ منحنى في المستوى المركب.

الحل:

1) لدينا $f(z) = 1$ لكل z وبالتالي $f(\zeta_k) = 1$ وهذا التابع مستمر على γ فهو قابل للمكاملة. نشكل مجموع ريمان :

$$\sum_1^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_1^n (z_k - z_{k-1}) = b - a$$

حيث $z_0 = a$ و $z_n = b$.

عندما $\ell \to 0$ نجد أن : $\int_\gamma dz = b - a$ لأن $b - a$ ثابت مستقل عن مسار ℓ نحو الصفر.

في الحالة الخاصة إذا كان γ مغلقاً $(a = b)$ فإن : $\int_{\gamma} dz = 0$.

2) لدينا $f = z$ لكل z وبالتالي $f(\zeta_k) = \zeta_k$ ولأن هذا التابع مستمر على γ فإنه قابل للمكاملة.

من أجل $\zeta_k = z_{k-1}$ لدينا:

$$S = \sum_{1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1})$$

أما من أجل $\zeta_k = z_k$ يكون:

$$\tilde{S} = \sum_{1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1})$$

وبما أن: $\int_{\gamma} zdz = \lim_{\ell \to 0} s = \lim_{\ell \to 0} \tilde{s}$ فإن : $\int_{\gamma} zdz = \frac{1}{2} \lim_{\ell \to 0} (s + \tilde{s})$.

ولكن:

$$s + \tilde{s} = \sum_{1}^{n} \left(z_k^2 - z_{k-1}^2 \right) = b^2 - a^2$$

وعليه:

$$\int_{\gamma} zdz = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

في الحالة عندما يكون γ مغلقاً نجد أن : $\int_{\gamma} zdz = 0$.

لاحظ أن قيمة كل من التكاملين مستقلة عن شكل المنحنى التكاملي γ وترتبط فقط بطرفيه a و b وإن هذه القيمة تساوي الصفر لأي منحنى مغلق.

تطبيق نظري هام: احسب قيمة التكامل : $I_n = \int_{\gamma} (z - z_o)^n \, dz$ هام

حيث n عدد صحيح و $r > 0$ ، $\gamma : |z - z_o| = r$ موجه إيجاباً.

الحل: المعادلة الوسيطية للدائرة γ هي :

$$\gamma : z - z_o = r e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

ولدينا : $dz = r\,i\,e^{it}dt$ و $f(z) = (z - z_0)^n = r^n e^{int}$

بالتالي:

$$I_n = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}.dt$$

من أجل $n = -1$ نجد أن : $I_{-1} = 2\pi i$، ومن أجل $n \neq -1$ نجد :

$$I_n = r^{n+1} i . \frac{1}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0$$

وعليه فإن:

$$I_n = \int_\gamma (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & ; \quad n = -1 \\ 0 & ; \quad n \neq -1 \end{cases} \qquad (6)$$

$$\gamma : |z - z_0| = r \quad , \quad r > 0$$

نبرهن في الفصل الرابع أن العلاقة (16) صحيحة لأي منحنى مغلق γ يحتوي z_0.

ملاحظة: إن قيمة التكامل لا تتعلق بـ r

② z_0 التي قد تكون شاذة لأجل n صحيحة بالنسبة (γ) من γ الدائرة

تنويه : سوف نستخدم العلاقة (16) في كثير من القضايا النظرية والعملية.

تعريف (1): لتكن D ساحة (قد لاتكون وحيلة الاتصال) حدودها $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ و f تابع معرف في $\bar{D}$.

تكامل التابع f على الحدود Γ هو:

$$\int_\gamma f dz = \int_{\Gamma_1} f dz + \ldots + \int_{\Gamma_n} f dz = \sum_1^n \int_{\Gamma_k} f dz \qquad (7)$$

حيث توجه Γ_k بحيث تبقى نقاط الساحة D على جهة اليسار.

من الواضح أن خواص التكامل المركب تشبه خواص التكامل الحقيقي.

فيما يلي نفرض أن f و g تابعان قابلان للمكاملة على المنحنى $\gamma : \widehat{ab}$ و c ثابت مركب. عندئذٍ:

③ يبقى الحل صحيحاً إذا كان z_0 نقطة ما من داخل γ

① تبقى النتيجة صحيحة إذا استبدلنا الدائرة γ بـ

منحني مغلق γ لم يحتوي ضمنه z_0

الخاصة (1):

$$\int_{\gamma} c.f dz = c\int_{\gamma} f dz \qquad (8)$$

$$\int_{\gamma}(f \pm g)dz = \int_{\gamma} f dz \pm \int_{\gamma} g dz \qquad (9)$$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz \;;\; \gamma = \gamma_1\gamma_2 \qquad (10)$$ (الشكل2).

$$\int_{\gamma} f dz = -\int_{\gamma^-} f dz \qquad (11)$$ (الشكل3).

الشكل (2)

الشكل (3)

الخاصة (2) – تقدير التكامل:

إذا كان f مستمراً على المنحني γ فإن:

$$\left|\int_{\gamma} f dz\right| \le \int_{\gamma} |f|\,|dz| \qquad (12)$$

حيث $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ عنصر الطول على γ، اضف لذلك اذا كان $M = \max\limits_{(\gamma)}|f|$ و $\ell(\gamma)$ طول γ فإن:

$$\left|\int_{\gamma} f dz\right| \le M.\ell(\gamma) \;,\; \ell(\gamma) = \int_{\gamma}|dz| \qquad (13)$$

الخاصة (3) – تقريب التكامل :

1) إذا كان f مستمراً في D و $D \supset \gamma : \widehat{ab}$ فإن :

$\ell = \int_{\gamma} |dz|$ قانون لحساب طول منحني

مثال: احسب طول: "نصف علوي لدائرة نصف قطرها 3 ومركزها (0،0)"

$\gamma : z = 3e^{it} \; ; \; t \in [0,\pi]$

$dz = 3i\,e^{it}dt$ و $|dz| = 3 \cdot 1 = 3\,dt$

$\ell = \int_0^{\pi} 3\,dt = 3\pi$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists L \subset D \Rightarrow \left| \int_L f dz - \int_\gamma f dz \right| < \varepsilon \qquad (14)$$

حيث $L \subset D$ خط منكسر تقع رؤوسه على المنحنى γ (انظر الشكل1).

2) إذا كان التابع f مستمراً في الساحة المحدودة D ومستمرا حتى حدودها $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ فإن :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists L = \bigcup_1^n L_k \subset D \ ; \ k = \overline{1,n} \Rightarrow \left| \int_L f dz - \sum_1^n \int_{\Gamma_k} f dz \right| < \varepsilon \qquad (15)$$

حيث L_k خطوط منكسرة تقع رؤوسها على Γ_k.

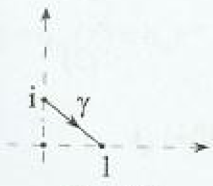
اترك برهان صحة الخواص انفة الذكر تدريبا.

تفيد العلاقتين (12) و (13) في تقدير التكامل دون حساب قيمته، أما (14) و (15) فهي تقرب التكامل على منحني γ من تكامل على خطوط منكسرة.

مثال(2): أثبت أن $\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^4} \right| \le 4\sqrt{2}$ ، حيث $\gamma = [i,1]$ دون أن تحسب قيمة التكامل.

الحل:

لدينا $f = \frac{1}{z^4}$ و $\ell(\gamma) = \sqrt{2}$: نوجد القيمة العظمى M للتابع $\left|\frac{1}{z^4}\right|$ على القطعة المستقيمة γ.



الشكل (4)

إن أصغر قيمة لـ $|z|$ على γ هي البعد بين نقطة الأصل 0 ومنتصف القطعة γ وتساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ أي أن : $|z| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ لكل $z \in \gamma$. بالتالي $|f| = \frac{1}{|z|^4} \le 4$.وعليه فإن (الشكل4):

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^4} \right| \le \int_\gamma \left| \frac{1}{z^4} \right| |dz| \le 4\sqrt{2}$$

(4-2) قابلية المفاضلة:

إن البحث في مسألة قابلية المفاضلة لتابع مركب يتم باتجاهين :

الأول هو قابلية المفاضلة وفق التحليل المركب (في $\mathbb{C}$) ، والثاني يتم وفق التحليل الحقيقي (في $\mathbb{R}$).

والذي يهمنا في كل دراستنا هو النوع الأول لذلك لن نتعمق في موضوع قابلية المفاضلة لتابع مركب وفق التحليل الحقيقي.

وقبل ذلك من المفيد التذكير بالسلوك التقريبي والتقدير التقريبي لتابع.

(1-4-2) السلوك التقريبي والتقدير التقريبي لتابع مركب:

ليكن f و g تابعان معرفان في المجموعة E و a نقطة تراكم لـ E في المستوى الموسع $\overline{\mathbb{C}}$.

(*) يقال إن للتابعين f و g **نفس السلوك قرب النقطة a** في المجموعة E ونكتب $f \underset{z\to a, z\in E}{=} g$ أو $f \underset{z\to a}{\sim} g$ إذ تحقق:

$$\lim_{z\to a, z\in E} \frac{f}{g} = 1 \qquad \text{أو} \qquad \lim_{z\to a, z\in E} f = \lim_{z\to a, z\in E} g \tag{1}$$

(*) يقال إن f **صغير مقارنة مع g قرب a في E** ونكتب: $f \underset{z\to a, z\in E}{=} o(g)$ أو $f \underset{z\to a}{=} \varepsilon(g)$ إذا كان:

$$\lim_{z\to a, z\in E} \frac{f}{g} = 0 \tag{2}$$

في الحالة الخاصة عندما $g = 1$ نقول إن f **لامتناهي في الصغر** ونكتب: $f \underset{z\to a, z\in E}{=} o(1)$

أي إذا كان:

$$\lim_{z\to a, z\in E} f = 0 \tag{3}$$

(*) يُقال إن f **محدود مقارنة مع g قرب a وفي E** ونكتب: $f \underset{z\to a, z\in E}{=} O(g)$ إذا وجد ثابت موجب $M > o$ بحيث:

$$\left|\frac{f}{g}\right| \leq M \quad \forall\ z \in E \cap S(a,\varepsilon) \tag{4}$$

في الحالة الخاصة عندما $g = 1$ نقول إن f محدود في التقاطع $E \cap S(a,\varepsilon)$ ونكتب:

$f = O(1)$ إذا وجد ثابت $o < M$ بحيث:

$$|f| \leq M \quad \forall\ z \in E \cap S(a,\varepsilon) \tag{5}$$

تعبر العلاقات (1) و (2) و (3) عن السلوك التقريبي لتابع وأما (4) و (5) فإنهما يشيران إلى التقدير التقريبي الموضعي لتابع.

أما التقدير التقريبي العام في كل المجموعة E فيأخذ الصيغة التالية:

يقال إن **f محدود مقارنة مع g في كل المجموعة E** ونكتب $f \underset{z \in E}{=} O(g)$ إذا وجد ثابت $o < M$ بحيث:

$$\left|\frac{f}{g}\right| \leq M \quad \forall z \in E \tag{6}$$

في الحالة الخاصة عندما $g = 1$ نقول إن **f محدود في E** ونكتب $f \underset{z \in E}{=} O(1)$

إذا كان:

$$|f| \leq M \quad \forall z \in E \tag{7}$$

تطبيق (1) – السلوك التقريبي بين كثيرتي حدود:

لتكن $f(z) = p_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_o$ ، $g = q_m(z) = b_m z^m + \ldots + b_o$،

$b_m \neq 0, a_n \neq 0$.

إن p_n و q_m تابعان معرفان في كل المستوى C_z.

1) إن $z = a = 0$ و $z = a = \infty$ نقطتا تراكم لمجموعة التعريف $E \equiv C_z$ ولدينا:

$$p_n(z) \underset{z \to 0}{\simeq} a_0 \quad , \quad q_m(z) \underset{z \to 0}{\simeq} b_0 \tag{8}$$

$$p_n(z) \underset{z \to \infty}{\simeq} a_n z^n \quad , \quad q_n(z) \underset{z \to \infty}{\simeq} b_m z^m \tag{9}$$

2) عندما $n < m$ لدينا:

$$\frac{p_n}{q_m} \underset{z\to\infty}{\approx} o(1) \qquad (10)$$

عندما $n = m$ يكون $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{p_n / q_n}{a_n / b_n} = 1$، بالتالي:

$$\frac{p_n}{q_n} \underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{a_n}{b_n} \qquad (11)$$

مثال (1): ليكن $g = z^m, f = z^n$ حيث m, n عددان صحيحان و $n < m$.

ادرس التقدير التقريبي قرب كل من النقطتين 0 و ∞. وأوجد التقدير التقريبي في المجموعة $E: |z| \geq 1$.

الحل: هنا نجد:

$$z^m \underset{z\to 0}{=} o(z^n) \quad , \quad z^n \underset{z\to\infty}{=} o(z^m) \quad , \quad z^n \underset{z\in E}{=} O(z^m)$$

(2-4-2) قابلية المفاضلة والمشتق وفق التحليل المركب (في C):

تعريف (1): لنفرض أن f تابع معرف في جوار النقطة z_o.

يقال إن التابع f هو **C – قابل للمفاضلة او قابل للمفاضلة وفق التحليل المركب** أو – اختصاراً– **قابل للمفاضلة في النقطة** z_o إذا كانت النهاية $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ موجودة ومحدودة ومستقلة عن مسار Δz نحو الصفر، وعندئذ نسمي قيمتها مشتق التابع f في النقطة z_o ونكتب:

$$f'(z_o) = \frac{df(z_o)}{dz} = \frac{df(z)}{dz}(z_o) = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_o} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \qquad (12)$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}$$

حيث $\Delta f = f(z) - f(z_o) \quad , \quad \Delta z = z - z_o$.

لإثبات أن f غير قابل للمفاضلة يكفي إيجاد مسارين عليهما قيمة النهاية مختلفة

التعريف بلغة كوشي (ع):

ت: يقال ان التابع نظامي (تحليل وحيد القيمة) في z_0 إذا كان قابل للمفاضلة في z_0 وحولها

f قابل للمفاضلة في $z_0 \Leftarrow f$ نظامي في z_0 ، $\not\Rightarrow$

يقال إن f قابل للمفاضلة في الساحة D إذا كـان قـابلاً للمفاضـلة في كـل نقطـة من D.

هامة

ملحوظة: سنجد في الفصل الرابع ان التابع القابل للمفاضلة في ساحة يكافئ نظاميتـه في تلك الساحة وتفقد هذه القضية صحتها اذا استبدلنا الساحة بنقطة.

مبرهنة (1): يكون التابع f قابلاً للمفاضلة في النقطة z_o إذا وفقط إذا كـان تغيره Δf يكتب على شكل تركيب خطي لتغير متحوله Δz :

$$\Delta f = A.\Delta z + o(\Delta z) \ ; \ o(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to o]{} o \qquad (13)$$

حيث A ثابت مستقل. وعندئذ يكون:

$$f'(z_o) = A \qquad (14)$$

الإثبات:

لزوم الشرط : بما أن التابع f قابل للمفاضلة في z_o فإن $\lim\limits_{\Delta z \to o} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_o)$ بالتالي:

$$\forall \varepsilon > o : \exists \delta(\varepsilon) > o \ ; \ o < |z - z_o| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_o) \right| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن كلا من العلاقتين (13) و (14) صحيح.

كفاية الشرط : إذا كان الشرط (13) محقق و A ثابت مستقل فإنه مـن تعريـف التقـدير $o(\Delta z)$ نجد أن f تابع قابل للمفاضلة في النقطة z_o.

بسهولة نجد أن الخواص التالية صحيحة :

الخاصة 1): التابع القابل للمفاضلة في نقطة (أو ساحة) هو تابع مستمر في النقطـة (أو في الساحة) والعكس بشكل عام غير صحيح.

الخاصة 2): مجموع أو فرق أو جداء أو قسمة أو تحصيل عدد منتـه مـن التوابـع القابلـة للمفاضلة هو تابع قابل للمفاضلة (نستثني جذور المقام في حالة القسمة) وتبقى قواعـد المفاضلة المعروفة في التوابع الحقيقية القابلة للمفاضلة صحيحة (ماهي؟).

الخاصة 3): التابع القابل للمفاضلة في ساحة هو تابع قابل للمفاضلة في كل ساحة جزئية.

مثال (2): ادرس قابلية المفاضلة لكل من التوابع:

1) z^n , $\overline{z}$, $|z|$ مستخدما التعريف.

2) $\frac{1}{z^n}$, $p_n(z)$, p_n/q_m.

الحل:

1) كل من التوابع الثلاث المفروضة معرفة ومستمرة في كل المستوى C .

لكل عدد طبيعي n ولأي $z_o \in C$ لدينا :

$$\lim \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to o} \frac{nz_o^{n-1}.\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = nz_o^{n-1}$$

وكون z_o نقطة كيفية من C فإنه لكل $z \in C$ يكون :

$$(z^n)' = nz^{n-1} \qquad (15)$$

من أجل التابع $\overline{z}$ لدينا : لكل $z_o \in C \backslash \{0\}$ وعلى مسار أفقي $\overline{\Delta z} = \Delta z$:

$$\lim_{\Delta z \to o} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to o} \frac{\overline{z_o + \Delta z} - \overline{z}_o}{\Delta z} = 1$$

وعلى مسار شاقولي $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ يكون:

$$\lim_{\Delta z \to o} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to o}\left(-\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = -1$$

$\overline{\Delta z} = \Delta z$ لأنه على (x) حقيقي

إذن النهاية $\lim_{\Delta z \to o} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ غير موجودة لأنها تتعلق بمسار Δz نحو الصفر، وهذا يعني أن التابع $\overline{z}$ غير قابل للمفاضلة في الساحة $C \backslash \{0\}$ ولاتوجد ساحة يكون فيها التابع قابل للمفاضلة (قابل للمفاضلة في النقطة $z = 0$ فقط).

لاحظ الملاحظة ٦

$f^* = z$

$\Rightarrow f' = |z|' = 1 \; ; \; \forall z \in C$

أخيراً كما التابع $\bar{z}$ نجد أن التابع $|z|$ غير قابل للمفاضلة في أية ساحة من المستوى المركب ويقبل المفاضلة فقط في النقطة $z = 0$.

2) التابع $\frac{1}{z^n}$ معرف ومستمر في $C \setminus \{0\}$ وهو قسمة تابعين الأول $f = 1$ قابل للمفاضلة في كل المستوى C والثاني $g = z^n$ قابل للمفاضلة في C أيضاً، بالتالي $\frac{1}{z^n}$ قابل للمفاضلة في $C \setminus \{0\}$ ويحسب مشتقه من قاعدة القسمة:

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{-n\,z^{n-1}}{z^{2n}} = -n\,z^{-n-1} \tag{16}$$

من (15) و (16) نستنتج أن:

$$\left(z^m\right)' = m\,z^{m-1} \quad \forall z \in C \;,\; m \in Z \tag{17}$$

التابع $f = p_n(z)$ هو مجموع لعدد منته من التوابع القابلة للمفاضلة في كل C فهو قابل للمفاضلة في C ويكون:

$$(p_n(z)') = \left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_o\right)' = a_n . n z^{n-1} + a_{n-1}(n-1) z^{n-2} + \ldots + a_1 \tag{18}$$

التابع $\frac{p_n}{q_m}$ قسمة تابعين كل منهما قابل للمفاضلة في C فهو قابل للمفاضلة في الساحة $C \setminus \{q_m = 0\}$ ويكون:

$$\left(\frac{p_n}{q_m}\right)' = \frac{p_n' . q_m - q_m' . p_n}{q_m^2} \tag{19}$$

هام **ملاحظة هامة (1)** : التابع $\bar{z}$ أو $|z|$ مستمر في كل المستوى C لكنه غير قابل للمفاضلة في أية ساحة من C. أكثر من ذلك كنا وجدنا أن التابع $f = u + iv$ يكون مستمراً إذا وفقط إذا كان كل من u و v مستمراً.

نلاحظ أن القسم الحقيقي u والقسم التخيلي v لكل من التابعين $\bar{z}$ أو $|z|$ هو تابع قابل للمفاضلة في كل نقطة (x,y) ومشتقاتهما الجزئية توابع مستمرة. فمثلاً:

$$f = \overline{z} = x - iy = u + iv \Rightarrow u = x . v = -y$$
$$u_x = 1 , u_y = 0 , v_x = 0 , v_y = -1$$

ومع ذلك فإن $\overline{z}$ أو $|z|$ غير قابل للمفاضلة في أية ساحة.

إذن وجود واستمرار المشتقات الجزئية لكل من القسم الحقيقي u والقسم التخيلي v للتابع f غير كاف كي يكون التابع f قابلاً للمفاضلة، ولابد من وجود شروط إضافية كي نضمن قابلية المفاضلة (وفق التحليل المركب) ونبحث هذه الشروط بالتفصيل في البندين القادمين.

(3-4-2) قابلية المفاضلة وفق التحليل الحقيقي والمشتق وفق اتجاه – التتمة3:

مقدمة: ليكن $\omega = f(z) = u + iv$ تابع معرف في الساحة $\overline{C} \supset D$ ولنفرض أن كل من u و v تابع قابل للمفاضلة في النقطة $D \ni z_o = (x_o, y_o)$ أي:

$$\Delta u = u(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - u(x_o, y_o)$$
$$\Delta v = v(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - v(x_o, y_o)$$

أو:

$$\Delta u = A_u(\Delta x, \Delta y) + B_u(\Delta x, \Delta y)$$
$$\Delta v = A_v(\Delta x, \Delta y) + B_v(\Delta x, \Delta y)$$

حيث $D \ni z_o + \Delta z, \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \Delta y = y - y_o, \Delta x = x - x_o$

أما A_u و A_v فهما تابعان خطيان بالمتحولين Δx و Δy

$$du = A_u = u_x(x_o, y_o) \cdot \Delta x + u_y(x_o, y_o) \cdot \Delta y$$
$$dv = A_v = v_x(x_o, y_o) \cdot \Delta x + v_y(x_o, y_o) \cdot \Delta y$$

يدعى A_u تفاضل u في z_o و A_v تفاضل v في z_o.

أخيراً B_v, B_u تابعان صغيران بالمقارنة مع التابع $|\Delta z|$:

$$\frac{B_u}{|\Delta z|} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0 , \frac{B_v}{|\Delta z|} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

لنلاحظ أن وجود u_x, u_y, v_x, v_y في (x_o, y_o) ينتج من عبارتي du و dv وقابلية u و v للمفاضلة في النقطة (x_o, y_o).

تعريف 2: ليكن $f = u + iv$ تابعاً معرفاً في جوار $z_o = (x_o, y_o)$ يقال إن f هو تابع **قابل للمفاضلة وفق التحليل الحقيقي** أو **$\mathbb{R}$- قابل للمفاضلة في** z_o إذا كان كل من u و v هو تابع قابل للمفاضلة في (x_o, y_o) هذا يعني الآتي:

إذا كان :

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = f(z_o + \Delta z) - f(z_o)$$

وكان $d\omega = du + idv$ فإن الفرق بين التغير التام Δf والتفاضل $d\omega$ هو تابع لامتناهي في الصغر حول z_o:

$$B = B_u + iB_v \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

أي في جوار z_o لدينا:

$$\Delta f = df + B(\Delta z)\ ;\ \frac{B}{\Delta z} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

لنلاحظ أنه إذا كان $df = du + idv$ فإن : $df = f_x dx + f_y dy$

حيث $f_x = u_x + iv_x,\ f_y = u_y + iv_y,\ du = u_x dx + u_y dy\ ,\ dv = v_x dx + v_y dy$

مبرهنة 2: ليكن $f = u + iv$ تابعا معرفا في جوار النقطة $z_o = (x_o, y_o)$.

الشرط اللازم والكافي كي يكون : $\omega = f(z) = u + iv$ تابع $\mathbb{R}$- قابل للمفاضلة في $z_o = (x_o, y_o)$ هو أن يكتب تفاضله:

$$d\omega = du + idv \tag{20}$$

بالشكل:

$$d\omega = df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \tag{21}$$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y) \tag{22}$$

$$f_{\bar z}=\frac{1}{2}\left(f_x+if_y\right)=\frac{1}{2}\left(u_x-v_y\right)+\frac{i}{2}\left(u_y+v_x\right) \tag{23}$$

إثبات لزوم الشرط: بما أن التابع f قابل للمفاضلة في النقطة z_0 (وفق $\mathbb{R}$) فإن المساواة (20) صحيحة في z_0. من عبارتي du وdv نجد أنه في z_0 يكون:

$$d\omega=df=f_x.\Delta x+f_y.\Delta y \tag{24}$$

والآن باستخدام:

$$x=\frac{z+\bar z}{2}\ ,\ y=\frac{z-\bar z}{2i}$$

في (24) نحصل على المطلوب.

نترك كفالة الشرط تدريبا.

نتيجة (1): تمثيل التفاضل df في العلاقة (21) وحيد لماذا؟.

تعريف (3): يقال إن التابع f قابل للمفاضلة في النقطة z وفق التحليل المركب إذا كان قابلاً للمفاضلة وفق التحليل الحقيقي وكان:

$$f_{\bar z}=0 \tag{25}$$

أو

$$u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x \tag{26}$$

يسمى (25) شرط قابلية المفاضلة المركبة أو اختصاراً شرط قابلية المفاضلة.

يبرهن أن التعريفين (1) و (3) متكافئان وان الرمزين في (22) و (23) يكافئان اشتقاق f شكلياً بالنسبة لـ z و $\bar z$ على الترتيب وأن:

$$f_{\bar z}=0 \Leftrightarrow u_x=v_y \quad \& \quad v_y=-v_x \tag{27}$$

اترك الإثبات تدريباً.

نسمي (26) شرطي كوشي – ريمان في الشكل الديكارتي وسنتوقف ملياً عند هذين الشرطين في البنود القادمة لأهميتهما.

ملاحظة (2): إن الشرط (25) يجعل قابلية المفاضلة وفق التحليل المركب عملية قاسية للغاية، وبناء تابع مستمر غير قابل للمفاضلة وفق التحليل الحقيقي هو عملية ممكنة لكنها شاقة، بينما عملية بناء تابع مستمر وغير قابل للمفاضلة وفق التحليل المركب بسيطة للغاية، فالتابع $f = x + 2iy$ مستمر لكنه غير قابل للمفاضلة وفق التحليل المركب لأن $u_x = 1$ و $v_y = 2$ كذلك اذا كان $f = \overline{z}$ فان $f_z = 1 \neq 0$ بينما إذا كان $f = z$ فان $f_{\overline{z}} = 0$ فهو C– قابل للمفاضلة في كل نقطة من المستوى ولأجله $dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z\ ,\ f' = f_z = 1$.

من جهة ثانية إذا كان f هو C – قابل للمفاضلة في النقطة z_0 وعوضاً عن عبارتي du و dv يكون $d\omega = f'(z)dz$ أو $f' = \dfrac{d\omega}{dz}$.

نتيجة (2): يكون التابع $\omega = f(\overline{z})$ هو C – قابل للمفاضلة في النقطة $\overline{z}_0$ اذا وفقط اذا كان $f_z(z_0) = 0$ وهنا $d\omega = f_{\overline{z}} \cdot \overline{\Delta z}$ ويرتبط u و v بالشرطين:

$$u_x = -v_y\ ,\quad u_y = v_x$$

اللذان ينتجان من شرطي كوشي – ريمان (27) بوضع y- مكان y.

تتمة – المشتق وفق اتجاه:

ليكن f قابل للمفاضلة في النقطة z_0 وفق التحليل الحقيقي، عندئذٍ:

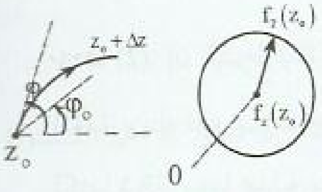
$$\Delta f = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} + o(\Delta z) \qquad (28)$$

حيث $\Delta f = f - f(z_0), \Delta\overline{z} = \overline{z} - \overline{z}_0, \Delta z = z - z_0\ ,\ o(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$

بوضع $\Delta z = |\Delta z| e^{i\varphi}$ نجد أن:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f_z + f_{\overline{z}} e^{-2i\varphi} + \eta(\Delta z) \qquad (29)$$

حيث $\eta(\Delta z) = \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$. بالتالي كي تكون النهاية $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ موجودة ومحدودة يجب أن تكون النهاية $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varphi = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z$ موجودة ومحدودة وتساوي الثابت الحقيقي φ_0 (الشكل1) وحسب (29) نجد أنها تعطى بالعلاقة:



الشكل (1)

$$\lim_{\Delta z \to o} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f_z + f_{\bar z}\, e^{-2i\varphi_o} \qquad (30)$$

تعبر العلاقة (30) عن قيمة المشتق وفق الاتجاه المعين بالزاوية φ_o وتبين أن المشتقات للتابع f وفق اتجاه هندسياً تمثل دائرة مركزها $f_z(z_o)$ ونصف قطرها $\left|f_{\bar z}(z_o)\right|$. (الشكل1)

في الحالة عندما يكون f قابلاً للمفاضلة في z_o وفق التحليل المركب أي $f_{\bar z} = 0$ تؤول الدائرة السابقة إلى نقطة وهي الحالة المدروسة في (2-4-2) وهنا يكون المشتق مستقلا عن الاتجاه.

تطبيق (2): مطلوب

ليكن f تابع معرف في جوار $z_o \in C$.

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يملك f مشتقاً في z_o هو أن يكون f هو C – قابل للمفاضلة في z_o.

الحل:

إذا كان f تابع C – قابل للمفاضلة في z_o فإن f هو $\mathbb{R}$– قابل للمفاضلة و $f_{\bar z} = o$ في z_o وحسب (29) يكون $\frac{\Delta f}{\Delta z} = f_z + \eta(\Delta z)\ ;\ \eta \xrightarrow[\Delta z \to o]{} o$

وهذا يعني إن المشتق موجود وإن $f'(z_o) = f_z$.

الأن إذا كان f هو C – قابل للمفاضلة في z_o وإن مشتقه هو $f'(z_o)$ فإنه من أجل قيم صغيرة لـ Δz يكون:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_o) + \eta(\Delta z)\ ;\ \eta \xrightarrow[\Delta z \to o]{} o$$

بالتالي:

$$\Delta f = f'(z_o).\Delta z + o(\Delta z)\ ;\ o(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to o]{} o$$

وهذا يعني أن f هو R – قابل للمفاضلة في z_o وأن $df = f'(z_o).dz$ مما يعني أن f هو C – قابل للمفاضلة في z_o.

لاحظ أن المشتق $f'(z)$ في حال وجوده مستقل عن الاتجاه وبالتالي يمكن حسابه في اتجاه المحور ox مثلاً ونجد:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x$$

في دراستنا كلها **نعتبر قابلية المفاضلة تلك التي هي وفق التحليل المركب.**

فيما يتعلق بنقطة اللا نهاية فإن التابع f يكون $\mathbb{R}$ أو C– قابل للمفاضلة في هذه النقطة اذا كان التابع $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ هو $\mathbb{R}$ أو C– قابل للمفاضلة في نقطة المبدأ على الترتيب.

(4-4-2) شرطا كوشي – ريمان:

ليكن $f = u + iv$ تابعا معرفا في جوار النقطة z_o.

كنا وجدنا أن وجود واستمرار المشتقات الجزئية v_y, v_x, u_y, u_x في النقطة (x_o, y_o) لوحدها لاتكفي كي يكون f قابل للمفاضلة في z_o ولابد من تحقق الشرط $f_{\bar{z}} = 0$ أو الشرطين $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ ولأهمية هذين الشرطين الإضافيين نقوم بدراستهما تفصيلاً باستقلال عن قابلية المفاضلة وفق R.

1) الشرطان في الشكل الديكارتي:

مبرهنة (3): يكون التابع $f = u + iv$ قابلاً للمفاضلة في النقطة z_o إذا وفقط إذا:

1- كل من u و v يملك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الأولى في (x_o, y_o).

2- يتحقق شرطا كوشي – ريمان في النقطة (x_o, y_o).

$$u_x = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -v_x \tag{31}$$

وعندئذ يحسب المشتق من إحدى العلاقات:

$$f'(z_o)=u_x+iv_x \ , \ f'(z_o)=v_y-iu_y \qquad (32)$$
$$f'(z_o)=u_x-iu_y \ , \quad f'(z_o)=v_y+iv_x$$

الإثبات:

لزوم الشرط: بما أن f قابل للمفاضلة في z_o فإن $\Delta f=f'(z_o).\Delta z+\varepsilon(\rho)$ حيث $\rho=|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ & $\varepsilon(\rho)\xrightarrow[\rho\to o]{} o$ أي أن :

$$\varepsilon_2(\rho)=o(\rho) \ \ \& \ \ \varepsilon_1(\rho)=o(\rho)$$

لنضع $f'=A+iB \ , \ \Delta f=\Delta u+i\Delta v$ نجد:

$$\Delta f=\Delta u+i\Delta v=(A+iB)(\Delta x+i\Delta y)+\varepsilon_1(\rho)+i\varepsilon_2(\rho)$$
$$\Rightarrow \Delta u=A.\Delta x-B.\Delta y+\varepsilon_1(\rho)$$
$$\Delta v=B.\Delta x+A.\Delta y+\varepsilon_2(\rho)$$

هذا يعني أن كل من u و v هو تابع قابل للمفاضلة في النقطة (x_o,y_o) وبالمقارنة مع:

$$\Delta u=u_x.\Delta x+u_y.\Delta y+\varepsilon_1(\rho) \ , \ \Delta v=v_x.\Delta x+v_y.\Delta y+\varepsilon_2(\rho)$$

نجد أن: $A=u_x$ ، $B=-u_y$ ، $B=v_x$ ، $A=v_y$ ومنه العلاقتين في (31) صحيحتان.

وبملاحظة أن $f'(z_o)=A+iB$ نحصل على العلاقات (32).

اترك إثبات كفاية الشرط تدريباً.

من الواضح أن المبرهنة تبقى صحيحة إذا استبدلنا النقطة z_o بساحة D.

مثال (3): أعطِ مثالاً توضح فيه أن تحقق شرطي كوشي – ريمان لوحدهما غير كاف كي يكون التابع المركب $f=u+iv$ قابلاً للمفاضلة.

الحل: لنأخذ التابع :

$$f=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad z=(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$u = x \,,\ v = -y$: مثال $f = \bar{z}$

$u_x = 1 \,,\ u_y = 0 \,,\ v_x = 0 \,,\ v_y = -1$

① مستمر في $(x,y) \in \mathbb{C} = xoy$

② $1 = u_x \neq v_y = -1$ إذاً f غير قابل للمفاضلة في أي نقطة ما عدا $(0,0)$.

إن التابع f يحقق شرطي كوشي – ريمان في النقطة (0,0) لأن :

$$u = \operatorname{Re} f = f \Rightarrow u_x \big|_{(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

بالمثل نجد أن: $u\big|_{(0,0)} = 0$.

واضح أن: $v_x\big|_{(0,0)} = v_y\big|_{(0,0)} = 0$

بالمقابل التابع f غير قابل للمفاضلة في النقطة $z = 0$ لأنه على المسار $y = mx$ لدينا النهاية $\lim\limits_{z\to 0} f = \dfrac{m}{1+m^2}$ مرتبطة بالمسار.

مثال (4): أثبت أن التابع $f = 2z+i$ قابل للمفاضلة في كل المستوى C وأن $f = |z|$ و $f = \bar{z}$ قابل للمفاضلة في النقطة $z = 0$ فقط.

الحل: لدينا :

$$f = 2z+i = 2(x+iy)+i = 2x+i(2y+1) = u+iv$$
$$\Rightarrow u = 2x, v = 1+2y \Rightarrow u_x = 2 \,,\ u_y = 0 \,,\ v_x = 0 \,,\ v_y = 2$$

نلاحظ أن شرطي المبرهنة (3) محققان لكل (x,y) والتابع قابل للمفاضلة في كل المستوى C.

بالنسبة للتابع $f = \bar{z}$ لدينا:

$$f = \bar{z} = x - iy = u+iv \Rightarrow u = x, v = -y \Rightarrow$$
$$u_x = 1 \,,\ u_y = 0 \,,\ v_x = 0 \,,\ v_y = -1$$

بما أن الشرط $u_x = v_y$ لايتحقق إلاّ في النقطة (0,0) فإن $\bar{z}$ قابل للمفاضلة في النقطة $z = 0$ فقط. أخيراً:

$$f = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = u+iv \Rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2} \,,\ v = 0$$

وبنفس الأسلوب نجد أن أحد شرطي كوشي – ريمان يتحقق فقط في النقطة (0,0).

ختاماً نستطيع الحصول على صيغة أعم لشرطي كوشي – ريمان (31) كما يلي:

بفرض أن $\tilde{s}$ و $\tilde{n}$ شعاعا واحدة متعامدان أي $|\tilde{n}|=|\tilde{s}|=1$ و $\tilde{n}=i\tilde{s}$.

بما أن المشتق (وفق C) مستقل عن الاتجاه فإنه بأخذ المشتق وفق اتجاه $\tilde{s}$ ثم وفق اتجاه $\tilde{n}$ نجد بنفس الأسلوب السابق (المبرهنة 3) أن:

$$f'(z)=\frac{1}{\tilde{s}}(u_s+iv_s)=\frac{1}{\tilde{n}}(u_n+iv_n)$$

وبوضع $\tilde{n}=i\tilde{s}$ والمقارنة نجد الشرطين:

$$u_s=v_n \ , \ u_n=-v_s \qquad (31)^*$$

لنلاحظ أنه بوضع $\tilde{s}=1$ و $\tilde{n}=i$ نحصل على الشرطين في (31).

2) الصيغة المركبة البديلة لشرطي كوشي – ريمان:

تعريف (4): **المشتق الجزئي** للتابع المركب $f=u+iv$ بالنسبة لكل من المتحولين الحقيقيين x و y هو:

$$f_x(z)=u_x+iv_x \ , \ f_y=u_y+iv_y \qquad (33)$$

مبرهنة(4): الشروط التالية للتابع $f=u+iv$ متكافئة. هامة

$$u_x=v_y \qquad \& \qquad u_y=-v_x \qquad (31)$$ (شرطا كوشي – ريمان).

$$f_x+if_y=0 \qquad (34)$$

$$f_{\bar{z}}=0 \qquad (35)$$

الإثبات: لنبرهن أن $(31)\Leftrightarrow(34)$. لدينا:

$$(31)\Leftrightarrow(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)=0\Leftrightarrow$$
$$u_x+iv_x+iu_y-v_y=0\Leftrightarrow u_x+iv_x+i(u_y+iv_y)=0$$
$$\Leftrightarrow(34)$$

نبرهن أن $(35)\Leftrightarrow(34)$ كما يلي:

بوضع $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ نجد:

$$f(z)=u\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

باعتبار f تابع للمتحولين z و $\overline{z}$ نجد أن:

$$f_{\overline{z}}=f_x.x_{\overline{z}}+f_y.y_{\overline{z}}=\frac{1}{2}f_x-\frac{1}{2i}f_y=\frac{1}{2}\left(f_x+if_y\right)=0$$

نلفت النظر إلى أننا نستخدم شرط قابلية المفاضلة (35) إذا كان f معطى صراحة بدلالة z و $\overline{z}$.

على سبيل المثال : إذا كان $f=p_n(z)$ فإن f قابل للمفاضلة في كل نقطة $z\in C$ لأن $(p_n)_{\overline{z}}=0$ والتابع $f=\overline{z}$ غير قابل للمفاضلة في أي ساحة لأن $\overline{z}_{\overline{z}}=1\neq 0$.

3) **الشرطان في الشكل القطبي:**

مبرهنة (5): ليكن $f=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi), z=re^{i\varphi}$.

يكون التابع f قابلاً للمفاضلة في النقطة $z_o=r_oe^{i\varphi_o}$ إذا وفقط إذا كان :

1) كل من u و v قابلاً للمفاضلة في النقطة z_o.

2) يتحقق شرطا كوشي – ريمان قطبياً في النقطة z_o:

$$u_r=\frac{1}{r}v_\varphi\ ,\ v_r=-\frac{1}{r}u_\varphi \qquad (35)$$

وعندئذ يحسب المشتق في z_o من إحدى العلاقتين :

للتأكد

$$f'(z_o)=\frac{r}{z}(u_r+iv_r)\ ,\ f'(z_o)=\frac{1}{z}(v_\varphi-iu_\varphi) \qquad (36)$$

الإثبات: يكفي للمطلوب إثبات صحة العلاقات (35) و (36) انطلاقاً من الشكل الديكارتي (المبرهنة (3)). لدينا:

$$x=r\cos\varphi\ ,\ y=r\sin\varphi\ ,\ f=u+iv$$
$$\Rightarrow u_r=u_x.x_r+u_y.y_r=u_x.\cos'\varphi+u_y.\sin\varphi$$
$$v_4=v_x.x_\varphi+v_y.y_\varphi=v_x.(-r\sin.\varphi)+v_y.(r\cos\varphi)$$
$$\Rightarrow\frac{1}{r}v_\varphi=-v_x\sin\varphi+v_y.\cos\varphi=u_y.\sin\varphi+u_x.\cos\varphi=u_r$$

وبنفس الأسلوب نبرهن الشرط الثاني في (35).

مثال: ادرس قابلية $f = z^2$ بطريقتين:

ط1 ديكارتية

$F = (x+iy) = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$u_x = 2x,\ u_y = -2y,\ v_x = 2y,\ v_y = 2x$

يحقق شرطا كوشي ريمان، وبالتالي z^2 قابل للمفاضلة نظامي من كل C.

$(z^2)' = u_x + i v_x = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$

نحصل على (36) كما يلي :

$$\begin{aligned}
r(u_r + iv_r) &= r\left[\left(u_x.x_r + u_y.y_r\right) + i\left(v_x x_r + v_y.y_r\right)\right] \\
&= r\left[\left(u_x.\cos\varphi + u_y.\sin\varphi\right) + i\left(v_x.\cos\varphi + v_y.\sin\varphi\right)\right] \\
&= r.(u_x + iv_x).\cos\varphi + ir.(u_y + iv_y)\sin\varphi = x(u_x + iv_x) + y(v_y + iu_y) \\
&= xf'(z) + iyf'(z) = (x+iy)f'(z) = zf'(z)
\end{aligned}$$

$u_y + iv_y$

لكن بملاحظة أن $z = re^{i\varphi}$ نجد: $r(u_r + iv_r) = re^{i\varphi}.f'(z)$.

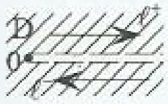
ومنه العلاقة اليمنى في (36) صحيحة بعد وضع $z = z_0$.

اترك إثبات العلاقة الثانية في (36) تدريباً.

مثال (5): أثبت أن $f = z^m$ قابل للمفاضلة في كل المستوى المركب حيث $m \geq 1$ مستخدماً الشكل القطبي واحسب مشتقه.

الحل: بوضع $z = re^{i\varphi}$ نجد:

$$f = z^m = r^m e^{im\varphi} = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$$
$$\Rightarrow u = r^m \cos m\varphi,\ v = r^m \sin m\varphi$$



الشكل (3)

بالتالي الشرطان (35) محققان لكل $z\ (z \neq 0)$.

مثال(6): لتكن $D = C\setminus[0,\infty)$ و $z = re^{i\varphi}\ ;\ 0 < \varphi < 2\pi$

أثبت أن التابع $f = \sqrt{z}$ قابل للمفاضلة في كل نقطة $z \in D$ واحسب مشتقه.

الحل: لدينا: (الشكل3)

$$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2} + i\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow u_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\varphi}{2},\ u_\varphi = -\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$v_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2},\ v_\varphi = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

وبما أن شرطي المبرهنة (5) محققان في كل نقطة $z \in D$ فإنه يتم المطلوب.

ط. د تقطيبة

$z = re^{i\varphi}$, $f = z^2 = r^2 e^{i2\varphi} = \rho e^{i\theta}$
$= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$u(r, \varphi) = r^2\cos 2\varphi$, $v(r, \varphi) = r^2\sin 2\varphi$

$u_r = 2r\cos 2\varphi$, $u_\varphi = -2r^2\sin 2\varphi$

$v_r = \text{---}$, $v_\varphi = \text{---}$

ومن (36) نجد:

$$f' = \left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad ; \quad z \in D \tag{37}$$

التفسير الفيزيائي – التتمة4: إن لقابلية المفاضلة المركبة وللمشتق تفسيرات هندسية وفيزيائية واسعة للغاية، وهنا نقدم تفسيرا فيزيائيا في الهيدروديناميك.

ليكن $\vec{V}$ أشعة سرع مستقلة عن الزمن وقيمتها واحدة في جميع نقاط عمود مقام على المستوى المركب C_z. عندئذ يتعين $\vec{V}$ كحقل شعاعي مستوي:

$$\vec{V} = V_1(x, y) + iV_2(x, y) \tag{38}$$

نفرض أن لـ V_1 و V_2 مشتقات جزئية مستمرة في جوار U لـ z_0 وإن الحقل محافظ في U :

$$\operatorname{rot}\vec{V} = (V_2)_x - (V_1)_y = 0 \tag{39}$$

ولولبي :

$$\operatorname{div}\vec{V} = (V_1)_x + (V_2)_y = 0 \tag{40}$$

من (39) نجد أن $V_1dx + V_2dy$ هو تفاضل تام لتابع φ (يدعى تابع كمون الحقل) في U أي :

$$V_1 = \varphi_x \quad , \quad V_2 = \varphi_y \tag{41}$$

أو شعاعياً :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi$$

ومن (40) نجد أن $-V_2dx + V_1dy$ هو تفاضل تام لتابع ψ:

$$-V_2 = \psi_x \quad , \quad V_1 = \psi_y \tag{42}$$

لدينا على منحنى سوية التابع ψ:

$$d\psi = -V_2dx + V_1dy = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{V_2}{V_1}$$

بالتالي هذا المنحنى هو المنحنى الشعاعي للحقل $\vec{V}$ أي منحنى التيار ولـذلك يدعى ψ تابع التيار.

الآن لنأخذ التابع :

$$f = \varphi + i\psi \tag{43}$$

الذي يسمى حقل الكمون المركب.

بمقارنة (41) مع (42) نجد:

$$V_1 = \varphi_x = \psi_y \quad , \quad V_2 = \varphi_y = -\psi_x \tag{44}$$

إن (44) تتطابق مع شرطي كوشي – ريمان.

وعليه فإن الكمون المركب f هو تابع قابل للمفاضلة في U وبالعكس كل تابع قابل للمفاضلة $f = \varphi + i\psi$ في U هو كمون مركب للحقل الشعاعي $\vec{V} = \overline{\mathrm{grad}\,\varphi}$ ويحقق (39) و (40) في U ويمثل حقل السرع.

بملاحظة أن :

$$f' = \varphi_x + i\psi_x = V_1 - iV_2 \tag{45}$$

فإن مشتق الكمون المركب هو مرافق شعاع السرعة.

(5-3) التابع الأصلي:

ليكن $f = u + iv$ تابع معرف في الساحة D و F تابع قابل للمفاضلة في D.

تعريف **(1):** يُقال إن F هو تابع أصلي لـ f في الساحة D إذا تحقق :

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall z \in D \tag{1}$$

مبرهنة (1): إذا كان التابع f يملك في الساحة D تابعاً أصلياً F فإن :

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0 z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{2}$$

حيث $\gamma : \overset{\frown}{z_0 z}$ منحنٍ يبدأ من النقطة المثبتة z_0 وينتهي عند النقطة الكيفية z ويقع في D. وعندئذ تختلف جميع التوابع الأصلية لـ f عن F في D بثابت مركب أي F+c توابع أصلية أيضاً.

الشكل (1)

في الحالة الخاصة نأخذ $\gamma:[z_0,z]$ عندما $D\supset[z_0,z]$.

الإثبات: نكتفي بإثبات القسم الثاني من المبرهنة (الشكل1).

نفرض أن $G(z)$ تابع أصلي آخر لـ f في D ولنبين أن

$\phi(z)=G(z)-F(z)\equiv c$ حيث c ثابت مركب كيفي.

بما أن G,F تابعان أصليان لـ f فإن $F'=f$ و $G'=f$ لكل $z\ni D$. بالتالي:

$$\phi'(z)=G'(z)-F'(z)=f-f=0$$

من جانب آخر، بما أن التابع $\phi=u+iv$ قابل للمفاضلة في D فإن u و v يملكان مشتقات جزئية مستمرة ويتحقق شرطا كوشي – ريمان:

$$u_x=v_y \text{ و } u_y=-v_x$$

ولكن من كون $\phi'=0$ يكون: $u_x=u_y=v_x=v_y=0$ ومنه $u=c_1$ و $v=c_2$ في D أي: $\phi=c_1+c_2=c$.

نتساءل متى يملك التابع f تابعاً أصلياً؟

نجيب عن السؤال على مرحلتين:

مبرهنة (2): الوجود موضعياً: إذا كان f تابعاً مستمراً في جوار ما للنقطة z_0 وليكن $K:|z-z_0|<r$ و Δ منحنى مثلث واقع في K ولنفرض أن:

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta=0 \tag{3}$$

الشكل (2)

عندئذ يوجد لـ f تابع أصلي F في الجوار K لـ z_0.

الإثبات: لتكن $z\ni K$ نقطة كيفية ولنأخذ $|h|$ بحيث $z+h\ni K$

عندئذ المثلث Δ الذي رؤوسه $z,z_0,z+h$ يقع في K ومن (3) نجد (الشكل2):

$$\int_{\partial\Delta} f d\zeta = \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z+h} + \int_{z+h}^{z_0} = 0 \Rightarrow \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z+h} = \int_{z_0}^{z+h}$$

لكن من (2) حيث γ فيها قطعة مستقيمة موجهة نجد:

$$\int_{z}^{z+h} = \int_{z}^{z_0} + \int_{z_0}^{z+h} = -\int_{z_0}^{z} + \int_{z_0}^{z+h} = -F(z)+F(z+h)$$

وبملاحظة أن $\int_{z}^{z+h} d\zeta = h$ وأن:

$$f(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta = \frac{1}{h}f(z)\int_{z}^{z+h} d\zeta$$

يكون:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\left[f(\zeta)-f(z)\right]d\zeta$$

وبما أن f مستمر في z فإن:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\,;\,|h|<\delta,\ \zeta\in[z,z+h]\Rightarrow\left|f(\zeta)-f(z)\right|<\varepsilon$$

بالتالي عندما $|h|<\delta$ يكون:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|\le\frac{1}{|h|}\int_{z}^{z+h}\left|f(\zeta)-f(z)\right||d\zeta|=\frac{1}{|h|}\varepsilon|h|=\varepsilon$$

هذا يعني أن $F'=f$ والتابع الأصلي F موجود موضعياً في الجوار K للنقطة z_0 ويحسب من:

$$F(z)=\int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \qquad (4)$$

الشكل (3)

التوطئة الأساسية في الحساب التكاملي: إذا كان التابع f قابلاً للمفاضلة في الساحة D و Δ منحنى مثلث واقع في D (الشكل3) فإن (انظر(4 −3)).

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \qquad (5)$$

مبرهنة (3) الوجود موضعياً: إذا كان f تابعاً قابلاً للمفاضلة في الساحة D فإن لـ f تابع أصلي F في كل قرص دائري $D \supset K : |z - z_0| < r$:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \;\; ; \;\; [z_0, z] \subset K$$

الإثبات: هو نتيجة مباشرة من المبرهنة (2) والتوطئة السابقة (الشكل4).

نتيجة(1): إذا كان التابع f قابلاً للمفاضلة في القرص الدائري K و γ منحنى واقع في K فإن (الشكل5):

1) لـ f تابع أصلي على طول γ ويتعين بدقة ثابت.

2) التكامل $\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$ مستقل عن شكل γ ويرتبط ببدايته ونهايته فقط.

بعبارة أخرى إذا كان γ, γ_1 منحنيان لهما نفس نقطة البداية z_0 ونفس نقطة النهاية z ويقعان في K فإن (الشكل6):

$$\int_{\gamma} fd\zeta = \int_{\gamma_1} fd\zeta = \int_{z_0}^{z} fd\zeta$$

الشكل (4)

الشكل (5)

الشكل (6)

إن مسألة وجود تابع أصلي في كامل الساحة D أكثر تعقيداً وسنجد في (4 – 7) أنه إذا كان التابع f مستمراً في D و $\int_{\gamma} fdz = 0$ لكل منحن مغلق γ واقع في D فإن لـ f تابع أصلي F في D (مبرهنة موريرا) :

$$F=\int_{\widehat{z_0 z}} f d\zeta \;;\quad \widehat{z_0 z}\subset D$$

إن معرفة أحد التوابع الأصلية تمكننا من حساب $\int_{\widehat{z_0 z_1}} f(z)dz$

مبرهنة (4): إذا كان f تابعاً مستمراً على المنحنى $\gamma:\widehat{z_0 z_1}$ ويملك على γ تابعاً أصلياً $F(z)$ فإن:

$$\int_{\gamma} fdz = F(z_1)-F(z_0) \qquad \text{(نيوتن– ليبنتز)} \tag{6}$$

الإثبات: لدينا فرضاً:
$$F=\int_{\gamma} fd\zeta + c$$

بوضع $z=z_0$ نجد $F(z_0)=c$ ومن أجل $z=z_1$ يكون:

$$F(z_1)=\int_{z_0}^{z_1} fd\zeta + c=\int_{z_0}^{z_1} f\,d\zeta + F(z_0)$$

ومنه تكون (6) صحيحة.

يمكن استخدام التكامل بالتجزئة لحساب تكامل إلى جانب علاقة نيوتن – ليبنتز.

مبرهنة (5): إذا كان g,f تابعين مستمرين في الساحة الوحيدة الاتصال D و $D\supset\gamma:\widehat{z_0 z_1}$ فإن:

$$\int_{\gamma} f.g'dz=\int_{\widehat{z_0 z_1}} fg'dz=[fg]\Big|_{z_0}^{z_1}-\int_{\widehat{z_0 z_1}} f'gdz$$

الإثبات: يكفي مكاملة طرفي المساواة:

$$(fg)'=f'g+fg'$$

على γ.

بنفس الأسلوب الموجود في التحليل الحقيقي ندرس طريقة تغيير المتحول لحساب التكامل $\int_{\gamma} f\,dz$.

نشير إلى أن جدول التكاملات الأساسي في التوابع المركبة يشبه الجدول المعروف في التحليل الحقيقي.

من جانب اخر إذا لم تكن الساحة D وحيدة الاتصال فإن التابع الأصلي في حال وجوده قد لا يكون وحيدالقيمة أي إذا كان f تابع قابل للمفاضلة في D فإن f قد لايملك في D تابعاً أصلياً.

على سبيل المثال: إذا كانت $D: 0<|z|<2$ و $f=\frac{1}{z}$ فإن D ثنائية الاتصال و f تابع قابل للمفاضلة في D ومع ذلك ليس له تابع أصلي في D لأنه لو فرضنا العكس أي يوجد تابع أصلي F و $D \supset \gamma: z=z(t), t\in[\alpha,\beta]$ فإن $F[z(t)]$ هو تابع أصلي على γ وحسب المبرهنة (4) يجب أن يكون :

$$\int_{\gamma} f dz = F(b)-F(a);\ a=z(\alpha), b=z(\beta)$$

وفي الحالة الخاصة يمكن أن يكون γ مغلق $\gamma \subset D$، لكن لو أخذنا $D \supset \gamma: z=e^{it}\ ; 0\le t\le \pi$ نجد: $\int_{\gamma}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$ وهذا تناقض، مع من؟.

خلاصة: القضايا التالية متكافئة:

1) يوجد لـ f تابع أصلي في الساحة D.

2) $\int_{\gamma} f dz = 0$ لكل منحن مغلق $\gamma \subset D$.

3) التكامل $\int_{z_0 z_1} f dz$ مستقل عن شكل المنحنى: $D \supset \gamma: \widehat{z_0 z_1}$.

قد تبدو هذه الخلاصة ضعيفة بسبب القضية (2) إذ كيف نعرف أن تكامل تابع ما على كل منحنى مغلق في ساحة يساوي الصفر؟

في الواقع أجاب الرياضي كوشي وكورسات عن هذا التساؤل الهام (انظر (4- 3)).

مثال (1): احسب $\int_\gamma z^2 dz$ في الحالتين.

1) $\gamma : \overset{\frown}{1, -1+2i}$ (2 $\gamma : [1,a] \cup [a, -1+2i]$

الحل:

1) إن التابع المستكمل قابل للمفاضلة (نظامي) في كل C و γ منحنى غير مغلق بالتالي قيمة التكامل لاتتعلق بشكل γ وترتبط بطرفيه فقط

$$I = \int_{-1}^{-1+2i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^{-1+2i} = \frac{1}{3}\left[(-1+2i)^3 - 1^3\right] = 6-4i$$

الجواب خطأ بنا كر

2) بما أن التكامل مستقل عن شكل γ والمنحنى التكاملي هنا له نفس نقطة البداية ونفس نقطة النهاية للمنحنى التكاملي في 1) فإن قيمة التكامل هي ذاتها $6-4i$.

لاحظ أن التابع الأصلي للتابع المستكمل z^2 موجود $F = \frac{z^3}{3}$ وهو تابع قابل للمفاضلة في كل C لأن $f = z^2$ مستمر في C.

مثال (2): احسب $I = \int_\gamma e^z dz$ إذا علمت أن γ هو:

1) منحنى مغلق في C ، 2) $\gamma : [-i, 2-i]$

الحل:

إن e^z مستمر في كل C بل قابل للمفاضلة في C وله تابع أصلي هو $F = e^z$.

1- $I = o$ لماذا؟

2- $I = \left[e^z\right]_{-i}^{2-i} = e^{-i}\left(e^2 - 1\right)$

(6-2) التقارب المنتظم للمتتاليات وللسلاسل التابعية المركبة:

إن مفهوم التقارب (النقطي أو الموضعي) لمتتالية توابع مركبة $\{f_n(z)\}$ أو السلسلة $\sum f_n(z)$ عندما تكون التوابع f_n معرفة في مجموعة E لايختلف عن التعريف

المقابل في المتاليات العددية $\{z_n\}$ أو السلاسل $\sum z_n$ والجديد الذي نحتاجه في هذا الصدد هو التقارب المنتظم.

(1-6-2) التقارب المنتظم لمتتالية توابع مركبة:

تعريف **(1)**: تسمى $\{f_n\}$ متتالية متقاربة بانتظام ونهايتها التابع $f(z)$ في الساحة D (أو على المنحني γ) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ ,\ \forall z\in D(z\in\gamma)\Rightarrow|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon \qquad (1)$$

وعندئذٍ نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z) \qquad (2)$$

بانتظام في D (على γ). نقدم المبرهنتين التاليتين المشابهتين لما هو في التحليل الحقيقي.

مبرهنة (1): إذا كانت $f_n, n=1,2,...$ مستمرة في الساحة D (أو على المنحني γ) وكانت $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام $\lim f_n(z)=f(z)$ فإن التابع f يكون مستمراً في D (على γ).

الإثبات: لتكن z_0 نقطة من الساحة D (أو على γ). بما أن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام فإنه من أجل $\varepsilon>0$ معطى يوجد دليل n بحيث إنه لكل z من D (أو على γ) يكون:

$$|f(z)-f_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

من جانب آخر كون f_n توابع مستمرة في z_0 فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث إنه لكل z من D (على γ) و $|z-z_0|<\delta$ يكون: $|f_n(z)-f_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. من أجل تلك النقاط z والدليل n يكون:

$$|f(z)-f(z_0)|\leq|f(z)-f_n(z)|+|f_n(z)-f_n(z_0)|+|f_n(z_0)-f(z_0)|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

هذا يعني أن التابع $f(z)$ مستمر في النقطة الكيفية z_0 وبالتالي مستمر في D (على γ).

مبرهنة (2): إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية متقاربة بانتظام على المنحني γ و $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ وكانت التوابع f_n مستمرة على γ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=\int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz \qquad (3)$$

هامة

الإثبات: بما أن التقارب منتظماً على γ فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ معطى يوجد دليل n_0 بحيث لكل $n \geq n_0$ ولكل z على المنحنى γ يكون:

$$\left|f_n(z)-f(z)\right|<\frac{\varepsilon}{\ell}$$

حيث $\ell=\ell(\gamma)$ طول γ.

ومن أجل تلك الأدلة n يكون:

$$\left|\int_\gamma fdz-\int_\gamma f_n dz\right|=\left|\int_\gamma (f-f_n)dz\right|<\frac{\varepsilon}{\ell}.\ell=\varepsilon$$

وهذه تعني أن المساواة (3) صحيحة.

إذاً في حالة التقارب المنتظم يمكن الانتقال بالنهاية $\lim\limits_{n\to\infty}$ إلى تحت إشارة التكامل.

(2-6-2) التقارب المنتظم لسلسلة تابعية مركبة:

***تعريف* (2):** يقال إن السلسلة التابعية $\sum\limits_1 f_n$ **متقاربة بانتظام في** الساحة D (على المنحني γ) من التابع f(z) إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(z)\}$ متقاربة بانتظام في D (على γ) ونهايتها التابع f(z) حيث $S_n(z)=f_1(z)+...+f_n(z)$.

يبرهن صحة اختبار فايرشتراوس للتقارب المنتظم كما في التحليل الحقيقي.

مبرهنة (3) "اختبار فايرشتراوس":

إذا كان $\left|f_n(z)\right|\leq c_n, n=1...$ لكل z من الساحة D والسلسلة الموجبة $\sum\limits_1 c_n$ متقاربة فإن السلسلة التابعية $\sum f_n(z)$ تكون متقاربة بانتظام في الساحة D.

الإثبات: من اختبار المقارنة تكون السلسلة $\sum f_n$ متقاربة في كل نقطة z من D وليكن مجموعها f(z) وحسب المتراجحة المفروضة نجد أن الباقي $R_n(z)=f(z)-S_n(z)$ لكل n يحقق المتراجحة:

$$|R_n(z)|\le|f_{n+1}|+|f_{n+2}|+\ldots\le c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots \qquad (4)$$

الطرف الأيمن هو الباقي R_n للسلسلة الموجبة المتقاربة $\sum c_n$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ وعليه لكل $o<\varepsilon$ معطى يوجد دليل $n_o(\varepsilon)$ بحيث لكل $n>n_o$ يكون $R_n<\varepsilon$ وعندئذ لكل z من D و $n\ge n_o$ حسب (4) يكون $|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$، وهذا يعني أن السلسلة التابعية $\sum f_n$ متقاربة بانتظام في D.

من المبرهنتين (1) و (2) ينتج:

مجموع سلسلة متقاربة بانتظام وحدودها توابع مستمرة هو تابع مستمر ومثل هذه السلسلة يمكن مكاملتها حداً حداً على $D\supset\gamma$:

$$\sum_1 \int_\gamma f_n dz=\int_\gamma \sum f_n(z)dz \qquad (5)$$

لاحقاً ندرس مسألة المفاضلة حداً حداً.

(2-7) المعنى الهندسي للمشتق ومبرهنة التابع العكسي البسيطة:

ذكرنا أن التابع المركب $\omega=f(z)$ هو تحويل ينقل مجموعة نقطية E_1 من المستوى C_z إلى مجموعة نقطية E_2 في C_ω والتحويل الخطي $f(z)=az+b$ هو دوران لـ z زاوية ثابتة $\alpha=\arg a$ وتكبير أو تصغير بمقدار ثابت $k=|a|$ ثم انسحاب بمقدار واتجاه b فهو يحفظ الزاوية ومعامل التحاكي. لنعمم هذه الفكرة على أي تابع قابل للمفاضلة.

(2-7-1) حفظ زاوية الدوران ومعامل التحاكي:

مبرهنة (1): ليكن $\omega=f(z)$ تابعاً قابلاً للمفاضلة في جوار ما للنقطة z_o و $f'(z_o)\neq 0$ عندئذ:

1- تدور جميع المنحنيات المتقاطعة الملساء في z_o زاوية واحدة تحت تأثير f مقدارها:

$$\alpha = \arg f'(z_o) \qquad (1)$$

2- التحويل f يحفظ معامل التحاكي (التكبير أو التصغير) للمنحنيات المتقاطعة المارة من النقطة z_o وقيمته هي:

$$k = |f'(z_o)| \qquad (2)$$

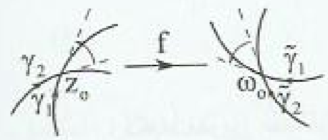
الإثبات: واضح أنه يكفي إثبات صحة المبرهنة لمنحنيين:

$\gamma_1 : z = z_1(t)\ ,\ \gamma_2 = z = z_2(t)\ ;\ t \in [\alpha, \beta]$ يمران من النقطة z_o.

إذا كانت φ_1 هي زاوية γ_1 مع ox^+ و φ_2 زاوية γ_2 مع ox^+ فإن الزاوية بين γ_1 و γ_2 في النقطة $z_o = z(t_o)$ تساوي $\varphi_2 - \varphi_1$.

$$\gamma_1 \xrightarrow{f} \tilde{\gamma}_1\ ,\ \gamma_2 \xrightarrow{f} \tilde{\gamma}_2\ ,\ z_o \xrightarrow{f} \omega_o = z_o(t_o)$$

وبفرض θ_1 زاوية $\tilde{\gamma}_1$ مع ou^+ و θ_2 زاوية $\tilde{\gamma}_2$ مع ou^+ فتكون $\theta_2 - \theta_1$ الزاوية بين $\tilde{\gamma}_1$ و $\tilde{\gamma}_2$ (الشكل1).



الشكل (1)

1) ينبغي علينا إثبات أن:

$\alpha = \theta_2 - \varphi_2 = \theta_1 - \varphi_1 = \arg f'(z_o)$ أو:

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \arg f'(z_o)$$

عندما $\gamma_1 \ni z_o$ لدينا:

$$\omega = f(z) \Rightarrow \omega(t_o) = f[z(t_o)] \Rightarrow \omega'(t_o) = \{f[z(t_o)]\}'$$

$$\Rightarrow \omega'(t_o) = f'(z_o) = \frac{df}{dz_1}(z_o)\frac{dz_1}{dt}(t_o) = f'(z_o).z'_1(t_o)$$

ولكن $z'_1(t_o) \neq 0$ لأن γ_1 منحني أملس في النقطة z_o ولدينا $f'(z_o) \neq 0$ فرضاً بالتالي $\omega'(t_o) \neq 0$ وهذه تعني أن مماس منحني الصورة $\tilde{\gamma}_1$ موجود في النقطة ω_o ويكون:

$$\theta_1 = \arg\omega'(t_o) = \arg f'(z_o) + \arg z_1'(t_o) = \alpha + \varphi_1$$
$$\Rightarrow \theta_1 - \varphi_1 = \arg f'(z_o) = \alpha$$

عندما $z_o \ni \gamma_2$ نجد بنفس الأسلوب أن: $\theta_2 - \varphi_2 = \arg f'(z_o) = \alpha$ ومنه نجد المطلوب.

2) عندما $z \ni \gamma_1$ والنقطة z قريبة من z_o يكون التابع f قابلاً للمفاضلة فرضاً وبالتالي لدينا في النقطة z :

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = f'(z_o) + \varepsilon(\Delta z) \;\; ; \;\; \varepsilon(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to o]{} 0$$
$$\lim_{\Delta z \to o}\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta z}\right| = |f'(z_o)| = k \Rightarrow$$
$$|\Delta\omega| = |f'(z_o)|.|\Delta z| + o(|\Delta z|) \qquad (3)$$

نحصل على نفس النتيجة إذا كانت $z \ni \gamma_2$ ويتم المطلوب.

نستنتج أنه إذا كان التابع f(z) قابل للمفاضلة في جوار z_o و $f'(z_o) \neq o$ فإن زاوية الدوران ومعامل التحاكي مستقلان عن المنحنى المار من z_o وعندما تغطي النقطة z شكلاً هندسياً يحوي z_o فإن صورة هذا الشكل وفق f هو شكل قريب منه. فمثلاً صورة الدائرة $|\Delta z| = |z - z_o| = \rho$ حسب المساواة (3) هي شبه الدائرة $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_o| = \rho|f'(z_o)|$ لوجود الحد الصغير $o(|\Delta z|)$ (الشكل2)، ومن الواضح أنه كلما اقتربت z من z_o أي كلما كان $o(|\Delta z|)$ صغيراً تصبح الصورة أقرب للأصل شكلاً وبالتالي صورة القرص $|\Delta z| < \rho$ هي القرص $|\Delta\omega| < \rho.|f'(z_o)|$ مع تشوه صغير في حدوده وصورة مثلث هي شبه مثلث ...الخ (الشكل 3).

الشكل (2)

الشكل (3)

تعريف (1): يقال إن $\omega = f(z)$ هو تحويل متماثل في النقطة z_0 إذا كان يحفظ الزوايــة ومعامل التحاكي لمنحنيين يتقاطعان في z_0.

ويقال إن f متماثل في الساحة D إذا كان:

1) f وحيد الصفحة في D. 2) f متماثل في كل نقطة من D.

نستنتج مباشرة أنه إذا كان:

1) f تابع قابل للمفاضلة في الساحة D.

2) f وحيد الصفحة في D.

3) $f'(z) \neq 0$ لكل $z \in D$.

فإن التحويل f يكون متماثلاً في الساحة D.

سوف نجد في الجزء الثاني أن الشرط الثالث إضافي إذ إنـه نتيجـة مـن الـشرطين الأول والثاني.

ملاحظة (1): إذا كان التابع f قـابلا للمفاضـلة في جـوار z_0 ولكـن $f'(z_0) = 0$ فـإن f تحويل غير متماثل في النقطة z_0.

على سبيل المثال: إذا كان $f(z) = z^2$ و $z_0 = 0$ فإن $f'(o) = 0$.

بفرض أن المنحنيين γ_1, γ_2 المارين من z_0 هما الشعاعان $\arg z = \alpha$، $\arg z = \beta$ علـى الترتيـب. عندئـذ $\varphi_1 = \alpha$ و $\varphi_2 = \beta$ والزاويـة بـين γ_1, γ_2 تكـون: $\varphi = \varphi_2, -\varphi_1 = \beta - \alpha$ ولكن:

$$\gamma_1 : \arg z = \alpha \xrightarrow{z^2} \tilde{\gamma}_1 : \arg \omega = 2\alpha = \theta_1$$
$$\gamma_2 : \arg z = \beta \xrightarrow{z^2} \tilde{\gamma}_2 : \arg \omega = 2\beta = \theta_2$$

بالتالي الزاوية بين الصورتين $\tilde{\gamma}_1$ و $\tilde{\gamma}_2$ في النقطـة $\omega_0 = f(z_0) = z_0^2 = o$ هـي $\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2(\beta - \alpha)$ و $\theta \neq \varphi$ والتحويل $f = z^2$ لايحفظ الزوايـا بـين المنحنيـات المتقاطعة عند $z_0 = 0$ فهو غير متماثل في هذه النقطة.

مثال (1): ليكن $\omega = f(z) = -2iz + 1$ والمطلوب إيجاد:

1) زاوية ومعامل التحاكي في نقطة كيفية z ثم في النقطة $z = i$.

2) صورة الشعاع $\gamma : \arg z = \frac{\pi}{3}$

3) صورة القرص $D : |z| < \frac{1}{2}$.

الحل: لدينا تحويل خطي من الشكل $\omega = az + b$ وفيه: $a = -2i$ ، $b = 1$ وبالتالي:

1) $$\alpha = \operatorname{Arg} a = \operatorname{Arg} f'(z) = \operatorname{Arg}(-2i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$k = |f'(z)| = |-2i| = 2$$

وهذا صحيح لكل $z \in C$ بما في ذلك عند $z = i$.

2) $$\gamma : \arg z = \frac{\pi}{3} \to \tilde{\gamma} : \arg(\omega - 1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

3) صورة D وفق $-2iz$ هي القرص $|\zeta| < 2.\frac{1}{2} = 1$ وصورة القرص الناتج هذا هي انسحاب له بمقدار واتجاه $b = (1,0)$ أي $|\omega - 1| < 1$.

مثال (2): ليكن $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ والمطلوب إيجاد صور النقاط $\infty, -2i, i$ ثم ما هي النقاط التي صورها على الترتيب هي $\infty, 1, 0$؟

الحل: $$i \to i \ , \ -2i \to \frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$$

لإيجاد صورة ∞ نكتب $\omega = \frac{1 - 1/z}{1 + 1/z}$ فنجد أن $\infty \to 1$

من أجل إيجاد النقطة التي صورتها 0 نلاحظ أن $z = 1$ تعدم البسط ولاتعدم المقام وبالتالي $1 \to 0$ وبالمثل $-1 \to \infty$ لأن $z = -1$ تعدم المقام ولاتعدم البسط وأخيراً $\infty \to \infty$ لماذا؟

تطبيق(1): أوجد زاوية الدوران α ومعامل التحاكي k في النقطة z_o تحت تأثير كل من التحويلين:

$$f=\frac{z-z_o}{z-\overline{z}_o} \quad ; \quad \operatorname{Im} z_o>0 \qquad (4)$$

$$f=\frac{z-z_o}{1-z\overline{z}_o} \quad ; \quad |z_o|<1 \qquad (5)$$

الحل:

لاحظ أن التحويل في (4) يخص نصف المستوى العلوي $\operatorname{Im} z>0$ والتحويل في (5) يتعلق بقرص الوحدة $|z|<1$ وإن z_o نقطة كيفية مثبتة وكلا التحويلين متماثلان في z_o بالتالي متماثلان في النصف العلوي أو في قرص الوحدة على الترتيب لأن f قابل للمفاضلة ووحيد الصفحة في جوار z_o و $f'(z_o)\neq 0$.

بالنسبة للتحويل (4) لدينا:

$$f'(z)=\frac{z_o-\overline{z}_o}{(z-\overline{z}_o)^2} \Rightarrow f'(z_o)=\frac{1}{2i\operatorname{Im} z_o}=-\frac{i}{2y_o}\neq 0 \;;\; y_o>0$$

$$\Rightarrow \alpha=\arg f'(z_o)=\arg\left(-\frac{i}{2y_o}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$k=|f'(z_o)|=\left|-\frac{i}{2y_o}\right|=\frac{1}{2y_o} \quad ; \quad y_o>0$$

أما من أجل التحويل (5) فإن:

$$f'(z_o)=\frac{1-z_o\overline{z}_o}{(1-z_o\overline{z}_o)^2}=\frac{1}{1-z_o\overline{z}_o}=\frac{1}{1-|z_o|^2}>0 \;;\; |z_o|<1$$

$$\alpha=0\;,\; k=\frac{1}{1-|z_o|^2} \quad ; |z_o|<1$$

مثال (3): أوجد أوسع ساحة يكون فيها كل من التحويلين التاليين متماثلاً:

$$(2)\quad f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad , \qquad (1)\quad f(z)=z^2$$

الحل:

1- إن التحويل $\omega = z^2$ قابل للمفاضلة في كل المستوى C و $f' = 2z$ بالتالي $f'(z) \neq 0$ في الساحة $C \setminus \{0\}$ وهو وحيد الصفحة في كل نصف مستو حدوده تمر من المبدأ. إذن التحويل z^2 متماثل في تقاطع الساحات الثلاث السابقة، أي في نصف مستو حدوده تمر من المبدأ (أو في أي ساحة جزئية منه).

2- التحويل هنا قابل للمفاضلة في $C \setminus \{-d/c\}$ ومشتقه $f' = \dfrac{ad-bc}{(cz-d)^2}$ لاينعدم عندما $ad-bc \neq 0$، ولدينا:

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \frac{az_1+b}{az_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2=d} \Rightarrow z_1 = z_2 \ ; \ ad-bc \neq 0$$

مبرهنة (2): ليكن $f = u+iv$ تابعاً قابلاً للمفاضلة في جوار z_o. يكون $f'(z_o) \neq 0$ إذا وفقط إذا كان اليعقوبي:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \tag{6}$$

غير معدوم في النقطة $z_o = (x_o, y_o)$.

إثبات لزوم الشرط: التحويل $\omega = f(z)$ يكافئ التحويلين $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$، وبما أن f تابع قابل للمفاضلة في جوار z_o فإنه يحقق شرطي كوشي – ريمان في النقطة (x_o, y_o)، أي أن $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ و $f' = u_x + iv_x$

بالتالي: $J(x,y) = u_x u_x + v_x v_x = u_{xx} + v_{yy} = |f'(z)|^2$

وبما أن: $f'(z) \neq 0$ في z_o فرضاً فإن $J(x,y) = |f'(x)|^2 \neq 0$ في (x_o, y_o)

أترك إثبات كفاية الشرط تدريباً.

تطبيق (2) – مساحة صورة ساحة وطول صورة منحني:

ليكن $f(z) = u+iv$ تحويلاً متماثلاً في ساحة D و γ منحني يقع في D ولنفرض أن:

$$D \xrightarrow{f} \tilde{D}, \ \gamma \xrightarrow{f} \tilde{\gamma}$$

أثبت أن مساحة الساحة $\tilde{D}$ تعطى بالصيغة:

$$S\left(\tilde{D}\right)=\iint_{D}\left|f'(z)\right|^{2}dx.dy \quad (7)$$

وإن طول المنحنى $\tilde{\gamma}$ هو:

$$\ell\left(\tilde{\gamma}\right)=\int_{\gamma}\left|f'(z)\right|\left|dz\right| \quad (8)$$

الحل:

بما أن $J(x,y)=J(z)=\left|f'(z)\right|^{2}$ فإن:

$$S\left(\tilde{D}\right)=\iint_{\tilde{D}} du.dv=\iint_{D}\left|J(z)\right|dxdy=\iint_{D}\left|f'(z)\right|^{2}dxdy$$

$$\ell\left(\tilde{\gamma}\right)=\int_{\tilde{\gamma}}\left|d\omega\right|=\int_{\gamma}\left|f'(z)\right|\left|dz\right|$$

لاحظ أن معامل تحاكي السطوح المستوية وفق f هو $\left|f'(z)\right|^{2}$ ومعامل تحاكي الأطوال هو $\left|f'(z)\right|$.

تعريف **(2)**: الزاوية بين المنحنيين γ_1,γ_2 في نقطة اللانهاية $z=\infty$ حيث نفرض أن المنحنيين γ_1,γ_2 يمران منها ومسقطيهما الاستيريوغرافي يملك مماس في النقطة $p\in S$ هي بالتعريف الزاوية بين صورتيهما $\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2$ عن التحويل:

$$\zeta=\frac{1}{z} \quad (9)$$

في النقطة $\zeta=0$.

بالتالي اذا كان γ_1 و γ_2 غير محدودين يتقاطعان في النقطة $z=o$ بزاوية φ_o فان الزاوية بينهما في النقطة ∞ هي $-\varphi_o$.

التفسير الهندسي لعملية المفاضلة المركبة – التتمة5:

ليكن $f=u+iv$ تابع $\mathbb{R}$– قابل للمفاضلة في $z_o\in C$. عندئذ يمكن تقريب $\omega=f$ كتحويل هندسي عندما $\Delta z\to o$ (قرب z_o) من التحويلين.

$$\left.\begin{aligned}\Delta u = u - u_o = u_x.\Delta x + u_y.\Delta y\\ \Delta v = v - v_o = v_x.\Delta x + v_y.\Delta y\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

مع خطأ صغير يمثله تابع يؤول للصفر عندما $\Delta z \to 0$.

بضرب المساواة الثانية بـ i وطرحها من المساواة الأولى نحصل على الصيغة المركبة:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o = f_z.\Delta z + f_{\bar{z}}.\Delta\bar{z} \quad (11)$$

حيث تؤخذ المشتقات في z_o.

تسمى المساواة في (11) التحويل المماس لـ f في z_o.

لنعطي المحددة اليعقوبية للتحويل f في z_o بدلالة المشتقين المركبين:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \quad (12)$$

ولإثبات (12) يكفي تعويض (22) و (23) من (2-4-3) في الطرف الأيمن من (12).

إذا كان $J \neq 0$ فإن التحويل المماس (11) لاينعدم وينقل مستقيمات متوازية إلى مستقيمات متوازية لكن قد لايحفظ الزاوية. فهو ينقل المربع إلى متوازي أضلاع والدوائر إلى قطوع ناقصة بشكل عام (لماذا؟) .

الآن نفرض أن f تابع C – قابل للمفاضلة في z_o عندها $f_{\bar{z}} = 0$ والمشتق موجود $f'(z_o) = f_z$.

ويأخذ التحويل المماس (11) الشكل.

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o = f'(z_o).\Delta z \quad (13)$$

فإذا كان $f'(z_o) \neq 0$ فإن التحويل المماس (13) يعني تكبير (أو تصغير) المتجه $z - z_o$ بمقدار $k = |f'(z_o)|$ مرة ودوران بزاوية $\alpha = \arg f'(z_o)$ مع حفظ الجهة.

تنويه: نقول إن التحويل f يحفظ الجهة إذا كان ينقل مثلث رؤوسه z_3, z_2, z_1 موجه إيجاباً إلى المثلث الذي رؤوسه $f(z_3), f(z_2), f(z_1)$ أو $\omega_3, \omega_2, \omega_1$ والموجه إيجاباً أيضاً.

إضافة لما ذكر فإن التحويل f:

1) يحفظ الزاوية بالقيمة. 2) ينقل المربع إلى مربع. 3) ينقل الدائرة إلى دائرة.

يمكن التحقق بسهولة من أن صحة إحدى القضايا الثلاث تضمن صحة القضيتين المتبقيتين.

لنفرض أن $\omega = f$ تابع $\mathbb{R}$ - قابل للمفاضلة في z_0.

يقال إن f متماثل في z_0 إذا كان التحويل المماس لـ f في z_0 يحفظ الجهة ويحقق إحدى القضايا الثلاث أعلاه.

يقال إن $f: D \to C$ متماثل في الساحة D إذا كان f هو تحويل واحد لواحد ومتماثلاً في كل نقطة $z \in D$.

ينتج إذا كان f هو C - قابل للمفاضلة في z_0 وكان $f'(z_0) \neq 0$ فإن f متماثل في z_0.

وبالعكس إذا كان f متماثلاً في z_0 وبأخذ المتجهين $\Delta z = i, \Delta z = 1$ نجد أن التحويل المماس (11) ينقل المتجهين إلى المتجهين $(f_z - f_{\bar{z}})i, f_z + f_{\bar{z}}$ وكون f متماثلاً فإننا نحصل على المتجه الثاني من تدوير الأول زاوية $\frac{\pi}{2}$ (لماذا؟) أي أن:

$$(f_z - f_{\bar{z}})i = (f_z + f_{\bar{z}})i$$

وبالتالي $f_{\bar{z}} = 0$ في z_0 أي أن $f'(z_0)$ موجود وإذا تذكرنا أن التحويل المماس لتحويل متماثل لاينعدم نجد أن $f'(z_0) \neq 0$ بهذا نخلص إلى الآتي:

إن عملية المفاضلة المركبة لتابع f في نقطة z_0 مع الشرط $f'(z_0) \neq 0$ تعني هندسياً أن f تحويل متماثل في z_0.

إذا كان f هو $\mathbb{R}$- قابل للمفاضلة في z_0 والتحويل المماس لـ f في z_0 يحقق إحدى القضايا الثلاث ولكن يغير الجهة إلى عكسها فإن f يسمى تحويلاً متماثلاً من النوع الثاني في z_0.

بسهولة نجد أنه إذا كان f هو C - قابل للمفاضلة في z_0 و $f'(z_0) \neq 0$ فإن $\omega = \overline{f(z)}$ هو تحويل متماثل من النوع الثاني في z_0.

(2-7-2) مبرهنة التابع العكسي البسيطة:

ذكرنا أنه للحصول على التابع العكسي f^{-1} للتابع $\omega = f(z)$ ينبغي إيجاد حل المعادلة $f(z) = \omega$ بالنسبة إلى z ثم استبدال مواضع z و ω شكلياً في صيغة الحل الناتجة، وأشرنا إلى أننا نحصل على توابع متعددة القيم عندما نأخذ التوابع العكسية لتوابع وحيدة القيمة.

من المعلوم أنه اذا كان $y = f(x)$ تابعاً حقيقياً بمتحول حقيقي واحد قابلاً للمفاضلة - مستمر في جوار $x = x_0$ ويحقق $f'(x_0) \neq 0$ فانه في جوار ما للنقطة $y_0 = f(x_0)$ يكون التابع العكسي الوحيد القيمة $x = \psi(y) = f^{-1}(y)$ موجوداً ومشتقه هو $\psi'(y) = \left[f^{-1}(y)\right]' = \dfrac{1}{f'(x)}$ تابع موجود و مستمر:

وعند إثبات هذه القضية الهامة تم الاعتماد بصورة رئيسة على مفهوم الاطراد ومن الواضح ان طريقة البرهان تلك لا يمكن نقلها الى التوابع المركبة رغم ان هذه القضية لها ما يشبهها في الساحة المركبة.

تبين المبرهنة المماثلة التالية متى يكون التابع العكسي f^{-1} للتابع f موجوداً ووحيد القيمة وكيف يحسب مشتقه.

مبرهنة (3): ليكن $f = u + iv$ تابع قابل للمفاضلة في جوار z_0 و $f'(z_0) \neq 0$ عندئذ f وحيد الصفحة في جوار z_0 ويكون:

1) التابع العكسي f^{-1} للتابع f يكون موجوداً ووحيد القيمة ومستمراً في جوار النقطة $\omega_0 = f(z_0)$.

2) التابع العكسي f^{-1} قابل للمفاضلة في كل نقطة ω من جوار ω_0 ومشتقه في هذه النقطة يعطى بالعلاقة:

$$(f^{-1}(\omega))' = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(\omega)\right]} \qquad (14)$$

الإثبات:

1) لدينا $v = v(x,y)$ و $\omega = f(z) \Leftrightarrow u = u(x,y)$، $J(x,y) = |f'(z)|^2$ وبما أن $f'(z_0) \neq 0$ والتابع f مستمر في جوار z_0 (كونه قابل للمفاضلة فرضاً) وليكن $K: |z - z_0| < r$ فإن التحويل العكسي:

$$z = f^{-1}(\omega) \Leftrightarrow x = x(u,v) \;\; \& \;\; y = y(u,v)$$

موجود ووحيد القيمة ومستمر في جوار ω_0 وليكن $\tilde{K}: |\omega - \omega_0| < \tilde{r}$، أي أن للمعادلة $f(z) = \omega$ حلاً وحيداً بالنسبة لـ z لكل $\omega \ni \tilde{K}$: $z = x(u,v) + iy(u,v) = f^{-1}(\omega)$

2) يتم المطلوب إذا بينّا أن النهاية $\lim\limits_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta \omega}$ موجودة ووحيدة ومستقلة عن مسار $\Delta\omega$ نحو الصفر. لدينا: $\frac{\Delta z}{\Delta\omega} = 1 / \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$

وبما أن f^{-1} مستمر في ω_0 فإن $\Delta\omega \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$.

من جهة ثانية النهاية $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta\omega}{\Delta z}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}}$ موجودة ومحدودة لأن f تابع قابل للمفاضلة في جوار z_0 فرضاً وقيمتها هي $\frac{1}{f'(z)}$ لكل $z \ni K$ بالتالي فإن $\lim\limits_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta\omega}$ موجودة ومحدودة عندما $\Delta\omega \to 0$ وتصح العلاقة (14).

نعمم هذه المبرهنة في الجزء الثاني ونشير إلى أنها صحيحة موضعياً.

هات مثالاً تثبت فيه ان المبرهنة ليست صحيحة اذا استبدلنا الجوار بساحة في نصها، ثم حاول إثباتها بطريقة ثانية مستخدماً شرطي كوشي - ريمان.

تمارين محلولة – المجموعة أولى

تمرين (1): a) اكتب التابع $f(z)=iz^2-1$ بالشكل $u+iv$.

b) أوجد مجموعة التعريف E_1 لكل من التوابع التالية:

$$1)\ \frac{z^3+1}{iz-1}\ ,\quad 2)\ \frac{2z-1}{2\bar{z}+1}\ ,\quad 3)\ \frac{xy}{y-2x}+i\frac{x}{y^2-x}$$

c) ~~أوجد صورة:~~

1) المجموعة $E_1 : \operatorname{Im} z \le 0$ وفق التحويل $f=z^5$.

2) المجموعة $E_1 : |z|<2\ ,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ وفق $f=-2z^2$.

هل التابع f وحيد الصفحة في E_1 أم لا؟.

الحل:

a) نضع $z=x+iy$ ونعزل القسم الحقيقي u عن التخيلي v نجد:

$$f=(-1-2xy)+i\left(x^2-y^2\right)$$

b)

$$1)\ E_1=\bar{C}\setminus\{-i,\infty\}\qquad 2)\ E_2=\bar{C}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

3) المستوى المركب باستثناء نقاط المستقيم $y=2x$ والقطع المكافئ $y^2=x$.

c) 1) بما أن E_1 هي القطاع الزاوي $-\pi\le\arg z\le 0$ فإن:

$$E_1:-\pi\le\arg z\le 0\xrightarrow{z^5}E_2:-5\pi\le\arg\omega\le 0$$

بالتالي الصورة E_2 هي المستوى C_ω مغطى مرتين ونصف المرة، حيث نصفه العلوي ممسوح مرتين، بينما النصف السفلي مغطى ثلاث مرات والتحويل ليست وحيد الصفحة في E_1.ويكون وحيد الصفحة في كل قطاع زاوي من الشكل:

$$\alpha \le \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{5}$$

$$E_1 : |z| < 2 \,,\; 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{-2z^2} E_2 : |\omega| < 8 \,;\; 0 < \arg \omega < 4\pi \qquad (2$$

وهنا التحويل وحيد الصفحة في E_1.

تمرين (2): a) باستخدام تعريف النهاية أثبت أن:

$$\lim_{z\to i} \left[x + i(x+2y) \right] = 2i \;\; (3 \qquad \lim_{z\to 2} \frac{z^2-4}{z-2} = \cancel{6}\,4 \;\; (2 \;،\; \lim_{z\to z_0} z^2 = z_0^2 \;\; (1$$

b) أوجد قيمة النهاية I التي تجدها موجودة لكل مما يلي:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|^2} \;\; (3 \;\;،\;\; \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} \;\; (2 \;\;،\;\; \lim_{z\to 1+2i} |z^2-1| \;\; (1$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{x^2y^{2}}{(x+y^{2})^3} \;\; (5 \;\;،\;\; \lim_{z\to 2i} \frac{z^4+4}{z(z-2i)} \;\; (4$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left[(x^3-3y^2x) + i(3x^2y-y^3) \right] \;\; (6$$

الحل: a) (1 $\quad |f(z)-z_0^2| = |z^2-z_0^2| = |z-z_0||z+z_0|$

$$= |z-z_0||z-z_0+2z_0| \le |z-z_0|\left(|z-z_0|+2|z_0|\right) < |z-z_0|^2 + 2|z_0||z-z_0|$$

إذا كان $\varepsilon > 0$ عدد مفروض و $0 < |z-z_0| < \delta, \delta \le 1$ فإن:

$$|z^2-z_0^2| < \delta^2 + 2\delta.|z_0| \le \delta\left(1+2|z_0|\right)$$

لذلك نأخذ $\delta = \overset{min}{\cancel{\max}} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|} \right\}$

2) التابع غير معرف عند $z=2$ ولكل $z \ne 2$ لدينا: $f = z+2$ بالتالي:

$$|f(z)-4| = |z-2|$$

إذا كان $\varepsilon > 0$ عدد مفروض و $0 < |z-2| < \delta$ فإن $\left| \frac{z^2-4}{z-2} - 4 \right| < \varepsilon$ تتحقق بأخذ $\delta = \varepsilon$.

3) $|f(z)-2i| \le |x|+|x|+2|y-1| = 2|x|+2|y-1|$

إذا كان $\varepsilon > 0$ عـدد مفـروض و $\delta > |z-i| > 0$ أو $0 < |x+i(y-1)| < \delta$ فـإن

$|x| < \delta$ و $|y-1| < \delta$ ويصبح لدينا: $|f-2i| \le 2\delta + 2\delta = 4\delta$ لذلك نختار $\delta \ge \frac{\varepsilon}{4}$.

b) 1) بما أن التابع $f = |z^2-1|$ مستمر في النقطة $1+2i$ فإن

$$I = \left|(1+2i)^2 - 1\right| = 4\sqrt{2}$$

2) النهاية غير موجودة لأنها تتعلق بالمسار.

3) على المسار $x = 0$ لدينا $I = -1$ وعلى المسار $y = x$ لدينا $I = i$ والنهاية غير موجودة.

4) $I = \infty$ (موجودة في $\overline{C}$ وغير موجودة في C).

5) على المسار $y^2 = mx$ مثلاً لدينا: $I = \lim\limits_{x \to 0} \frac{mx^3}{(x+mx)^3} = \frac{m}{(1+m)^3}$

والنهاية غير موجودة لأنها ترتبط بالعدد الحقيقي الكيفي m.

6) التابع مستمر في النقطة $(0,1)$ لأن كل من قسمه الحقيقي وقسمه التخيلي مستمر في هذه النقطة، بالتالي $I = (0-0) + i(0-1^3) = -i$.

تمرين(3): ابحث استمرار كل من التابعين f:

1) $\frac{x^2-y^2}{|z|^2}$ 2) $\frac{\sin y}{x-y} + i\frac{e^{2xy}}{x+3}$

الحل:

1) التابع مستمر في $C \setminus \{0\}$ ولايمكن جعله مستمراً عـنـد $z = 0$ لأن $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ غـيـر موجودة.

2) التابع مستمر في كل المستوى C باستثناء نقاط المستقيمين $y = x$ و $x = -3$.

تمرين(4): احسب قيمة التكامل I في كل مما يلي:

-1 $\int_\gamma \frac{dz}{(z \pm i)}$ حيث γ قطع ناقص أحد محرقيه i وموجه إيجاباً.

يوهدفها

نلاحظ في الحالات الثلاث أن قيمة التكامل لم تتغير أي أن التكامل في هذه الحالة لا يتعلق بالطريق المسلوك إنما يتعلق في البداية والنهاية فقط وهذا يتحقق عندما يكون التابع $f(z)$ المستمر تابع تحليلي "قابل للمفاضلة" ويصبح تكامل محدد

2- $\int_{\gamma} \overline{z}\, dz$ حيث $\gamma : |z| = 2$ مغطاة مرتين بالاتجاه السالب.

3- $\int_{\gamma} (2z+1)\, dz$ حيث γ هو القطعة $[-i,1]$ ثم $[-i,0] \cup [0,1]$ ثم:

$$\gamma : z(t) = e^{it} \;;\; -\frac{\pi}{2} \le t \le 0$$

4- $\int_{\gamma} (x^2 - iy^2)\, dz$ حيث γ القطع الموجه $y = 2x^2$ من النقطة $(1,2)$ إلى $(2,8)$.

5) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ حيث:

$$\gamma : z(t) = a\cos t + ib\sin t,\; 0 \le t \le 2\pi,\; a^2 - b^2 = 1$$

الحل:

1- $I = 2\pi i$ لماذا؟

2- لدينا $\gamma : z(t) = 2e^{it} \;;\; 0 \le t \le 4\pi \,,\; \overline{z}(t) = 2\overline{e}^{it} \,,\; dz = 2ie^{it}dt \Rightarrow$

$$I = \int_{4\pi}^{0} 2e^{-it}.2ie^{it}dt = -16\pi i$$

3- $I = 3+i$ في الحالات الثلاث. لأن التابع تحليلي وله نفس البداية ونفس النهاية في الحالات الثلاث

4- $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t) = t + 2it^2 = t(1+2it) \;;\; 1 \le t \le 2$

$$dz = (1+4it)\,dt \Rightarrow I = \int_{1}^{2} (t^2 - 4it^4)(1+4it)\,dt = \frac{511}{3} - \frac{49}{5}$$

5- $$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{z'(t)\,dt}{\sqrt{[z'(t)]^2}} = \pm \int_{0}^{2\pi} dt = \pm 2\pi$$

تمرين(5): أوجد حداً علوياً للمقدار $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} \right|$ حيث $\gamma : |z| = 2$.

الحل: لدينا $\ell(\gamma) = 4\pi$, $|z^2+1| \ge |z|^2 - 1 = 3; |z| = 2$ بالتالي $\frac{4\pi}{3}$ هو حد علوي.

هام

تمرين (6): أجب عن الأسئلة التالية:

1- بيّن أن التابع $f=\sqrt{|xy|}$ يحقق شرطي كوشي – ريمان عند $z=0$ ومع ذلك غير قابل للمفاضلة عند هذه النقطة.

2- باستخدام شرطي كوشي – ريمان احسب f' حيث $f=z^3$.

3- ادرس قابلية المفاضلة للتابع $f=e^x(\cos y-i\sin y)$.

4- أعطِ مثالاً لتابع مستمر في نقطة لكنه غير قابل للمفاضلة في تلك النقطة.

5- بفرض أن f تابع قابل للمفاضلة في الساحة D. أثبت أنه إذا $|f|\equiv const$ أو $\arg f(z)\equiv const$ في D فإن $f\equiv const$ في D. هام دورة

6- بفرض f و $\overline{f}$ تابعان قابلان للمفاضلة في الساحة D بيّن أن $f\equiv const$ في D.

الحل:

1) لدينا

$$v=0\ ,\ u=\sqrt{|xy|}$$

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=0\ ,\ u_y(0,0)=0$$

$$v_x(0,0)=0\ ,\ v_y(0,0)=0$$

مما يعني أن شرطي كوشي –ريمان محققان عند النقطة $(0,0)$.

على المسار $y=mx$ نجد أن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{\sqrt{|m|}}{1+im}\ ;\ x\neq 0$$

بالتالي النهاية تتعلق بالثابت الحقيقي الكيفي m والتابع f غير قابل للمفاضلة في النقطة $z=0$.

2) بوضع $z=x+iy$ نجد أن:

$$f=u+iv=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)$$

$$f'=u_x+iv_x=3x^2-3y^2+i(6xy)=3z^2$$

3) التابع غير قابل للمفاضلة في أي ساحة من المستوى المركب لأنه لايحقق شرطي كوشي – ريمان.

$$f=\begin{cases}\dfrac{x.z}{|z|} & ; \quad z\neq 0\\ 0 & ; \quad z=0\end{cases} \qquad (4$$

5) إذا كان $|f|\equiv const$ و $f=u+iv$ فإن $u^2+v^2\equiv const$ بالتالي يكون:

$$2uu_x+2v.v_x=0\Rightarrow uu_x+vv_x=0$$

بالمثل نجد أن $uu_y+vv_y=0$

من جهة ثانية بما أن التابع f قابل للمفاضلة في D فإنه يحقق شرطي كوشي – ريمان، ومن هذين الشرطين نجد أن:

$$uu_x-vv_y=0 \quad \& \quad uu_y+vv_x=0$$

بحذف u_y من جملة المعادلتين نحصل على $(u^2+v^2)u_x=0$ وكون $u^2+v^2\equiv const\neq 0$ فإن $u_x=0$.

بنفس الأسلوب نجد أن $v_x=0$ أصبح لدينا:

$$f'=u_x+iv_x=0\Rightarrow f\equiv const$$

إذا كان $\arg f(z)\equiv const$ فإن:

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=c\Rightarrow\frac{v}{u}=k\Rightarrow v=k.u\Rightarrow v_x=ku_x \quad \& \quad v_y=k.u_y$$

بحذف الثابت k من جملة المعادلتين نجد: $u_xv_y=v_xu_y\Rightarrow u_xv_y-v_xu_y=0$

ومن شرطي كوشي – ريمان نجد أن:

$$u_x^2+u_y^2=0\Rightarrow u_x=0 \;\&\; u_y=0\Rightarrow u\equiv const$$

بالمثل نجد أن $v\equiv const$.

6) إذا كان $f=y+iv$ فإن $\overline{f}=u+i(-v)$ لكن بما أن $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ كون f تابع قابل للمفاضلة في D و $u_y=v_x$ و $u_x=-v_y$ كون $\overline{f}$ تابع قابل للمفاضلة في D فإن: $u_x=u_y=0$. ومن جانب آخر لدينا:

$$f' = u_x + iv_x = 0$$

إذن $f \equiv const$ في D.

تمرين (7): حدد a و b كي يكون التابع: $f = axy - i\left(x^2 + by^2\right)$

قابل للمفاضلة في كل المستوى C.

الحل: لدينا $u = axy$ ، $v = -x^2 - by^2$ بالتالي:

$$u_x = ay,\ u_y = ax\ ,\ v_x = -2x\ ,\ v_y = -2by$$

بالتعويض في شرطي كوشي – ريمان نجد أن $b = -1, a = 2$.

تمارين محلولة – المجموعة الثانية

تمرين (1): اكتب كلاً من التوابع f التالية بالشكل الديكارتي $f=u(x,y)+iv(x,y)$ وحدد ساحة التعريف.

1) $\dfrac{z+i}{z^2+1}$ ، 2) $e^z+e^{-z};\ e^z=e^xe^{iy}$

الحل: نضع $z=x+iy$ نجد:

1) $$f=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}$$

والتابع معرف في الساحة $D=C\setminus\{\pm i\}$

2) $f=(e^x+e^{-x})\cos y+i(e^x-e^{-x})\sin y$ والتابع معرف في كل المستوي C.

تمرين (2): اكتب كلاً من التوابع f التالية بالشكل القطبي $f=\rho e^{i\theta}$ وحدد ساحة التعريف.

1) $\dfrac{1}{z^2}$ ، 2) z^3+1-i

الحل: نضع $z=re^{i\varphi}$ نجد:

1) $f=\dfrac{1}{(re^{i\varphi})^2}=\dfrac{1}{r^2}e^{-2i\varphi}$ و f معرف في $C\setminus\{0\}$

2) لدينا: $$f=r^3e^{3i\varphi}+1-i=(r^3\cos 3\varphi+1)+i(r^3\sin 3\varphi-1)$$

$$\Rightarrow \rho=\sqrt{(r^3\cos 3\varphi+1)^2+(r^3\sin 3\varphi-1)^2}$$

أما $\theta=\arg f$ فإنها تتعلق بموقع z في المستوى. والتابع معرف في C.

لماذا **تمرين (3):** حدد مجموعة قيم كل من التوابع f المعرفة في المجموعة المبينة جانب كل تابع.

1) $z-5;\ \operatorname{Re} z>0$ 2) $z^2;\ \operatorname{Re} z\geq 0, \operatorname{Im} z\geq 0$

3) $\frac{1}{z};\ 0<|z|\le 1$ ، 4) $-2z^3;\ |z|<1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}$

الحل:

1- $\operatorname{Re}\omega>5$ ، 2) $\operatorname{Im}\omega\ge 0$ ، 3) $|\omega|\ge 1$ ، 4) جزء من قطاع زاوي.

$$|\omega|<2\ ,0<\arg\omega<\frac{3\pi}{2}$$

تمرين (4): ليعرف التابع $\omega=f(z)=e^z=e^x\cdot e^{iy}$ والمطلوب إيجاد صورة:

1- المستقيم الشاقولي $\operatorname{Re}z=1$ ، 2- المستقيم الأفقي $\operatorname{Im}z=\frac{\pi}{4}$

3- الشريط $0\le \operatorname{Im}z\le\frac{\pi}{4}$.

الحل: نلاحظ أن f معرف في كل C_z ويأخذ قيمه في C_ω.

-1
$$\operatorname{Re}z=1\Rightarrow x=1\Rightarrow \omega=e\cdot e^{iy}\Rightarrow$$
$$\omega=e(\cos y+i\sin y)\Rightarrow|\omega|=e$$

أي أن e^z ينقل المستقيم $x=1$ إلى الدائرة $|\omega|=e$ ،

2) $$\operatorname{Im}z=\frac{\pi}{4}\Rightarrow y=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega=e^{\pi i/4}\cdot e^x$$

بالتالي e^z ينقل المستقيم $y=\frac{\pi}{4}$ إلى الشعاع $\arg\omega=\frac{\pi}{4}$.

3) بنفس الأسلوب نجد أن صورة الشريط المفروض هي القطاع الزاوي $0\le\arg\omega\le\frac{\pi}{4}$.

تمرين (5): أثبت باستخدام تعريف نهاية تابع أن: $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1}=3$

الحل: لدينا:

$$\left|\frac{z^3-1}{z-1}-3\right|=\left|z^2+z-2\right|=\left|(z-1)^2+3(z-1)\right|<\delta(\delta+3)$$

بالتالي يكفي أن نأخذ $\delta<1$ ؛ $\varepsilon=4\delta$.

تمرين (6): احسب قيمة النهاية I لكل من:

$$1)\ \lim_{z\to 2+3i}(z-5i)^2 \qquad 2)\ \lim_{z\to 2}\frac{z^2+3}{iz} \qquad 3)\ \lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^4-1}$$

$$4)\ \lim_{z\to 1+2i}|z^2-1| \qquad 5)\ \lim_{z\to -i}\frac{1}{z^5+i} \qquad 6)\ \lim_{z\to\infty}\frac{3z-1}{2z+1}$$

الحل:

1- التابعين في 1) و2) مستمران في النقطة المراد حساب قيمة النهاية فيها، لذلك يكفي أن نستبدل المتحول z بالنقطة في عبارة f لنجد: 1) -8i (2 $-\frac{7i}{2}$.

بالنسبة لبقية التوابع نجد:

3) $-\frac{1}{2}$ 4) $4\sqrt{2}$ 5) $I=\infty$ (في $\overline{C}$) .

6) لنضع $z=\frac{1}{t}$ نجد:
$$I=\lim_{t\to 0}\frac{3\left(\frac{1}{t}-1\right)}{2\left(\frac{1}{t}+1\right)}=\frac{3}{2}$$

تمرين (7): بين أنه إذا كان $f=\frac{x^2}{x^2+y^3}+2i$ فإن $\lim_{z\to 0}f(z)$ غير موجودة باستخدام المتتاليات.

الحل: يكفي اختيار متتالية $\{z_n\}$ متقاربة من $z_o=0$ ثم التحقق من أن قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty}f(z_n)$ على المحور الحقيقي مختلفة عن قيمتها على المحور التخيلي.

تمرين (8): ليكن f تابع مستمر في ساحة D بين أن كل من التوابع $\overline{f}$ (1، Ref (2، Imf (3، |f| (4، مستمر في D.

الحل:

1) بما أن $f=u+iv$ مستمر في D فإن u(x,y) و v(x,y) مستمران في كل $(x,y)\in D$ وبملاحظة أن $-v(x,y)$ مستمر في D فإن $\overline{f}=u-iv$ مستمر في D.

2) لنبين أن $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$ لكل $z_0 \ni D$.

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\lim_{z \to z_0} f\right) = \operatorname{Re} f(z_0)$$

3) بنفس أسلوب 2).

4) ينتج المطلوب من استمرار f والمتراجحة المثلثية:

$$\left||f| - |f(z_0)|\right| < \left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$$

تمرين (9): ادرس استمرار كل من التوابع f التالية:

$$\frac{|z|^2}{z} \ (1 \qquad \begin{cases} \dfrac{2z+1}{z+1} & ; \quad z \neq 0 \\ 1 & ; \quad z = 0 \end{cases} \ (2 \qquad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ (3$$

هل يمكن إعادة تعريف f في النقاط التي لايكون فيها معرفاً بحيث يصبح مستمراً في تلك النقاط؟

الحل:

1) بما أن $|z|^2 = z\bar{z}$ فإن $f = \bar{z}$ وهو كما نعلم مستمر.

لدينا: $|\bar{z} - \bar{z}_0| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon$

لكل $z_0 \ni C$ باستثناء $z_0 = 0$.

لكن بما أن $\lim\limits_{z \to 0} \bar{z} = 0$ (النهاية موجودة) فإننا نعرف $f(0) = 0$ ويكون بعدئذ f مستمراً في كل C.

2) إن $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ موجودة في $C \setminus \{-1\}$ والتابع f مستمر في $C \setminus \{0, -1\}$

من الواضح أنه لايمكن تعريف f في $z_1 = -1$ وبما أن $\lim\limits_{z \to 0} f = 1$ فرضاً فإنه يمكن تعريف f في $z_2 = 0$ بوضع $f(0) = 1$ وبالتالي فالنقطة قابلة للإزالة.

3) التابع f مستمر في كل المستوى باستثناء النقطة (0,0) وبما أن $\lim\limits_{z \to 0} f = 1$ على المحور ox و $\lim\limits_{z \to 0} f = -1$ على oy فإن النهاية $\lim\limits_{z \to 0} f$ غير موجودة ولايمكن جعل f مستمراً في (0,0).

حلها

تمرين (10): ليكن $\omega = f(z) = \ln z = \ln|z| + i\varphi$

حيث $0 \le \varphi = \arg z \le 2\pi$, $z = re^{i\varphi};\ |z| = r$ و الساحة $D = C \setminus [0,+\infty)$

هي المستوى المقطوع على طول ox^+ ضفتها العليا ℓ^+ والسفلى ℓ^-. أثبت أن التابع f مستمر في D حتى حدودها $\ell^\pm$ ولكنه غير مستمر في $\bar{D} = D \cup \ell^\pm$ ثم احسب $f(-1+i), f(i), f(-2)$ $.f\left[(2)^-\right], f\left[(2)^+\right]$

الحل:

إن f مستمر في D لأن كل من قسمه الحقيقي والتخيلي هو تابع مستمر في D (انظر تابع الزاوية).

نبرهن استمرار f حتى الحدود $\ell^\pm$. لدينا:

$$x = x^+ \in \ell^+ \Rightarrow f(x) = \ln|x| = \ln r$$

حيث $\varphi = 0$ في كل نقطة x من الضفة العليا

$$x = x^- \in \ell^- \Rightarrow f(x) = \ln|x| + 2\pi i$$
$$\Rightarrow f(x) = \ln r + 2\pi i$$

حيث $\varphi = 2\pi$ في كل نقطة x من الضفة السفلى.

نستنتج أن f مستمر في D حتى حدودها، وإن كل نقطة $x \in (0,+\infty)$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول له ومقدار القفزة واحدة وتساوي:

$$f(x)|_{\ell^+} - f(x)|_{\ell^-} = -2\pi i$$

وعليه فإن f غير مستمر على $[0,+\infty)$ فهو بالتالي غير مستمر في $\bar{D}$.

بحساب $|z|$ و φ في عبارة $\ln z$ والتعويض في تلك العبارة نجد القيم المطلوبة.

حلها

تمرين (11): ليكن $f = 2i|z|^2$ والمطلوب:

1) بيّن أن f هو R– قابل للمفاضلة وليس C– قابل للمفاضلة في ساحة يطلب تعيينها.

2) احسب مشتق f وفق اتجاه الشعاع $\gamma : \arg z = \frac{\pi}{3}$ في النقطة $1-2i$.

الحل:

1) لدينا $f = 2iz\overline{z}$ و $\frac{\Delta f}{\Delta z} = 2i\overline{z} + 2ize^{-2i\varphi} + \eta;\ \eta \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$

مما يعني أن: f هو R– قابل للمفاضلة في كل C ولكن لكل $z \neq 0$ لدينا $f_{\overline{z}} = 2iz \neq 0$ بالتالي فهو ليس C– قابل للمفاضلة في كل $C \setminus \{0\}$.

2) من علاقة المشتق وفق اتجاه نجد:

$$f' = f_z + f_{\overline{z}} \cdot e^{-2i\arg z} \Rightarrow$$

$$f'(1-2i) = \left(2i\overline{z} + 2ize^{-2i\pi/3}\right)\Big|_{1-2i} = ?$$

تمرين (12): مستخدماً التابع الأصلي احسب $I = \int_{\gamma} f\,dz$.

1) $3z^2 - 1,\ \gamma = [-i, i]$ ، 2) $p_n(z)$ حيث γ منحنى في المستوى المركب.

3) z حيث $\gamma = [1, 1+i] \cup [1+i, -i]$ ثم $\gamma = [1, -i]$

الحل:

1) $$I = \left(\frac{3z^3}{3} - z\right)\Big|_{-i}^{i} = \quad ?$$

2) التابع الأصلي لكثيرة الحدود $P_n = a_n z^n + \cdots a_o$ هي كثيرة الحدود:

$$q_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_o z$$

فإذا كان γ مغلقاً فإن $I = 0$ (لماذا؟)

أما إذا لم يكن γ مغلقاً فإن قيمة I ترتبط بنقطة البداية ونقطة النهاية لـ γ فقط (لماذا؟) ونوجدها من علاقة نيوتن – ليبنتز.

3) قيمة التكامل على أي من المنحنيين المفروضين واحدة (لماذا؟) وتساوي:

$$I=\int_{i}^{-i} z\,dz=-1$$

تمرين (13): لتكن المتتالية التابعية $f_n=z^n$ والساحة $D:|z|\le R<1$. أثبت بطريقتين أن:

1) المتتالية $\{z^n\}$ متقاربة بانتظام في D.

2) السلسلة $\sum z^n$ متقاربة بانتظام في D.

3) كرر الطلبين عندما $f=\left(\frac{z}{z_o}\right)^n$ و $D:\left|\frac{z}{z_o}\right|\le R<1$.

الحل:

1) إن كل من $\{z^n\}$ و $\sum z^n$ متقاربة "نقطياً" في قرص الوحدة $|z|<1$.

الطريقة الأولى: من التقارب النقطي وبعد ملاحظة أن D مغلقة ومحدودة و $\overline{D}$ واقعة ضمن قرص الوحدة نجد المطلوب حسب مبرهنة فايرشتراس في التقارب المنتظم.

الطريقة الثانية: نستخدم التعريف نجد أن $\varepsilon > |z^n|\le R^n$ تتحقق عندما $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln R}$ لذلك يكفي أن نأخذ $N(\varepsilon)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln R}+1$ لنجد أن $N(\varepsilon)$ مستقل عن z وإن $\{z^n\}$ متقاربة بانتظام في D.

2) بالنسبة للسلسلة لدينا:

$$\left|S_n(z)-f(z)\right|=\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}<\frac{R^{n+1}}{1-R}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln R}+\frac{\ln(1-R)}{\ln R}-1$$

وبأخذ $N(\varepsilon)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln R}+\frac{\ln(1-R)}{\ln R}$ المستقل عن z نجد المطلوب.

3) يكفي إجراء التحويل $t=\frac{z}{z_o}$ للحصول على المبرهن في 1) و 2) بالنسبة لـ $\sum_{o} t^n, \{t^n\}$.

تمرين (14): ادرس التقارب المنتظم لكل من:

1) $\sum_{1} \frac{\cos n|z|}{n^2}$ في C، 2) $\sum_{0} \frac{2^n z^n}{n!}$ في $|z| \le 4$

الحل:

نطبق اختبار فايرشتراس:

1) لدينا $\forall z \in C \quad \left|\frac{\cos n|z|}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة، وبالتالي السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام في كل C.

2) عندما $|z| \le 4$ لدينا: $\left|\frac{2^n z^n}{n!}\right| \le \frac{8^n}{n!}$ و $\sum \frac{8^n}{n!}$ متقاربة وبالتالي السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام في القرص $|z| \le 4$.

حل **تمرين (15):** أوجد زاوية الدوران α ومعامل التحاكي k للمنحنيات في z_o لكل من التحويلين:

1) $\frac{z-i}{z+i}$ 2) $\frac{z+i/2}{1-\frac{i}{2}z}$

الحل: نعلم أن زاوية الدوران في z_o هي $\alpha = \arg f'(z_o)$ ومعامل التحاكي $k = |f'(z_o)|$ بالمقارنة نجد أن:

1) $z_o = i$ و $\operatorname{Im} i > 0$ بالتالي $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ و $k = \frac{1}{2}$. (لماذا؟)

2) $|z_o| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ وبالتالي $\alpha = 0$ و $k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. (لماذا؟)

تمارين غير محلولة

تمرين (1): a) اكتب كلاً من التوابع f التالية بالشكل الديكارتي $f = u + iv$ وحدد مساحة التعريف.

1) $\dfrac{2\overline{z}^2}{y - ix}$ ، 2) $z + \dfrac{1}{z}$ ، 3) $e^z - e^{-\overline{z}}$ ، 4) $(z+1)^{z+1}$

b) اكتب كلاً من التوابع f التالية بالشكل القطبي $f = \rho e^{i\theta}$ وحدد ساحة التعريف:

1) $\dfrac{\overline{z} - x}{y - x}$ ، 2) e^{3z} ، 3) $\dfrac{2z^2 + 3}{|z-1|}$ ، 4) i^z.

تمرين (2): أوجد مجموعة القيم E_2 لكل من التوابع f التالية والمعرفة في المجموعة E_1 المبينة جانب f.

1) $z - 3 \,;\, \operatorname{Im} z < 0$ ، 2) $z^3; \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z \le 0$

3) $\dfrac{1}{z}; 1 \le |z| \le 3$ ، 4) $2z^4; |z| < \dfrac{3}{2}; \dfrac{\pi}{2} \le \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$

5) $\dfrac{2z+3}{z-4}; z\overline{z} - 2(z + \overline{z}) = 0$ ، 6) $\dfrac{z-1}{z+1}; \operatorname{Re} z < 0$

تمرين (3): ليكن التابع $J(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ (جوكوفسكي)، أثبت أن:

1) $J(z) = J\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ، 2) $J(z): |z| = 1 \to [-1,1]$

3) $J(z): |z| = r \,;\, r < 1 \to \dfrac{u^2}{\left[\dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{v^2}{\left[\dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\right]^2}$

تمرين (4): حدد ساحة وحدانية الصفحة لكل من التوابع f التالية وأوجد التابع العكسي f^{-1}.

z^4 (1 ، $\frac{3z-2i}{2z-3i}$ (2 ، e^{2z} (3 ، $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ (4.

تمرين (5): a) باستخدام التعريف أثبت أن: هام جداً

$\lim\limits_{z\to 1+i}(6z-4)=2+6i$ (1 ، $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1}=1$ (2

$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-1}{z-2}=1$ (3 ، $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^2}{z-1}=\infty$ (4

$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2}{z-1}=\infty$ (5 ، $\lim\limits_{z\to i}\left[x+i(x+2y)\right]=2i$ (6

b) احسب النهاية l في كل مما يلي:

$\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+3}{z^4-3}$ (1 ، $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{(z_o+\Delta z).z_o^2}{\Delta z}$ (2

$\lim\limits_{z\to -1+2i}\left|\bar{z}^2-3\right|$ (3 ، $\lim\limits_{z\to 2\pi i}\left(e^z-e^{-z}\right)$ (4

$\lim\limits_{z\to\pi i}e^{\frac{z^2+\pi^2}{z+\pi i}}$ (5 ، $\lim\limits_{z\to 2i}\left(2x+iy^2\right)^2$ (6

c) أثبت أن كل من النهايات التالية غير موجودة:

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{Re}z.\operatorname{Im}z}}{z}$ (1 ، $\lim\limits_{z\to 0}\frac{-i(\operatorname{Re}z)^2.\operatorname{Im}z}{(\operatorname{Re}z)^6+(\operatorname{Im}z)^6}$ (2

تمرين (6): ادرس استمرار كل من التابعين f:

$\begin{cases}\frac{z^2+1}{z+i}; & z\neq -i\\ 2i; & z=-i\end{cases}$ (1 ، $\begin{cases}\frac{z^3-1}{z^2-1} & ; z\neq \pm 1\\ \frac{3}{2} & ; z=\pm 1\end{cases}$ (2

هل نستطيع جعل f مستمراً في كل المستوى C وكيف؟

تمرين (7): أثبت أن استمرار التابع $f=\frac{1}{z}$ غير منتظم في الحلقة $0<|z|<1$ وإن استمرار التابع $f=|z|^2$ منتظماً في C.

تمرين (8): احسب $I=\int_\gamma f\,dz$ حيث f و γ معطاة كما يلي:

1) $y=x-3ix^2\ ;\ \gamma=[0,1+i]$

2) $\overline{z}^2$ حيث $\gamma:|z|=1$ ثم $\gamma:|z-1|=1$ ثم γ هو طريق المربع الذي رؤوسه $i,1+i,1,0$.

3) $\dfrac{1}{z^2}$ حيث γ النصف العلوي لدائرة الوحدة الموجه إيجاباً ثم γ النصف السفلي لطريق دائرة الوحدة الموجه سلباً.

4) $(|z-1|+i)^2-z\ ;\ \gamma:z(t)=1-ie^{it};\ 0\le t\le\pi$ هام

5) $\dfrac{6}{(z-i)^2}+\dfrac{2}{z-i}+1-3(z-i)^2$ حيث $\gamma:|z-i|=4$ مغطاة ثلاث مرات.

تمرين (9): a) بدون حساب التكامل أثبت أن: $\left|\int_{|z|=3}\dfrac{dz}{z^2-i}\right|\le\dfrac{3\pi}{4}$

b) أعطِ حداً علوياً لـ $\left|\int_\gamma\dfrac{dz}{z^2+1}\right|$ حيث $\gamma:|z|=\dfrac{2}{3}$ مغطاة أربع مرات.

تمرين (10): باستخدام تعريف المشتق أثبت أن كل من التوابع f التالية غير قابلة للمفاضلة في أي نقطة $z\in C$.

1) $z.\mathrm{Re}\,z$ ، 2) $z.\mathrm{Im}\,z$ ، 3) $z.|z|^2$.

تمرين (11): حدد مجموعة النقاط التي لايكون فيها كل من التوابع f التالية قابلاً للمفاضلة:

1) $\dfrac{iz^3+2z}{(z^2+1)(z^2-1)}$ ، 2) $3x-2y+ixy$.

تمرين (12): ادرس قابلية المفاضلة لكل من التوابع f:

1) $8\overline{z}+i$ ، 2) $\dfrac{z}{\overline{z}+2}$ ، 3) $\dfrac{|z|+z}{2}$

4) $|z|^2+2z$ ، 5) $x^2+y^2+y-2+ix$ ،

6) $\left(x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

تمرين (13): a) باستخدام شرطي كوشي – ريمان والتعريف، حدد الساحة (في حال وجودها) التي يكون فيها كل من التوابع f التالية قابلاً للمفاضلة:

1) $\overline{z}.\text{Re}\,z$ ، 2) $\dfrac{z}{e^z}$ ، 3) $\dfrac{y-ix}{y+1}$

4) $x^3+3xy^2-3x+i\left(y^3+3x^2y-3y\right)$ 5) $e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right]$

b) أثبت أن التابع $f=3x^2+2x-3y^2-1+i(6xy+2y)$ قابل للمفاضلة في كل C

واكتب f' بدلالة z.

c) أعطِ مثالاً تبين فيه أن شرطي كوشي – ريمان محققة في $z=0$ ومع ذلك التابع غير قابل للمفاضلة في $z=0$.

تمرين (14): a) بين أن التابع $f=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & ; \quad z\neq 0\\ 0 & ; \quad z=0\end{cases}$ غير قابلة للمفاضلة في $z=0$.

b)حدد b,a كي يكون التابع:

$$f=\cos x\left(\text{ch}y+a\,\text{sh}y\right)+i\sin x\left(\text{ch}y+b\,\text{sh}y\right)$$

قابلاً للمفاضلة في كل المستوى C.

تمرين (15): أوجد مجموعة النقاط z التي زاوية دوران المنحنيات فيها تساوي $\dfrac{\pi}{4}$ عند التحويل $\omega=z^2+2iz$.

تمرين (16): ماهو الجزء من المستوى المركب الذي يحصل له تصغير عند التحويل $\omega=e^{-z}$؟

الفصل الثالث

التوابع الأولية المركبة وسلاسل القوى

The elementary complex functions and power series

نرغب في هذا الفصل تطبيق نتائج الفصل السابق على التوابع الأولية المركبة ثم نبحث المسألتين المتعاكستين: الأولى هي مسألة تقارب سلسلة قوى من تابع مركب، والثانية مسألة نشر تابع مفروض في سلسلة قوى.

سوف نقوم بدراسة كل تابع مع إعطاء فكرة موجزة عن تابعه العكسي مباشرة، الأمر الذي يتطلب دراسة تابع الزاوية $\arg z$ أولاً كونه يدخل في تركيب تلك التوابع العكسية، ولكي نفهم هذا التابع بصورة جيلة نبدأ بالهوموتوبيه وتغير الزاوية على طول منحنى.

(3-1) المنحنيات الهوموتوبيه وتغير الزاوية على طول منحنى :

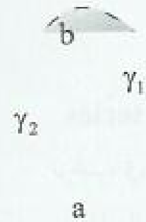
(3- 1- 1) المنحنيات الهوموتوبية (القابلة للتشويه المستمر).

كنا وجدنا أنه إذا كان التابع الأصلي F للتابع f موجوداً في ساحة D فإن تكامل f على طول أي منحنى مغلق $\gamma \subset D$ يساوي الصفر. إن هذه القضية مرتبطة بقابلية f للمفاضلة في D ونقصد بذلك إمكانية إعادة التشكيل المستمر (الهوموتوبيه) للمنحنى المغلق γ إلى منحنى مغلق آخر في D.

هندسياً عملية التشكيل المستمر لمنحنى إلى آخر واضحة للغاية فإذا استطعنا تحريك منحنى γ_1 باستمرار مع تثبيت طرفيه a و b دون أن نترك الساحة D بحيث ينطبق في النهاية على منحنى γ_2 في الموضع والاتجاه فنقول إنه يمكن إعادة تشكيل γ_1 إلى γ_2 في الساحة D وإن المنحنيين γ_1 و γ_2 هوموتوبيان في D (الشكل1).

نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

1- في كل من الشكلين (2) و (3) لدينا: $\gamma_2 \approx \gamma_1$ في الحلقة.



الشكل (1)

الشكل (2)

الشكل (3)

2- في الشكل(4) لدينا γ_1: طريـق دائـرة و $\gamma_2 = c$ نقطـة و

γ_1

$\gamma_2 \approx \gamma_1$ في D .

عندما يمكن رد منحنى γ_1 مغلق الى نقطة في D نكتب:

$\gamma_1 \approx 0$ في D ، ونقول إن γ_1 هوموتوبي مع الصفر في D.

c γ_2

3- في الشكل (5) لدينا D الربع الاول للمستوى و γ_1 و γ_2

الشكل (4)

دائرتين باتجاهين متعاكسين في D.

إن تحريك γ_1 إلى اليمين لن يعطي γ_2 لأنه عندما ينطبق γ_1 على γ_2 في الموضـع فإن الاتجاه يبقى مختلفاً لكل منهما ، ولتجاوز ذلك نجعل أولاً $\gamma_1 \approx 0$ ثم $\gamma_2 \approx 0$ مع أخذ التوجيه المشترك (الشكل6).

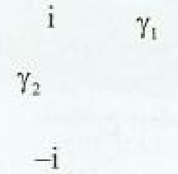
γ_2 γ_1 γ_2

γ_1

الشكل (5) الشكل (6)

4- في الشكل (7) لدينا : γ_1 منحنى دائرة و γ_2 منحنى قضيب الجرس.

يمكن أن نضغط γ_1 باستمرار ليشكل γ_2 في $D = C\setminus\{\pm i\}$ بوسـاطة المنحنيـات المغلقة الوسيطية بين γ_1 و γ_2.



الشكل (7)

نلاحظ أنه يمكن إعادة تشكيل γ_1 إلى γ_2 في ساحة D إذا كان γ_1 و γ_2 ينتميان إلى أسرة منحنيات مغلقة مستمرة $\{\gamma_s\}$ واقعة في D، بحيث يمكن جعل γ_{s_1} قرب γ_{s_2} عندما تكون s_1 و $s_2 \in [0,1]$. بالتالي يجب أن يكون هناك تمثيل وسيطي مستمر $\{z(s,t)\}$ للمنحنيات المغلقة $\{\gamma_s\}$ وباستخدام المجال القياسي $[0,1]$ نضع التعريف التالي:

تعريف (1): يقال إن المنحنى المغلق γ_1 **قابل للتشكيل المستمر** إلى المنحنى المغلق γ_2 في الساحة D أو أن المنحنيين γ_1 و γ_2 **هوموتوبيان** في D ونكتب: $\gamma_1 \approx \gamma_2$ إذا وجد تابع $z(s,t)$ يحقق الشروط:

1) $z(s,t)$ مستمر في المربع $\{0 \le s \le 1 \ , \ 0 \le t \le 1\}$.

2) لكل قيمة مثبتة $s_0 \in [0,1]$ يكون $z(s_0,t)$ تمثيلاً وسيطياً لمنحنى مغلق واقع في D.

3) من أجل $s = 0$ يكون $z(0,t)=z_1(t)$ تمثيلاً لـ γ_1 ومن أجل $s = 1$ يكون $z(1,t)=z_2(t)$ تمثيلاً لـ γ_2.

مثال (1): إذا أخذنا $D: 0 < |z| < 4 \ \& \ \gamma_1 : |z| = 1 \ , \ \gamma_2 : |z| = 2$ فإن $\gamma_1 \approx \gamma_2$ في D وهنا:

$$z(s,t) = (1+s)e^{it}, t \in [0,2\pi]$$

الآن بأخذ الساحة $D \equiv C$ نجد: $\gamma \approx 0$ في D لكل منحنى مغلق γ وفيه

$$z(s,t) = (1-s)z_1(t) ; \ \gamma : z = z_1(t) \ ; \ t \in [0,1]$$

من أجل المنحنيات غير المغلقة فإنه إذا كان γ_1 و γ_2 منحنيان لهما نفس نقطة البداية a ونفس نقطة النهاية b ويقعان في D فإن $\gamma_1 \approx \gamma_2$ في D إذا تحققت الشروط الثلاثة السابقة في التعريف (1) بالإضافة إلى الشرط:

4) من أجل $t = 0$ يكون $a = z(s,0)$ ومن أجل $t = 1$ يكون $b = z(s,1)$.

ملاحظة (1): يمكن تعريف الساحة الوحيدة الاتصال بأنها تلك التي لأجلها كل منحنى مغلق γ يكون هوموتوبياً مع الصفر (يمكن إعادة تشكيله إلى نقطة في تلك الساحة).

نستطيع بسهولة إثبات صحة الخواص التي أتركها تدريباً.

الخاصة (1): كل منحنيين لهما نفس نقطة البداية ونفس نقطة النهاية في ساحة وحيدة الاتصال هوموتوبيان (الشكل8).

الشكل (8)

الخاصة(2): كل منحنى مغلق في ساحة وحيدة الاتصال هوموتوبي مع الصفر. (الشكل9)

الشكل (9)

الخاصة (3): لأي ساحة D (قد لاتكون وحيدة الاتصال) لدينا :

1) إذا كان $\gamma=\gamma_1\gamma_2$ ، $\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2$ في D حيث إن $\gamma_1\approx\tilde{\gamma}_2$ و $\gamma_2\approx\tilde{\gamma}_2$ في D فإن $\gamma\approx\tilde{\gamma}$ في D.

2) $\gamma\gamma^{-}\approx 0$ لأي منحنى γ.

نشير الى انه في اغلب الاحيان لانحتاج لاسرة التحويلات السابقة بل يمكن حل مسألة الهوموتوبية من التصور الهندسي مباشرة.

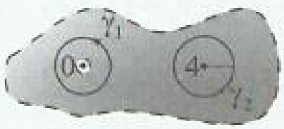
مثال (2): ادرس مختلف أشكال الهوموتوبية بين المنحنيين γ_1 و γ_2 التاليين في الساحة $D=C\setminus\{0\}$.

$$\gamma_1: z=z_1(t)=e^{it},\ \gamma_2: z=z_2(t)=4+e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

الحل:

نلاحظ أن الساحة D ليست وحيدة الاتصال ولدينا : γ_1 غير هوموتوبي مع γ_2 في D لأن بعض المنحنيات الوسطى لابد من أن تمر من النقطة $z=0$ التي لاتقع في D (الشكل 10)، كما أن γ_1 غير هوموتوبي مع الصفر، علماً بأن الدائرة γ_1 هوموتوبية مع

الدوائر التي تحتوي داخلها النقطة 0 و γ_1 غير هوموتوبي مع γ_1^{-} (لماذا؟) وأخيراً γ_1 غير هوموتوبي مع منحنى دائرة الوحدة γ_3 المغطة مرتين.

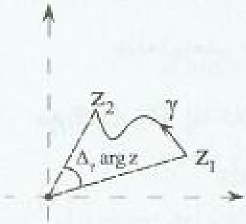


الشكل (10)

(3 – 1 – 2) تغير الزاوية على طول منحنى :

تعريف (2): ليكن $\gamma:\widehat{z_1z_2}$ منحنى محدود لايمر من الصفر.

تغير الزاوية على طول γ هو مقدار زاوية دوران المتجه z حول الصفر عندما تمسح النقطة z كامل المنحنى γ بدءاً من نقطة البداية z_1 وانتهاء عند z_2 مرة واحدة، ونرمز له بـ $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z$.



الشكل (11)

هندسياً ذلك يعني مقدار زاوية الدوران حول النقطة 0 عندما تمسح z المنحنى γ مرة واحدة ايجابا او سلبا تبعا لتوجيه γ المفروض (الشكل11).

ماذا يعني لك $\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_0)$؟

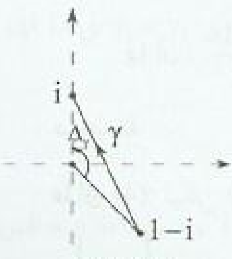
مثال (3): احسب $\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_0)$ في الحالات التالية:

1) $\gamma:[1-i,i]$ حيث $z_0=0$.

2) γ منحنى النصف العلوي للدائرة $|z|=2$ حيث $z_0=0$ ثم $z_0=1$.

3) γ منحنى النصف السفلي الموجه سلباً للدائرة $|z|=2$ حيث $z_0=0$ ثم $z_0=1$.

الحل:



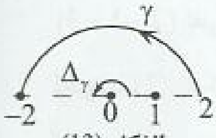
الشكل (12)

1) لدينا $z_0=0$ بالتالي : $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=\frac{3\pi}{4}$ (الشكل 12).

2) عندما $z_0=0$ لدينا : $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=\pi$ (الشكل 13

وعندما $z_0 = 1$ فإن $\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-1) = \pi$ أيضاً (الشكل 14).

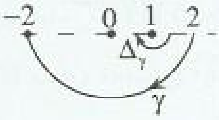
3) عندما $z_0 = 0$ يكون $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z = -\pi$ (الشكل 15) وأيضاً نفس التغير عندما $z_0 = 1$ أي $\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-1) = -\pi$ (الشكل 16).



الشكل (13)

الشكل (14)

الشكل (15)



الشكل (16)

عندما يتعذر علينا إيجاد $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z$ بصورة هندسية مباشرة نستخدم المبرهنة :

مبرهنة (1): إذا كان γ منحنى محدود لايمر من الصفر و $z = x + iy$ فإن :

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg z = \int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \quad , \quad \underset{\gamma}{\Delta}\arg z = \int_\gamma \operatorname{Im}\frac{dz}{z} \qquad (1)$$

الإثبات: عندما تتحرك النقطة z على γ فإن كل من φ, r, y, x تكون متغيرة :

$$x = r\cos\varphi \Rightarrow dx = \cos\varphi.dr - r\sin\varphi.d\varphi$$

$$y = r\sin\varphi \Rightarrow dy = \sin\varphi.dr + r\cos\varphi.d\varphi$$

$$rd\varphi = -\sin\varphi.dx + \cos\varphi.dy \Rightarrow d\varphi = d\arg z = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

وحسب علاقة نيوتن – ليبنتز فان التكامل $\int_\gamma d\arg z$ يساوي حاصل طرح قيمة التابع الأصلي $\arg z$ في نقطة البداية لـ γ من قيمته في نقطة النهاية ، أي هو $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z$ والعلاقة اليسرى في (1) صحيحة.

بما أن : $\operatorname{Im}\frac{dz}{z} = \operatorname{Im}\frac{dx + idy}{x + iy} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ فإن العلاقة الثانية في (1) أيضاً صحيحة.

مثال (4): ليكن γ الجزء من دائرة الوحدة الموجه إيجاباً الذي يبدأ من i وينتهي عند $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$. احسب $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z$ بطريقتين.

الحل:

الطريقة الأولى: من الواضح هندسياً إن $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=\frac{5\pi}{4}$.

الطريقة الثانية: نستخدم إحدى الصيغتين التكامليتين في (1) ولتكن الثانية. لدينا:

$$\gamma:z(t)=e^{it},\ dz(t)=z'(t)\,dt=ie^{it}dt$$

حيث $0\le t\le\frac{5\pi}{4}$ لماذا؟. بالتالي:

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=\int_{\gamma}\operatorname{Im}\frac{dz(t)}{z(t)}=\int_{0}^{5\pi/4}\operatorname{Im}(i)\,dt=\frac{5\pi}{4}$$

من المفيد التذكير بمبرهنة غرين المعروفة في التحليل الرياضي.

مبرهنة (2)- غرين: إذا كانت $Q_x,P_y,Q(x,y),P(x,y)$ توابع مستمرة في السـاحة D فإنه :

1) عندما تكون D وحيدة الاتصال و γ منحنى مغلق فيها يكون :

$$\int_{\gamma}Pdx+Qdy=0\ \Leftrightarrow\ P_y=Q_x \tag{2}$$

2) استقلال التكامل عن شكل المنحنى التكاملي: عندما تكون D ساحة ما (قد لاتكون وحيدة الاتصال) و $\gamma_1\approx\gamma_2$ في D وإذا كان $P_y=Q_x$ فإن :

$$\int_{\gamma_1}Pdx+Qdy=\int_{\gamma_2}Pdx+Qdy \tag{3}$$

خواص تغير الزاوية على طول منحنى:

الخاصة (1): إذا كانت $D:0<|z|<\infty$ أي: $D=\overline{C}\setminus\{0,\infty\}$ و $\gamma_1\approx\gamma_2$ في D فإن :

$$\underset{\gamma_1}{\Delta}\arg z=\underset{\gamma_2}{\Delta}\arg z \tag{4}$$

البرهان:

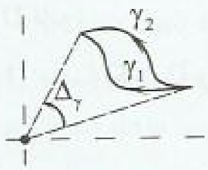
نضع $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$ فنجد أن $P_y=Q_x$ وحسب مبرهنة غـرين (العلاقة (3)) نحصل على المطلوب.

لنلاحظ أن D هي المستوى الموسع الموخوذ في النقطتين 0 و ∞ فهو ساحة ليست وحيدة الاتصال ، وتصح المساواة (4) فيها أو في أي ساحة جزئية منها.

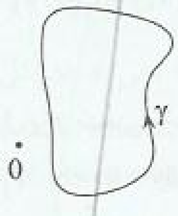
وهكذا فان تغير الزاوية على طول منحنى γ_1 لايتغير إذا استبدلنا γ_1 بمنحنى γ_2 هوموتوبي معه في D الشكل (17):

الخاصة (2): إذا كانت $D:0<|z|<\infty$ و γ منحنى مغلق في D والنقطة $z=0$ تقع خارج γ فان $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=0$ وأما اذا كانت النقطة $z=0$ داخل γ فان: $\Delta_\gamma \arg z = 2\pi$ وعليه يكون(الشكل18 و19):

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=\begin{cases}0 \;;\; 0\in\gamma \text{ خارج} \\ 2\pi \;;\; 0\in\gamma \text{ داخل}\end{cases} \tag{5}$$



الشكل (17)



الشكل (18)

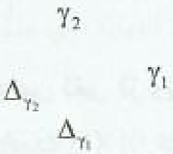
الشكل (19)

البرهان: ينتج مباشرة من الخاصة (1) .

الخاصة (3): ليكن $\gamma=\gamma_1\gamma_2$ منحنى محدود ولايمر من الصفر. عندئذ:

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=-\underset{\gamma^{-}}{\Delta}\arg z \tag{6}$$

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg z=\underset{\gamma_1}{\Delta}\arg z+\underset{\gamma_2}{\Delta}\arg z \tag{7}$$



الشكل (20)

البرهان: نجد المطلوب من مبرهنة غرين وخواص التكامل مباشرة (الشكل20).

مثال (5): كيف تعمم العلاقات (5) و (6) و (7) عندما نستبدل $\underset{\gamma}{\Delta}\arg z$ بـ $\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_0)$؟

الحل: تأخذ (5) الصيغة: إذا كان γ منحنى مغلق لايمر من z_0 فإن (5) تكون صحيحة بعد إجراء المبادلة.

وتأخذ (6) و (7) الشكل: إذا كان $\gamma=\gamma_1\gamma_2$ منحنى محدود لايمر من z_0 فإن (6) و (7) صحيحة بعد المبادلة.

الخاصة (4):

I) إذا كان γ مغلق لايمر من أية نقطة من النقاط $z_k\ ;\ k=1,n$ فإن:

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\prod_{1}^{n}(z-z_k)=\sum_{1}^{n}\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_k) \tag{8}$$

في الحالة الخاصة إذا كان $z_1=\ldots=z_n$ فإن:

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_1)^n=n.\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_1) \tag{9}$$

II) إذا كان γ منحنى مغلق لايمر من z_2,z_1 فإن:

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_1)-\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z-z_2) \tag{10}$$

اترك البرهان تدريباً على أن نبرهنها في الجزء الثاني.

هل الخاصة صحيحة إذا لم يكن γ مغلقاً؟

مثال (6): احسب $\underset{\gamma}{\Delta}\arg(z^2-1)$ ، $\underset{\gamma}{\Delta}\arg\frac{z-1}{z+1}$ في الحالات التالية لـ γ .

1) $\gamma:|z|=\frac{1}{2}$ ، 2) $\gamma:|z-1|=1$ ، 3) $\gamma:|z-1|=3$

الحل:

لدينا $z^2-1=(z-1)(z+1)$ و γ منحنى مغلق لايمر من ±1.

1) $$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\left(z^2-1\right)=\underset{\gamma}{\Delta}\arg\left(z-1\right)+\underset{\gamma}{\Delta}\arg\left(z+1\right)=o+o=o$$

أيضاً:
$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\frac{z-1}{z+1}=o-o=o$$

2) $$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\left(z^2-1\right)=2\pi+o=2\pi$$

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\frac{z-1}{z+1}=2\pi-o=2\pi$$

3) $$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\left(z^2-1\right)=2\pi+2\pi=4\pi$$

$$\underset{\gamma}{\Delta}\arg\frac{z-1}{z+1}=2\pi-2\pi=o$$

(2-3) تابع الزاوية $f(z)=\arg z$.

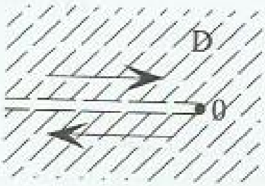
تعرفنا في (1-2-1) على الزاوية $\arg z$ لعدد مركب مثبت z وفي (2-2-2) درسنا تابع الزاوية الرئيس.

إن argz هو تابع مركب بمتحول مركب متعدد القيم ونتساءل ما هي الساحة التي يكون فيها هذا التابع وحيد القيمة ومستمر، وبتعبير آخر كيف نعزل فرعاً وحيد القيمة ومستمر للتابع argz؟.

مبرهنة(1): يمكن عزل الفروع الوحيدة القيمة المستمرة لتابع الزاوية $f(z)=\arg z$ في الساحة $D=C\setminus(-\infty,0]$ أو في أية ساحة جزئية من D وتعطى هذه الفروع في D بالعلاقات:

$$\varphi(z)=(\arg z)_*=\begin{cases}\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x} & ; \quad x>0\\[2mm] \pi+\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x} & ; \quad x<0,y>0\\[2mm] -\pi+\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x} & ; \quad x<0,y<0\end{cases} \qquad (1)$$

$$(\arg z)_k=(\arg z)_*+2\pi k \;;\; k\in Z \qquad (2)$$



الشكل (1)

حيث $\text{Arctg}\,\frac{y}{x}$ هو القيمة الرئيسة لتابع الظل العكسي و $D \ni z = x + iy$.

الإثبات: بداية الساحة D وحيدة الاتصال لاتحوي $\infty, 0$ وحدودها القطع على طول ox^{-} (الشكل 1) وفيها تتحقق المتراجحتين:

$$-\pi < \arg z < \pi \tag{3}$$

وكل نقطة $D \ni z$ تقابل قيمة وحيدة $\varphi = \varphi(z)$ من قيم التابع المتعدد القيم argz ويتشكل فرع وحيد القيمة $\varphi(z)$ في الساحة D. من جانب آخر، بما أن التحويل $x = r\cos\varphi$ و $y = r\sin\varphi$ قابل للمفاضلة ولأجله المحدد اليعقوبي $J(z) = r \neq 0$ فإن هذا الفرع مستمر في D ونحصل على العلاقات (1) مباشرة من العلاقتين: $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$، $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ او من العلاقة بين التابع $\varphi(z)$ وتابع الظل العكسي. أما العلاقة (2) فواضحة.

ما هي قيم الفرع $\varphi(z)$ على المحاور الإحداثية؟ ثم اعد المناقشة السابقة معتبراً: $D = C \setminus [0, \infty)$.

لنلاحظ ان التابع $\varphi(z)$ هو ذاته الفرع $\text{Arg}\, z$ المدروس في (2-2-2).

وهكذا يملك التابع $f(z) = \arg z$ عدد غير منته من الفروع الوحيدة القيمة المستمرة في الساحة $C \setminus (-\infty, 0]$.

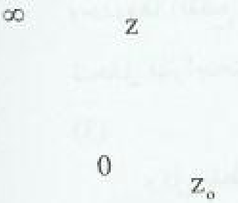
إذا استبدلنا الساحة في المبرهنة (1) بساحة أخرى وحيدة الاتصال لاتحوي $\infty, 0$ فإن العلاقتين (1) و (2) تفقد صحتهما لماذا؟، وتستبدلان بصيغ تكاملية أعم تصلح لأي ساحة مناسبة.

مبرهنة (2) – تعميم: يمكن عزل الفروع الوحيدة القيمة المستمرة لتابع الزاوية argz في كل ساحة وحيدة الاتصال D لاتحوي 0 و ∞ وهذه الفروع تعطى بالعلاقات:

$$(\arg z)_* = \arg z_0 + \underset{\gamma}{\Delta} \arg z \qquad (4)$$

$$(\arg z)_k = (\arg z)_* + 2\pi k \quad ; \quad k \in Z \qquad (5)$$

حيث $\gamma : \widehat{z_0 z}$ منحنى يصل النقطة المثبتة z_0 بالنقطة z ويقع في D (مع امكانية وقوع احد الطرفين او كليهما على الحدود) و $\arg z_0$ إحدى القيم المثبتة في نقطة البداية z_0.



الشكل (2)

الإثبات: للحصول على أوسع ساحة وحيدة الاتصل لاتحوي $0, \infty$ يجب قطع المستوى على طول منحنى يصل بين النقطتين 0 و ∞ أي $D = C \setminus \widehat{0, \infty}$ (الشكل2).

وفي مثل هذه الساحة التغير $\underset{\gamma}{\Delta} \arg z$ يكون مستقلاً عن شكل المنحنى γ الواصل بين z_0 و z حسب العلاقة (4) في (1-3) وبالتالي تحدد العلاقة (4) تابعاً وحيد القيمة في الساحة D وقيمته في النقطة z تتطابق مع إحدى قيم التابع $\arg z$ ومن جانب آخر حسب العلاقة (1) في (1-3) لدينا :

$$(\arg z)_* = \arg z_0 + \int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad (6)$$

وبما أن التكامل في (6) يمثل تابعاً مستمراً في D و $\arg z_0$ عدد ثابت فإن المساواة (4) هي تابع مستمر في D.

من الناحية العملية تؤخذ D المستوى القطوع على طول ox^+ أو ox^- أو oy^+ أو oy^- ...الخ.

نتائج:

1) يمكن عزل الفروع الوحيدة القيمة المستمرة لتابع الزاوية في كل ساحة وحيدة الاتصال لاتحوي 0 و ∞ أو في أي ساحة جزئية منها، ويكفي من أجل ذلك تثبيت قيمة الزاوية في نقطة $z_0 \ni \bar{D}$، أي يمكن معرفة فروع تابع الزاوية بمعرفة قيمة مثبتة للزاوية في نقطة واحدة z_0 وهذا لايحصل في التوابع الحقيقية :

$$(\arg z)_k = \arg z_0 + \underset{\gamma}{\Delta} \arg z + 2\pi k \quad ; \quad k \in Z \qquad (7)$$

الفرع الرئيس هو ذلك الذي يقابل $k = 0$ في (7) .

2) الصيغة التكاملية (6) أوالرياضية (7) تصلح لأي ساحة D بما في ذلك الساحة $D = C \setminus (-\infty, 0]$ الواردة في المبرهنة (1) وتغنينا عن استخدام تابع الظل العكسي $\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$.

3) تغيير التثبيت $\arg z_0$ يؤدي إلى تغيير الفرع، والفرق بين قيمتي فرعين في نقطة z هو $2\pi k$.

4) يمكن تعميم الدراسة السابقة بأخذ D المستوى المقطوع على طول منحنى يصل بين النقطتين a و ∞ والتابع $f(z) = \arg(z-a)$ واترك التفاصيل تدريباً.

مثال (1): لتكن $D = C \setminus (-\infty, 0]$ و $\arg 1 = 0$. عين فروع تابع الزاوية وأوجد قيم الفرع الرئيس $(\arg z)_*$ على المحاور الإحداثية ثم قيمه في النقاط $-1-i, 1-i, 1+i$.

الحل:

بما أن الساحة المفروضة D وحيدة الاتصال ولاتحوي 0 و ∞ فإنه يمكن عزل فروع مستمرة لتابع الزاوية في D .

لدينا فرضاً : $z_0 = 1$ و $\arg 1 = 0$ وحسب العلاقة (4) و (5) نجد أن هذه الفروع هي:

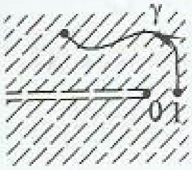
$$(\arg z)_* = \underset{\gamma}{\Delta} \arg z, \ (\arg z)_k = \underset{\gamma}{\Delta} \arg z + 2\pi k$$

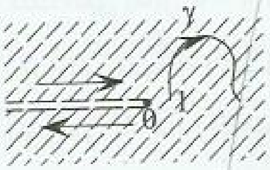
حيث $D \supset \gamma : \widehat{1z}$ (الشكل3).

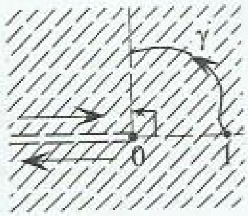
على ox^+ لدينا (الشكل4) : $D \supset \gamma : \widehat{1x}\ ;\ x > 0$ ولايوجد دوران حول الصفر، أي أن $\underset{\gamma}{\Delta} \arg z = 0$ ومنه: $(\arg z)_* |_{ox^+} = 0 \ ;\ x > 0$.

على oy^+ لدينا (الشكل5):

$z=iy\ ,\ y>0\ ;\ D\supset\gamma:\widehat{1(iy)}$ و $\pi/2\ ;\ y>0=(\arg z)_{*}|_{oy^{+}}$.







الشكل (5)　　　الشكل (4)　　　الشكل (3)

على ox^{-} لدينا هنا احتمالين (الشكل 6 و7):

$$z=x=x^{+}\in\ell^{+}\ ,\ \gamma:\widehat{1x^{+}}\Rightarrow(\arg z)_{*}|_{\ell^{+}}=\pi\ ;\ x<0$$

$$z=x=x^{-}\in\ell^{-}\ ,\ \gamma:\widehat{1x^{-}}\Rightarrow(\arg z)_{*}|_{\ell^{-}}=-\pi\ ;\ x<0$$

على oy^{-} لدينا (الشكل 8):

$z=iy,y<0\ ;\ D\supset\gamma:\widehat{1(iy)}$ و $y<0\ ;\ (\arg z)_{*}|_{oy^{-}}=-\dfrac{\pi}{2}$.

γ　　　0　1　　　0　1

0　1　　　γ　　　γ

الشكل (8)　　　الشكل (7)　　　الشكل (6)

في النقطة $z=1+i$ نأخذ $D\supset\gamma:\widehat{1(1+i)}$ نجد : $(\arg z)_{*}|_{1+i}=\dfrac{\pi}{4}$

بنفس الأسلوب نجد أن : $(\arg z)_{*}|_{1-i}=-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ (\arg z)_{*}|_{-1-i}=-\dfrac{3\pi}{4}$

لاحظ أن $(\arg z)_{*}\equiv\operatorname{Arg}z$.

مثال (2): أعد حل المثال (1) حيث $\arg 1=-4\pi$.

الحل:

هنا نجد أن $(\arg z)_{*}=-4\pi+\underset{\gamma}{\Delta}\arg z$. ويكفي إضافة العدد -4π على جميع نتائج المثال (1).

يمكن أن تكون z_0 نقطة حدودية من الساحة D كما في المثال التالي:

مثال (3): لتكن $D = C \setminus [0, \infty)$ و $\arg 1^{+} = 6\pi$. أوجد فروع تابع الزاوية واحسب قيم الفرع الرئيس على المحاور الإحداثية، وفي النقاط $1+i$ ، $-1+i$ ، $-1-i$ ، 2^{-} ثم استنتج نوع النقطة $z = x$ و ox^{+}.

الشكل (9)

الحل: لدينا (الشكل9):

$z_0 = 1^{+} \in \ell^{+}$ و $(\arg z)_{*} = 6\pi + \underset{\gamma}{\Delta} \arg z$، حيث $D \supset \gamma : \widehat{1^{+} z}$.

على ox^{+} لدينا احتمالين :

$$z = x = x^{+} \in \ell^{+} \;;\; \gamma : \widehat{1^{+} x^{+}} \Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg z = 0 \;;\; x > 0 \;\;,\;\; (\arg z)_{*}\,|_{\ell^{+}} = 6\pi$$

$$z = x = x^{-} \in \ell^{-} \;;\; \gamma : \widehat{1^{+} x^{-}} \Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg z = 2\pi \;;\; x > 0 \;,\; (\arg z)_{*}\,|_{\ell^{-}} = 6\pi + 2\pi = 8\pi$$

على oy^{+} لدينا:

$$z = iy, y > 0, D \supset \gamma : \widehat{1^{+}(iy)} \Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\arg z)_{*}\,|_{oy^{+}} = 6\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}$$

على ox^{-} لدينا:

$$z = x ; x < 0, D \supset \gamma : \widehat{1^{+} x} \Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg z = \pi \Rightarrow (\arg z)_{*}\,|_{ox^{-}} = 6\pi + \pi = 7\pi$$

على oy^{-} لدينا:

$$z = iy, y < 0, D \supset \gamma : \widehat{1^{+}(iy)} \Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg z = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow (\arg z)_{*}\,|_{oy^{-}} = 6\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

أخيراً نجد:

$$(\arg(1+i))_{*} = 6\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{25\pi}{4} \quad , \quad (\arg(-1+i))_{*} = 6\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4}$$

$$(\arg(-1-i))_{*} = 6\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{29\pi}{4}$$

$$(\arg(2^{-}))_{*} = 6\pi + 2\pi = 8\pi \;\;;\;\; 2^{-} \in \ell^{-}$$

نستنتج أن النقطة $x \in ox^{+}$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول للفرع $(\arg z)_{\bullet}$.
والقفزة فيها تساوي :

$$\Delta = (\arg z)_{\bullet}|_{\ell^{-}} - (\arg z)_{\bullet}|_{\ell^{+}} = 6\pi - 8\pi = -2\pi$$

لنلاحظ إمكانية الحصول على قيم الفرع على الحدود $\ell^{\pm}$ للساحة D كما يلي :

$$(\arg z)_{\bullet}|_{\ell^{+}} = (\arg x^{+}) = (\arg(x+io))_{\bullet} = \lim_{y\to 0^{+}} \arg(x+iy) = 6\pi$$

$$(\arg z)_{\bullet}|_{\ell^{-}} = (\arg x^{-}) = (\arg(x+io))_{\bullet} = \lim_{y\to 0^{-}} \arg(x+iy) = 8\pi$$

بإضافة $2\pi k$ على $(\arg)_{\bullet}$ في النتائج السابقة نحصل على $(\arg z)_{k}$.

انتبه : القيم الناتجة تمثل أعداداً حقيقية وليست زوايا !!

نتيجة (1): يكون الفرع $(\arg z)_{\bullet}$ وحيد القيمة في الساحة D إذا كان $\underset{\gamma}{\Delta} \arg z = 0$ لكل منحنى مغلق $\gamma \subset D$ وهذا يعني عدم إمكانية الدوران حول $z=0$ ضمن D (في الوقت ذاته حول $z=\infty$ لأن الدوران حول الصفر إيجاباً هو الدوران حول اللانهاية سلباً)، وهذا لايتحقق إلاّ إذا كانت D ساحة وحيدة الاتصال لاتحوي 0 و ∞ .

(3-3) التابع الكسري – الخطي: يوجد

(1-3-3) التابع الخطي .

ليكن التابع الخطي :

$$f(z) = az + b \ ; \ a \neq 0 \qquad (1)$$

وجدنا في (2-1-1) ان هذا التابع معرف ومستمر وقابل للمفاضلة ووحيد الصفحة في كل المستوى الموسع $\overline{C}_z$ و $f(\infty)=\infty$ و $f'(z)=a$ والتابع العكسي له f^{-1} وحيد القيمة.

التأثير الهندسي: من أجل دراسة التحويل (1) هندسياً نقوم للتبسيط بالمراحل التالية:

1) عندما $a=1$ نجد التابع $\omega = f(z) = z + b$ وهو تحويل انسحاب بمقدار واتجاه b لأن:

$$\omega = (u,v) = (x+b_1, y+b_2); b = b_1 + ib_2$$

2) عندما $b=0$ نجد التابع :

$$f(z)=az \quad ; \quad a \neq 0 \tag{2}$$

بما أن $\omega=az \Leftrightarrow |\omega|=|a||z| \quad \& \quad \arg\omega=\arg a+\arg z$ فإننا نحصل على الصورة ω بتدوير z زاوية مقدارها $\alpha=\arg a$ وضرب $|z|$ بـ $k=|a|$.

وعليه فإن التابع (2) هو تحويل دوران مع تكبير أو تصغير لـ z، وبالتحديد لدينا أحد الاحتمالات : دوران مع تكبير عندما $|a|>1$ أودوران مع تصغير عندما $|a|<1$ أودوران فقط عندما $|a|=1$ والاحتمال الأخير يعني التابع :

$$\omega=e^{i\alpha}.z \;;\; a=e^{i\alpha} \tag{3}$$

في الحالة الخاصة إذا كانت $\alpha=0$ فإنه لدينا تكبير فقط عندما $|a|>1$ وتصغير فقط عندما $|a|<1$. ما هو مقدار التكبير أو التصغير؟

اختصاراً يمكن القول إن $f=az$ هو تحويل تحاكي (دوران مع تكبير أو تصغير) زاويته ثابتة وتساوي:

$$\alpha=\arg a=\arg f'(z) \tag{4}$$

ومعامل التحاكي ثابت ويساوي :

$$k=|a|=|f'(z)| \tag{5}$$

مثال (1) في الحالات الخاصة لدينا:

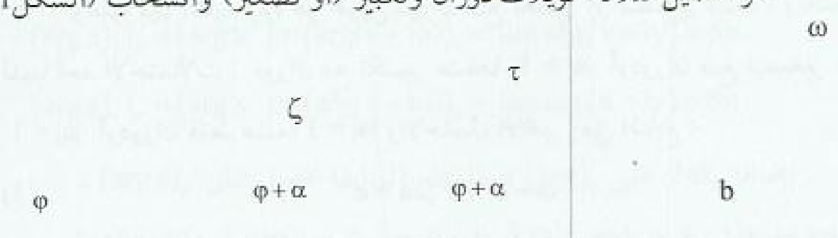
$$\arg z=\varphi \xrightarrow{az} \arg\omega=\alpha+\varphi$$
$$|z|=r \xrightarrow{az} |\omega|=k.r$$
$$|z|<r \xrightarrow{az} |\omega|<k.r$$
$$|z|>r \xrightarrow{az} |\omega|>k.r$$

بالتالي صورة شعاع زاويته φ هي شعاع زاوية $\alpha+\varphi$ وصورة دائرة نصف قطرها r هي دائرة نصف قطرها $k.r$ ... الخ.

بملاحظة أن : $\zeta = e^{i\alpha}.z$ هو تحويل دوران لـ z زاوية $\alpha = \arg a$ في المستوى C_ζ وإن $\tau = |k|.\zeta$ تكبير أو تصغير لـ ζ بمقدار $|k|$ مرة في C_ζ وأخيراً $\omega = \tau + b$ انسحاب لـ τ بمقدار واتجاه b في C_ω فإن التحويل الخطي:

$$\omega = f(z) = \tau + b = |k|.\zeta + b = |k| e^{i\alpha} z + b = az + b \qquad (6)$$

هو تحصيل لثلاثة تحويلات دوران وتكبير (أو تصغير) وانسحاب (الشكل1).



الشكل (1)

بما أن التابع العكسي $f^{-1} = \frac{1}{a}\omega - \frac{b}{a}$ خطي فإن دراسة التأثير الهندسي لهذا التحويل مشابهة للدراسة السابقة.

ما هي الساحة التي يكون فيها ω متماثلاً؟

(2-3-3) التابع الكسري – الخطي $\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

كل تابع من الشكل:

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (7)$$

حيث d,c,b,a ثوابت مركبة ، يسمى كسرياً خطياً.

في الحالة الخاصة عندما $c = 0$ نحصل على التابع الخطي المدروس في (3-3-1). عندما $ad - bc = 0$ يكون $f \equiv const$، ولذلك نفرض أن $ad - bc \neq 0$، ونعتبر $f(\infty) = \frac{a}{c}$ إذا كان $c \neq 0$، $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ وإذا كان $c = 0$ ، نضع $f(\infty) = \infty$ وبذلك يكون التابع (7) معرفاً في $\overline{C}_z$.

من خواص التابع نذكر ما يلي:

الخاصة (1): التابع (7) : وحيد الصفحة في $\overline{C}_z$ ، ويحفظ الزاوية ومعامل التحاكي في $z_0 \in \overline{C}_z$ وينقل $\overline{C}_z$ إلى $\overline{C}_\omega$ (تماثلياً).

البرهان: ينتج مباشرة كون التابع العكسي للتابع (7) :

$$z=\frac{d\omega-b}{-c\omega+a};\ \ ad-bc\neq 0 \tag{8}$$

وحيد القيمة في $\overline{C}_\omega$.

اترك التفاصيل تدريباً.

الخاصة (2): أسرة التوابع الكسرية الخطية (7) تشكل زمرة أي :

1) تركيب تابعين كل منهما كسري – خطي هو تابع كسري خطي.

2) التابع العكسي لتابع كسري – خطي هو تابع كسري خطي.

البرهان:

1) ليكن لدينا التابعان الكسريان – الخطيان:

$$\zeta=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\ ;\ a_1d_1-b_1c_1\neq 0 \tag{9}$$

$$\omega=\frac{a_2\zeta+b_2}{c_2\zeta+d_2}\ ;\ a_2d_2-b_2c_2\neq 0 \tag{10}$$

بتعويض (9) في (10) نجد:

$$\omega=\frac{az+b}{cz+d}\ ;\ ad-bc=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)\left(a_2d_2-b_2c_2\right)\neq 0$$

وهذا تابع كسري خطي.

2) تنتج من (8) مباشرة.

نشير إلى أن زمرة التحويلات الكسرية الخطية ليست تبديلية بمعنى $\omega(\zeta(z)) \neq \zeta(\omega(z))$.

مثال (2) إذا كان $\zeta = z+1, \omega = \frac{1}{z}$ فإن :

$$\omega(\zeta(z)) = \frac{1}{z+1} \neq \zeta(\omega(z)) = \frac{1}{z}+1$$

الخاصة (3): التابع (7) ينقل الدائرة (في حالة خاصة المستقيم) من $\overline{C}_z$ إلى دائرة (مستقيم) في $\overline{C}_\omega$.

البرهان: نذكر بداية أن التابع $\zeta = \frac{1}{z}$ ينقل الدائرة والمستقيم إلى دائرة ومستقيم.

إن التابع الخطي $\omega = az+b, a \neq 0$ هو دوران زاوية $\operatorname{Arg} a$ وتكبير (تصغير) مقداره $|a|$ و من ثم انسحاب قدره b فهو بالتالي يحقق الخاصة.

إذا لم يكن التابع (7) خطياً نكتبه بالشكل:

$$\omega = f(z) = A + \frac{B}{z+z_0} \qquad (11)$$

$$A = \frac{a}{c}, \; B = \frac{bc-ad}{c^2}, \; z_0 = \frac{d}{c}$$

وعندئذ التابع (7) هو تركيب ثلاث توابع هي:

$$\zeta = z + z_0 \; , \; \eta = \frac{1}{\zeta} \; , \quad \omega = A + B\eta$$

وبما أن الأول والأخير تابع خطي والتابع $\frac{1}{\zeta}$ يحقق الخاصة فإنه يتم المطلوب.

نتيجة (1) : إن التابع في (7) ينقل الدوائر والمستقيمات المارة من النقطة $z = -\frac{d}{c}$ إلى مستقيمات وينقل بقية الدوائر والمستقيمات إلى دوائرلماذا؟.

اختصاراً يمكن القول إن التابع (7) ينقل الدوائر إلى دوائر مع مراعاة أن المستقيم هو دائرة تمر من $z = \infty$.

التناظر بالنسبة لدائرة:

لتكن γ دائرة مركزها المبدأ 0 ونصف قطرها R.

نعلم القضية الصحيحة التالية من مراحل دراسية سابقة :

تكون النقطتان M و M^* متناظرتين بالنسبة لدائرة γ مركزها 0 ونصف قطرها R إذا كان $\overline{OM}\cdot\overline{OM^*}=R^2$

في الحالة الخاصة عندما $M\in\gamma$ فإن $M^*\equiv M$.

في المستوى المركب نفرض أن $\gamma:|z-a|=R$ عندئذ تكون النقطتان z^*,z متناظرتين بالنسبة لـ γ إذا كان $|z-a||z^*-a|=R^2$.

بسهولة نجد أن z^* تعطى بدلالة z من العلاقة :

$$z^*=a+\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} \tag{12}$$

في الحالة الخاصة عندما $\gamma:|z|=1$ يكون :

$$z^*=\frac{1}{\bar{z}} \tag{13}$$

الخاصة (4): التابع (7) ينقل نقطتين متناظرتين z,z^* بالنسبة للدائرة $\gamma:|z-a|=R$ إلى نقطتين متناظرتين ω,ω^* بالنسبة لصورة تلك الدائرة، أي بالنسبة للدائرة $|\omega-\omega(a)|=\bar{R}$ وهنا يمكن أن تكون الدائرة مستقيماً كحالة خاصة.

مثال (3): أوجد التحويل الكسري – الخطي الذي يحقق:

$$|z-i|=1\xrightarrow{?}|\omega+1|=2$$

الحل: نجري على التتالي التحويلات التالية:

الانسحاب $\zeta=z-i$ ثم التكبير $\tau=2\zeta$ ثم الانسحاب $\omega=\tau+1$ وعندئذ تركيب التوابع الثلاث أي: $\omega=\tau+1=2\zeta+1=2(z-i)+1=2z+(1-2i)$ نجد المطلوب.

مثال (4): أوجد صورة القرص $D:|z-2|<2$ وفق $\omega=\dfrac{z}{2z-8}$.

الحل:

إن النقطة $z=4$ تعدم المقام وتقع على حدود D أي على الدائرة $\gamma:|z-2|=2$ بالتالي صورة γ هي مستقيم $\tilde{\gamma}$ لماذا؟ ولإيجاد $\tilde{\gamma}$ نختار نقطتين على γ ولتكن 0، $2+2i$ ونوجد صورهما وفق ω نجد:

$$o\to o\ ,\ 2+2i\to -\frac{i}{2}$$

وعندئذ $\tilde{\gamma}$ هو المستقيم المار من 0 و $-\dfrac{i}{2}$ أي هو المستقيم المنطبق على ov وصورة D سوف تكون أما النصف الأيمن أو النصف الأيسر للمستوى C_ω ولكن بما أن $z=2$ داخل γ وصورتها $\omega=-\dfrac{1}{2}$ $\left(2\to-\dfrac{1}{2}\right)$ تقع في النصف الأيسر فإن $D\to\tilde{D}:\operatorname{Re}\omega<0$.

مثال (5): ما هي نظيرة النقطة $z=i$ بالنسبة للدائرة $|z+1|=1$؟

الحل: لدينا $z=i\ ,\ a=-1\ ,\ R=1$ بالتالي:

$$z^{*}=-1+\frac{1^2}{\bar{i}-(\overline{-1})}=-1+\frac{1}{1-i}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

(4-3) التابع $f(z)=z^2$ وتابعه العكسي:

إن التابع التربيعي:

$$f(z)=z^2 \qquad (1)$$

وحيد القيمة وقابل للمفاضلة في C_z و $f'=2z$. ونظامي و صحيح

~~ساحة وحدانية الصفحة~~: إذا كان $z_1^2=z_2^2$ فإما $z_1=z_2$ أو:

$$z_1=-z_2 \qquad (2)$$

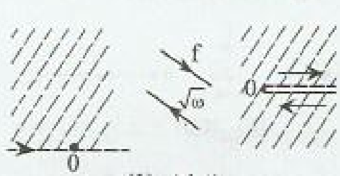
التابع الصحيح «الكلي» هو التابع النظامي في كل C

$(P_n)'=a_n n z^{n-1}+ --- +a_1$

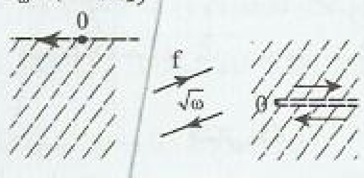
عندما تتحقق (2) في D لن يكون التابع (1) وحيد الصفحة في D بالتالي المساواة (2) التي لانرغب بها تعني أن النقطتين z_1 و z_2 متناظرتان بالنسبة للمبدأ. بالتالي التحويل (1) وحيد الصفحة في كل ساحة لاتحتوي زوجاً من هذا النوع وأوسع ساحة هي نصف مستو حدوده تمر من نقطة المبدأ $z=0$ مثل $\operatorname{Im} z>0$ أو $\operatorname{Im} z<0$ أو $\operatorname{Re} z>0$ أو $\operatorname{Re} z<0$ ...الخ.

التأثير الهندسي: لنبرهن أن التحويل(1) يحقق تماثلياً ما يلي:(الأشكال 1، 3,2، 4):

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{Im} z>0 & \xrightarrow{z^2} & C_\infty \setminus [0,\infty) \\ \operatorname{Im} z<0 & \xrightarrow{z^2} & C_\infty \setminus [0,\infty) \\ \operatorname{Re} z>0 & \xrightarrow{z^2} & C_\infty \setminus (-\infty,0] \\ \operatorname{Re} z<o & \xrightarrow{z^2} & C_\infty \setminus (-\infty,0] \end{array}\right\} \quad (3)$$

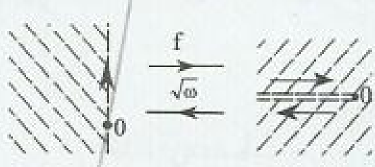


الشكل (1)



الشكل (2)

الشكل (3)



الشكل (4)

لدينا : $\omega=z^2 \Leftrightarrow |\omega|=|z|^2 \ \& \ \arg\omega=2\arg z$.

لنأخذ الساحة $D:\operatorname{Im} z>0$ وشعاع $\arg z=\varphi$ يقع في D عندئذ: $\arg z=\varphi\,;\,0<\varphi<\pi \rightarrow \arg\omega=2\varphi=\theta$ (الشكل 5) .

بتدوير الشعاع $\arg z=\varphi$ باستمرار بدءاً من $\varphi=0$ وحتى $\varphi=\pi$ نجد أن شعاع الصورة $\arg\omega=2\varphi$ يدور إيجاباً ، وعندما يغطي الشعاع الأول النصف العلوي D

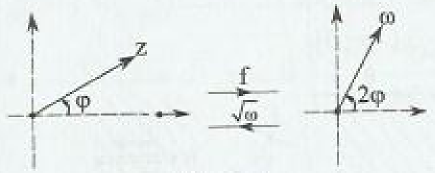
للمستوى C_z فإن صورته سوف تمسح (تغطي) كل المستوى C_ω، ولكن بالنسبة لحدود D يكون (الشكلين 7,6، على الترتيب):

$$\left.\begin{aligned} \arg z = 0 &\xrightarrow{z^2} \arg\omega = 0 \\ \arg z = \pi &\xrightarrow{z^2} \arg\omega = 2\pi \end{aligned}\right\}$$

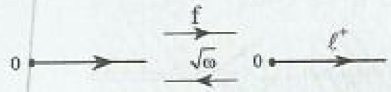
هندسياً الشعاع $\arg\omega = 0$ المنطبق على الشعاع $\arg\omega = 2\pi$ يمثل ou^+ ولكي يكون التحويل (1) واحد لواحد في الساحة D و على حدودها ox يجب قطع المستوى C_ω على طول $ou^+ \equiv [0,+\infty)$ واعتبار (الشكل 8):

$$\arg z = 0 \to \ell^+ \;,\; \arg z = \pi \to \ell^- . \qquad (4)$$

حيث ℓ^+ ضفة القطع $[0,\infty)$ العليا و ℓ^- الضفة السفلى.

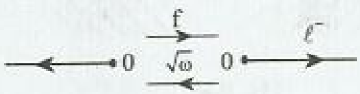


الشكل (5)

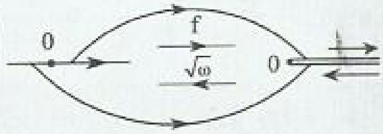


الشكل (6)

وهكذا التحويل (1) وحيد الصفحة في النصف العلوي D وينقل D إلى المستوى C_ω المقطوع على طول $[0,\infty)$.



الشكل (7)

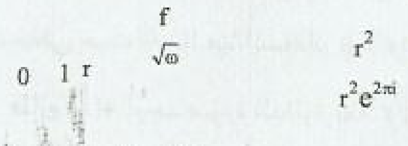


الشكل (8)

في الحالة الخاصة:

$$\left.\begin{aligned} z = re^{i\varphi} \;;\; 0 \le \varphi \le \pi &\xrightarrow{z^2} \omega = r^2 e^{2i\varphi} \\ z = re^{i0} = r \in ox^+ &\xrightarrow{z^2} \omega = r^2 \in \ell^+ \\ z = re^{i\pi} = -r \in ox^- &\xrightarrow{z^2} \omega = r^2 e^{2\pi i} \in \ell^- \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

مما يعني أن صورة النصف العلوي من الدائرة التي مركزها المبدأ و نصف قطرها r هي الدائرة $|\omega|=r^2$ باستثناء النقطة $\omega=r^2$ (دائرة غير مقفلة). كما في الشكل 9.



الشكل (9)

بنفس الأسلوب نجد أن $D:\operatorname{Im}z<0 \xrightarrow{z^2} C_\omega \setminus [0,\infty)$ وهنا بالنسبة لحدود D لدينا : $D:-\pi<\arg z<o$ بالتالي:

$$\arg z=o \xrightarrow{z^2} \ell^- \ ,\ \arg z=-\pi \xrightarrow{z^2} \ell^+ \qquad (6)$$

بالتعميم نحصل على صورة الشبكة القطبية:

الشبكة القطبية في $D:\operatorname{Im}z>0$ هي : $\arg z=\text{const}$ و $|z|=\text{const}$

ولدينا (الأشكال10 ، 11 ، 12 على الترتيب):

$$\arg z=\varphi \xrightarrow{z^2} \arg\omega=2\varphi \ \Rightarrow\ 0\le\arg z\le\varphi \to 0\le\arg\omega\le 2\varphi$$

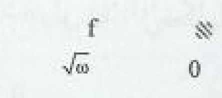
الشكل (10)

الشكل (11)

$$|z|=r\ ,\ \alpha\le\arg z\le\beta\ ;\ \beta-\alpha<\pi \xrightarrow{z^2} |\omega|=r^2 \ \ ;\ \ 2\alpha\le\arg\omega\le 2\beta \qquad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} s:r_1<|z|<r_2;\ 0<\arg z<\alpha\le\pi, 0\le\rho_1<\rho_2\le+\infty \\ \xrightarrow{z^2} \tilde{s}:r_1^2<|\omega|<r_2^2\ ,\ 0<\arg\omega<2\alpha \end{array}\right\} \qquad (8)$$

الشكل (12)



الشكل (13)

وهكذا فإن التحويل (1) ينقل قوس دائرة إلى قوس دائرة وقطاع حلقي إلى قطاع حلقي حيث أخذنا هنا الساحة: $D: \operatorname{Im} z > o$

مثال (1): أوجد صورة الدائرة $\gamma: |z-r| = r;\ r > o$ قطبياً وفق $\omega = z^2$.

الحل:

لدينا: $z - r = re^{i\varphi} \Rightarrow z = r\left(1 + e^{i\varphi}\right)$

$$\Rightarrow \omega = z^2 = r^2\left(1 + e^{i\varphi}\right)^2 \equiv \rho e^{i\varphi}$$
$$\Rightarrow \tilde{\gamma}: \rho = 2r^2\left(1 + \cos\varphi\right)$$

وكما نعلم $\tilde{\gamma}$ هو منحنى معروف بيانه يشبه القلب!.

صورة الشبكة الديكارتية في $D: \operatorname{Im} z > 0$: الشبكة الديكارتية هي:

$\operatorname{Im} z = \text{const}\ \&\ \operatorname{Re} z = \text{const}$.

لنبين أن:

$$\operatorname{Re} z = c \xrightarrow{z^2} v^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - u\right) \qquad (9)$$

$$\operatorname{Im} z = c \xrightarrow{z^2} v^2 = 2p\left(u + \frac{p}{2}\right) \qquad (10)$$

حيث $p = 2c^2$, $\omega = u + iv$.

لدينا:

$$\omega = u + iv = z^2 = \left(x + iy\right)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow u = x^2 - y^2\ \&\ v = 2xy$$

إذا كان: $\operatorname{Re} z = x = c\ \&\ -\infty < y < +\infty$ مستقيم شاقولي فإن (الشكل 13):

$$u = c^2 - y^2\ ,\ v = 2cy$$

بحذف y من جملة المعادلتين السابقتين نجد القطع المكافئ في (9) والذي تقعره نحو المحور الحقيقي السالب.

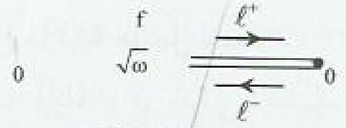
بنفس الأسلوب نجد أن صورة المستقيم الأفقي $\operatorname{Im} z = y = c \; ; \; -\infty < x < +\infty$ هي القطع المكافئ في (10) والذي تقعره نحو الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي (الشكل 13).

في الحالة الخاصة إذا كان $c = 0$ فإن $p = 0$ ويؤول القطع (9) إلى الشعاع $(-\infty, 0]$ المكرر مرتين، أي أن (الشكلين 15,14 على الترتيب):

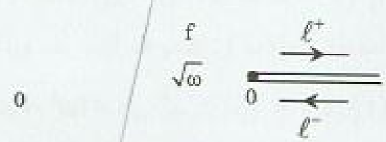
$$\operatorname{Re} z = 0 \xrightarrow{z^2} (-\infty, 0]^{\pm} = \ell^{\pm}$$

بالمثل:

$$\operatorname{Im} z = 0 \xrightarrow{z^2} [0, +\infty)^{\pm} = \ell^{\pm}$$



الشكل (14)



الشكل (15)

نشير إلى أن كل قطع من القطوع (9) يتقاطع مع أي قطع من القطوع (10) بزاوية $\frac{\pi}{2}$ حسب خاصة حفظ الزوايا ومحرق جميع القطوع في (9) و (10) هو النقطة $\omega = 0$.

ينتج أن التحويل (1) ينقل المستطيل إلى شبه مستطيل أضلاعه أجزاء من القطوع (9) و (10).

بنفس الطريقة نبين صحة التحويلات المتبقية في (3).

التابع العكسي: لإيجاد التابع العكسي للتابع $f = z^2$ يجب حل المعادلة:

$$z^2 = f(z) = \omega \qquad (11)$$

بالنسبة لـ z.

عندما $\omega \neq 0$ يكون لدينا حلين، وإذا رمزنا لأحدهما بـ $\sqrt{\omega}$ فإن الآخر هو $-\sqrt{\omega}$ والتابع العكسي f^{-1} للتابع $\omega = z^2$ ثنائي القيم ونذكر بأن التحويل z^2 ينقل C_z إلى C_ω.

تبرز مسألة عزل فرع وحيد القيمة مستمر للتابع f^{-1}.

نرمز كالعادة بـ z للمتحول و ω للتابع ونأخذ $D: C_z \setminus [0,\infty)$ و $\omega = f = \sqrt{z}$ (انظر نفس الأشكال الهندسية بعد استبدال مواضع z و ω).

لنكتب z بالشكل القطبي $z = re^{i\varphi}$ نجد أن التابع:

$$\omega = f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}\ ,\ 0 < \varphi < 2\pi \tag{12}$$

وحيد القيمة ومستمر في الساحة D لماذا؟ ويحقق المعادلة $f_1^2(z) = z$. بالتالي $f_1(z)$ هو حل للمعادلة:

$$\omega^2 = z \tag{13}$$

ومجموعة قيم التابع $\omega = f_1(z)$ هي النصف العلوي:

$$C_z \setminus [0,\infty) \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im}\omega > 0 \tag{14}$$

ينتج ذلك من تعريف التابع (12) ومن أن التحويل (13) المعاكس للتحويل (12) ينقل النصف العلوي $\operatorname{Im}\omega > 0$ إلى المستوى C_z المقطوع على طول النصف الموجب ox^+.

بالمثل نجد أن التابع :

$$\omega = f_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}\ \ ;\ \ 0 < \varphi < 2\pi \tag{15}$$

وحيد القيمة ومستمر في الساحة D ويحقق الشرط $f_2^2(z) = z$ وينقل D إلى النصف السفلي:

$$C_z \setminus [0,\infty) \xrightarrow{f_2} \operatorname{Im}\omega < 0 \tag{16}$$

وعليه فإن f_1 و f_2 $(f_2 \equiv -f_1)$ هما الفرعان المستمران للتابع ثنائي القيمة $\sqrt{z}$ في الساحة D ومن مبرهنة التابع العكسي نجد أن كل منهما قابل للمفاضلة في $C \setminus \{0\}$ وان :

$$f'_k(z)=\frac{1}{2f_k(z)}\ ;\ k=1,2 \tag{17}$$

ملاحظة (1): يمكن التحقق من قابلية المفاضلة ومن صحة العلاقة (17) باستخدام شرطي كوشي – ريمان قطبياً. انجز ذلك.

في كثير من الأحيان نرمز لفرع تابع الجذر التربيعي بالرمز $\sqrt{z}$ ذاته ولمعرفة مع أي الفرعين نتعامل يكفي إعطاء قيمة التابع في نقطة داخلية لـ D أو قيمة التابع في نقطة حدودية لـ D أي في نقطة واقعة على إحدى الضفتين $\ell^{\pm}$ للقطع $[0,\infty)$. حيث اعتبرنا هنا $D:C\setminus[0,\infty)$.

على سبيل المثال إذا كان $\sqrt{z_0}=\sqrt{-1}=i=\omega_0$ فإن المقصود هو $\omega=f_1(z)$ لأن النقطة i واقعة في مجموعة قيم f_1، وإذا كان $\sqrt{z_0}=\sqrt{-1}=-i=\omega_0$ فإن الفرع هو $\omega=f_2(z)$ وإذا كان $\sqrt{z_0}=\sqrt{1^+}=1=\omega_0$ فإن الفرع هو f_1 وأخيراً الشرط $\sqrt{z_0}=\sqrt{1^+}=-1=\omega_0$ يؤدي الى الفرع f_2.

لنأخذ الساحة $D:C_z\setminus(-\infty,0]$ عندئذ لدينا الفرعين:

$$\omega=f_1(z)=\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}\ \ ,\ -\pi<\varphi<\pi \tag{18}$$

$$\omega=f_2(z)=-\sqrt{r}e^{i\varphi/2} \tag{19}$$

ويكون:

$$C_z\setminus(-\infty,0]\xrightarrow{f_1}\operatorname{Re}\omega>0 \tag{20}$$

$$C_z\setminus(-\infty,0]\xrightarrow{f_2}\operatorname{Re}\omega<0 \tag{21}$$

نستنتج مما سبق أنه يمكن عزل فرعي تابع الجذر التربيعي $\sqrt{z}$ في الساحة $C_z\setminus[0,\infty)$ أو $C_z\setminus(-\infty,0]$.

بالتعميم نجد إمكانية عزل الفرعين القابلين للمفاضلة في المستوى المقطوع على طول الشعاع $\arg z=\alpha$ أي في الساحة (الشكل 16):

الشكل (16)

$$D_\alpha:C_z\setminus\{\arg z=\alpha\} \tag{22}$$

عندما $\alpha = 0$ نجد الساحة $D_0 = C_z \setminus [0,\infty)$ وعندما $\alpha = \pi$ نحصل على الساحة $D = C_z \setminus (-\infty, 0]$ المأخوذتين سابقاً.

يمكن تلخيص المناقشة السابقة بالآتي:

1) يتوضع التابع الثنائي القيم $\sqrt{z}$ على شكل فرعين قابلين للمفاضلة في الساحة D_α، أي في المستوى المقطوع على طول شعاع يصل بين النقطتين 0 و ∞.

2) يأخذ الفرعان في النقطة $z_0 \in \bar{D}_\alpha$ القيمتين ω_0 و $-\omega_0$ على الترتيب.

3) مجموعة قيم الفرعين تتعلق بالساحة D_α التي فيها يتم العزل.

4) يتعين الفرع بشكل وحيد في D_α إذا أعطيت صورة نقطة داخلية أو حدودية.

5) إذا كانت $D = C_z \setminus [0,\infty)$ فإن: $x > 0, x \in \ell^+$; $f_1(x^+) = \sqrt{x} > 0$، أي أن التابع f_1 يأخذ قيماً موجبة على ضفة القطع العليا ℓ^+.

6) إذا كانت $D = C_z \setminus (-\infty, 0]$ و $f_1(1) = 1$ فإن:

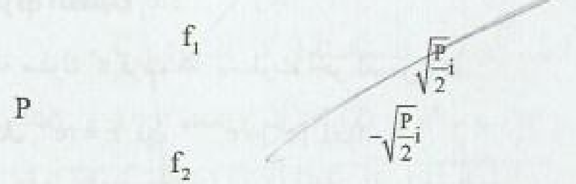
$$C_z \setminus (-\infty,0] \xrightarrow{f_1} \operatorname{Re}\omega > 0$$
$$C_z \setminus (-\infty,0] \xrightarrow{f_2} \operatorname{Re}\omega < 0$$

7) إذا كانت D هي خارجية القطع المكافئ $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ حيث $p > 0$ و $z = x + iy$، أي الساحة $y^2 > 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ فإن لـ $\sqrt{z}$ فرعين قابلين للمفاضلة في D. لماذا؟ وهما: $f_1(z) ; f_1\left(-\frac{p}{2}\right) = -i\sqrt{p/2}$ و $f_2(z) = -f_1(z)$

ويكون لدينا (الشكل 17) لماذا؟:

$$D \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im}\omega > \sqrt{\frac{p}{2}} \quad , \quad D \xrightarrow{f_2} \operatorname{Im}\omega < -\sqrt{\frac{p}{2}}$$

8) لايجوز أخذ الجذر التربيعي لطرفي معادلة إلاّ بعد تثبيت أحد فرعي الجذر.



الشكل (17)

(5-3) التابع النيبري $f(z)=e^z$ وتابعه العكسي:

نعرف التابع e^z كما في التحليل الحقيقي بأنه النهاية :

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \qquad (1)$$

إن النهاية في (1) موجودة لكل $z \in C_z$ لماذا؟ ولها الشكل:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \qquad (2)$$

ومن (2) نجد أن:

سنجد أن ∞ شاذة أساسية له (وتطالي).

$$|e^z|=e^{\mathrm{Re}z}=e^x \ , \quad \arg e^z=\mathrm{Im}z=y \qquad (3)$$

مبرهنة (1) : التابع e^z مستمر في المستوى C وغير معرف في نقطة اللانهاية $z=\infty$.

الإثبات: ينتج استمرار e^z في كل نقطة $C\ni z=x+iy$ من (2) و من أن كل من $u=\mathrm{Re}e^z$ و $v=\mathrm{Im}e^z$ هو تابع مستمر في (x,y).

فيما يتعلق بنقطة اللا نهاية : نضع $t=\frac{1}{z}=\zeta+i\eta$ نجد $g(t)=e^{1/t}$.

من أجل $\zeta=0$ يكون :

$$g(i\eta)=e^{-i/\eta}=\cos\frac{1}{\eta}-i\sin\frac{1}{\eta}$$

والنهاية $\lim_{\eta\to 0}g(i\eta)$ غير موجودة ، مما يعني أن التابع e^z غير معرف عند النقطة ∞.

سنجد في الفصل الخامس ان نقطة اللانهاية شاذة اساسية للتابع النيبري.

سلوك e^z قرب النقطة ∞:

لمعرفة سلوك e^z قرب ∞ بأسلوب آخر ندرس $|e^z|$.

إذا كان $z = re^{i\varphi}$ فإن $|e^z| = e^{r\cos\varphi}$ لماذا؟.

نلاحظ أن:

$$\cos\varphi = 0 \quad ; \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\varphi > 0 \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\varphi < 0 \quad ; \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

لذلك عندما $r \to +\infty$ في نصف المستوى الأيمن يكون $\lim\limits_{r\to+\infty} |e^z| = +\infty$ أما في نصف المستوى الأيسر يكون $\lim\limits_{r\to\infty} |e^z| = 0$.

وعليه فان التابع النيبري متأرجح قرب نقطة اللانهاية.

نتيجة (1): التابع e^{az^n} حيث $n > 1$ مستمر في C وغير معرف في ∞.

البرهان: الاستمرار في C واضح.

$$|e^{az^n}| = e^{\mathrm{Re}(az^n)} = e^{\left[|\alpha| r^n \cos(n\varphi+\alpha)\right]} \quad ; \quad \alpha = \operatorname{Arg} a$$

نلاحظ أن:

$$\cos(n\varphi+\alpha) > 0 \,;\, -\alpha - \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} < \varphi < -\alpha + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} \quad ; \quad k = \overline{0, n-1}$$

$$\cos(n\varphi+\alpha) < 0 \,;\, -\alpha + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} < \varphi < -\alpha + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} \quad ; \quad k = \overline{0, n-1}$$

وعندما $r \to \infty$ في القطاعات الزاوية الأولى يكون $\lim\limits_{r\to+\infty} \left|e^{az^n}\right| = +\infty$ بينما في القطاعات الثانية يكون:

$$\lim_{r\to+\infty} \left|e^{az^n}\right| = 0$$

لاحظ أن القطاعات السابقة تقسم المستوى المركب إلى 2n من الأجزاء المتساوية.

خواص التابع e^z: الى جانب ما تقدم تصح الخواص:

الخاصة (1): التابع e^z قابل للمفاضلة في كل المستوى C_z.

البرهان: بوضع $e^z = u + iv$ في (2) نجد أن $u = e^x.\cos y$ و $v = e^x.\sin y$. كل من u و v هو تابع قابل للمفاضلة في كل نقطة (x,y) ويتحقق شرطا كوشي – ريمان.

$$u_x = v_y = e^x \cos y \ , \ u_y = -v_x = -e^x.\sin y$$

الخاصة (2): لكل $z \in C_z$ يكون:

$$(e^z)' = e^z \tag{4}$$

تنتج المساواة (4) مباشرة من العلاقة $f'(z) = u_x + iv_x$

الخاصة (3): التابع e^z لاينعدم لكل $z \in C_z$.

البرهان: إن $e^z \neq 0$ لكل z لأن $|e^z| = e^x \neq 0$.

الخاصة (4): لكل z_1 و z_2 من C_z يكون:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{5}$$

البرهان: بوضع $z_k = x_k + iy_k \ ; \ k = \overline{1,2}$ نجد:

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

من مبدأ الاستقرار الرياضي نجد العلاقة:

$$\prod_1^n e^{z_k} = e^{\sum_1^n z_k} \tag{6}$$

بملاحظة أن: $\frac{1}{e^{z_2}} = e^{-z_2}$ فإن:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \tag{7}$$

الخاصة (5): التابع e^z دوري بخلاف e^x ودوره الأساسي هو $2\pi i$ أي:

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}\qquad \forall\, z\in C \tag{8}$$

البرهان: من علاقة أولر لدينا $e^{2\pi i}=1$ ومنها المساواة (8) صحيحة.

بقي التحقق من أن الدور $2\pi i$ هو بالفعل الدور الأساسي.

إذا كـان $e^{z+T}=e^{z}$ فإنـه بـضرب الطـرفين بـ e^{-z} نجـد $e^{T}=1$، وإذا فرضنـا $T=T_1+iT_2$ فـإن $e^{T_1}(\cos T_2+i\sin T_2)=1$. هـذا يعـني أن $e^{T_1}=1$، أي $T_1=0$ و $\cos T_2=1$ ، $\sin T_2=0$، ومنه $T_2=2\pi k$ حيث $Z\ni k$ و $T=2\pi ki$. وبالفعـل فـإن $2\pi i$ هو الدور الأساسي للتابع e^{z}.

إذا كان f صحيح "نظامي" فإن
$f(\bar z)=\overline{f(z)}$

الخاصة (6): لكل $z\ni C_z$ يكون:

$$\overline{(e^{z})}=e^{\bar z} \tag{9}$$

البرهان:

$$\overline{(e^{z})}=\overline{e^{x}(\cos y+i\sin y)}=e^{x}(\cos y-i\sin y)=e^{x-iy}=e^{\bar z}$$

الخاصة (7): تقبل المعادلة $e^{z}-A=0$ الحل لكل A حيث $A\neq 0$ وتعطى حلولها غير المنتهية بالعلاقة:

$$z_k=\ln A=\ln|A|+i(\text{Arg}A+2\pi k) \tag{10}$$

البرهان: لنضع $z=x+iy$ و $A=|A|e^{i\text{Arg}A}$ في المعادلة المفروضة نجد:

$$e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=|A|e^{i\text{Arg}A}\Rightarrow e^{x}=|A|,\ y=\text{Arg}A+2\pi k\Rightarrow$$
$$x=\ln|A|,\ y=\text{Arg}A+2\pi k\Rightarrow$$
$$z=x+iy=\ln|A|+i(\text{Arg}A+2\pi k)=\ln A$$

قارن بين التابعين: النيبري الحقيقي والنيبري المركب.

التأثير الهندسي: نوجد أوسع ساحة يكون فيها التحويل:

$$\omega=e^{z} \tag{11}$$

وحيد الصفحة.

إذا كان $e^{z_1}=e^{z_2}$ فإن $e^{z_1-z_2}=1$ أو:

مثال:
$e^{3z}-1+i=0\Rightarrow e^{3z}=1-i$
$3z_k=\ln(1-i)=\frac{1}{3}\left(\ln|\sqrt{2}|+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi K\right)\right)$
الحل الرئيسي $(K=0)$

$$z_1 - z_2 = 2\pi k i \quad ; \quad k \in Z \tag{12}$$

بالتالي يكون التحويل (11) وحيد الصفحة في الساحة D إذاً وفقط إذا كانت D لاتحتوي زوج نقاط z_1 و z_2 يحقق المساواة (12) ويمكن أخذ D الشريط الأفقي.

$$D:\ a < \operatorname{Im} z < b\ ;\ 0 < b - a \le 2\pi \tag{13}$$

لنأخذ على سبيل المثال الساحة الاوسع $D: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ ولنوجد صورتها وفق التحويل (1) من أجل ذلك نلاحظ أن:

$$z = x + ic\ ;\ 0 < c = \text{const} < 2\pi, -\infty < x < +\infty \xrightarrow{e^z} \omega = e^{x+ic} = e^x e^{ic} \tag{14}$$

بالتالي صورة المستقيم الأفقي $z = x + ic$ الواقع في الشريط D هي الشعاع $\arg \omega = c$.

نحرك المستقيم باستمرار بإعطاء c القيم من $c = 0$ وحتى $c = 2\pi$ مغطياً كامل الشريط D نجد أن صورته، أي الشعاع $\arg \omega = c$ سوف تدور إيجاباً حول $\omega = 0$ مغطية كل المستوى C_ω وعندئذ بالنسبة لحدود D يكون (الشكل1):

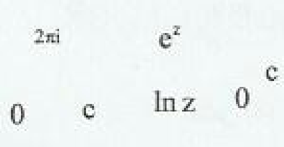
$$\left.\begin{array}{l} z = x\ ; -\infty < x < \infty \xrightarrow{e^z} \arg \omega = 0 \\ z = x + 2\pi i \xrightarrow{e^z} \arg \omega = 2\pi \end{array}\right\} \tag{15}$$

وبملاحظة أن الشعاع $\arg \omega = 0$ منطبق على الشعاع $\arg \omega = 2\pi$، وللمحافظة على شرط وحدانية الصفحة في $\overline{D}$ نقطع المستوى C_ω على طول $[0, \infty)$ ونعتبر:

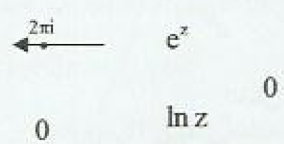
$$z = x \xrightarrow{e^z} \ell^+ \quad , \ z = x + 2\pi i \to \ell^- \tag{16}$$

نستنتج مما سبق أن (الشكل2):

$$D: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \xrightarrow{e^z} C_\omega \setminus [0, \infty) \tag{17}$$



الشكل (1)



الشكل (2)

بحيث إن الحدود السفلى للساحة D تنتقل إلى الضفة العليا، بينما تنتقل حدوده العليا إلى الضفة السفلى.

أيضاً لدينا:

$$z = c + iy \,;\, 0 \le y \le 2\pi \xrightarrow{e^z} \omega = e^c e^{iy} \tag{18}$$

$$z_1 = c;\ y = 0 \xrightarrow{e^z} \omega_1 = e^c \in \ell^+$$

$$z_2 = c + 2\pi i \xrightarrow{e^z} \omega_2 = e^c e^{2\pi i} \in \ell^-$$

مما يعني أن صورة قطعة مستقيمة شاقولية واقعة في الشريط D هي دائرة غير مقفلة في نقطة.

بنفس الأسلوب نجد أن:

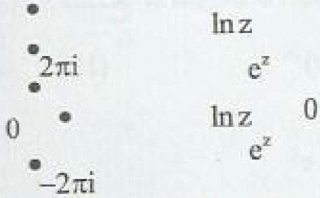
$$D: 2\pi < \operatorname{Im} z < 4\pi \xrightarrow{e^z} C_\omega \setminus [0,\infty) \tag{19}$$

بحيث الحدود السفلى للشريط D تنتقل إلى الضفة ℓ^+ وصورة الحدود العليا لـ D هي الضفة السفلى ℓ^-.

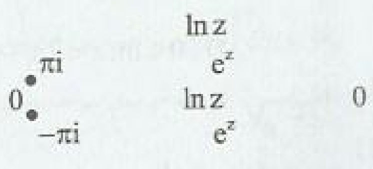
بشكل عام يكون (الشكلين 3 ، 4 وعلى الترتيب):

$$\left.\begin{aligned} &D_k : 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1) \xrightarrow{e^z} C_\omega \setminus [0,\infty) \\ &D_k : \pi(2k-1) < \operatorname{Im} z < \pi(2k+1) \xrightarrow{e^z} C_\omega \setminus (-\infty,0) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

حيث k عدد صحيح مثبت.



الشكل (3)



الشكل (4)

مثال (1): أوجد صورة الساحة $D: \{|\operatorname{Re} z| < 1, o < \operatorname{Im} z| < \pi\}$ ومن $\omega = e^z$.

الحل:

إن الساحة هي داخلية مستطيل وصورتها هي النصف العلوي لحلقة وبالتحديد (لماذا؟).

$$\tilde{D}:\left\{\frac{1}{e}<|\omega|<e\ ,\ \operatorname{Im}\omega>o\right\}$$

التابع العكسي: من الطبيعي ترميز التابع العكسي للتابع $z=e^{\omega}$ بالرمز $\ln z$ وهذا التابع هو مجموعة حلول المعادلة:

$$e^{z}=\omega \tag{21}$$

بالنسبة لـ z ونجدها بوضع $z=re^{i\varphi}$ و $\omega=u+iv$ في تلك المعادلة وعزل القسم الحقيقي عن التخيلي:

$$\omega=\ln z=\ln|z|+i\left(\arg z+2\pi k\right)\ ;\ k\in Z \tag{22}$$

حيث هنا $\arg z$ فرع مثبت لزاوية z.

بالتالي عندما $z\neq 0$ يوجد للمعادلة (21) عدد غير منته من الحلول ω_k تعطى بالعلاقة (22) أي أن التابع اللوغاريتمي $\ln z$ يأخذ في كل نقطة $z\ (z\neq 0)$ مجموعة غير منتهية من القيم والقسم الحقيقي $\ln|z|$ وحيد التعيين ونحن أمام مسألة عزل الفروع الوحيدة القيمة المستمرة لهذا التابع.

واضح أنه يمكن عزل فرع $\ln z=(\ln z)_0$ في تلك الساحة D التي فيها يمكن عزل فرع لتابع الزاوية $\arg z$.

لنأخذ الساحة $D=C\setminus[0,\infty)$ التي تسمح بعزل فرع للتابع $\varphi=\arg z$.

ولنفرض أن $\varphi(z)=\arg z$ هو أحد الفروع المثبتة لتابع الزاوية في D بحيث:

$$0<\varphi(z)<2\pi \tag{23}$$

ولنضع (مع الاحتفاظ بنفس الرموز):

$$\omega=\ln z=\ln|z|+i\arg z \tag{24}$$

حيث $\varphi = \arg z$ يحقق الشرط (23).

إن التابع $\omega = \ln z$ يحقق المعادلة $e^{\omega} = z$ وحسب (23) و (24) وحيد القيمة ومستمر في الساحة D ويكون:

$$D : C_z \setminus [0,\infty) \xrightarrow{\ln z} 0 < \operatorname{Im}\omega < 2\pi \qquad (25)$$

من مبرهنة التابع العكسي البسيطة (2-7-2) نجد أن الفرع $\ln z$ قابل للمفاضلة في كل z $(z \neq \infty \ \& \ z \neq 0)$.

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \qquad (26)$$

نذكر بوجود عدد غير منته من الفروع المستمرة لتابع الزاوية تعطى بالشكل:

$$(\arg z)_k = \arg z + 2\pi k \ ; \ \ k \in Z \qquad (27)$$

حيث هنا $\arg z = (\arg z)_0$ هو الفرع المأخوذ أعلاه والذي يحقق الشرط (23).

من أجل $k = 1$ نجد ان الفرع المقابل هو $(\arg\ z)_1$ وبالتالي فرع التابع اللوغاريتمي الموافق له:

$$\omega = (\ln z)_1 = \ln|z| + i(\arg z)_0 + 2\pi i = \ln z + 2\pi i \qquad (28)$$

ولدينا:

$$D : C_z \setminus [0,\infty) \xrightarrow{(\ln z)_1} 2\pi < \operatorname{Im}\omega < 4\pi \qquad (29)$$

ومن أجل $k = -1$ نجد:

$$D : C_z \setminus [0,\infty) \xrightarrow{(\ln z)_{-1}} -2\pi < \operatorname{Im}\omega < 0 \qquad (30)$$

التابعان $(\ln z)_1$ و $(\ln z)_{-1}$ هما فرعان للتابع اللوغاريتمي في الساحة D. وهكذا نستطيع عزل الفروع غير المنتهية $(\ln z)_k$ للتابع اللوغاريتمي في D وهذه الفروع قابلة للمفاضلة ومشتقها في كل نقطة $z \in C \setminus \{0,\infty\}$ يساوي $\frac{1}{z}$.

نستنتج مما سبق أنه لعزل فرع قابل للمفاضلة للتابع اللوغاريتمي في الساحة D يكفي إعطاء فرعاً لتابع الزاوية (العلاقة (27)) والفرع الثاني هذا يتعين بتثبيت قيمة الزاوية في نقطة داخلية أو حدودية للساحة D.

في الحالة الخاصة الفرع القابل للمفاضلة للتابع اللوغاريتمي الذي يأخذ قيماً حقيقية على ضفة القطع العليا ℓ^+ يعطى بالعلاقتين (23) و (24) كون $\arg z|_{\ell^+} = 0$.

وبشكل عام يمكن عزل فروع التابع اللوغاريتمي في المستوى القطوع على طول شعاع (أو منحنى) يصل بين النقطتين 0 و ∞ ففي الساحة $D = C_z \setminus [0,\infty)$ لدينا:

$$\left.\begin{array}{c}(\ln z)_k = \ln|z| + i(\arg z)_o + 2\pi k i \\ 0 < (\arg z)_o < 2\pi\end{array}\right\} \tag{31}$$

$$D: C_z \setminus [0,\infty) \xrightarrow{(\ln z)_k} 2\pi k < \operatorname{Im}\omega < 2(k+1)\pi \tag{32}$$

$$D: 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi \xrightarrow{\ln z} 0 < \operatorname{Im}\omega < \alpha$$

ختاماً نشير إلى أنه لايجوز أخذ لوغاريتم طرفي معادلة إلاّ بعد تثبيت فرع.

(6-3) التوابع المثلثية والتوابع القطعية المركبة و توابعها العكسية:

من علاقة أولر $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ & $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ نجد أن:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad , \quad \cos = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

نضع بالتعريف :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1}$$

بسهولة نحصل على جميع خواص تابع التجيب المركب cosz والجيب المركب sinz من (1) ومن خواص التابع النيبري e^z:

الخاصة 1: من أجل $z = x$ يتطابق cosz مع cosx و sinz مع sinx.

$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x . \cos iy + \cos x . \sin iy$
$= \underbrace{\sin x . chy}_{u} + i \underbrace{\cos x \, sh y}_{v}$

الخاصة2: التابعان قابلان للمفاضلة في كل المستوى ومن (1) أو من شرطي كوشي – ريمان يكون:

$$(\cos z)' = -\sin z \;,\; (\sin z)' = \cos z \qquad (2)$$

الخاصة3: كل من التابعين cosz و sinz دوري ودوره 2π لماذا؟.

الخاصة4: التابع cosz زوجي والتابع sinz فردي لماذا؟.

الخاصة5: تبقى جميع العلاقات المثلثية المعروفة في التحليل الحقيقي صحيحة (ماهي؟).

نعرف التجيب القطعي المركب chz والجيب القطعي المركب shz بالشكل:

$$chz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \;,\; shz = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad (3)$$

باستبدال z بـ iz من العلاقتين (1) نجد:

تعويض من قوانين sin z
cos z

$$\cos(iz) = chz \quad \& \quad \sin(iz) = ishz \qquad (4)$$

ومن الواضح أن (4) تساعدنا في نقل التوابع القطعية إلى مثلثية وإذا كان $z = x + iy$ فانه تصح :

الخاصة6 :

$$u = \operatorname{Re}\cos z = \cos x.chy, \; v = \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \, shy$$
$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y} \qquad (5)$$

بالمثل نوجد Re sinz ، Im sin z ، |sin z|...الخ.

الخاصة7: لكل $z = x + iy$ تتحقق المتراجحات:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left|e^{y}-e^{-y}\right| \le |\cos z| \le \frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right) \\ \frac{1}{2}\left|e^{y}-e^{-y}\right| \le |\sin z| \le \frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

البرهان: من تعريف cosz في (1) ومتراجحة المثلث نجد:

$\sin z$:
$u = \operatorname{Re}\sin z = \sin x \, chy, \; v = \operatorname{Im}\sin z = \cos x \, shy$
$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2} =$

$\sin z$ $\arg$ تتعلق بموقع z في المستوي.

مثال: حل المعادلة: $\cos(z) - i = 0$

$\Rightarrow \cos z = i \Rightarrow z = \arccos i = i\,\mathrm{Ln}(i + \sqrt{-2})$

$= i\{\mathrm{Ln}|i + \sqrt{-2}| + i[\mathrm{Arg}(i + \sqrt{2}) + 2\pi k]\}$

$\sqrt{-2} = \sqrt{|-2|}\, e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{2}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{2} i} = i\sqrt{2}$

$$\frac{1}{2}\left|\,|e^{iz}| - |e^{-iz}|\,\right| \le |\cos z| \le \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right)$$

وبملاحظة أن $|e^{iz}| = e^{y}$ نجد المتراجحات الأولى في (6) وبنفس الأسلوب نبرهن المتراجحات الثانية.

الخاصة8: بخلاف التابعين الحقيقيين $\cos x$ و $\sin x$ فإن كل من $\cos z$ و $\sin z$ هو تابع غير محدود في المستوى C_z.

البرهان: لدينا $|\cos z| \underset{y\to+\infty}{=} \frac{1}{2}e^{|y|}$, $|\sin z| \underset{y\to+\infty}{=} \frac{1}{2}e^{|y|}$

حسب (6) ومن كون $\lim\limits_{y\to\infty} e^{|y|} = +\infty$ نجد المطلوب.

الخاصة9 : تقبل المعادلة $\cos z - A = 0$ الحل لأي ثابت مركب A وتعطى حلولها غير المنتهية بإحدى العلاقتين المتكافئتين :

$$z_k = \arccos z = -i\ln\left(A \pm \sqrt{A^2 - 1}\right) \tag{7}$$

$$\arccos z = i\ln\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right) \tag{8}$$

البرهان: من العلاقة الأولى في (1) نجد:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = A \Rightarrow e^{2iz} - 2Ae^{iz} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 - 2At + 1 = 0 \;\;;\;\; t = e^{iz} \;\Rightarrow$$

$$t = e^{iz} = \frac{2A \pm 2\sqrt{A^2 - 1}}{2} = A + \sqrt{A^2 - 1} \Rightarrow iz = \ln\left(A \pm \sqrt{A^2 - 1}\right)$$

حيث يرمز الجذر في العلاقة لإحدى قيمتيه وإذا اعتبرنا الجذر ثنائي القيمة نسقط الإشارة (-) من أمامه وكون $\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)\left(A - \sqrt{A^2 - 1}\right) = 1$ فإنه يمكن حذف الإشارة (-) أمام اللوغاريتم.

اذكر الخاصة المماثلة بالنسبة لـ $\mathrm{ch}z, \mathrm{sh}z, \sin z$.

نعرف توابع الظل المركب tgz والتظل المركب ctgz والظل القطعي thz والتظل القطعي cthz بالشكل:

$$\mathrm{tgz}=\frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctgz}=\frac{\cos z}{\sin z},\ \mathrm{thz}=\frac{\mathrm{shz}}{\mathrm{chz}},\ \mathrm{cthz}=\frac{\mathrm{chz}}{\mathrm{shz}} \tag{9}$$

ومن عبارتي |cosz| و |sinz| نجد:

$$|\mathrm{tgz}|=\sqrt{\frac{\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y}{\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y}} \tag{10}$$

بسهولة يمكن استنتاج خواص التوابع في (9) استناداً إلى خواص التابعين في (1) نذكر منها:

الخاصة 10:

$$\mathrm{tg}(iz)=i\,\mathrm{thz}\ ,\ \mathrm{ctg}(iz)=-i\,\mathrm{cthz} \tag{11}$$

الخاصة11: التوابع في (9) قابلة للمفاضلة في كل المستوى C باستثناء النقاط التي ينعدم فيها المقام، فمثلاً التابع ctgz قابل للمفاضلة في الساحة $D=C\backslash\{\pi k\}$.

الخاصة12: كل من tgz و ctgz هو تابع دوري ودوره الأساسي يساوي π.

الخاصة13: تبقى العلاقات المعروفة في التحليل الحقيقي صحيحة.

الخاصة14: بنفس أسلوب الحصول على العلاقة (8) أو العلاقة:

$$z=\cos\omega \Leftrightarrow \omega=\arccos z=i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \tag{12}$$

نجد العلاقات:

$$\arcsin z=\frac{\pi}{2}-\arccos z=\frac{\pi}{2}-i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \tag{13}$$

$$\mathrm{arc\,chz}=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \tag{14}$$

$$\mathrm{arc\,shz}=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) \tag{15}$$

$$\text{arc thz} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \qquad (16)$$

$$\text{arc cthz} = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} \qquad (17)$$

استنتج عبارة المشتق للتوابع السابقة معتبراً إياها فرعاً مثبتاً.

مثال (1): احسب ω' لكل من:

1) $\omega = \cos(2z) + i \sin\frac{1}{z}$ 2) $e^{\sin(2z)}$

3) $\omega = tg^3 z$ 4) $\omega = (shz+1)^2$

الحل:

بنفس الأسلوب المتبع في التحليل الحقيقي نجد:

1) $$\omega' = -2\sin(2z) - \frac{i}{z^2}\cos\frac{1}{z}$$

2) $$\omega' = 2\cos(2z).e^{\sin 2z}$$

3) $$\omega' = 3tg^2 z.\sec^2 z \; ; \; \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

4) $$\omega' = 1 - th^2 z = \sec h^2 z \; ; \; \sec h = \frac{1}{ch\, z}$$

مثال (2):

a) أثبت أن: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

b) حل المعادلات:

صيف ٢٠١٠   مكرر   دورة

1) $e^{2iz} = -1$ ، 2) $\sin z = \cos z$ ، 3) $chz = 2$ ، 4) $\cos z - 2i \sin z = 2$

الحل: a) نستخدم العلاقات:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \; , \; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \; , \; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

والعلاقة بين التابع النيبري واللوغاريتمي.

$$e^{2iz} = -1 \Rightarrow 2iz = \ln(-1) \Rightarrow$$

(b 1) $$z_k = \frac{1}{2i}\ln(-1) = \frac{1}{2}(\pi + 2\pi k);\ k \in Z$$

2) هذه المعادلة تكافئ المعادلة $e^{2iz} = i$.

3) هذه تكافئ المعادلة $e^z = 2 \pm \sqrt{3}$ بالتالي:

$$(e^z)_1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow (z_k)_1 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) = \ln|2+\sqrt{3}| + i\cdot 2\pi k$$

$$(e^z)_2 = 2-\sqrt{3} \Rightarrow (z_k)_2 = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) = \ln|2-\sqrt{3}| + i(\pi + 2\pi k)$$

4) بنفس الأسلوب نجد مجموعتين غير منتهيتين من الحلول:

$$(z_k)_1 = 2\pi k - i\ln\left|-2+\sqrt{7}\right|$$

$$(z_k)_2 = \pi(1+2k) - i\ln\left|-2-\sqrt{7}\right|$$

(7-3) التابع $f(z) = z^a\ ;\ a = \alpha + i\beta$:

نضع بالتعريف:

$$W = z^a = e^{a\ln z} \qquad (1)$$

إذا كان $z = re^{i\varphi}$ فإن $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ بالتالي:

$$z^a = e^{\alpha\ln r - \beta(\varphi+2\pi k)}\cdot e^{i\left[\alpha(\varphi+2\pi k)+\beta\ln r\right]} \qquad (2)$$

ينتج من (2) مباشرة الآتي:

1) عندما $\beta \neq 0$ فإن التابع z^a يملك عدداً لانهائياً من القيم المختلفة في كل نقطة $(z \neq 0,\infty)$ وهذه القيم (عند تثبيت z و a) تتوضع على الدوائر $|\omega| = r_k$ التي أنصاف أقطارها:

$$r_k = e^{\alpha\ln r - \beta\varphi}e^{-2\pi k\beta}\ ;\ k \in Z \qquad (3)$$

ولنلاحظ أن r_k تشكل متوالية هندسية لانهائية من الطرفين $(k \in Z)$ أساسها هو $e^{-2\pi\beta}$ أما زوايا تلك القيم فإنها:

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta\ln r + 2\pi k\alpha \qquad (4)$$

وتشكل متوالية حسابية لانهائية من الطرفين وأساسها هو $2\pi\alpha$.

2) عندما $\beta=0$ أي a عدد حقيقي تتوضع قيم z^a على الدائرة $|\omega|=e^{a\ln r}=r^a$ وزوايا تلك القيم هي:

$$\theta_k=a\varphi+2\pi ka \tag{5}$$

وهنا نميز الحالتين:

الأولى فيها a عدد عادي بسيط $a=\frac{m}{n}$ فإن جميع قيم θ_k تختلف عن $\theta_0,\dots,\theta_{n-1}$ بمضاعفات صحيحة من 2π بالتالي التابع $\omega=z^a$ منته القيم ويتطابق مع التابع:

$$\omega=z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m} \tag{6}$$

الثانية فيها a عدد غير عادي فإنه لاتوجد بين القيم θ_k في المساواة (5) أية قيمتين الفرق بينهما مضاعفات صحيحة من 2π والتابع $\omega=z^a$ لانهائي القيم.

يمكن إلى جانب التابع في (1) تعريف التابع:

$$\omega=a^z=e^{z\ln a}=e^{z\ln|a|}e^{zi\,\mathrm{Arg}a} \tag{7}$$

مثال (1): احسب $\omega'(i)$ حيث $\omega=z^{1+i}$.

الحل: بما أن الأس $1+i$ عدد مركب فيه القسم التخيلي غير معدوم فإن ω لانهائي القيم ويتكون من عدد غير منته من التوابع الوحيدة القيمة المختلفة مثنى مثنى (الفروع) ولكي نتمكن من إجراء عملية الاشتقاق ينبغي اعتبار ω المعطى أحد الفروع تلك وليكن الفرع الذي يقابل $\mathrm{Ln}\,z$ في العلاقة:

$$\omega=z^{1+i}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}\,z}$$

وبعدئذ نجد أن:

$$\begin{aligned}\omega'(i)&=\left[(1+i)\mathrm{Ln}\,z\right]'|_i\, e^{(1+i)}\mathrm{Ln}\,z|_i\\&=\frac{1+i}{i}e^{(1+i)\mathrm{Ln}_i}=(1-i)e^{(1+i)}\frac{\pi i}{2}\\&=(1+i)e^{-\pi/2}\end{aligned}$$

ندرس التأثير الهندسي للتوابع الواردة في البندين السابقين بالتفصيل في فصل مستقل قادم في الجزء الثاني.

أدعو إلى إجراء مقارنة شاملة بين التوابع الأولية الحقيقية المعروفة في مراحل دراسية سابقة وبين التوابع الأولية المركبة المدروسة آنفاً.

ملاحظة هامة: إن استخدام عبارة التابع العكسي رياضياً نعني بها أحد الفروع المثبتة وينسحب هذا على كل مسألة يدخل فيها تابع ليس وحيد القيمة.

تمارين محلولة – المجموعة الأولى

تمرين (1): لتكن D المستوى المقطوع على طول المنحنى الحلزوني:

$$\gamma : z(t) = \frac{t}{\pi} e^{it} \;;\; 0 \le t \le +\infty$$

الواصل بين النقطتين 0 و ∞ (انظر الشكل (22) في (1-6-2)) ولنفرض أن $\arg 5 = 2\pi$. احسب $\arg(-6)$، $\arg 7$، $\arg(-4)$، $\arg 3$، $\arg 1$.

الحل: لدينا:

$$\arg z = \arg z_0 + \underset{\gamma}{\Delta} \arg z$$

حيث $\gamma : \widehat{z_0 z} \subset D$ لكن: $\arg z_0 = \arg 5 = 2\pi$ فرضاً.

إذن:

$$\arg z = 2\pi + \underset{\gamma}{\Delta} \arg z$$

ومنه نجد:

$$z = -6 \Rightarrow \arg(-6) = 2\pi + \pi = 3\pi$$
$$z = 7 \Rightarrow \arg 7 = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$
$$z = -4 \Rightarrow \arg(-4) = 2\pi - \pi = \pi$$
$$z = 3 \Rightarrow \arg 3 = 2\pi - 2\pi = 0$$
$$z = -2 \Rightarrow \arg(-2) = 2\pi - 3\pi = -\pi$$
$$z = 1 \Rightarrow \arg 1 = 2\pi - 4\pi = -2\pi$$

تمرين (2): أجب عن الأسئلة التالية:

a) أثبت أن:

-1 $$E_1 : \operatorname{Re} z > 0 \xrightarrow{iz+i} E_2 : \operatorname{Im} \omega > 1$$

-2 $$E_1 : \operatorname{Re} z > 0 \,,\; 0 < \operatorname{Im} z < 2 \xrightarrow{iz+1} -1 < \operatorname{Re} \omega < 1,\; \operatorname{Im} \omega > 0$$

b) أوجد الصورة E_2 للقطعة $E_1 = [i, 2+i]$ ثم الصورة E_2 للمنحنى

$$\gamma : z(t) = 1 + it \;;\; 0 \le t \le 1$$

وفق $f = z^2$.

c) أثبت أن:

-1 $E_1 : z\bar{z} - 2(z+\bar{z}) = 0 \xrightarrow{\frac{2z+3}{z-4}} E_2 : 2(\omega - \bar{\omega}) + 3 = 0$

-2 $E_1 : \operatorname{Re} z > 0 \xrightarrow{\frac{z-1}{z+1}} E_2 : |\omega| < 1$

-3 $E_1 : \operatorname{Re} z = 0 \xrightarrow{\frac{z-1}{z+1}} E_2 : |\omega| = 1$

الحل:

a) نضع $\omega = f(z) = u + iv$ و $z = x + iy$ نجد:

-1 $\omega = iz + i = -y + i(x+1) \Rightarrow u = -y,\ v = x+1$

بالتالي:

$$x = \operatorname{Re} z > 0 \Leftrightarrow x + 1 = v = \operatorname{Im} \omega > 1$$

-2 لدينا هنا: $u = 1 - y\ ,\ v = x$

بالتالي:

$$\begin{gathered} x = \operatorname{Re} z > 0 \ \ \&\ \ 0 < y = \operatorname{Im} z < 2 \Leftrightarrow \\ x = v = \operatorname{Im} \omega > 0 \ \ \&\ \ -1 < 1 - y = u = \operatorname{Re} \omega < 1 \end{gathered}$$

b) معادلة القطعة $E_1 = [i, 2+i]$ وسيطياً هي: $z = x + i\ ;\ 0 \le x \le 2$ بالتالي:

$$\omega = f(z) = (x+i)^2 \Rightarrow u = x^2 - 1,\ v = 2x$$

بالتخلص من x نجد $u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 ; -1 \le u \le 3$ وهي معادلة جزء من قطع مكافئ.

$$\omega = f(z) = (1+it)^2 \Rightarrow u = 1 - t^2\ ,\ v = 2t\ ;\ 0 \le t \le 1$$

بحذف t نجد الصورة $E_2 : u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 ;\ 0 \le u \le 1\ ,\ 0 \le v \le 2$

c) -1 $\omega = \dfrac{2z+3}{z-4} \Leftrightarrow z = \dfrac{3+4\omega}{\omega-2}$

فإنه بالتعويض في معادلة الدائرة E_1 المفروضة نجد المستقيم E_2.

-2 $$\omega=\frac{z-1}{z+1}\Leftrightarrow z=\frac{1+\omega}{1-\omega}$$

بالتالي: $$x=\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}$$

لكن $x=\operatorname{Re}z>0$ فرضاً مما يعني أن $1-|\omega|^2>0$ أو $|\omega|<1$:

-3 $$|\omega|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=(x+1)^2+y^2\Leftrightarrow\operatorname{Re}z=0$$

تمرين(3): أوجد القسم الحقيقي والتخيلي والطويلة والزاوية لكل من المقادير I التالية:

1) $e^{\frac{-1+2i}{i}}$ ، 2) $\ln\left(\frac{1-i}{2i}\right)$ ، 3) $\sin(3-i)$

4) $\arccos(-1-i)$ ، 5) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{1+i}$

الحل: 1) $$I=e^{2+i}=e^2e^i=e^2\cos1+ie^2.\sin1$$

$$\Rightarrow\operatorname{Re}I=e^2.\cos1,\operatorname{Im}I=e^2.\sin1,|I|=e^2$$

$$\operatorname{Arg}I=1\ ,\ \arg I=1+2\pi k$$

$$I=\ln\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\ln\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|+i\left[\arg\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+2\pi k\right]$$

$$=\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}I=\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|,\operatorname{Im}I=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \arg I=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

3) $$I=\operatorname{ch}1.\sin3-i\operatorname{sh}1.\cos3\Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}I=\operatorname{ch}1.\sin3,\operatorname{Im}I=-\operatorname{sh}1.\cos3$$

$$|I|=\sqrt{\operatorname{ch}^21.\sin^23.+\operatorname{sh}^21.\cos^23}$$

$$\arg I=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{sh}1.\cos3}{\operatorname{ch}1.\sin3}\right)=-\operatorname{arctg}(\operatorname{th}1.\operatorname{ctg}3)$$

4) نستخدم العلاقة بين تابع التجيب العكسي والتابع اللوغاريتمي حيث:

$z=-1-i$

5) لدينا هنا : $\left(\sqrt{3}-i\right)^{1+i}=e^{(1+i)\ln\left(\sqrt{3}-i\right)}=\ ?$

تمرين (4): a) اثبت أن :

-1 $\operatorname{tg}(iz)=i\operatorname{th}z$ ، 2) $\ln i^3\neq 3\ln i$

b) أوجد الخطأ في التعبير التالي:

$$i=(-1)^{1/2}=\left[(-1)^3\right]^{1/2}=(-1)^{3/2}=i^3=-i$$

c) أعطِ مثالاً تبين فيه أنه بشكل عام : $(z_1z_2)^\alpha\neq z_1^\alpha z_2^\alpha$

الحل: a)

$$\operatorname{tg}(iz)=\frac{\sin(iz)}{\cos(iz)}=\frac{i\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}=i\operatorname{th}z \qquad (1$$

$$\ln i^3=\ln(-i)=\ln|-i|+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\pi i\left(-\frac{1}{2}+2k\right) \qquad (2$$

$$\ln i=\ln|i|+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\pi i\left(\frac{1}{2}+2k\right)$$

$$\Rightarrow 3\ln i=3\pi i\left(\frac{1}{2}+2k\right)\neq\pi i\left(-\frac{1}{2}+2k\right)=\ln i^3$$

b) مجموعة قيم التابع z^a مختلفة من أجل $a=\frac{1}{2}$ و $a=\frac{3}{2}$

c) خذ $z_1=-1$ ، $z_2=1$ مثلاً تجد أن الطرفين غير متساويين.

تمرين (5) حل المعادلات التالية:

(1 $e^z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}=0$ ، (2 $\cos z-2i\sin z=2$ (3 $\ln\left(z^2-1\right)=\frac{\pi i}{2}$

الحل:

$$z_k=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\ln|1|+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\pi i\left(\frac{1}{4}+2k\right) \qquad (1$$

(2 $\cos z - 2i\sin z = 2 \Rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} - 2i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - 2 = 0$

افرض $e^{iz} = t$ وتابع الحل.

(3 $z^2 = 1 + e^{\frac{\pi i}{2}} = 1 + i \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{8}},\ z_2 = -\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{8}}$ والحلول هي أسرتان لانهائيتان من العناصر: $\left\{\ln\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{8}}\right), \ln\left(-\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{8}}\right)\right\} = ?$.

تمرين(6):

1- باستخدام المبرهنة حول التابع العكسي، أثبت أن:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \quad ; \quad z \in D = C \setminus (-\infty, 0]$$

2- ماهي الساحة D التي فيها يكون التابع $f = \ln(3z - i)$ قابلاً للمفاضلة؟

الحل:

1- لتكن $z_o \in D$ نقطة كيفية ولنبين أن $\lim\limits_{z\to z_o} \frac{\omega - \omega_o}{z - z_o} = \frac{1}{z_o}$ حيث $\omega_o = \ln z_o$، $\omega = \ln z$.

يتم المطلوب إذا تحقق $\lim\limits_{z\to z_o} \frac{\omega - \omega_o}{z - z_o} = \lim\limits_{w\to w_o} \frac{1}{\frac{z - z_o}{\omega - \omega_o}}$

بالفعل بما أن التابع $\omega = \ln z$ مستمر في D فإن $\omega \to \omega_o$ عندما $z \to z_o$ و $\omega \neq \omega_o$ من أجل $z \neq z_o$ والمساواة صحيحة.

2- التابع المفروض هو تحصيل (تركيب) ln مع التابع $g = 3z - i$ ومن قاعدة المفاضلة لتحصيل تابعين نجد أن f هو تابع قابل للمفاضلة عند كل نقطة z والتي لأجلها $g = 3z - i \in D = C \setminus (-\infty, 0]$ أي في كل مستوى C باستثناء القيم التي تجعل $3z - i$ سالبة أو صفر. وعليه فإن الساحة المنشودة هي:

$$D = C \setminus \left\{ y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{3} \ ,\ x = \operatorname{Re} z \le 0 \right\}$$

ولكل $z \ni D$ يكون:

$$f' = \left[\ln(3z-i)\right]' = \frac{3}{3z-i}$$

تمرين (7): حدد:

1- فرعاً للتابع $f = \ln(z^3 - 2)$ يكون قابلاً للمفاضلة عند $z = 0$ ثم احسب $f'(0), f(0)$.

2- فرعاً للتابع $f = \sqrt{z^2 - 1}$ يكون قابلاً للمفاضلة في الساحة $D: |z| > 1$.

الحل:

1) إن التابع f هو تحصيل ln مع التابع $g = z^3 - 2$ القابل للمفاضلة في كل المستوى C وحسب قاعدة التحصيل لتابعين يكفي أن نختار أي فرع من ln يكون قابلاً للمفاضلة عند النقطة $g(0) = -2$ وليكن مثلاً:

$$f(z) = \ln(z^3 - 2) \ ; z \in C \setminus \left\{ \arg z = \frac{-\pi}{4} \right\}$$

وعندئذ $$f(o) = \operatorname{Ln}(-2) \ ,\ f'(z)\Big|_o = \left.\frac{3z^2}{z^3 - 2}\right|_o = 0$$

2) علينا إيجاد تابع $\omega = f(z)$ يكون قابلاً للمفاضلة في D ويحقق المعادلة $\omega^2 = z^2 - 1$.

لنلاحظ أن الفرع الرئيسي للتابع $\sqrt{z^2 - 1}$ والذي هو $e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z^2-1)}$ لايصلح لأن هذا الفرع منقطع على طول oy والقطعة [-1,1] حيث عليهما يأخذ التابع $z^2 - 1$ قيماً حقيقية سالبة لكن التابع $z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$ الذي هو حل للمعادلة السابقة يمكن أن يكون المطلوب لأن الفرع الرئيسي لـ $\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$ أي $e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)}$ يملك قطوعاً عندما $1 - \frac{1}{z^2}$

حقيقية سالبة، وهذا يحدث فقط عندما $\frac{1}{z^2}$ حقيقية أكبر من الواحد، أي القطع يكون $[-1,1]$ وعليه فإن:

$$\omega = f(z) = ze^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}$$

هو تابع قابل للمفاضلة في الساحة $D: |z|>1$

تمرين(8): لتكن $z \in (-1,1)$ أوجد مجموعة القيم للتابع arc sinz.

الحل:

بما أن
$$\arcsin z = -i\operatorname{Ln}\left[iz+\sqrt{1-z^2}\right]$$

فإن:

$$\arcsin z = -i\operatorname{Ln}\left[iz+e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1-z^2)}\right]$$

عندما: $z \in (-1,1)$ أي $|z|=|x|<1$ يكون: $1-z^2 \in [0,1]$ و عندئذ $\ln(1-z^2)$ هو تابع حقيقي و $\sqrt{1-z^2}$ حقيقي موجب، بينما iz تخيلي بحت مما يعني أن قيم $iz+e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1-z^2)}$ تقع في $0<\operatorname{Re} z$ وبالتحديد على دائرة الوحدة $|z|=1$ لأن:

$$\left|iz+\sqrt{1-z^2}\right| = \sqrt{x^2+\left(1-x^2\right)} = 1$$

بأخذ Ln لـ $iz+e^{\frac{1}{2}\ln(1-z^2)}$ تظهر قيم $i\theta$ حيث $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ والمضروب $-i$ يعطي أخيراً $-\frac{\pi}{2}<\arg\sin z<\frac{\pi}{2}$.

تمرين (9): باستخدام الجذر التربيعي المركب أثبت أن الصيغتين التاليتين متكافئتان:

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2\sin cx} = \begin{cases} \dfrac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}cx}{a} \; ; \; a^2>b^2 \\[2ex] \dfrac{1}{2ac\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}cx+a}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}cx-a} \; ; \; a^2<b^2 \end{cases}$$

نا يسا

الحل: نأخذ الصيغة الثانية عندما $b^2 < a^2$:

$$\frac{1}{2ac\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}\,tgcx+a}{\sqrt{b^2-a^2}\,tgcx-a}=$$

$$=\frac{1}{2i}\,\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{i\sqrt{a^2-b^2}\,tgcx+a}{i\sqrt{a^2-b^2}\,tgcx-a}$$

$$=\frac{-i}{2}\,\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{iz+1}{iz-1}=\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{i}{2}\right)\ln\frac{iz-1}{iz+1}$$

$$=\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{i}{2}\right)\left[\ln\frac{1-iz}{1+iz}+\ln(-1)\right]$$

$$=\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\,arctgz-\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$

$$=\frac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\,arctg\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,tgcx}{a}+c$$

حيث $c=\dfrac{1}{ac\sqrt{a^2-b^2}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ z=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,tgcx}{a}$

$$arctg=\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}=\frac{i}{2}\ln\frac{1-iz}{1+iz}$$

بملاحظة أن الحد الثابت c لايؤثر في التكامل المحدد نجد أن الصيغتين متكافئتان.

تمارين غير محلولة – المجموعة الأولى

تمرين (1):

a) لتكن D المستوى المقطوع على طول المنحنى الحلزوني غير المحدود

$$\gamma : z(t) = \frac{t}{\pi} e^{it};\ 0 < t \le \infty$$

ولنفرض أن $\arg(4)^{-} = -2\pi$. احسب قيم كل من الفروع $\ln z, \sqrt{z}, \arg z$ في النقاط $-6, 7, -4, 3, 1, 4^{+}, (-5)^{-}, 5^{+}$.

b) لتكن $D = C \setminus oy^{+}$ و $\sqrt[3]{1} = 1$. احسب قيم الفرع $\sqrt[3]{z}$ على المحاور الإحداثية.

c) لتكن $D = C \setminus oy^{+}$ و $\ln z_{o} = \omega_{o}$ قيمة مثبتة في $z_0 \ni D$. احسب قيم الفرع $\ln z$ على المحاور الإحداثية.

تمرين (2): أثبت أن:

a) $\frac{i(z-1)}{z+1} : |z| < 1 \to \operatorname{Im} \omega < 0$

b) عين صورة القطاع $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ وفق التحويل $\frac{z}{z-1}$.

تمرين (3): أوجد القسم الحقيقي والقسم التخيلي والطويلة والزاوية لكل مما يلي:

$$\operatorname{ch}(1+i) \quad , \quad 2)\ \operatorname{tg}(2i) \quad , \quad 3)\ \frac{e^{1+3\pi i}}{e^{-1+\frac{\pi i}{2}}}$$

$$4)\ \ln\left(\sqrt{3}+i\right) \quad , \quad 5)\ \operatorname{arcsh} i$$

تمرين (4): أثبت صحة:

1) بعض العلاقات المثلثية والقطعية.

2) العلاقات التي تربط التوابع المثلثية العكسية والقطعية العكسية مع التابع اللوغاريتمي.

تمرين (5): هل يوجد z بحيث $shz = chz$ ؟

تمرين (6): حل كل من المعادلات التالية:

$$\cos z = i\sin z \ (1 \ , \ \sin z = 2 \ (2 \ , \ e^{iz} = 3 \ (3$$

$$e^{2z} + e^{z} + 1 = 0 \ (4 \ , \ \ln\left(z^2+1\right) = \frac{\pi i}{3} \ (5$$

تمرين (7): حدد الساحة التي يكون فيها التابع $\ln(4+i-z)$ قابلاً للمفاضلة واحسب $f'(z)$.

تمرين (8): عين الخطأ في البرهان التالي للمساواة $z=-z$.

بما أن $z^2 = (-z)^2$ فإن:

$$2\ln z = 2\ln(-z) \Rightarrow \ln z = \ln(-z) \Rightarrow$$
$$z = e^{\ln z} = -z = e^{\ln(-z)}$$

تمرين (9): أوجد القيمة الرئيسية لكل مما يلي:

$$(-1)^{2/5} \ (1 \ , \ 2^{\pi i} \ (2 \ , \ (1+i)^{\frac{1}{1-i}} \ (3 \ , \ i^{3i} \ (4 \ , \ \left(\frac{1+i}{2}\right)^3 \ (5$$

تمرين (10): أوجد فرعاً لكل من التوابع f التالية بحيث يكون قابلاً للمفاضلة في الساحة المبينة جانب f.

$$\sqrt{z^2-1}\,,\ |z|<1 \ (1 \quad , \quad \sqrt{4+z^2}\,,\ C\setminus[-2i,2i] \ (2$$
$$\sqrt{z^4-1}\,,\ |z|>1 \ (3 \quad , \quad \sqrt[3]{z^3-1}\,,\ |z|>1 \ (4$$

تمرين (11): أثبت صحة المساواة: $(\text{arcshz})' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ وبين الشروط التي تجعلها محققة.

(8-3) سلاسل القوى المركبة:

سلسلة القوى المركبة هي كل سلسلة تابعية من الشكل:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (1)$$

مركزها الثابت المركب a وأمثالها الأعداد المركبة c_n.

التحويل:

$$z - a = t \quad (2)$$

ينقل السلسلة (1) إلى السلسلة $\sum_{0} c_n t^n$ التي مركزها $a = 0$ وبالتالي لن ننقص عمومية الدراسة إذا بحثنا هذا النوع من السلاسل.

بوضع z بدلاً من t شكلياً نجد:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{0} c_n z^n \quad (3)$$

ساحة التقارب للسلسلة (1) أو (3) هي مجموعة النقاط z من المستوى C التي لأجلها تكون السلسلة متقاربة.

واضح أن كل سلسلة قوى تكون متقاربة في مركزها ومجموعها هو $f(a) = c_0$ وهناك سلاسل قوى تتقارب فقط في المركز وليس لها ساحة تقارب، وهذا النوع من السلاسل قليل الأهمية كالسلسلة $\sum_{0} n^n (z-1)^n$ وبالمقابل توجد سلاسل قوى بالغة الأهمية تتقارب في كل المستوى المركب C لأن مجموعها f(z) يكون تابعاً قابلاً للمفاضلة في كل C كالسلسلة $\sum_{0} \frac{1}{n^n}(z-1)^n$ (المثال (1)).

(1-8-3) ساحة تقارب سلسلة قوى:

باستثناء الحالتين السابقتين للتقارب فإن المبرهنة التالية تبين أن ساحة تقارب سلسلة قوى هي **قرص دائري مفتوح** مركزه مركز السلسلة a ويصبح التقارب منتظماً في كل ساحة جزئية مغلقة (أو قرص دائري جزئي مغلق) واقعة ضمن قرص التقارب.

مبرهنة (1): آبل: إذا كانت سلسلة القوى (1) متقاربة في النقطة z_o $(z_o \neq a)$ فإنها:

مشروع

1) تكون متقاربة مطلقاً في القرص الدائري $K_o: |z-a| < |z_o - a|$.

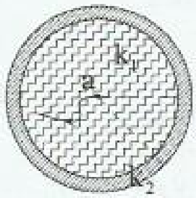
2) تكون متقاربة بانتظام في كل ساحة جزئية أو قرص دائري جزئي مغلق: $\overline{K}_1: |z-a| \leq R_1 < |z_o - a|$ واقع في K_o.

الإثبات:

1) بما أن السلسلة (1) متقاربة في النقطة z_o فإن $\lim\limits_{n\to\infty} c_n (z_o - a)^n = 0$، بالتالي يوجد ثابت موجب $M > 0$ بحيث $|c_n (z_o - a)^n| < M$ من جانب آخر لكل $z \in K_o$ لدينا:

$$\left|c_n (z-a)^n\right| = \left|c_n (z_o - a)^n \frac{(z-a)^n}{(z_o - a)^n}\right| = \left|c_n (z_o - a)^n\right| \frac{|(z-a)^n|}{|(z_o - a)^n|} < M.q^n$$

ولكن $q = \dfrac{|(z-a)^n|}{|(z_o - a)^n|} < 1$ عندما $z \in K_o$



الشكل (1)

والسلسلة $\sum\limits_{0} Mq^n$ هندسية متقاربة في K_o. بالتالي حسب اختبار المقارنة تكون السلسلة (1) متقاربة مطلقاً في K_o.

2) بما أن $K_o \supset \overline{K}_1$ فإنه لكل $z \in K_1$ يكون (الشكل 1):

$$\left|c_n (z-a)^n\right| = \left|c_n (z_o - a)^n\right| \frac{\left|(z-a)^n\right|}{\left|(z_o - a)^n\right|} < M.\frac{R_1}{|z_o - a|^n} = M.q_1^n$$

لكن $q_1 = \dfrac{R_1}{|z_o - a|^n} < 1$ عندما $z \in K_1$ و q_1 ثابت مستقل عن z. بالتالي حسب اختبار فايرشتراوس للتقارب المنتظم تكون السلسلة (1) متقاربة بانتظام في القرص المغلق $\overline{K}_1$ الواقع في K_o.

k_o

a

الشكل (2)

إذا كانت سلسلة القوى (1) متقاربة في القرص الدائري المفتوح الذي مركزه السلسلة a ونصف قطرها $R > 0$ (الشكل 2). ومجموعها هو f(z) نكتب:

$$f(z)=\sum_{0} c_n(z-a)^n \ ; \ z\in K_o : |z-a|<R \tag{4}$$

وتكتمل مسألة البحث عن ساحة تقارب سلسلة قوى بمعرفة نصف القطر R.

مبرهنة (2) – كوشي – آدامار: يعطى نصف قطر التقارب R للسلسلة (1) من إحدى الصيغ التالية:

$$R=\frac{1}{\ell} \ ; \ \ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \tag{5}$$

$$R=\frac{1}{\ell} \ ; \ \ell=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{6}$$

$$R=\frac{1}{\ell} \ ; \ \ell=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} \tag{7}$$

$$R=\frac{1}{\ell} \ ; \ \ell=\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{8}$$

الإثبات: نبرهن صحة المساواة (6). من اختبار النسبة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z-a|=|z-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

$$=|z-a|.\ell \ ; \ \ell=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

بالتالي عندما $|z-a|.\ell<1$ أو $|z-a|<\frac{1}{\ell}=R$ تكون السلسلة (1) متقاربة مطلقاً.

بالمثل نبرهن المساواة (7). لدينا:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}=|z-a|.\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=|z-a|.\ell \ ; \ \ell=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$$

ومن اختبار الجذر تكون السلسلة (1) متقاربة مطلقاً عندما $|z-a|.\ell<1$ أي: $|z-a|<\frac{1}{\ell}=R$.

إذا كان $|z-a|>R$ فإن $\left|\dfrac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right|>1$ في (6) و $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}>1$ في (7) والسلسلة متباعدة.

في الحالة عندما $\ell=+\infty$ نضع $R=0$ والسلسلة متقاربة حينها في المركز فقط، أما عندما $\ell=0$ نضع $R=+\infty$ والسلسلة متقاربة في كل المستوى C.

مثال (1): ادرس تقارب كل من السلاسل التالية:

1) $\sum\limits_{0} n^n(z-1)^n$

2) $\sum\limits_{0} \dfrac{1}{n^n}(z-1)^n$

3) $\sum\limits_{0} (-1)^n(z+i)^n$

4) $\sum\limits_{0} \left[4+(-1)^n\right]^n(z+2)^n$

الحل:

لنلاحظ أن جميع السلاسل المعطاة هي سلاسل قوى وبالتالي ساحات تقاربها هي أقراص دائرية مراكزها هي مراكز تلك السلاسل ولنوجد أنصاف أقطارها:

1) $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=+\infty \Rightarrow R=0$ والسلسلة متقاربة في مركزها $a=\overset{1}{\cancel{0}}$ فقط.

2) $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^n}=0 \Rightarrow R=+\infty$ والسلسلة متقاربة مطلقاً في كل المستوى C.

3) $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^n|}=1 \Rightarrow R=1$ والسلسلة متقاربة مطلقاً في القرص $K:|z+i|<1$.

4) لدينا هنا $c_n=\begin{cases}5^n & ; \ n \text{ زوجي} \\ 3^n & ; \ n \text{ فردي}\end{cases}$ والنهاية العادية غير موجودة لذلك نطبق النهاية العليا في (7).

$$\ell=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n}=5 \Rightarrow R=\frac{1}{5}$$

والسلسلة متقاربة مطلقاً في القرص $|z+2|<\frac{1}{5}$

ملاحظة (1): على حدود قرص التقارب.

$$K:|z-a|<R \tag{9}$$

أي على الدائرة $|z-a|=R$ سلسلة القوى (1) قد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة، بل قد تتقارب في بعض نقاط الدائرة وتتباعد في بقية النقاط، ولذلك دراسة التقارب على الحدود تتم نقطياً. من جانب آخر تستخدم النهاية العليا عندما لاتكون النهاية العادية موجودة.

سلسلة المشتقات:

$$c_1+2c_2(z-a)+3.c_3(z-a)^2+...=\sum_1 nc_n(z-a)^{n-1} \tag{10}$$

هي سلسلة قوى مركزها a هو نفس مركز السلسلة الأصلية (1) ونصف قطر تقاربها R هو ذاته نصف قطر تقارب (1) لأن:

$$\ell=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|nc_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,.\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\ell$$

إذن لن يتغير قرص تقارب سلسلة قوى عند المفاضلة حداً حداً، وبالتالي لن يتغير قرص التقارب عند المكاملة حداً حداً ضمن قرص التقارب، أي:

مبرهنة (3)- المفاضلة حداً حداً والمكاملة حداً حداً: إذا كان:

$$f(z)=\sum_0 c_n(z-a)^n :z\in K:|z-a|<R \tag{11}$$

فإن:

1) يمكن مكاملة طرفي (11) حداً حداً على طول منحنى $\widehat{az}$; $K\supset\gamma$ وهنا يمكن أخذ $\gamma=[a,z]$ والسلسلة الناتجة هي سلسلة قوى قرص تقاربها هو K ذاته:

$$\int_a^z f(\zeta)d\zeta=\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=\sum_1\int_a^z c_n(\zeta-a)^n d\zeta \tag{12}$$

2) يمكن مفاضلة طرفي (11) حداً حداً عدداً كيفياً من المرات ضمن قرص التقارب K ولسلاسل القوى الناتجة قرص التقارب K ذاته:

$$f'(z)=\sum_{1} nc_n (z-a)^{n-1} \; ; \; z\in K \tag{13}$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k} n(n-1)...(n-k+1)c_n (z-a)^{n-k} \; ; \; z\in K \tag{14}$$

الإثبات: نكتفي بإثبات صحة المساواة (13) تاركا إثبات صحة (12) تدريباً.

نفرض أن:

$$s(z)=\sum_{1} nc_n (z-a)^{n-1} \tag{15}$$

السلسلة في الطرف الأيمن من (15) هي سلسلة قوى متقاربة في القرص K ومتقاربة بانتظام في كل قرص دائري جزئي مغلق $K_1 : |z-a| \le R_1 < R$ حسب مبرهنة آبل، وبما أن حدود هذه السلسلة هي كثيرات حدود فإن مجموعها $s(z)$ هو تابع مستمر في K_1 ويتم المطلوب إذا برهنّا أن $s(z)=f'(z)$ في K .

لنأخذ $\gamma=[a,z]$ لكل $z \in K_1$. لدينا:

$$\int_a^z (\zeta-a)^k d\zeta=\frac{1}{k+1}(z-a)^{k+1} \Rightarrow$$

$$\int_a^z nc_n (\zeta-a)^{n-1} d\zeta=\frac{nc_n}{n}(z-a)^n=c_n (z-a)^n$$

$$\int_a^z s(\zeta)d\zeta=\int_a^z \left[\sum_{1} nc_n (\zeta-a)^{n-1}\right]d\zeta$$

$$=\sum_{1} \int_a^z nc_n (\zeta-a)^{n-1} d\zeta=\sum_{1} c_n (z-a)^n=f(z)-c_o$$

لكن التكامل $\int_a^z s(\zeta)d\zeta$ هو تابع أصلي لـ $s(z)$ في القرص K_1 بالتالي:

$$s(z)=\left(\int_a^z s(\zeta)d\zeta\right)'=\left(f(z)-c_o\right)'=f'(z)\ ;\ z\in\bar{K}_1$$

وبما أنه يمكن اعتبار R_1 قريب من R فإن التابع f قابل للمفاضلة ويحقق $s(z)=f'(z)$ في كل القرص K والمساواة (13) صحيحة.

نتيجة (1): مجموع سلسلة قوى هو تابع قابل للمفاضلة عدداً كيفياً من المرات في قرص تقاربها K. لماذا؟ وسنجد في الفصل الرابع أن العكس أيضاً صحيح.. أي كل تابع f قابل للمفاضلة في جوار a يُنشر في سلسلة قوى حول a.

(2-8-3) العمليات على سلاسل القوى:

إذا كان:

$$g(z)=\sum_o a_n(z-a)^n\ ;\ z\in K_1 \tag{16}$$

$$h(z)=\sum_o b_n(z-a)^n\ ;\ z\in K_2 \tag{17}$$

حيث $K_1:|z-a|<R_1$ و $K_2:|z-a|<R_2$

فإن العمليات الحسابية تتم كما يلي:

1) عندما $f(z)=g(z)\pm h(z)$ فإن حاصل جمع (طرح) السلسلتين (16) و (17) هي:

$$f(z)=\sum_o (a_n\pm b_n)(z-a)^n\ ;\ z\in K_1\cap K_2 \tag{18}$$

2) عندما $f(z)=g(z).h(z)$ فإن سلسلة حاصل الضرب للسلسلتين (16) و (17) هي:

$$f(z)=\sum_o \left(a_ob_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_o\right)(z-a)^n=\sum_o c_n(z-a)^n$$

$$a_ob_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_o=c_n\ ;\ n=0,1,... \tag{19}$$

3) عندما $f=\frac{g}{h}$ فإننا نكتب $f.h=g$ وحسب حالة الجداء نحصل على العلاقة التدريجية التي تحسب الأمثال c_n بدلالة a_n و b_n.

$$b_oc_o=a_o\ ,\ b_oc_1+b_1c_o=a_1\ ,\ a_n=c_ob_n+c_1b_{n-1}+...+c_nb_o \tag{20}$$

تدريب : ليكن التابع f(z) معطى على شكل سلسلة قوى متقاربة حول نقطة ما.مثل مقلوب التابع على شكل سلسلة قوى متقاربة حول نفس النقطة.

(3-8-3) نشر تابع مفروض في سلسلة قوى – سلسلة تايلور وطرق النشر:

بينّا في (3-8-1) أنه إذا كانت سلسلة القوى المعطاة متقاربة في قرص دائري فإن مجموعها f(z) يملك مشتقات من كل المراتب في ذلك القرص وعالجنا مسألة التقارب أي متى وأين يكون المجموع f موجوداً.

نأتي إلى دراسة مسألة العكس بمعنى إذا كان لدينا تابع مفروض f(z) فمتى وكيف نستطيع تمثيله في سلسلة قوى؟.

تعريف (1): ليكن f(z) تابع قابل للمفاضلة في جوار ما للنقطة $a\,(a \neq \infty)$.

سلسلة تايلور للتابع f بقوى (z-a) أو حول a هي بالتعريف سلسلة القوى:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\ldots=\sum_{0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n} \qquad (21)$$

في الحالة الخاصة عندما a = 0 نجد سلسلة **ماك لوران**.

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\ldots=\sum_{0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n} \qquad (22)$$

لنلاحظ أن سلسلة تايلور (21) هي سلسلة قوى أمثالها هي :

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \;\;;\;\; n=0,1,2, \qquad (23)$$

تجيب المبرهنة التالية عن التساؤل المطروح الثاني.

مبرهنة (4)- تايلور: إذا كان f تابعاً قابلاً للمفاضلة في جوار النقطة $a\,(a \neq \infty)$ فإنه بالإمكان تمثيل f في سلسلة قوى تايلورية حول a :

$$f(z)=\sum_{0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n} \;\;;\;\; z\in K:|z-a|<R \;,\; R>0 \qquad (24)$$

ويحسب نصف القطر R من اختبار كوشي – آدامار.

الإثبات: بما أن التابع f قابل للمفاضلة في القرص K (جوار a) فإن (انظر المبرهنة 2 في (5-4)):

$$f(z)=\sum_{0} c_n (z-a)^n \ ; \ z\in K$$

يتم المطلوب إذا أثبتنا صحة المساواة (23) لكل n.

لدينا:

$$f^{(n)}(z)=n!c_n+(n+1)!c_1(z-a)+\dots \ ; \ z\in K$$

في الحالة الخاصة بوضع $z=a$ نجد أن $f^{(n)}(a)=n!c_n$.

نستنتج مباشرة:

1) كل سلسلة قوى هي سلسلة تايلور لمجموعها في قرص التقارب.

2) تمثيل تابع قابل للمفاضلة f حول نقطة a في سلسلة تايلور وحيد. بالتالي نشر التابع f في سلسلة تايلور وحيد ولايتعلق بطريقة النشر.

سلسلة ماك لوران للتوابع الأولية: كتطبيق مباشر على مبرهنة تايلور نحصل على سلاسل ماك لوران للتوابع الأولية:

$$e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\dots=\sum_{0}\frac{1}{n!}z^n \quad ; \ R=+\infty \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos z&=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4\dots=\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} && ; \ R=+\infty\\ \sin z&=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\dots=\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} && ; \ R=+\infty\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{ch}z&=1+\frac{1}{2!}z^2+\dots=\sum_{0}\frac{1}{(2n)!}z^{2n} && ; \ R=+\infty\\ \mathrm{sh}z&==\sum_{0}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} && ; \ R=+\infty\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$$(1+z)^k = 1 + \frac{k}{1}z + \frac{k(k-1)}{2.1}z^2 + \ldots = \sum_0 \binom{k}{n} z^{k-n} \; ; \; R = +1$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}, \; k \in \cancel{Z} \in Q \tag{28}$$

في الحالة الخاصة عندما $k = -1$ وبعد استبدال z بـ $-z$ نجد:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_0 z^n \quad ; \quad R = +1$$

وعندما $k = -1$ نجد:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_0 (-1)^n z^n \quad ; \quad R = +1$$

نشير إلى أن سلسلة تايلور الشكلية $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ للتابع النظامي (القابل للمفاضلة) f متقاربة ومجموعها هو التابع f ذاته وهذه الحقيقة ليست صحيحة بشكل عام للتوابع الحقيقية القابلة للمفاضلة.

على سبيل المثال التابع غير الصفري $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ; \; x \neq 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \end{cases}$ قابل للمفاضلة عدداً حراً من المرات في $x = 0$ ولدينا $f^{(n)}(0) = 0$. بالتالي سلسلة ماك لوران له هي السلسلة الصفرية المتقاربة من الصفر وليس من التابع $f(x)$.

طرق النشر:

إضافة لتوظيف سلسلة ماك لوران والعمليات الأربع السابقة عند النشر في سلسلة تايلور يمكن استخدام طرائق أخرى.

طريقة المكاملة حداً حداً او المفاضلة حداً حداً. نوضحها بالمثال التالي:

مثال (1): أوجد سلسلة ماك لوران لكل من التابعين:

1) $\frac{z}{(3-z)^2}$ 2) $\ln(a+z)$ (فرع مثبت).

الحل:

1) بالاستفادة من السلسلة الهندسية:

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{0} \frac{z^n}{3^{n+1}} \ ; |z|<3$$

هامة

بالمفاضلة حداً حداً ضمن قرص التقارب نجد:

$$\frac{1}{(3-z)^2}=\sum_{1} \frac{n}{3^{n+1}} z^{n-1} \ ; \ |z|<3$$

الآن نضرب الطرفين بـ z نجد:

$$f(z)=\frac{z}{(3-z)^2}=\sum_{1} \frac{n}{3^{n+1}} z^n \ ; \ |z|<3$$

2) لدينا:

$$\ln(a+z)=\ln\left[a\left(1+\frac{z}{a}\right)=\ln a+\ln\left(1+\frac{z}{a}\right)\right]$$

بمكاملة طرفي السلسلة الهندسية المتناوبة حداً حداً على طول $[0,z]$ الواقعة ضمن قرص الوحدة $|z|<1$ نجد:

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta}=\ln(1+z)=\int_0^z d\zeta-\int_0^z \zeta d\zeta+\ldots+(-1)^n\int_0^z \zeta^n d\zeta+\ldots$$

بالتالي:

$$\ln(1+z)=\sum_{0}\frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \ ; \ |z|<1$$

نستبدل z بـ $\frac{z}{a}$ نجد:

$$f(z)=\ln a+\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} z^{n+1} \ ; \ |z|<|a| \qquad (29)$$

طريقة إعادة النشر: إذا كانت سلسلة ماك لوران للتابع f معلومة وأردنا إيجاد السلسلة حول النقطة b يكفي أن نطرح ونضيف b أما اذا كانت السلسلة حول a معلومة وكان المطلوب الحصول على منشور التابع حول b نكتب:

$$(z-a)^n=\left[(z-b)+(b-a)\right]^n \qquad (30)$$

مثال (2): أوجد سلسلة تايلور للتابع $f=\dfrac{1}{(1-z)(z+4)}$ حول $z=2$.

الحل: نفرق في كسور بسيطة ونضع $z=(z-2)+2$ نجد:

$$f=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z+4}\right)=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{1-\left[(z-2)+2\right]}+\frac{1}{\left[(z-2)+2\right]+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{1+(z-2)}+\frac{1}{6}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{6}}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\sum_{o}(-1)^n(z-2)^n+\frac{1}{6}\sum\frac{(-1)^n}{6^n}(z-2)^n\right]$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{o}\left[(-1)^n+\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}\right](z-2)^n\ ;\ |z-2|<\min\{1,6\}=1$$

سلسلة سلاسل قوى وسلسلة تحصيل سلسلتي قوى:

لتكن السلسلة التابعية:

$$f=\sum_{1} f_n(z) \qquad (31)$$

المتقاربة بانتظام في كل ساحة جزئية مغلقة $\bar{D}_1$ واقعة ضمن ساحة التقارب D (في الحالة الخاصة يمكن أن تكون D_1 و D قرصان دائريان) ولنفرض أن $a\in D$ وإن سلسلة تايلور لكل من التوابع f_n حول a معلومة.

$$f_1=\sum_{o}c_1^{(1)}(z-a)^n,\ldots,f_k=\sum_{o}c_k^{(k)}(z-a)^k,\ldots,|z-a|<R$$

عندها يكون:

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\sum_{n=1}\frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(k)}$$

بالتالي سلسلة تايلور للتابع f حول a هي:

$$f=\sum_{k=o}c_k(z-a)^k=\sum_{o}\left(c_o^{(k)}+c_1^{(k)}+..+c_n^{(k)}+..\right)(z-a)^k=\sum_{k=o}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(k)}\right)(z-a)^k \qquad (32)$$

والسلسلة في (32) متقاربة في القرص $K:|z-a|<R$.

في الحالة الخاصة الهامة إذا كان $f=g[h(z)]$ وكان $\omega=h(z)$ تابع قابل للمفاضلة في القرص $K_1:|z-a|<R_1$ و $g(\omega)$ هوتابع قابل للمفاضلة في القرص $K_2:|\omega-b|<R_2$ حيث $h(a)=b$ ولنفرض أن:

$$h(z)=\sum_{0} a_n(z-a)^n ,\ g(\omega)=\sum_{0} b_n(\omega-b)^n$$

فإنه بوضع $f_n=b_n[h(z)-b]^n$ في السلسلة (31) نحصل على سلسلة تايلور للتابع f حول a:

$$f=\sum_{0} b_n[h(z)-b]^n=\sum_{0} c_k(z-a)^k\ ;\ |z-a|<R \tag{33}$$

وهنا نختار R بحيث عندما $|z-a|<R$ يكون:

$$|\omega-b|=|h(z)-b|<R_2\le R_1$$

لنلاحظ أنه قد نحتاج لتطبيق أكثر من طريقة واحدة للحصول على سلسلة تايلور.

مثال (3): أوجد سلسلة ماك لوران لكل من التوابع f التالية:

1) $\dfrac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$ 2) $f=e^z.\cos z$

3) $\operatorname{tg} z$ 4) $\dfrac{z}{e^z-1}$ 5) $z.\operatorname{ctg} z$

الحل:

1) نفرق في كسور بسيطة:

$$f=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{z^2+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\sum_{0} z^{2n}+\frac{1}{4}\sum_{0}\frac{(-1)^n}{4^n}z^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{0}\left(1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)z^{2n}\ ;\ |z|<\min\{1,\cancel{4}\}=1$$

2

2) من الواضح أنه يمكن استخدام سلسلتي ماك – لوران لـ $\cos z$ و e^z وإجراء عملية الجداء لكن من الأسهل رد الجداء إلى مجموع كما يلي:

$$e^z \cos z = e^z\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right]$$

بملاحظة أن $1+i=\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ و $1-i=\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}$

من منشور e^z نجد:

$$f = e^z\cos z=\sum_{o}\frac{2^{n/2}e^{in\pi/4}+2^{n/2}e^{-in\pi/4}}{2n!}z^n=\sum_{o}\frac{2^{n/2}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}\,.\,z^n\ ;\ R=+\infty$$

3) لـــدينا: $f=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{g}{h}$ وبالتـــالي $a_{2k}=0$ ، $a_{2k+1}=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ ، $b_{2k}=\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$، $b_{2k+1}=0$ ، ومن (20) نجد أن:

$$\operatorname{tg}z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\dots$$

4) لنضع $f=\dfrac{g}{h}$ حيث:

$$g(z)=0+1.z+0.z^2+\dots$$
$$h(z)=e^z-1=z+\frac{1}{2!}z^2+\dots$$
$$\Rightarrow a_o=0\ ,\ a_1=1\ ,\ a_2=a_3=\dots=a_n=\dots=0$$
$$b_o=0\ ,\ b_1=1\ ,\ b_2=\frac{1}{2!},\dots,\ b_n=\frac{1}{n!},\dots$$

نطبق العلاقة التدريجية نجد :

$$n=0\Rightarrow a_o=c_ob_o+c_ob_o\Rightarrow c_o=0$$
$$n=1\Rightarrow a_1=c_ob_1+c_1b_o+c_1b_1\Rightarrow c_1=1$$

وهكذا نجد أن $B_o=1$; $c_n=\dfrac{B_n}{n!}$ حيث B_n أعداد برنولي تحسب من:

$$\binom{n+1}{0}B_0+\binom{n+1}{1}B_1+\ldots+\binom{n+1}{n}B_n=0$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ;\ k=\overline{0,n}$$

والسلسلة المطلوبة تكون:

$$f=\frac{z}{e^z-1}=\sum_0\frac{B_n}{n!}z^n\ ;\ |z|<2\pi \tag{34}$$

5) بما أن

$$\operatorname{ctg}z=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=i+\frac{2i}{e^{2iz}-1}$$

فإنه باستبدال z بـ 2iz في السلسلة (34) نجد أن:

$$\operatorname{ctg}z=1+\sum_1\frac{(-1)^n2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}\ ;\ |z|<\pi \tag{35}$$

وبضرب الطرفين بـ z نجد السلسلة المنشودة.

تمارين محلولة – المجموعة الثانية

تمرين(1): أوجد الحدود:

1- الستة الأولى من سلسلة ماك لوران للتابع $f = e^{z.\sin z}$.

2- الثلاثة الأولى من سلسلة تايلور للتابع $f = \operatorname{ctg} z$ حول 1.

الحل:

-1 $$f = e^{z.\sin z} = e^{z^2 - \frac{z^4}{6} + \dots}$$

$$= 1 + \left(z^2 - \frac{z^4}{6} + \dots\right) + \frac{1}{2!}\left(z^2 - \frac{z^4}{6} + \dots\right)^2 + \dots = 1 + z^2 - \frac{z^4}{3} + \dots$$

-2 $$f(1) = \operatorname{ctg} 1,\ f'(1) = -\frac{1}{\sin^2 1}\ ;\ f''(1) = \frac{2\cos 1}{\sin^2 1} \Rightarrow$$

$$f(z) = \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} 1 - \frac{1}{\sin^2 1}(z-1) + \frac{\cos 1}{\sin^2 1}(z-1)^2 - \dots$$

تمرين(2): أوجد سلسلة:

a) تايلور لكل من التوابع f التالية حول النقطة a المبينة جانبها:

-1 $2z^2 + 3iz - 2;\ a = -i$ -2 $\sin(2z - z^2)\ ;\ a = 1$

b) ماك لوران لكل من التوابع f:

-1 $\dfrac{2z-5}{z^2 - 5z + 6}$ ، -2 $e^z.\sin z$ ، -3 $\ln\dfrac{a+z}{b+z}\ ;\ a \neq 0,\ b \neq 0$

محدداً قرص التقارب.

الحل: a)

-1 $$f = 2\left[(z+i) - i\right]^2 + 3i\left[(z+i) - i\right] - 2$$

$$= 2(z+i)^2 - i(z+i)\ ;\ z \in C\,(R = +\infty)$$

-2
$$f=\sin\left[1-(z-1)^2\right]$$
$$=\sin 1.\cos(z-1)^2-\cos 1.\sin(z-1)^2$$
$$=\sin 1.\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{4n}-\cos 1.\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{4n+2}$$
$$=\sum_{0}\frac{\sin\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)}{n!}(z-1)^{2n};\ \ R=+\infty$$

(b

-1
$$f=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$
$$=-\sum_{0}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$$

قرص التقارب هو تقاطع القرصين $|z|<2$ و $|z|<3$، أي $|z|<2$:

(2
$$f=e^z\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right]$$
$$=\frac{1}{2i}\sum_{0}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}z^n=?\ \ ;\ R=+\infty$$

3) بفرض أن ln هو فرع مثبت.

$$f=\ln\frac{a}{b}+\ln\left(1+\frac{z}{a}\right)-\ln\left(1+\frac{z}{b}\right)$$
$$=\ln\frac{a}{b}+\sum_{1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}\right)z^n\ ;\ |z|<\min\{|a|,|b|\}$$

تمرين(3): باستخدام سلسلة ماك لوران أثبت :

1) صحة علاقة نيوتن العامة:

$$(1+z)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}z^3+\ldots;|z|<1$$

$$\sin z . \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z \qquad (2$$

الحل:

1- باستخدام سلسلة ماك لوران للتابعين $e^{g(z)}$, $g(z) = \alpha \ln(1+z)$ نجد المطلوب.

$$\sin z . \cos z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \right) \qquad -2$$

$$= z - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \right) z^3 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{4!} \right) z^5 -$$

$$- \left(\frac{1}{7!} + \frac{1}{5!2!} + \frac{1}{3!4!} + \frac{1}{6!} \right) z^7 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2z) - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \frac{(2z)^7}{7!} + \ldots \right] = \frac{1}{2} \sin 2z$$

تمرين(4): بفرض أن R $(0 < R < +\infty)$ هو نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{o} c_n (z-a)^n$ فما هو نصف قطر التقارب لكل من السلاسل:

$$\sum_{n=1} c_n^k (z-a)^n \quad -2 \qquad ، \qquad \sum_{n=o} n^k c_n (z-a)^n \quad -1$$

$$\sum_{n=o} c_n^n (z-a)^{n^2} \qquad -3$$

الحل: من علاقة كوشي – آدامار مثلاً نجد أن:

$$R^{n} \; (3 \quad ، \quad R^k \; (2 \quad ، \quad R \; (1$$

تمرين (5): أوجد سلسلة ماك لوران لكل من التابعين التاليين دون استخدام مبرهنة تايلور.

$$\int_0^z \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta \quad (2 \qquad ، \qquad \frac{z}{(1+z)^3} \quad (1$$

الحل:

1- بمفاضلة طرفي المساواة:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...;|z|<1$$

حداً حداً مرتين متتاليتين نجد:

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=-1+2z-3z^2+4z^3$$

$$\frac{2(1+z)}{(1+z)^4}=\frac{2}{(1+z)^3}=2-3.2z+4.3z^2-5.4z^3+...$$

$$\Rightarrow f=\frac{z}{(1+z)^3}=z-\frac{3.2}{2}z^2+\frac{4.3}{2}z^3-\frac{5.4}{2}z^4+...,|z|<1$$

2- بمكاملة طرفي المساواة:

$$\frac{\sin\zeta}{\zeta}=1-\frac{\zeta^2}{3!}+\frac{\zeta^4}{5!}-\frac{\zeta^6}{7!}+...$$

حداً حداً على طول $\gamma:\widehat{oz}$ وليكن $\gamma=[0,z]$ نجد:

$$f=\int_o^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\sum_o \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}z^{2n+1};R=+\infty$$

تمرين(6): لنفرض أن f و g تابعان قابلان للمفاضلة حول a وأن:

$$g'(a)\neq 0\ \&\ f(a)=g(a)=0$$

أثبت صحة علاقة أوبيتال.

$$\lim_{z\to a}\frac{f}{g}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

الحل:

$$\frac{f}{g}=\frac{0+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+...}{0+g'(a)(z-a)+\frac{g''(a)}{2!}(z-a)^2+...}$$

بتقسيم البسط والمقام على $z-a$ ثم أخذ النهاية عندما $z \to a$ نجد المطلوب.

تمرين (7): أثبت أن:

1- السلسلة $e^{zt} = \sum_{0} \frac{t^n . g(t)}{n!} z^n$ تكون متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$ عندما يكون التابع $g(t)$ مستمراً على $[0,1]$.

2- $$f'(z) = \int_0^1 t.g(t) e^{zt} dt$$

حيث: $$f(t) = \int_0^1 g(t) e^{zt} dt$$

الحل:

1- يكفي تطبيق اختبار فايرشتراوس للتقارب المنتظم كون التابع e^{zt} قابل للمفاضلة لكل $z \in C$ بالنسبة لـ t.

2- بما أن السلسلة متقاربة بانتظام في $[0,1]$ لكل z مثبت من C فإننا نجد المطلوب بمفاضلة عبارة f التكاملية المفروضة وذلك باشتقاق ما تحت إشارة التكامل بالنسبة لـ t.
(انظر (4-9))

تمارين غير محلولة – المجموعة الثانية

تمرين (1) : a) أوجد مجموع السلسلة:

$$\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)z+\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)z^2+\cdots;|z|<1$$

b) أوجد نصف قطر التقارب R لكل من:

$$\sum_0 \left[-3+(-1)^n\right]z^n \ (1 \quad , \quad \sum_0 (\cos in)z^n \ (2$$

c) بفرض $R\,(0<R<+\infty)$ نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_0 c_n z^n$. ما هو نصف قطر تقارب كل من السلاسل:

$$\sum_1 n^{-n}\cdot c_n z^n \ (1 \quad ، \quad \sum_0 c_n z^{n+k} \ (2 \quad ، \quad \sum_0 c_n z^{n^2} \ (3$$

ثم بين أن نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_0 \operatorname{Re}(c_n)\cdot z^n$ أصغر من R.

تمرين (2) : أوجد سلسلة:

a) تايلور لكل من التوابع f الآتية حول النقطة a المبينة جانبه وحدد قرص التقارب.

$$\frac{1}{z};\, a=1 \ (1 \quad ، \quad \sin z, \frac{\pi}{2} \ (2 \quad ، \quad \frac{1+z}{1-z}, i \ (3$$

b) ماك لوران لكل من:

$$z^3\sin 3z \ (1 \quad , \quad e^{-z^2} \ (2 \quad , \quad 2\cos z - ie^z \ (3$$

$$\begin{cases}\dfrac{e^{\alpha z}-1}{z}; & z\neq 0\\ c\ ; & z=0\end{cases} \ (4 \quad , \quad \frac{z+i}{(1-z)^3} \ (5 \quad , \quad \ln\frac{1-z}{1+z} \ (6$$

$$\int_0^z \frac{\operatorname{sh}\zeta}{\zeta}d\zeta \ (7 \quad , \quad \int_0^3 e^{zt}\cdot g(t)\,dt \ (8$$

تمرين (3) : أوجد عدداً من الحدود الأولى في سلسلة ماك – لوران لكل من التوابع f التالية:

$e^z \cdot \text{ch}z$ (1 ، $\dfrac{e^z}{z+1}$ (2 ، $\text{th}z$ (3

$\dfrac{1}{\cos z}$ (4 ، $\int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ (5 ،

تمرين (4) : ليكن f تابع قابل للمفاضلة في جوار $z=0$ و $f=\sum_0 c_n z^n$. أثبت أن:

$f(az)=\sum_0 c_n a^n z^n$ (1 ، $f(z^2)=\sum_0 c_n z^{2n}$ (2

$f(z-z_o)=\sum_0 c_n (z-z_o)^n$ (3 ، $z^m \cdot f=\sum_0 c_n z^{n+m}$ (4

تمرين (5) : أثبت صحة التعميم التالي لمبرهنة أوبيتال.

ليكن g,f تابعان قابلان للمفاضلة في جوار z_o ولنفرض أن:

$$f(z_o)=g(z_o)=f'(z_o)=g'(z_o)=\cdots$$
$$=f^{(n-1)}(z_o)=g^{(n-1)}(z_o)=0\ ,\ g^{(n)}(z_o)\neq 0$$

عندئذ:

$$\lim_{z\to z_o}\frac{f}{g}=\frac{f^{(n)}(z_o)}{g^{(n)}(z_o)}$$

تمرين (6) : ليكن $f=\sum_0 \dfrac{n^3}{3^n} z^n$. احسب:

$f^{(6)}(0)$ (1 ، $\int_{|z|=1} \dfrac{f}{z^4} dz$ (2 ، $\int_{|z|=1} e^z \cdot f \cdot dz$ (3 ، $\int_{|z|=1} \dfrac{f \cdot \sin z}{z^2} dz$ (4

الفصل الرابع

التوابع النظامية (التحليلية الوحيدة القيمة)

The regular function (analytic unique value functions)

ندرس بالتفصيل أحد أهم أنواع التوابع المركبة والذي يشكل جوهر التحليل المركب.

في الحقيقة فقد تعرضنا بصورة غير مباشرة لهذا النوع في الفصول السابقة لاسيما عند دراستنا للتوابع الـ C – قابلة للمفاضلة ولسلاسل القوى.

(1-4) مفهوم التابع النظامي:

تعريف (1) : ليكن $f(z)$ تابع مركب وحيد القيمة. يقال إن f **نظامي في النقطة** $a\,(a \neq \infty)$ إذا كان يتمثل على شكل سلسلة قوى متقاربة حول a:

$$f(z)=\sum_{0} c_n (z-a)^n \quad ; \quad z\in K:|z-a|<R\ ,\ R>0 \qquad (1)$$

يقال إن التابع f **نظامي في الساحة** D إذا كان نظامياً في كل نقطة $z \in D$ والنقطة الشاذة للتابع f هي كل نقطة لا يكون نظامياً فيها.

يقال ان f **نظامي في نقطة اللانهاية** إذا كان يتمثل على شكل سلسلة تابعية متقاربة حول ∞:

$$f(z)=\sum_{0} c_n \frac{1}{z^n} \quad ; \quad z\in K:\ |z|>R \qquad (2)$$

واضح من (2) إن التابع f يكون نظامياً في نقطة اللانهاية $z=\infty$ إذاً وفقط إذا كان التابع $g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ نظامي في النقطة $\zeta=0$ $g(\zeta)=\sum_{0}^{\infty} c_n \zeta^n \ ;\ |\zeta|<\frac{1}{R}$

مثال(1): أثبت أن التابع $f=\dfrac{1}{1+z^2}$ نظامي في النقطة $z=0$ وما هي ساحة النظامية؟

وإن التابع $f=\dfrac{z}{z-1}$ نظامي في النقطة $z=\infty$ وما هي ساحة نظاميته؟

الحل:

بما أن $|z|<1$; $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum(-1)^n z^{2n}$ فإن التابع نظامي في النقطة $z=0$ ولأي نقطة a و $D=C\setminus\{\pm i\}$ نستطيع بطريقة إعادة النشر أن نكتب:

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum(-1)^n\left[(z-a)+a\right]^{2n}\ ;\ |z-a|<R$$

$$=\sum_{o}c_n(z-a)^{2n}\ ;\ c_k=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^k(z-a)^{2n-k}$$

والتابع نظامي في كل الساحة D.

بالنسبة للتابع $f=\frac{z}{z-1}$ فإنه بوضع $z=\frac{1}{\zeta}$ نجد أن:

$$g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{1-\zeta}=\sum_{o}\zeta^n\ ;\ |\zeta|<1$$

مما يعني أن $g(\zeta)$ نظامي في $\zeta=0$ وبالتالي التابع $\frac{z}{z-1}$ نظامي في نقطة اللانهاية وساحة النظامية للتابع هي $D=C\setminus\{1\}$. $R=|z|>\frac{1}{1}=1$

تعريف (2): يقال إن التابع f صحيح إذا كان وحيد القيمة ونظامي في كل المستوى المركب C كالتوابع $P_n(z),\cos z,\sin z,e^z$.

بسهولة نجد أن مجموع أو طرح أو جداء أو قسمة أو تحصيل تابعين نظاميين في نقطة (أو ساحة) هو تابع نظامي في تلك النقطة (أو الساحة) ونستثني جذور المقام في حالة القسمة وعندما تكون ساحة النظامية لأحد التوابع مختلفة عن ساحة النظامية للتابع الآخر نأخذ تقاطع الساحتين في حالتي الجمع والطرح.

على سبيل المثال $f=\sin z+\frac{1}{z-i}$ نظامي في الساحة $C\setminus\{i\}$ والتابع $f=\frac{\operatorname{cth} z}{z^2+9}$ نظامي في الساحة $C\setminus\{\pi ki,\pm 3i,k\in Z\}$.

غير نظامي في أي نقطة من C $f = \bar{z}$
والبرهان ذلك يجب البرهان على أنه غير قابل للمفاضلة
مع العلم أنه قابل للمفاضلة في النقطة الوحيدة $z=0$
و لكنه غير قابل للمفاضلة في الجوار الموضوع $0<|z|<R$

مبرهنة (1): إذا كان التابع f نظامياً في النقطة a$(a \neq \infty)$ فإنه يكون نظامياً في جوار ما للنقطة a.

لم يذكر

الإثبات: بما أن التابع f نظامي في a فإنه يكتب بالشكل (1) وبمفاضلة الطرفين حداً حداً للسلسلة المتقاربة بانتظام (1) نجد $z \in K$; $f' = \sum_{1} nc_n (z-a)^n$ هذا يعني أن f' موجود في القرص K (جوار a) ومن أجل كل نقطة $b \in K$ نستطيع بإعادة النشر الحصول على سلسلة قوى متقاربة حول b للتابع f مما يعني أن التابع f نظامي في جوار a.

ينتج:

1) وجود المشتق الأول $f'(z)$ كاف لوجود جميع المشتقات $f^{(n)}(z)$ كما أن مشتق تابع نظامي في نقطة (في ساحة) هو تابع نظامي في تلك النقطة (الساحة). "وهذا الكلام غير صحيح "R

2) المجموعة التي يكون فيها التابع f نظامياً في حال وجودها هي مجموعة مفتوحة بل ساحة. والتابع القابل للمفاضلة في نقطة **فقط** هو تابع غير نظامي في تلك النقطة كالتابع $f = \bar{z}^2$ القابل للمفاضلة في النقطة $z = 0$ فقط فهوبالتالي ليس نظامياً في تلك النقطة.

(3) f قابل للمفاضلة في a وحولها $\Rightarrow$ f نظامي في النقطة a

f غير نظامي في a $\Rightarrow$ f قابل للمفاضلة في a فقط.

(2-4) : مسألة كوشي المركبة ذات القيم الابتدائية:

لم تعطى

نص المسألة: يُطلب إيجاد الحل للمعادلة التفاضليةذات القيم الابتدائية:

$$f''(z)+p(z)f'(z)+q(z)f(z)=0 \qquad (4)$$

$$f(z)=c_0 \ , \ f'(a)=c_1 \qquad (5)$$

حيث c_0 و c_1 ثابتان مركبان.

يبرهن على أنه إذا كانت الأمثال p(z) و q(z) نظامية في جوار ما للنقطة a وليكن $K : |z-a| < r$ فإن الحل f(z) للمسألة (4)-(5) يكون موجوداً ونظامياً في القرص K.

أكثر من هذا تصح مبرهنة الوجود والوحدانية التالية لمسألة كوشي ذات القيم الابتدائية.

لتكن المعادلة:

$$f^{(n)}(z)+p_1(z)f^{(n-1)}(z)+p_2(z)f^{(n-2)}(z)+...+p_n(z)f(z)=0 \qquad (6)$$

والشروط الابتدائية:

$$f(a)=c_o\ ,\ f'(a)=c_1,...,f^{(n-1)}(a)=c_{n-1} \qquad (7)$$

ولنفرض أن $p_k(z)\ ;\ k=\overline{1,n}$ توابع نظامية في الساحة الوحيدة الاتصال D و $a \in D$. عندئذ الحل للمسألة (6)– (7) موجود ووحيد ونظامي في الساحة D.

نبحث عن الحل f(z) للمسألة (4)–(5) على شكل سلسلة قوى:

$$f(z)=\sum_o c_n(z-a)^n \quad ; \quad z\in K:|z-a|<r \qquad (8)$$

ويتم المطلوب إذا استطعنا إيجاد الأمثال c_n.

نقوم بحساب $f'(z)$ و $f''(z)$:

$$\left.\begin{aligned} f'(z)&=\sum_1 nc_n(z-a)^{n-1}=\sum_o(n+1)c_{n+1}(z-a)^n \\ f''(z)&=\sum_2 n(n-1)c_n(z-a)^{n-2}=\sum_o(n+2)(n+1)c_{n+2}(z-a)^n \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

وننشر p(z) و q(z) في سلسلة تايلور حول a.

$$p(z)=\sum_o a_n(z-a)^n\ ,\ q(z)=\sum_o b_n(z-a)^n \qquad (10)$$

هنا الأمثال a_n و b_n معلومة.

بتعويض (8) و (9) و (10) في المعادلة (6) والمطابقة نحصل على علاقة تدريجية تعطي $c_n,c_{n+1},...$ بدلالة a_n و b_n وباستخدام الشروط (7) نحصل بالتدريج على جميع الأمثال c_n.

مثال (1): حل المعادلة التفاضلية المركبة التالية: $f''(z)-zf(z)=0$

الحل:

بما أن $q=-z, P\equiv 0$ تابعان نظاميان في كل C (صحيحان) فإن كل حل للمعادلة هو تابع صحيح والعلاقة التدريجية تأخذ الشكل:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}=c_{n-1}\ ,\ n=1,2,...$$

في الحالة الخاصة $c_2=0$ لماذا؟، بالتالي:

$$c_5=c_8=...=c_{2+3k}=...=0$$

أيضاً نجد أن:

$$c_{3n}=\frac{c_o}{(2.3).(5.6)...[(3n-1).3n]}$$

$$c_{3n+1}=\frac{c_1}{(3.4).(6.7)...[3n(3n+1)]}$$

لنفترض أن f_1 الحل الذي يحقق الشرطين الابتدائيين: $f_1(o)=1$ و $f_1'(o)=0$ وإن f_2 الحل الذي يحقق $f_2(o)=0$ و $f_2'(0)=1$ عندئذ يكون:

$$f_1(z)=1+\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^6}{(2.3)(5.6)}+...+\frac{z^{3n}}{(2.3)(5.6)...[(3n-1).3n]}+...$$

$$f_2(z)=z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{(3.4)(6.7)}+...+\frac{z^{3n+1}}{(3.4)(6.7)...[3n(3n+1)]}+...$$

كل حل للمعادلة المفروضة هو تركيب خطي للحلين f_1 و f_2، وفي الحالة الخاصة يسمى الحل:

$$f(z)=Ai(z)=\frac{f_1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}-\frac{f_2}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$ تابع أولر

مثال (2): حل المسألة التالية:

$$f''(z)+4f(z)=0\ ;\ f(o)=1\ ,\ f'(o)=1$$

الحل:

بتطبيق خوارزمية بناء الحل أعلاه نجد:

$$f(z)=1+z-\frac{2^2}{2!}z^2-\frac{2^2}{3!}z^3+\frac{2^4}{4!}z^4-...$$

$$=\left[1-\frac{(2z)^2}{2!}=\frac{(2z)^4}{4!}-...\right]+\frac{1}{2}\left[\left(2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}\right)...\right]$$

$$=\cos 2z+\frac{1}{2}\sin 2z$$

لاحظ أن الحل هو تابع صحيح.

معادلات تفاضلية خاصة:

نذكر فيما يلي بعض المعادلات التفاضلية الخاصة ذات التطبيقات الواسعة:

1) معادلة لوجاندر: $(1-z^2)f''-2zf'+n(n+1)f=0$

2) معالجة شيبشيف: $(1-z^2)f''-zf'+n^2f=0$

3) معادلة اليعقوبي:

$$(1-z^2)f''+\{\mu-\lambda-(\mu+\lambda+2)z\}f'+n(\mu+\lambda+n+1)f=0$$

4) معادلة غاوص فوق الهندسية: $z(z-1)f''+[-\gamma+(1+\alpha+\beta)z]f'+\alpha\beta f=0$

5) معادلة شيبشيف – لاكير: $zf''+(\lambda-1-z)f'+nf=0$

6) معادلة بيسل الأسطوانية بالوسيط t: $t^2f''+tf'+(t^2-\lambda^2)f=0$

نشير إلى أن كل حل من حلول أي معادلة هو تابع خاص يحمل نفس اسم الرياضي (انظر 5-6) لكن الدراسة النظرية المفصلة خارج نطاق الكتاب، وللتذكير فإن هذه الدراسة تتم في اتجاهين متعاكسين.

1) الأول يتلخص في البحث عن حل معادلة تفاضلية مفروضة، وهذا يدرس في نظرية المعادلات التفاضلية.

2) الثاني يتلخص في دراسة التوابع الخاصة وتشكيل المعادلة التفاضلية التي يكون ذلك التابع حلاً لها وهذا يدرس في مقرر منفصل تحت عنوان التوابع الخاصة المركبة.

(4-3) التوابع التوافقية:

نبحث في هذا البند خواص القسم الحقيقي $u = \operatorname{Re} f$ والتخيلي $v = \operatorname{Im} f$ لتابع نظامي $f = u + iv$ والعلاقة بين التوابع الثلاث u و v و f.

(4-3-1) التوابع التوافقية ديكارتياً:

تعريف (1): لتكن D ساحة وحيدة الاتصال و $g(x,y)$ تابع حقيقي بمتحولين حقيقيين x و y معرف في D. يقال إن g هو **تابع توافقي (انسجامي)** في النقطة z (أو في الساحة D) إذا كان g يملك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية ضمناً في z (D) وتحققت معادلة لابلاس:

$$g_{xx} + g_{yy} = 0 \qquad (1)$$

"دائري"

مبرهنة (1): إذا كان التابع $f = u + iv$ نظامي في الساحة الوحيدة الاتصال D فإن كل من u و v هو تابع توافقي في D.

الإثبات: بما أن التابع f نظامي في D فإن f' موجود ومحدود في كل نقطة من D ويتحقق شرطا كوشي – ريمان. بمفاضلة الشرط الأول $u_x = v_y$ بالنسبة لـ x ومفاضلة الشرط الثاني $u_y = -v_x$ بالنسبة لـ y نجد أن: $u_{xx} = v_{yx}$ و $u_{yy} = -v_{xy}$ وبملاحظة أن هذه المشتقات مستمرة في D فإن $v_{yx} = v_{xy}$ ومنه : $u_{xx} + u_{yy} = 0$ في D وبالتالي التابع u توافقي في الساحة D.

بنفس الأسلوب نجد أن التابع v توافقي في D.

تعريف (2): لتكن D ساحة وحيدة الاتصال ولنفرض أن التابعين الحقيقيين $u(x,y)$ و $v(x,y)$ توافقيان ويحققان شرطي كوشي – ريمان في D.

عندئذ نقول إن u و v **مترافقان توافقياً** في D.

ينتج مباشرة: يكون التابع $f = u + iv$ نظامياً في الساحة D إذا وفقط إذا كان u و v مترافقان توافقياً في D.

نتساءل الآن كيف نبني التابع النظامي $f = u + iv$ بمعرفة قسمه الحقيقي u أو قسمه التخيلي v؟ بتعبير آخر كيف نوجد المرافق التوافقي لتابع توافقي مفروض؟

في الواقع لدينا أكثر من طريقة واحدة للإجابة عن هذا التساؤل.

الطريقة الأولى (استخدام شرطي كوشي – ريمان): اذا ما وجد

مثال (1): شكل التابع النظامي $f = u + iv$ إذا علمت أن:

$$u = y^3 - 3x^2y \,,\; f(0) = i$$

الحل:

إن التابع النظامي f موجود في كل المستوى C لأن التابع المفروض u يملك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية ويحقق معادلة لابلاس في C. ولإيجاده يكفي إيجاد المرافق التوافقي v. من شرطي كوشي – ريمان نجد:

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = -6xy \Rightarrow v = -3xy^2 - g(x)$$
$$u_y = -v_x \Rightarrow -3x^2 + 3y^2 = 3y^2 + g'(x) \Rightarrow g(x) = x^3 + c$$

ومنه نجد أن: نستبدل $x \leftrightarrow z$ ، $y \leftrightarrow 0$ دوماً

$$v = -3xy^2 + x^3 + c$$
$$f = u + iv = y^3 - 3x^2y + i\left(-3xy^2 + x^3 + c\right) = i\left(z^3 + c\right)$$

ومن الشرط الإضافي $f(o) = i$ نحدد الثابت الكيفي الحقيقي c.

$$i = i\left(0^3 + c\right) \Rightarrow c = 1 \,,\; f(z) = i\left(z^3 + 1\right)$$

الطريقة الثانية (علاقة مللين – تومسون): غير مطلوبة

إذا كان: $u = \mathrm{Re}f$ تابع توافقي مفروض في الساحة الوحيدة الاتصال D فإن:

$$f(z) = \int_{\gamma} \left[u_x(z,0) - i\,u_y(z,0)\right] dz + c \qquad (2)$$

وإذا كان $v = \operatorname{Im} f$ تابع توافقي مفروض في الساحة الوحيدة الاتصال D فإن:

$$f(z) = \int_{\gamma} \left[v_y(z,0) + i v_x(z,0) \right] dz + c \qquad (3)$$

حيث γ منحني بدايته نقطة مثبتة z_0 ونهايته z ويقع في D و c ثابت مركب كيفي.

البرهان:

نكتفي بإثبات صحة العلاقة (2). بما أن التابع $f = u + iv$ نظامي في D فإن: $f'(z) = u_x - i u_y$. لنضع $u_x = g_1$ و $u_y = g_2$ نجد:

$$f' = g_1\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - i g_2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

وكحالة خاصة من أجل $z = \bar{z}$ يكون $f' = g_1(z,0) - i g_2(z,0)$.

وبمكاملة الطرفين على طول المنحني $\gamma : \widehat{z_0 z} \subset D$ نجد العلاقة (2).

لنلاحظ أنه يمكن الحصول على التابع f في الطريقتين بوضع $x = z$ ، $y = 0$.

مثال (2): شكل التابع النظامي $f = u + iv$ إذا علمت أن $v = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

الحل: التابع النظامي f موجود في كل C (لماذا؟) ولدينا:

$$v_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad v_y = -12x^2y + 4y^3$$

بالتالي:

$$f' = v_y(z,0) + i v_x(z,0) = 0 + 4iz^3 \Rightarrow$$
$$f(z) = iz^4 + c$$

غير مطلوبة

الطريقة الثالثة: إذا كان u تابعاً توافقياً مفروضاً في الساحة الوحيدة الاتصال D فإن مرافقه التوافقي v في D يعطى بالعلاقة:

$$v = \int_{\gamma} -u_y dx + u_x dy + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

البرهان:

بما أن u توافقي في D فإنه يحقق معادلة لابلاس ومنها نجد أن: $\frac{\partial}{\partial y}(-u_y) = \frac{\partial}{\partial x}(u_x)$ وهذا يعني أن العبارة $-u_y dx = u_x dy$ هي تفاضل تام لتابع

وحيد القيمة v يعطى بالعلاقة (4) وبسهولة من هذه العلاقة نتأكد من أن التابع v يحقق شرطي كوشي – ريمان في D أي أن v هو مرافق توافقي للتابع u في الساحة D.

اترك استنتاج عبارة مشابهة للتابع u إذا كان التابع التوافقي v معطى.

لنلاحظ أن وجود الثابت الكيفي c يشير إلى أن المرافق التوافقي وبالتالي التابع النظامي f ليس وحيداً ويصبح وحيد التعيين بإعطاء شرط إضافي $f(z_0)=\omega_0$ ومن جانب آخر إذا لم تكن الساحة D وحيد الاتصال فإن المرافق التوافقي والتابع النظامي الموافق قد لايكون وحيد القيمة في D.

منحنيات السوية هي أسرتا المنحنيات: الأولى $u=\text{const}=c_1$ والثانية $v=\text{const}=c_2$.

إن الأسرة الأولى تتقاطع مع الثانية في كل نقطة بزاوية قائمة لأنه من شرطي كوشي – ريمان وعند حساب الجداء السلمي للتدرج يكون هذا التدرج مساوياً للصفر.

مثال (3): أثبت أن التابع $u=\ln|z|^2$ توافقي في الساحة $D=C\setminus\{0\}$ ثم أوجد مرافقه التوافقي v، وماهي منحنيات السوية؟

الحل: بحساب u_{yy}, u_y, u_{xx}, u_x نجد أن التابع u يحقق معادلة لابلاس في D فهو توافقي حيث $|z|^2=x^2+y^2$.

لإيجاد المرافق التوافقي v نستخدم شرطي كوشي – ريمان:

$$v_y=u_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow v=\int\frac{2x}{x^2+y^2}dy=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+g(x)$$

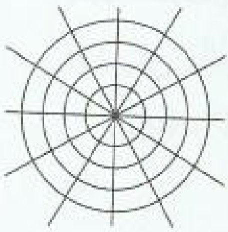
$$v_x=\frac{2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)+g'(x)=\frac{-2y}{x^2+y^2}+g'(x)$$

ولكن لدينا: $v_x=-u_y=\dfrac{-2y}{x^2+y^2}$. أصبح لدينا: $v=2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+c;\ g(x)=c$

الأسرة الأولى لمنحنيات السوية هي:

$$u=\ln\left(x^2+y^2\right)=c_1 \Rightarrow x^2+y^2=e^{c_1}$$

ولدينا أسرة الدوائر التي مركزها المبدأ وأنصاف أقطارها $\sqrt{e^{c_1}}$.



الشكل (1)

والأسرة الثانية هي:

$$v=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=c_2 \Rightarrow y=x.\operatorname{tg}\frac{c_2}{2}$$

ولدينا مستقيمات ميلها $\frac{c_2}{2}$ بدون نقطة المبدأ (الشكل 1).

(2-3-4) التوابع التوافقية قطبياً :

ليكن $f=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi), z=re^{i\varphi}$ ولنبرهن أن معادلة لابلاس قطبياً هي:

$$r^2u_{rr}+ru_r+u_{\varphi\varphi}=0 \tag{5}$$

«احفظي»

من أجل ذلك نستخدم شرطي كوشي – ريمان قطبياً.

بمفاضلة الشرط الأول بالنسبة لـ r والثاني بالنسبة لـ φ نجد:

$$ru_{rr}+u_r=v_{\varphi r}\ ,\ -rv_{r\varphi}=u_{r\varphi}$$

ولكن $v_{r\varphi}=v_{\varphi r}$ كون التوابع مستمرة بالتالي $ru_{rr}+u_r=-\frac{1}{r}u_{\varphi\varphi}$ والعلاقة (5) صحيحة.

بنفس أسلوب العرض في الفقرة (4-3-1) نجد أنه إذا كان $g(r,\varphi)$ تابعاً توافقياً في الساحة D فإنه يوجد تابع نظامي f(z) بحيث يكون g قسماً حقيقياً أو تخيلياً له.

أترك التفاصيل تدريباً.

التتمة6:

بهدف التأسيس الرياضي الدقيق نقدم المراجعة التالية:

انطلاقاً من معرفة القسم الحقيقي u أوالتخيلي v نستطيع ايجاد التابع النظامي في بعض الحالات بطرق أسرع من طريقة استخدام شرطي كوشي – ريمان.

I) ليكن $f = u + iv$ تابع نظامي في الساحة D ولنفرض أن المجال الحقيقي $(\alpha,\beta) \subset D$ عندئذ في نقاط المجال لدينا:

$$f(x) = u(x,o) + iv(x,o) \;;\; x \in (\alpha,\beta) \tag{6}$$

إذا بدلنا x بـ z في (6) شكلياً ولاحظنا أن f مستمر في D نحصل على التابع:

$$f(z) = u(z,o) + iv(z,o) \tag{7}$$

الذي يطابق التابع f المفروض في جوار (α,β) ومن مبرهنة الوحدانية في التوابع النظامية (انظر(4– 8)) نجد أن الطرف الايمن من7 يتطابق مع قيم f المعطى في كل الساحة D .

على سبيل المثال: اذا كان : $u = x^3 - 2x^2 - 3xy^2 + 2xy^2 + 2y^2 + 1$ فإن: $\Delta u = 0 \,;\, z \in C$ حيث Δ مؤثر لابلاس $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

وعلى $ox \equiv \mathbb{R}$ لدينا: $v_x(x,o) = -u_y(x,o) = 0$ بالتالي: $v(x,o) = c$ ثابت حقيقي كيفي.

الآن نشكل: $f(x) = u(x,o) + iv(x,o) = x^3 - 2x^2 + 1 + ic$ ونضع z عوضاً عن x نجد: $f(z) = z^3 - 2z^2 + 1 + ic$.

كمثال آخر: إذا كان $v = e^x \sin y$ فإن $\Delta v = 0$ لكل $z \ni C$.

وعلى $\mathbb{R}$ لدينا:

$$u_x(x,o) = v_y(x,o) = e^x \Rightarrow u(x,o) = e^x + c \Rightarrow f(x) = e^x + c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(z) = e^z + c$$

II) ليكن $f = u + iv$ تابع نظامي في الساحة D المتناظرة بالنسبة للمحور $ox \equiv \mathbb{R}$ ولنفرض أن:

$$f(\overline{z})=\overline{f(z)} \tag{8}$$

إن (8) تكافئ:

$$u(x,y)=u(x,-y),\ v(x,y)=-v(x,-y) \tag{9}$$

ومن (8) نجد:

$$2u(x,y)=f(z)+f(\overline{z}) \tag{10}$$

$$2iv(x,y)=f(z)-f(\overline{z}) \tag{11}$$

ومن هنا نحصل على القاعدة التالية:

إذا كان التابع التوافقي المفروض $u=\operatorname{Re} f$ يحقق (9) فإننا نوجد f (بدقة ثابت تخيلي كيفي بحت) بطريقة عزل z عن $\overline{z}$ في العبارة: $2u(x,y)=2u\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$

أي بطريقة الحصول على (10).

وإذا كان التابع التوافقي المفروض $v=\operatorname{Im} f$ يحقق (9) فإن f يتعين (بدقة ثابت حقيقي كيفي بحت) بطريقة الحصول على (11).

الحالة إذا كان f يحقق الشرط:

$$f(\overline{z})=-\overline{f(z)} \tag{8*}$$

بدلاً من (8) فإن المسألة تؤول إلى استبدال f بـ if.

مشكوك

على سبيل المثال: إذا كان $u=e^{x}\cos y, f(o)=1$ فإن:

$$2u(x,y)=2e^{\frac{z+\overline{z}}{2}}\cos\frac{z-\overline{z}}{2i}=e^{\frac{z-\overline{z}}{2}}\left[e^{\frac{z-\overline{z}}{2}}+e^{\frac{z-\overline{z}}{2}}\right]=e^{z}+e^{\overline{z}}+i\alpha-i\alpha$$

ومنه: $f=e^{z}$.

كمثال آخر: إذا كان $f(1)=2$ ، $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$ فإن:

$$2iv(x,y)=\frac{-2iy}{x^2+y^2}=-\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}+\alpha-\alpha$$

ومنه $f(z)=\frac{1}{z}+\alpha$، وحسب الشرط $f(1)=2$ نجد $\alpha=2-1=1$، وعليه $f=\frac{1}{z}+1$.

إذا كان الشكل غير منغلق فلمكاملات نستخدم التعريف
أما إذا كان مغلق فهناك نظريات بجانب التعريف تساعدنا في حساب التكامل

(4-4) مبرهنة كوشي التكاملية الأساسية ونتائجها:

كنا في (2-5) تساءلنا متى تكون قيمة التكامل $\int_\gamma f\,dz = 0$ صفراً لكل منحنى مغلق γ ومتى لاتتعلق قيمة التكامل بالمنحني التكاملي $\widehat{z_1 z_2}$ الواصل بين z_1 و z_2؟

تجيب المبرهنة الهامة التالية بأشكالها المتنوعة عن السؤال الأول.

مبرهنة (1):

1) ليكن $f = u + iv$ تابع نظامي في الساحة الوحيدة الاتصال D عندئذ:

I) لأي منحنى مغلق يقع في D يكون (الشكلين 2,1)

$$\int_\gamma f\,dz = 0 \tag{1}$$

II) عندما تكون الساحة D محدودة والتابع f مستمراً حتى حدودها المغلقة Γ فإن:

$$\int_\Gamma f\,dz = 0 \tag{2}$$

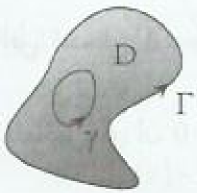
2) ليكن f تابع نظامي في الساحة ذات n+1 اتصال D عندئذ:

I) لأي منحنى مغلق γ يقع مع داخليته ضمن D تكون العلاقة (1) صحيحة. (الشكل 3).

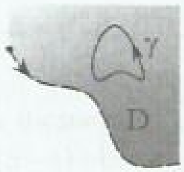
II) عندما تكون الساحة D محدودة و f مستمراً حتى حدودها $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ فإن العلاقة (2) تكون صحيحة، حيث يوجه Γ بحيث تبقى نقاط الساحة D على جهة اليسار أي أن:

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1^-} + \ldots + \int_{\Gamma_n^-} = 0 \tag{3}$$

هنا Γ_0 يحتوي Γ_k و Γ_k غير متقاطعة مثنى مثنى لكل k وجميع Γ_k مغلقة لكل k (الشكل 4).

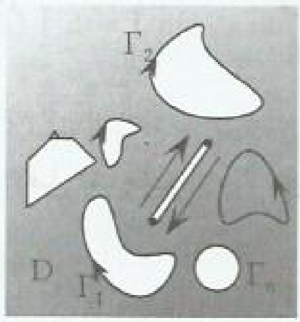


الشكل (1)



الشكل (2)

الشكل (3)



الشكل (4)

الإثبات:

1) بداية نثبت صحة العلاقة (1) ضمن الشرط الإضافي الذي يسمح لنا بتطبيق مبرهنة غرين وهو أن تابع المشتق f' مستمر في D. لدينا:

$$I = \int_\gamma f\,dz = I_1 + iI_2 \;;\; I_1 = \int_\gamma u\,dx - v\,dy \;;\; I_2 = \int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

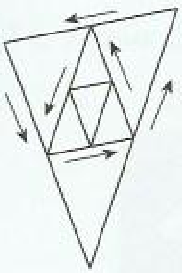
بما أن التابع f' مستمر في D فإن v_y, v_x, u_y, u_x توابع مستمرة في D ويتحقق شرطا كوشي – ريمان ونستطيع تطبيق مبرهنة غرين.

بوضع $P = u$ و $Q = -v$ في تلك المبرهنة وملاحظة أن $u_y = -v_x$ نجد أن $I_1 = 0$ وبالمثل بأخذ $P = v$ و $Q = u$ وملاحظة أن $u_y = v_x$ نجد أن $I_2 = 0$ ومنه تكون العلاقة (1) صحيحة.

إذا لم نشترط استمرار التابع f' فإننا لانستطيع تطبيق مبرهنة غرين ومن أجل تبسيط البرهان نقوم به على مراحل:

المرحلة الأولى: المنحنى $\gamma = \Delta$ مثلث. لتكن $\gamma = \Delta$ مثلث يقع مع داخليته ضمن D

ولنفرض العكس، أي أن $\int\limits_{\gamma} f\,dz \neq 0$ عندئذ $\left|\int\limits_{\gamma} f\,dz\right| = \alpha > 0$.



الشكل (5)

نوصل منتصفات أضلاع Δ بقطع مستقيمة نحصل على أربعة مثلثات $\Delta^{(k)}\ ;\ k = \overline{1,4}$ تحقق (الشكل 5).

$$\int\limits_{\Delta} = \sum_{1}^{4} \int\limits_{\gamma^{(k)}}$$

ومن بينها يوجد مثلث واحد على الأقل Δ_1 يحقق $\left|\int\limits_{\Delta_1}\right| \geq \frac{\alpha}{4}$ لأنه في حال العكس نجد أن:

$$\alpha = \left|\int\limits_{\Delta}\right| = \left|\sum_{1}^{4} \int\limits_{\Delta^{(k)}}\right| < \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \alpha$$

أي أن $\alpha < \alpha$ وهذا غير ممكن.

الآن نقسم Δ_1 إلى أربعة مثلثات بنفس الأسلوب نجد مثلث واحد على الأقل Δ_2 يحقق $\left|\int\limits_{\Delta_2}\right| \geq \frac{\alpha}{4^2}$ وبمتابعة العملية عدداً لانهائياً من المرات نحصل على متتالية مثلثات $\{\Delta_n\}$ تحقق $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ و $\left|\Delta_n\right| \geq \frac{\alpha}{4^n}$ لكل $n = 1,2,...$ وبذلك حصلنا على تقدير من الأسفل للتكامل $I_n = \left|\int\limits_{\Delta_n}\right|$.

نوجد تقدير من الأعلى لـ J_n. نفرض أن p طول محيط المثلث $\gamma = \Delta$ فيكون $\frac{p}{2^n}$ طول Δ_n وبما أن $\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ و $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ لكل n فإن المتتالية $\{\Delta_n\}$ متداخلة وتوجد نقطة واحدة على الأقل a تنتمي لجميع المثلثات $\overline{\Delta}_n$.

بما أن التابع f نظامي في D وبالتالي أيضاً في النقطة a فإنه قابل للمفاضلة في جوار a وبمكاملة طرفي العلاقة:

$$\Delta f = f(z) - f(a) = f'(a)(z-a) + o(z-a)$$

نجد:

$$\int_{\Delta_n} f dz = f(a)\int_{\Delta_n} dz + f'(a)\int_{\Delta_n} z dz - af'(a)\int_{\Delta_n} dz + \int_{\Delta_n} o(z-a) dz$$

لكن: $\int_{\Delta_n} dz = \int_{\Delta_n} z dz = 0$ لماذا؟

بالتالي:

$$\int_{\Delta_n} f dz = \int_{\Delta_n} o(z-a) dz$$

ومن تعريف التقدير $o(z-a)$ لدينا:

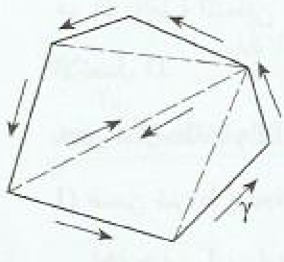
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ ;\ |z-a| < \delta \Rightarrow |o(z-a)| < \varepsilon . |z-a|$$

عندما n كبيرة يقع Δ_n ضمن القرص $K : |z-a| < \delta$ وعندئذ:

$$I_n = \left| \int_{\Delta_n} \right| < \varepsilon \int_{\Delta_n} |z-a||dz| < \varepsilon . P_n \int_{\Delta_n} |dz| = \varepsilon . P_n^2 = \varepsilon \frac{P^2}{4^n}$$

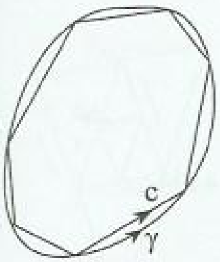
مما سبق نستنتج أن $\frac{\alpha}{4^n} \le I_n < \varepsilon \frac{P^2}{4^n}$ أو $\alpha < \varepsilon . P^2$ أي أن $\alpha = 0$ وهذا تناقض لأن $\alpha > 0$.

المرحلة الثانية: $c = \gamma$ مضلع مغلق. إذا كان المضلع C محدباً نقسمه إلى عدد منته من المثلثات (الشكل 6)، وإذا لم يكن محدباً نقسمه إلى عدد منته من المضلعات المحدبة، وبالتالي إلى عدد منته من المثلثات وفي الحالتين عدنا إلى المرحلة الأولى.



الشكل (6)

المرحلة الثالثة : γ مغلق. تستبدل المنحنى γ بمضلع مغلق C قريب منه (الشكل 7)



الشكل (7)

وعندئذ: $\left|\int_C - \int_\gamma\right| < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$ ولكن بما أن $\int_C = 0$ فإن:

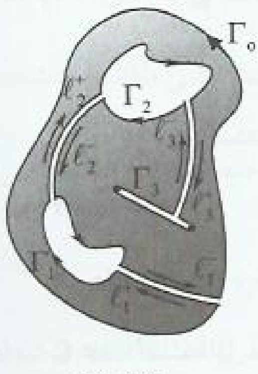
$\left|\int_\gamma\right| < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$ وهذا يعني أن $\int_\gamma = 0$.

لنبرهن صحة العلاقة (2) عندما تكون الساحة D متعددة الاتصال.

نرد الساحة D إلى ساحة وحيدة الاتصال $\tilde{D}$ بوصل Γ_0 مع Γ_1 بالقطع $\ell_1^\pm$ ووصل Γ_1 مع Γ_2 بالقطع $\ell_2^\pm$ ووصل Γ_{n-1} بـ Γ_n بالقطع $\ell_n^\pm$ عندئذ حدود $\tilde{D}$ تكون $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \ell_1^\pm \cup \ldots \cup \ell_n^\pm$ (الشكل 8) وحسب المبرهن يكون $\int_{\tilde{\Gamma}} f\,dz = 0$ وإذا لاحظنا أن $\int_{\ell_k^+} = -\int_{\ell_k^-}, k = \overline{1,n}$ نجد أن العلاقة (2) صحيحة.

$$o = \int_{\tilde{\Gamma}} f\,dz = \int_{\Gamma} + \int_{\ell_1^+} - \int_{\ell_1^-} + \ldots + \int_{\ell_n^+} - \int_{\ell_n^-} = \int_{\Gamma} f\,dz$$

ملاحظة (1): التابع $f = \frac{1}{z}$ نظامي في الساحة $D: 0 < |z| < 2$ والدائرة $\gamma: |z| = 1$ هي منحني مغلق يقع في D ومع ذلك فإن $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$ والسبب هنا هو أن داخلية المنحني γ لاتقع داخل الساحة المتعددة الاتصال D.



الشكل (8)

بعض الملاحظات والنتائج الهامة:

1) ضمن شروط صحة المبرهنة فإن التكامل على الحدود الخارجية Γ_0 يساوي مجموع التكاملات على الحدود الداخلية $\Gamma_k, k = \overline{1,n}$ للساحة D.

$$\int_{\Gamma_0} f\,dz = \int_{\Gamma_1} f\,dz + \ldots + \int_{\Gamma_n} f\,dz \qquad (4)$$

فِي الحالة عندما تكون D ساحة ثنائية الاتصال فإن:

$$\int_{\Gamma_0} f\,dz = \int_{\Gamma_1} f\,dz \qquad (5)$$

ومن الواضح أن العلاقة (5) تنقل التكامل على المنحنى Γ_0 إلى التكامل على منحنى آخر Γ_1 دون أن تتغير قيمته وتستخدم عندما يكون Γ_1 منحنى أسهل من Γ_0 كأن يكون منحنى دائرة مثلاً. (الشكل 9).

Γ_1

Γ_0

الشكل (9)

2) ضمن شروط صحة المبرهنة والساحة D ليست وحيدة الاتصال وإذا كان γ_0 و γ_1 منحنيان مغلقان بحيث إن γ_0 يحتوي داخله γ_1 ويشكلان معاً ساحة جزئية واقعة مع حدودها γ_0 و γ_1 ضمن D فإن (الشكل 10).

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz \qquad (6)$$

γ_1

γ_0

نستنتج إذا كان المنحنيان المغلقان γ_0 و γ_1 هوموتوبيان في D وكان أحدهما يحتوي الآخر فإن التكامل على γ_0 هو ذاته على γ_1.

الشكل (10)

3) ضمن شروط صحة المبرهنة إذا كان $\widehat{z_1z_2}: \gamma_0 \subset D$ فإن قيمة التكامل $\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\widehat{z_1z_2}} f\,dz$ لاتتغير إذا استبدلنا المنحنى غير المغلق γ_0 بمنحنى غير مغلق آخر γ_1 هوموتوبي معه في D (الشكل 11).

z_2

γ_0

γ_1

z_1

الشكل (11)

نستنتج: قيمة التكامل $\int_{\gamma} f\,dz$ حيث $D \supset \gamma : \overset{\frown}{z_1 z_2}$ لاتتعلق بشكل المنحنى γ الواصل بين النقطتين z_1 و z_2 ويمكن أن نكتب:

$$\int_{\overset{\frown}{z_1 z_2}} f\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f\,dz \qquad (7)$$

وذلك عندما تقع القطعة $[z_1, z_2]$ ضمن الساحة D وينقلب التكامل على المنحنى γ إلى تكامل محدد.

4) إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة الوحيدة الاتصال D فإن له تابع أصلي.

البرهان:

يكفي التأكد من أن تكامل f على منحنى غير مغلق يتعلق فقط بطرفيه. فإذا كان لـ $D \supset \gamma_2, \gamma_1$ نفس الأطراف فإن $\int_{\gamma} f\,dz = 0$ حيث $\gamma = \gamma_0 \gamma_1^{-}$ بالتالي: $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_0}$

بتثبيت نقطة البداية a نجد أن: $F(z) = \int_{az} f\,d\zeta$ هو تابع أصلي لـ f في D.

من الواضح أن هذه النتيجة تبقى صحيحة إذا استبدلنا شرط النظامية للتابع f بشرط الاستمرار لماذا؟.

مثال (1): احسب: 1) $I = \int \frac{e^{2z}}{z^2+3} dz$ حيث $\Gamma : |z| = \frac{3}{2}$

2) $I = \int_{\Gamma} \sin z\,dz$

حيث $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ حيث Γ_1 منحنى دائرة الوحدة و $\Gamma_2 : \overset{\frown}{2, (-i)}$.

الحل:

1) إن التابع المستكمل نظامي ضمن Γ ومستمر حتى Γ (بل نظامي على Γ) بالتالي $I = 0$ حسب مبرهنة كوشي.

2) لدينا $I = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$.

لكن $I_1 = \int_{\Gamma_1} = 0$ حسب مبرهنة كوشي.

لحساب $\int_{\Gamma_2}$ لايمكن تطبيق مبرهنة كوشي كون Γ_2 غير مغلق لكن إذا لاحظنا أن

هذا التكامل مستقل عن شكل Γ_2 ويرتبط بطرفيه فقط نجد:

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \sin z\, dz = \int_2^{-i} \sin z\, dz = [-\cos z]_2^{-i}$$

$$= -\cos(-i) + \cos 2 = -\mathrm{ch}1 + \cos 2$$

ومنه $I = I_1 + I_2 = I_2$

يمكن توظيف مبرهنة كوشي لحساب تكاملات حقيقية ويتلخص ذلك بنقل التكامل الحقيقي المفروض الى تكامل مركب على منحنى مغلق ويعتمد نجاح ذلك على اختيار مناسب للتابع المركب المستكمل وعلى المنحنى التكاملي، نوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (2): باستخدام مبرهنة كوشي. أثبت صحة تكامل بواصون:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2} d\varphi = 1 \;;\; o < r < R$$

الحل:

علينا اختيار تابع مستكمل مركب مناسب يمكننا من المطلوب .

بحسبة بسيطة نجد أن التابع المستكمل يساوي $\mathrm{Re}\dfrac{R + re^{i\varphi}}{R - re^{i\varphi}}$ حيث:

$$\frac{R + re^{i\varphi}}{R - re^{i\varphi}} = \frac{R^2 - r^2 + 2iR\sin\varphi}{R^2 - 2rR\cos\varphi + r^2}$$

نضع $z = re^{i\varphi}$ ونعتبر r ثابت نجد:

$$\frac{dz}{d\varphi} = rie^{i\varphi} = iz$$

بالتالي:

$$I = \text{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\frac{dz}{z}\right) = \text{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{R-z}\right)dz\right]$$

$$= \text{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{2dz}{R-z}\right] = 1$$

(5-4) علاقة كوشي التكاملية ونتائجها:

مبرهنة كوشي الأساسية بكل أشكالها لاتحسب قيمة تكامل مركب عندما يوجد للتابع المستكمل نقطة شاذة واحدة أو أكثر داخل المنحنى التكاملي والذي يحسب هذا التكامل هو علاقة كوشي التكاملية.

مبرهنة (1)- **العلاقة البسيطة:**

1) إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة الوحيدة الاتصال D و γ منحنى مغلق يقع في D فإنه لكل نقطة a واقعة داخل γ يكون.

$$\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i . f(a) \qquad (1)$$

2) إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة المحدودة الوحيدة الاتصال D ومستمراً حتى حدودها المغلقة Γ فإنه لكل نقطة $a \ni D$ يكون:

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i . f(a) \qquad (2)$$

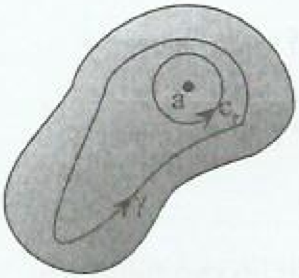
3) إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة المحدودة ذات الـ n+1 اتصال D ومستمراً حتى حدودها $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ ويوجه Γ بحيث تبقى نقاط الساحة D على جهة اليسار فان العلاقة (2) صحيحة أو:

$$\int_{\Gamma_0}\frac{f(z)}{z-a}dz + \int_{\Gamma_1} + ... + \int_{\Gamma_n} = 2\pi i f(a)$$

حيث اعتبرنا Γ_0 منحنى خارجي يحتوي البقية.

الإثبات:

1) لنلاحظ بداية أن النقطة $z = a$ شاذة للتابع المستكمل $F(z)=\dfrac{f(z)}{z-a}$ داخل γ. نحيط a بدائرة صغيرة $c_r : |z-a|=r$ بحيث أن القرص $\bar{K} : |z-a| \le r$ يقع داخل γ عندئذ (الشكل1) يكون التابع f نظامياً في الساحة الثنائية الاتصال مستمراً حتى حدودها الخارجية γ والداخلية c_r



الشكل (1)

ويكون: $I = \int_{\gamma} F(z)dz = \int_{c_r} F(z)dz$

$$I = \int_{c_r} F(z)dz = \int_{c_r} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{c_r} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}dz$$

$$= I_1 + f(a)\int_{c_r} \frac{dz}{z-a} = I_1 + 2\pi i f(a)$$

حيث $I_1 = \int_{c_r} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}dz \quad \& \quad \int_{c_r} \dfrac{dz}{z-a} = 2\pi i$

يتم المطلوب إذا بينّا أن $I_1 = 0$.

بما أن f نظامي فهو مستمر في D وفي حالة خاصة مستمر في النقطة a:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta > 0 \ ; \ |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(a)| < \varepsilon_1$$

بالتالي: $|I_1| \le \int_{c_r} \dfrac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}|dz| < \dfrac{\varepsilon_1}{r}\int_{c_r} |dz| = 2\pi\varepsilon_1 = \varepsilon$

مما يعني أن $I_1 = 0$.

اترك إثبات صحة بقية المبرهنة تدريباً.

نتائج وملاحظات هامة: ضمن شروط صحة المبرهنة يصح الآتي:

1) إذا كان المنحنى المغلق γ_0 يحتوي المنحنى المغلق γ_1 وكلاهما يشكلان ساحة $\bar{D}$ تقع مع حدودها $\tilde{\gamma}=\gamma_0\gamma_1$ ضمن D فإنه لكل $a \in \tilde{D}$ يكون: $\int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$

حيث يوجه $\tilde{\gamma}=\gamma_0\gamma_1$ بحيث تبقى نقاط $\bar{D}$ على جهة اليسار، أي أن:

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) \tag{3}$$

2) إذا كانت D ساحة ثنائية الاتصال حدودها الخارجية Γ_0 والداخلية Γ_1 فإنه لكل $a \in D$ يكون:

$$\int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\, f(a) \tag{4}$$

3) عندما $a \notin \bar{D}$ فإن التابع $F(z)=\frac{f(z)}{z-a}$ يكون نظامياً في D وعليه فإن:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & ; \quad a \in D \\ 0 & ; \quad a \notin \bar{D} \end{cases} \tag{5}$$

4) بالإضافة إلى أن علاقة كوشي التكاملية تحسب لنا قيمة تكامل مركب فإنها تعطي قيمة التابع f في نقطة داخلية a من ساحة النظامية لـ f بدلالة قيم f على الحدود Γ لتلك الساحة، أي أنها تعطي حلاً للمسألة الحدية: يطلب إيجاد قيمة التابع f في النقطة a حيث $a \in D$ و D ساحة النظامية لـ f، علماً بأن قيم f(z) معطة عندما $z \in \Gamma$.

حل هذه المسألة هو:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{6}$$

تطبيق: ليكن g تابع مستمر على منحنى γ ولنفرض أن:

$G(z)=\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ لكل z ليست على المنحنى التكاملي المغلق γ .

أثبت أن G تابع نظامي عند كل نقطة z ليست على γ وأن مشتقه يعطى بالعلاقة:

$$G'(z)=\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

الحل:

من أجل إثبات وجود $G'(z)$ وأنه يعطى بالعلاقة المفروضة علينا بيان أن:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z}=\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

أو أن الفرق:

$$I=\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z}-\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

يؤول إلى الصفر عندما $\Delta z\to 0$

لدينا من صيغة G:

$$\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{\gamma}\left[\frac{1}{\zeta-(z+\Delta z)}-\frac{1}{\zeta-z}\right]g(\zeta)d\zeta$$

$$=\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}$$

حيث Δz صغير بحيث $z+\Delta z$ ليست على γ. بالتالي:

$$I=\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}-\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

$$=\Delta z\int_{\gamma}\frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}$$

لنقدر I. نفرض أن $M=\max_{\gamma}|g(\zeta)|$ و d البعد بين z و γ عندها $|\zeta-z|\geq d>0$ لكل $\zeta\ni\gamma$.

وبما أن $\Delta z \to 0$ فيمكن افتراض $|\Delta z| < \frac{d}{2}$ ويصبح

$$|\zeta - z - \Delta z| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

$$\left|\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}\right| \leq \frac{M}{\frac{d}{2}d^2} = \frac{2M}{d^3} \Rightarrow$$

$$|I| = \left|\int_\gamma \frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}\right| \leq \frac{|\Delta z|.2.M.\ell(\gamma)}{d^3}$$

ومنه $I \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$.

بنفس الأسلوب وبدءاً من التابع $G(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$ حيث z ليست على γ، نستطيع إثبات أن G نظامي في كل نقطة z ليست على γ وأن 'G موجود ويعطى بالصيغة:

$$G'(z) = 2\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

لاحظ أننا نحصل على عبارة G' بمفاضلة ماتحت إشارة التكامل بالنسبة لـ z في صيغة G.

نتيجة (1): مشتق تابع نظامي في نقطة z_0 (ساحة D) هو تابع نظامي في z_0 (D).

البرهان: ليكن f تابع نظامي في z_0 وعلينا إثبات أن f' موجود ونظامي في z_0 (بالتالي نظامي في جوار z_0).

نأخذ $\gamma : |\zeta - z_0| = r$ منحنى دائرة صغيرة بحيث يكون f نظامياً داخل γ.

بما أن f نظامي ضمن γ فإن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

وحسب التطبيق يكون $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$ لكن الطرف الأيمن يمثل تابعاً نظامياً (لماذا؟).

وعليه فإن لـ f مشتق f' في z_0 (وفي كل نقطة z من جوار z_0) و f' هو الآخر تابع نظامي في z_0.

وبمتابعة هذه العملية انطلاقاً من الصيغة التكاملية لـ f' نخلص إلى:

نتيجة (2): إذا كان f نظامياً في ساحة D فإن جميع مشتقاته $f^1,\dots,f^{(n)},\dots$ تكون موجودة ونظامية في D.

لاحظ كم أن هذه النتيجة مدهشة إذ لايوجد ما يناظرها في التحليل الحقيقي.

على سبيل المثال: التابع $f(x)=x^{5/3};-\infty<x<\infty$ قابلة للمفاضلة لكل $x\in\mathbb{R}$ ولكن $f'(x)=\frac{5x^{2/3}}{x}$ ليس لها مشتق في النقطة $x=0$.

لنتذكر أنه إذا كان $f=u+iv$ نظامي فإنه يمكن حساب f' من إحدى أربع علاقات منها:

$$f'=u_x+iv_x\ ,\ f'=v_y-iu_y$$

بما أن f' نظامي فهو مستمر وبالتالي المشتقات من المرتبة الأولى لـ u و v تكون توابع مستمرة وكون f'' موجودة فإن:

$$f''=u_{xx}+iv_{xx}=v_{yx}-iu_{yx}$$
$$f''=v_{xy}-iu_{xy}=-u_{yy}-iv_{yy}$$

وبالتالي استمرار f'' يؤدي إلى أن جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لـ u و v موجودة وتمثل توابع مستمرة في النقاط التي يكون فيها f نظامي بتكرار العملية نصل إلى:

نتيجة (3): إذا كان f نظامياً في ساحة D فإن جميع المشتقات الجزئية لـ u و v تكون موجودة ومستمرة في D.

وكنا قد حصلنا على هذه النتيجة حين وجدنا أن الجزء الحقيقي والجزء u التخيلي v لتابع نظامي هو تابع توافقي.

وكذلك يمكن الوصول لهذه النتائج انطلاقاً من القضيتين:

I) إذا كان f يملك تابعاً أصلياً F في ساحة D فإن f نظامي في D.

II) وجود تابع أصلي للتابع المستمر f يكافىء انعدام التكامل على كل منحنى مغلق.

وكنتيجة لما سبق نحصل على مبرهنة موريرا.

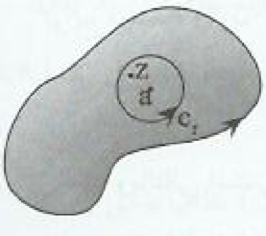
إذا كان f مستمراً في D و $\int_{\gamma} f dz = 0$ لكل منحنى مغلق γ واقع في D فإن f تابع نظامي في D.

لاحظ أثناء المناقشة أعلاه قد تبين أن هناك أنواع من التوابع المستكملة (ماهي ؟)، يمكن استبدال عملية الاشتقاق بالنسبة لـ z بعملية تكامل بالنسبة لـ ζ.

كنا وجدنا أن التابع النظامي في نقطة هو تابع قابل للمفاضلة في تلك النقطة وإن العكس غير صحيح. إذا استبدلنا النقطة بساحة يصبح العكس صحيحاً.

مبرهنة (2)- التكافؤ بين النظامية وقابلية المفاضلة في ساحة:

الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع f نظامياً في الساحة D هو أن يكون f قابلاً للمفاضلة في D.



الشكل (2)

إثبات لزوم الشرط: واضح (لماذا؟).

إثبات كفاية الشرط: نفرض أن التابع f قابل للمفاضلة في الساحة D. يتم المطلوب إذا بينّا إمكانية كتابة التابع f على شكل سلسلة قوى متقاربة حول كل نقطة $a \in D$. نحيط النقطة a بدائرة صغيرة $c_r : |\zeta - a| = r$ بحيث يقع القرص المغلق $\bar{K} : |\zeta - a| \le r$ ضمن D. عندئذ لكل $z \in K$ تصح علاقة كوشي (الشكل 2)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

لكن لدينا:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^{n}$$

حيث $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{r}<1$ عندما $z\ni K$ و $\zeta\ni c_r$ والسلسلة متقاربة بانتظام على c_r ولن يتأثر تقاربها المنتظم إذا ضربنا الطرفين بالمقدار $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ وكاملنا حداً حداً على c_r لأن f محدود على c_r (لماذا؟)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right](z-a)^{n}$$

أصبح لدينا:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (7)$$

حيث الأمثال c_n تعطى بالصيغة التكاملية:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\ ;\ n=0,1,... \qquad (8)$$

واضح أن السلسلة (7) متقاربة في القرص K مما يعني أن التابع f نظامي في النقطة a (وفي K) وكون a نقطة كيفية من D فإن f هو تابع نظامي في D.

وهكذا فإن :

(9) **f قابل للمفاضلة في D $\Leftrightarrow$ f تابع نظامي في الساحة D .**

يمكن أخذ التكافؤ (9) كتعريف للتابع النظامي في ساحة.

نتائج وملاحظات:

1) بناءً على التكافؤ (9) نستطيع استبدال عبارة: التابع f قابل للمفاضلة في الساحة D (أو في جوار النقطة a) بالعبارة f تابع نظامي في الساحة D (أو في النقطة a) في الفصلين السابقين.

2) الصيغة (8) تحسب لنا أمثال سلسلة تايلور للتابع f حول a لكن استخدامها أصعب من تطبيق العلاقة $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ وطرق النشر.

3) عندما يطلب إيجاد نصف قطر التقارب R لسلسلة تايلور للتابع f حول a لاحاجة لتطبيق علاقة كوشي – آدامار لأن R يساوي البعد بين مركز السلسلة a وأقرب نقطة شاذة لـ f منها لماذا؟.

على سبيل المثال $R = 1$ في السلسلة $\dfrac{1}{1-z} = \sum z^n$ لأن $R = |1-0| = 1$ و $R = +\infty$ في السلسلة $\cos z = \sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ لأن التابع cosz صحيح. و $R = 2\pi$ في سلسلة ماك لوران للتابع ctgz لأن $R = |+2\pi - 0| = 2\pi$.

مثال (1): احسب $\int_\gamma f(z)dz$ حيث γ, f كما يلي:

1) $\dfrac{e^{5z}}{z}, \ \gamma: |z| = 1$

2) $\dfrac{2z+1}{z(z-1)}$:γ منحنى الليمنسكات الذي لأجله تقع النقطة 0 في فرعه الأيسر و 1 ضمن فرعه الأيمن والفرع الأيسر موجه سلباً والأيمن موجه إيجاباً.

الحل:

1) لدينا $z = 0$ نقطة شاذة داخل γ بالتالي:

$$I = 2\pi i \left(e^{5z}\right)\Big|_0 = 2\pi i$$

2) بفرض أن γ_1 الفرع الأيمن و γ_2 الفرع الأيسر وبمراعاة الاتجاه المفروض نجد:

$$I=\int_{\gamma_1}\frac{\frac{2z+1}{z}}{z-1}dz+\int_{\gamma_2}\frac{\frac{2z+1}{z-1}}{z-1}dz$$

$$=2\pi i\left(\frac{2z+1}{z}\right)\Bigg|_1-2\pi i\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)\Bigg|_o=6\pi i+2\pi i=8\pi i$$

مثال (2): احسب $I=\int_{\gamma}\frac{\cos z}{z^3+z}dz$ في الحالات:

1) $\gamma:|z|=2$ ، 2) $\gamma:|z|=\frac{1}{2}$ ، 3) $\gamma:|z-\frac{i}{2}|=1$

الحل:

1) نفرق التابع المستكمل في كسور بسيطة نجد:

$$I=\int_{\gamma}\frac{\cos z}{z}dz-\frac{1}{2}\int_{\gamma}\frac{\cos z}{z+i}dz-\frac{1}{2}\int_{\gamma}\frac{\cos z}{z-i}dz$$

$$=2\pi i\left[\cos o-\frac{1}{2}\cos(-i)-\frac{1}{2}\cos i\right]$$

$$=2\pi i[1-\text{ch}1]$$

حيث هنا النقاط الشاذة الثلاث $o,\pm i$ داخل γ.

2) لدينا $z=0$ داخل γ و $\pm i$ خارج γ بالتالي:

$$I=\int_{\gamma}\frac{\frac{\cos z}{z^2+1}}{z}dz=2\pi i\left(\frac{\cos z}{z^2+1}\right)\Bigg|_o=2\pi i$$

3) لدينا $z=0$ و $z=-i$ داخل γ و $z=-i$ خارج γ وبملاحظة أن:

$$\frac{1}{z(z-i)}=i\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-i}\right)$$

نجد:

$$I=2\pi i\left[i\left(\frac{\cos o}{i}\right)-i\left(\frac{\cos i}{2i}\right)\right]$$

$$=2\pi i\left[1-\frac{1}{2}\text{ch}1\right]$$

مبرهنة (3)- علاقة كوشي التكاملية العامة:

ضمن شروط صحة المبرهنة (1) يكون:

$$\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)\ ;\ n=0,1,... \qquad (10)$$

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)\ ;\ n=0,1,... \qquad (11)$$

الإثبات: بما أن التابع f نظامي في الساحة D فإنه لكل $a \in D$ يكتب f على شكل سلسلة قوى متقاربة حول a وأمثالها c_n تعطى بالعلاقة $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ أو بالعلاقة $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$ حيث γ منحنى مغلق يحتوي داخله النقطة a ويقع ضمن قرص التقارب ومن المساواة:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

واستبدال ζ بـ z شكلياً وملاحظة أن النقطة $a \in D$ كيفية نجد العلاقة (10).

نتابع النتائج:

4) كما هي علاقة كوشي البسيطة فإن علاقة كوشي العامة (11) تحسب لنا قيمة التابع f في نقطة داخلية $z \in D$ بدلالة قيم مشتقاته على حدود المنحنى التكاملي:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (12)$$

5) بوضع $n=0$ في (10) أو (11) نجد علاقة كوشي البسيطة.

6) يمكن الحصول على علاقة كوشي العامة بمفاضلة التابع المستكمل شكلياً بالنسبة لـ a عدداً n من المرات معتبرين z ثابت وسيط.

7) إذا كانت $a \notin \bar{D}$ فإن التكامل يساوي الصفر حسب مبرهنة كوشي وبالتالي:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) & ; \quad a \in D \\ 0 & ; \quad a \notin \overline{D} \end{cases} \tag{13}$$

مثال (3): احسب $I = \int_{\gamma} f\,dz$ حيث f و γ كما يلي:

1) $\frac{e^{2z}}{z^4}, \gamma : |z| = \pi$ ، 2) $\frac{2z+1}{z(z-1)^2}$: γ هو الليمنسكات المعطى في المثال (1)

الحل:

1) لدينا $z = 0$ شاذة داخل γ وبالمقارنة مع علاقة كوشي العامة نجد أن $n+1 = 4$ (ضع ζ مكان z شكلياً في تلك العلاقة).

ومنه: $f = e^{2z}$

$$I = \frac{2\pi i f'''(o)}{3!} = \frac{2\pi i}{6} \cdot 8 = \frac{8\pi i}{3}$$

2) $$I = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{2z+1}{z} \right)' \Bigg|_1 - 2\pi i \frac{2z+1}{(z-1)^2} \Bigg|_o = -4\pi i$$

مثال (4): احسب $I = \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-1)} dz$ حيث γ هو:

1) $\gamma : |z| = \frac{1}{3}$ 2) $\gamma : |z-1| = \frac{1}{3}$ 3) $\gamma : |z| = 3$

الحل:

1) $$I = \int_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{\cos z}{z-1} \right)' \Bigg|_o = -2\pi i$$

2) $$I = \int_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{z-1} dz = 2\pi i \cos 1$$

3) $$I = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) \cos z \, dz$$

$$=2\pi i[\cos 1-\cos o+\sin o]=2\pi i[\cos 1-1]$$

مبرهنة (4) **علاقة كوشي التكاملية من أجل ساحة غير محدودة:**

ليكن f تابع نظامي خارج المنحنى المغلق γ، بما في ذلك عند النقطة ∞ ومستمر حتى γ. عندئذ تصح علاقة كوشي التالية:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+f(\infty) & ; \quad z\in\gamma \text{ خارج} \\ f(\infty) & ; \quad z\in\gamma \text{ داخل}\end{cases} \qquad (14)$$

الإثبات:

إذا كانت z تقع خارج γ فإننا نحيط γ بمنحنى مغلق $\tilde{\gamma}$ يحتوي z ونطبق علاقة كوشي في الساحة الثنائية الاتصال التي حدودها الخارجية $\tilde{\gamma}$ والداخلية γ فنجد:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

من جانب آخر في جوار ∞ لدينا:

$$f(\zeta)=c_o+\frac{c_1}{\zeta}+\ldots+\frac{c_n}{\zeta^n}+\ldots$$

حيث $c_o=f(\infty)$. بالمكاملة حداً حداً على $\tilde{\gamma}$ ثم ضرب الطرفين بـ $\frac{1}{2\pi i}$ نجد:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(\infty)$$

ومنه تكون العلاقة الأولى في الصيغة المفروضة (14) صحيحة.

أما إذا كانت z داخل γ فإن $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ هو تابع نظامي في الساحة الواقعة بين γ و $\tilde{\gamma}$ وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$f(z)\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$$

وبملاحظة المبرهن أعلاه نحصل على العلاقة الثانية.

ختاماً نوجد الصيغة المركبة لمبرهنة غرين بهدف تعميم علاقة كوشي.

توطئة (1): ضمن شروط صحة مبرهنة غرين فإن :

$$\int_{\Gamma} f\,dz = 2i \iint_{D} f_{\bar{z}}\,.dx\,dy \tag{15}$$

البرهان: من علاقة غرين:

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(Q_x - P_y\right) dx\,dy$$

والعلاقة:

$$\int_{\Gamma} f\,dz = \int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int_{\Gamma} v\,dx + u\,dy$$

نجد أن:

$$\int_{\Gamma} f\,dz = \iint_{D} \left[-v_x - u_y + i\left(u_x - v_y\right)\right] dxdy$$

لكن:

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y\right) + \frac{i}{2}\left(v_x + u_y\right)$$

والتي منها نحصل على العلاقة (15).

في المبرهنة التالية نقدم إحدى تعميمات علاقة كوشي.

مبرهنة (5)- علاقة كوشي – غرين: إذا كان التابع f مستمر في لصاقة الساحة المتراصة D المحدودة بعدد منته من المنحنيات Γ القابلة للقياس فإنه لكل $a \in D$ يكون:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2i \iint_{D} f_{\bar{z}} \cdot \frac{dxdy}{z-a} = 2i\pi f(a) \tag{16}$$

الإثبات: نعزل النقطة a بدائرة صغيرة $c_r : |z-a| = r$ بحيث يقع القرص المغلق $\bar{K} : |z-a| \le r$ ضمن D نجد أن التابع $F(z) = \dfrac{f(z)}{z-a}$ مستمر في الساحة $D \setminus \bar{K}$ ونستطيع تطبيق العلاقة (15).

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{c_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i \iint_{D\setminus \bar{K}} f_{\bar{z}} \frac{dxdy}{z-a}$$

وبما أن f مستمر في النقطة a فإن $f(z) = f(a) + o(r)$ لكل $z \in K$ حيث $o(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$ بالتالي:

$$\int_{c_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_{c_r} \frac{dz}{z-a} + \int_{c_r} \frac{o(r)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) + o(r)$$

وعندما $r \to 0$ نجد العلاقة (16).

لنلاحظ أنه إذا كان f نظامياً في D مستمراً حتى حدودها فإن التكامل الثاني في العلاقة (16) يساوي الصفر (لماذا؟) ونحصل على علاقة كوشي البسيطة.

نتيجة (4): مرة أخرى نجد أنه إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة D فإن f' هو تابع نظامي أيضاً في D وأكثر من هذا فإن لـ f مشتقات من كل المراتب في D.

البرهان: ينتج من العلاقة (11)، فإذا كانت $a \in D$ نقطة كيفية و $K:|z-a|<r$ هو قرص يقع مع حدوده ضمن D فإن $f^{(n)}(a)$ موجودة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة وكون a كيفية فإن $f^{(n)}(z)$ موجودة والتابع $f^{(n)}(z)$ نظامي في الساحة D.

ملاحظة (1): عندما يوجد أكثر من نقطة شاذة للتابع f ضمن ساحة النظامية D فإننا نردها إلى حالة وجود نقطة واحدة كأن ننشر التابع المستكمل في كسور بسيطة أو نحيط تلك النقاط بدوائر صغيرة γ_k ونستخدم العلاقة:

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \sum_{1}^{m} \int_{\gamma_k} F(z) dz$$

مبرهنة (6)- متراجحات كوشي: إذا كان f تابعاً نظامياً في القرص الدائري $K:|z-a|<r$ مستمراً حتى حدوده $c_r:|z-a|=r$ وكانت c_n أمثال سلسلة تايلور للتابع f حول a فإن:

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n} \; ; \; n = 0,1,..., \; M = \max_{c_r} |f|$$

الإثبات: من العلاقة $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$ نجد:

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_{c_r} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} . \frac{M}{r^{n+1}} . 2\pi r = \frac{M}{r^n}$$

(6-4) تطبيقات (مبرهنات القيمة الوسطى، القيم القصوى، ليوفيل):

وجدنا أن علاقة كوشي التكاملية تعطي قيم التابع النظامي (القابل للمفاضلة وفق التحليل المركب) f في نقاط داخلية من الساحة D بدلالة قيمه على حدود D وهذا ما يميز التابع القابل للمفاضلة وفق التحليل المركب عن التابع القابل للمفاضلة وفق التحليل الحقيقي ونقدم كحالة خاصة التطبيقات التالية:

مبرهنة (1) – القيمة الوسطى: إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة D فإن قيمته في كل نقطة محدودة $a \in D$ تساوي متوسط قيمه على دائرة صغيرة $\gamma : |z-a| = r$ مركزها a:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{o}^{2\pi} f\left(a + re^{i\varphi}\right) d\varphi \qquad (1)$$

الإثبات: لدينا فرضاً $\bar{K} : |z-a| \leq r \subset D$ ومن علاقة كوشي نجد:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

لكن على γ لدينا $o \leq \varphi \leq 2\pi$; $z - a = re^{i\varphi}$ و $dz = rie^{i\varphi} d\varphi$ بالتالي:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{o}^{2\pi} \frac{f\left(a + re^{i\varphi}\right)}{re^{i\varphi}} ri\, e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{o}^{2\pi} f\left(a + re^{i\varphi}\right) d\varphi$$

مبرهنة (2)– القيمة العظمى:

إذا كان f تابعاً نظامياً لايطابق الثابت في الساحة D ومستمراً حتى الحدود Γ فإن $|f|$ يأخذ قيمته العظمى على الحدود Γ.

الإثبات: بما أن f مستمر فإن القيمة العظمى تتم في نقاط داخلية E من D أي أن $|f(z)| = M \ \forall z \in E$ لماذا؟

إذا كانت $E = \bar{D}$ فإن $|f| = M \ \forall z \in D$ وبالتالي $f \equiv const$ وإذا لم تتطابق E مع الساحة D فإنه توجد نقطة حدودية z_o للمجموعة E بحيث تكون z_o نقطة داخلية

للساحة D. في كل جوار لـ z_0 توجد نقاط من E و f تابع مستمر مما يعني أن $|f(z_0)|=M$.

نأخذ الدائرة $D\supset\gamma:|z-z_0|=r$ بحيث يقع على γ نقطة حدودية واحدة على الأقل z_1 للمجموعة E. عندئذ $|f(z_1)|<M$ ومن استمرار f نجد لكل $\varepsilon>o$ يوجد جزء γ_1 من γ يحتوي z_1 ولأي $z\ni\gamma_1$ يكون $|f|<M-\varepsilon\,;\,z\in\gamma_1$ ولأي $z\ni\gamma_1\setminus\gamma=\gamma_2$ يكون $|f|\leq M$ وحسب مبرهنة القيمة الوسطى يكون:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} fd\varphi=\frac{1}{2\pi r}\left[\int_{\gamma_1} fds+\int_{\gamma_2} fds\right]$$

حيث $ds=rd\varphi$ عنصر الطول على الدائرة γ.

$$\Rightarrow M=|f(z_0)|\leq\frac{1}{2\pi r}\left[(M-\varepsilon)\ell_1+M\ell_2\right]=M-\frac{\varepsilon\ell_1}{2\pi r}$$

هنا ℓ_1 طول γ_1 و ℓ_2 طول γ_2 و $\ell_1+\ell_2=2\pi r$ ولكن المتراجحة السابقة غير ممكنة وحصلنا على تناقض.

نتيجة (1) - مبدأ القيمة الصغرى: إذا كان f تابعاً نظامياً ليس ثابتاً في الساحة D مستمراً حتى الحدود Γ و $f(z)\neq 0$ في D فإن القيمة الصغرى لـ $|f|$ لايمكن أن تتم إلاّ في نقاط واقعة على الحدود Γ. 7 ، 6

البرهان: يكفي تطبيق المبرهنة (7) على التابع $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

توطئة شفارتز: إذا كان f تابعاً نظامياً في قرص الوحدة $K:|z|<1$ مستمراً حتى حدودها $|z|=1$ وكان:

$f(o)=0$ (1 $\qquad\qquad$ $|f|\leq 1\ \forall z\in K$ (2

فإن $|f|\leq|z|$ لكل $z\ni K$.

بالإضافة لذلك إذا كان $|f|=|z|$ في نقطة داخلية واحدة على الأقل $z\ni K$ فإن:

3) $\forall z \in K$ $f(z)=|z|$ ويكون:

$$f(z)=e^{i\alpha}.z \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2}$$

البرهان: نأخذ التابع:

$$\varphi(z)=\begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & ; \quad z\neq 0 \\ f'(o) & ; \quad z=0 \end{cases}$$

وحسب المعطيات التابع φ نظامي في الحلقة $o<|z|<1$ ومستمر في القرص المغلق $\bar{K}$ ونستطيع تطبيق المبرهنة (2) عليه.

على الدائرة $|z|=1$; γ لدينا $|\varphi|=\left|\dfrac{f}{z}\right|\leq 1$ بالتالي: $|\varphi(z)|\leq 1$ على كل القرص $\bar{K}$ أي أن $|f|\leq|z|$ لكل $z \in K$.

إذا كان $|f(z_o)|=|z_o|$ في نقطة داخلية فإن $|\varphi(z_o)|=1$ وعندئذ $|\varphi(z)|=1$ لكل $z \in K$ وعندئذ $\varphi(z)$ تابع ثابت من الشكل $\varphi(z)=e^{i\alpha}; \alpha\in\mathbb{R}$ ومنه تكون (2) صحيحة.

هندسياً: توطئة شفارتز تعني أنه عند نقل قرص الوحدة إلى ساحة D واقعة ضمن قرص الوحدة $|\omega|<1$ تحت تأثير تابع نظامي $\omega=f(z);f(o)=0$ فإن صورة نقطة z قريبة من المبدأ $z=0$ هي نقطة ω قريبة من المبدأ $\omega=0$ وإذا كانت صورة نقطة واحدة على الأقل z تحقق $|\omega|=|z|$ فإن الساحة D تتطابق مع قرص الوحدة وهنا يكون $\omega=f$ تحويل دوران.

نتائج: مشهوع

1) إذا كان u تابعاً توافقياً في الساحة الوحيدة الاتصال D وشكلنا التابع النظامي $f=u+iv$ وبملاحظة أن $|e^f|=e^u$ والتابع النيبري متزايد تماماً بالنسبة للمتحول الحقيقي فإن النقاط العظمى للتابع u تنطبق على النقاط العظمى لطويلة التابع

النظامي e^{f} ونحصل بذلك على مبدأ القيمة العظمى للتوابع التوافقية. من جهة ثانية بما أن نقاط القيم الصغرى للتابع u هي ذاتها نقاط القيم العظمى للتابع $-u$ فإننا نستنتج:

a- إذا كان u تابعاً توافقياً في ساحة وحيدة الاتصال D ويأخذ قيمته العظمى أو الصغرى في نقطة $z_0 \in D$ فإن $u \equiv const$ في D.

b- يأخذ التابع التوافقي في ساحة محدودة ووحيدة الاتصال D والمستمر في D حتى حدودها قيمتيه العظمى والصغرى على المحيط Γ.

2) إذا كان u توافقياً في القرص $|z-a|<R$ فإن:

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi} u\left(a+re^{i\varphi}\right)d\varphi\ ;\ o<r<R$$

البرهان:

نشكل مرافقاً توافقياً v بحيث يكون التابع $f=u+v$ نظامياً في K عندئذ يحقق f(z) مبرهنة القيمة الوسطى.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi} f\left(a+re^{i\varphi}\right)d\varphi\ ;\ o<r<R$$

بأخذ القسم الحقيقي للطرفين نجد المطلوب.

مسألة ديرخليه:

نص المسألة: يطلب إيجاد تابع u(x,y) مستمر في ساحة D حتى حدودها Γ وتوافقي في D ويأخذ قيماً مفروضة على الحدود Γ.

إن دراسة هذه المسألة تعني الإجابة عن سؤالين:

الأول: هل الحل موجود؟ والثاني إذا كان الحل موجوداً فهل يتحدد بطريقة وحيدة بوساطة القيم الحدودية المفروضة.

التوطئة التالية تبين وحدانية الحل إذا كانت الساحة D محدودة.

توطئة: إذا كان u_2, u_1 تابعان توافقيان في الساحة المحدودة D ومستمران حتى الحدود Γ للساحة D وكان $u_1/_\Gamma = u_2/_\Gamma$ فإن $u_1 = u_2$ في كل D.

البرهان: إن التابع $u = u_1 - u_2$ توافقي وبالتالي يأخذ قيمتيه العظمى والصغرى على Γ لماذا؟ ولكن $u/_\Gamma = u_1/_\Gamma - u_2/_\Gamma \equiv 0$ هذا يعني أن $u = 0$ في D أو $u_1 = u_2$.

إن حل مسألة ديريخليه يتلخص في ايجاد التابع u داخل الساحة D بدلالة قيمه المفروضة على المحيط Γ الأمر الذي يتطلب منا استخدام علاقة كوشي التكاملية.

الحل في قرص دائري: لتكن $\Gamma:|z|=R \ \& \ D:|z|<R$ عندئذ لكل $z \ni D$ ومن أجل التابع النظامي في ساحة تحتوي $\bar{D}$ يكون:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (3)$$

من جهة ثانية التابع $\frac{f(\zeta)}{R^2-\zeta\bar{z}}$ بالنسبة للمتحول ζ نظامي ضمن وعلى Γ لكل $z \ni D$ (المقام لاينعدم) بالتالي

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\bar{z}}{R^2-\bar{z}\zeta}d\zeta = 0 \qquad (4)$$

بجمع (3) مع (4) طرفاً لطرف نجد:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\zeta\bar{z}}\right)f(\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R^2-|z|^2}{\left(R^2-\zeta\bar{z}\right)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \end{aligned} \qquad (5)$$

باستخدام المعادلة الوسيطية $\Gamma:\zeta = Re^{it} \ ; \ o \le t \le 2\pi$ تأخذ (5) الشكل:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{R^2-|z|^2}{\left(R^2-Re^{it}\,\bar{z}\right)}\frac{f\left(Re^{it}\right)Ri\,e^{it}}{\left(Re^{it}-z\right)}dt$$

مبرهنة (3)- ليوفيل البسيطة: إذا كان f تابعاً نظامياً في كل المستوى C ومحدوداً فإن $f(z) \equiv const$.

الإثبات: بما أن f نظامي في كل المستوى C فإنه لأي قرص $\overline{K}:|z|\le R$ يكون $f=\sum_{0} c_n z^n$ والأمثال c_n مستقلة عن R.

بما أن f محدود في كل المستوى C $(|f|\le M)$ لكل $z \in C$ فإنه من متراجحات كوشي يكون $|c_n|\le \frac{M}{R^n}\ ;\ n=0,1,\ldots$ وهنا R كبير بقدر كاف، ومن أجل $n=1,2,\ldots$ الطرف الأيمن يؤول إلى الصفر عندما $R\to\infty$ والطرف الأيسر مستقل عن R بالتالي $c_n=0$ لكل $n=1,2,\ldots$، أي أن $f(z)=const=c_0$ في C.

نشير إلى أن المبرهنة تبقى صحيحة في المستوى الموسع $\overline{C}$ (لماذا؟).

(7-4) الشروط الكافية لنظامية تابع:

نفرض في هذا البند بعض الشروط التي تكفي كي يكون التابع نظامي في ساحة، إن عكس مبرهنة كوشي التكاملية ليس صحيحاً بشكل عام فإذا كان γ منحنى مغلق و $\int_{\gamma} f\,dz=0$ فإن التابع f قد لايكون نظامياً ضمن γ. لكن إضافة شرط الاستمرار على التابع f يصبح العكس صحيحاً.

مبرهنة (1) – موريرا:

1) إذا كان f تابعاً مستمراً في الساحة الوحيدة الاتصال D وكان $\int_{\gamma} f\,dz=0$ لكل منحنى مغلق $\gamma\subset D$ فإن f هو تابع نظامي في D.

2) إذا كان f تابعاً مستمراً في الساحة المحدودة الوحيدة الاتصال D ومستمراً حتى حدودها Γ وكان $\int_{\Gamma} f\,dz=0$ فإن f هو تابع نظامي في D.

الإثبات:

1- بما أن التابع f مستمر في D و $\int_{\gamma} f\,dz = 0$ لكل منحنى مغلق $\gamma \subset D$ فإن لـ f تابع أصلي F في D أي $F' = f$ وبالتالي F تابع نظامي في D وكون مشتق تابع نظامي هو تابع نظامي فإن f تابع نظامي في الساحة D.

اترك إثبات الحالة 2) تدريباً.

مبرهنة (2)- فايرشتراوس:

إذا كانت جميع التوابع $f_n, n = 1, 2, ...$ نظامية في الساحة D والسلسلة التابعية:

$$f(z) = \sum_{1} f_n(z) \tag{1}$$

متقاربة بانتظام في كل ساحة جزئية مغلقة واقعة في D فإن:

1) يمكن مكاملة طرفي (1) حداً حداً ضمن D.

2) المجموع f(z) هو تابع نظامي في الساحة D.

3) يمكن مفاضلة طرفي (1) حداً حداً ضمن D عدداً كيفياً من المرات.

4) السلاسل الناتجة أثناء المكاملة حداً حداً أو المفاضلة حداً حداً متقاربة بانتظام في كل ساحة جزئية مغلقة واقعة في D

الإثبات: بما أن f_n توابع نظامية فهي مستمرة و يمكن المكاملة حداً حداً.

لنبرهن نظامية التابع f في الساحة D.

بما أن التوابع f_n نظامية فهي مستمرة في D والمجموع f تابع مستمر في D (داخل γ) ويمكن المكاملة حداً حداً على طول $\gamma \subset D$.

$$\int_{\gamma} f\,dz = \sum_{1} \int_{\gamma} f_n\,dz$$

لكن: $\int_{\gamma} f_n\,dz = 0$ لكل n حسب مبرهنة كوشي الأساسية بالتالي: $\int_{\gamma} f\,dz = 0$

ومن مبرهنة موريرا يكون f نظامياً في D.

لنبرهن إمكانية المفاضلة حداً حداً. لكل $a \in D$ نأخذ القرص $\bar{K}: |z-a| \le r \subset D$ عندئذ:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \;;\; n = 1, 2, \ldots \quad (2)$$

وبما أن السلسلة متقاربة بانتظام على $c_r : |z-a| = r$ فإنه يمكن تعويض:

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=0} \frac{f_k(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

التي تختلف عن السلسلة في (1) بمضروب طويلته تساوي $\frac{1}{r^{n+1}}$ لكل $z \in c_r$ حيث نطبق العلاقة (2) على التوابع:

$$f^{(n)}(a) = \sum_{k=0} \frac{n!}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f_k(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \sum_{k=0} f_k^{(n)}(a)$$

التتمة7: تلعب السلسلة التابعية التي حدودها كثيرات حدود:

$$f(z) = \sum_{0} p_n(z) \quad (3)$$

دوراً رئيساً في التحليل. عندما تكون تلك السلسلة متقاربة في كل ساحة جزئية مغلقة من ساحة D فإن المجموع f(z) هو تابع نظامي في D حسب مبرهنة فايرشتراوس. الأهم هو المسألة المعاكسة، أي مسألة تقريب تابع f(z) نظامي في ساحة D من متتالية كثيرات حدود بحيث إن هذا التقريب يكون منتظماً في كل ساحة جزئية من D.

لتكن الساحة $\bar{C} \subset D$ و f تابع نظامي في D. يطلب إيجاد كثيرة حدود p(z) بحيث يتحقق الشرط. لكل $\varepsilon > 0$ و E مجموعة بحيث $\bar{E} \subset D$ يكون:

$$d(f(z), p(z))|_E = \sup_{z \in E} |f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad (4)$$

هذه المسألة تكافئ مسألة إيجاد سلسلة تابعية حدودها كثيرات حدود $\sum_{0} p_n(z)$ متقاربة بانتظام من التابع f(z) في كل مجموعة جزئية مغلقة $\bar{E}$ واقعة في D.

بالفعل، إذا كانت مثل تلك السلسلة قد وجدت فإن مجموعها الجزئي عندما n كبير يحقق شروط المسألة، ومن أجل إثبات العكس نستخدم التوطئة التالية:

توطئة: لأي ساحة $D \subset C$ يمكن إيجاد متتالية من المجموعات الجزئية المغلقة $\overline{E}_n$ بحيث:

$$D \supset E_n \ \& \ E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots \tag{5}$$

لكل $z \in D$ بدءاً من دليل معين n و $D = \bigcup\limits_{1}^{\infty} E_n$.

الآن نبني متتالية كثيرات الحدود $p_n(z)$ بحيث:

$$d\left(f(z), p_n(z)\right)/_{E_n} \leq \frac{1}{2^n}, \ n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

وعندئذ السلسلة المنشودة تكون:

$$p_1(z) + \sum_{1}^{\infty} \left[p_{n+1}(z) - p_n(z)\right] \tag{7}$$

في الحقيقة المجموع الجزئي لهذه السلسلة هو $p_n(z)$ وحسب (6) تكون متقاربة بانتظام من التابع f في $D \supset E$ (E مجموعة تحتوي جميع E_n بدءاً من دليل n) وبالتالي $d(f, p_n) < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$ عندما n كبيرة.

في الحالة الخاصة الهامة إذا كانت D قرصاً دائرياً $K : |z-a| < R$ فإن حل المسألة هو كثيرات حدود تايلور للتابع f.

$$p_n(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{8}$$

بالفعل : نعلم أن f يتمثل في K على شكل سلسلة تايلور وهذه السلسلة متقاربة بانتظام في كل مجموعة جزئية مغلقة واقعة في K . ولكن سلاسل القوى تتقارب فقط في أقراص دائرية ولذلك فإن كثيرات حدود تايلور غير مفيدة من أجل تقريب توابع في ساحات وهنا تصح المبرهنة التالية:

مبرهنة (3)- رونغة :

إذا كان f نظامياً في الساحة الوحيدة الاتصال $D \subset C$ و E جزئية متراصة من D فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد كثيرة حدود p بحيث:

$$d(f,p)|_E < \varepsilon \qquad (9)$$

بالتعميم يمكن تقريب التابع f النظامي في المجموعة المفتوحة D (قد لاتكون D متصلة) من كثيرات حدود بانتظام في كل مجموعة $\bar{E} \subset D$.

نشير إلى أن مسألة تقريب تابع نظامي من كثيرات حدود في ساحة ليست وحيدة الاتصال غير قابلة للحل.

(8-4) مبرهنة الوحدانية وممدد تابع نظامي إلى تابع نظامي:

نقدم في هذا البند مبرهنة الوحدانية في التوابع النظامية التي ليست صحيحة بالنسبة للتوابع الحقيقية القابلة للمفاضلة ثم ندرس مسألة تمديد تابع نظامي.

يمكن التعبير عن مبرهنة الوحدانية بصيغ عدة.

مبرهنة (1)- الوحدانية:

1) إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة D وكان $f(z_n) = 0$ حيث $\{z_n\}$ متتالية من النقاط المختلفة مثنى مثنى في D بحيث $\lim z_n = 0$ فإن $f \equiv 0$ في الساحة D.

2) إذا كان f تابعاً نظامياً في الساحة D وكان $f \equiv 0$ في مجموعة جزئية E من D لها نقطة تراكم $a \ni D$ فإن $f \equiv 0$ في D.

3) إذا كان f و g تابعان نظاميان في الساحة D و $f \equiv g$ في مجموعة جزئية E من D لها نقطة تراكم $a \ni D$ فإن $f \equiv g$ في D.

الإثبات:

1- بما أن التابع f نظامي في D فإنه لكل $a \ni D$ يكون:

$$f = \sum_0 c_n (z-a)^n \;\; ; \;\; z \in K : |z-a| < r \, , \, r > 0$$

يتم المطلوب إذا أثبتنا أن $c_n = 0$ لكل n.

لهذا الهدف نفرض العكس أي توجد بعض من الأمثال c_n غير معدومة عندها $f \neq 0$ في جوار موخوذ $S^{*}(a)$ للنقطة a ولكن بدءاً من دليل معين n سوف تقع عناصر المتتالية $\{z_n\}$ في هذا الجوار ولأجل تلك النقاط لدينا $f(z_n) = 0$ وهذا تناقض إذن $c_n = 0$ لكل n أي $f \equiv 0$ في K. وكون a نقطة كيفية من D فإن $f \equiv 0$ في D.

2- بما أن a نقطة تراكم لـ E فإنه توجد متتالية $\{z_n\}$ من نقاط E بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

لكن $f \equiv 0$ في E فرضاً بالتالي $f(z_n) = 0$ لكل n كحالة خاصة وحسب المبرهن في 1) يكون $f \equiv 0$ في D.

3- بما أن التابع $h = f - g$ نظامي في D و $f \equiv g$ في E فإن $h = f - g \equiv 0$ في E وحسب المبرهن في (2) يكون $h \equiv 0$ وبالتالي $f \equiv g$ في الساحة D.

تظهر مبرهنة الوحدانية فرقاً جوهرياً جديداً بين التوابع المركبة النظامية (القابلة للمفاضلة في ساحة) وبين التوابع الحقيقية القابلة للمفاضلة، فإذا كان f(x) تابعاً حقيقياً قابلاً للمفاضلة عدداً حراً من المرات في مجال I و g تابع له نفس الخاصة في مجال جزئي $I \supset I_1$ و $f \equiv g$ في I_1 فإنه يوجد عدد غير منته من التوابع الحقيقية (وليس تابع واحد) المختلفة مثنى مثنى التي كل منها يطابق التابع f في I_1.

تعريف (1): يقال إن التابع F(z) الوحيد القيمة هو **الممدد النظامي** للتابع f من المجموعة E إلى الساحة D إذا تحققت الشروط:

1) التابع f معرف في المجموعة E.

2) التابع F نظامي في الساحة D.

3) $E \subset D$ و $F \equiv f$ في E.

عملياً المجموعة E تكون متتالية $\{z_n\}$ لها نقطة تراكم $D \ni a$ أو منحنى $D \supset \gamma$ أو قرص دائري $D \supset K$ أو ساحة جزئية $D \supset D_1$.

مبرهنة (2)- وحدانية الممدد النظامي:

إذا كان التابع f معرفاً في المجموعة E و a نقطة تراكم لـ E فإن الممدد النظامي F للتابع f من المجموعة E إلى الساحة D يكون وحيداً.

الإثبات: نفرض العكس، أي يوجد ممددان نظاميان F_1 و F_2 للتابع f من E إلى D عندئذ $F_1 \equiv f$ في E و $F_2 \equiv f$ في E بالتالي $F_1 \equiv F_2$ في E وحسب مبرهنة الوحدانية (1) يكون $F_1 \equiv F_2$ في D.

مثال (1): أوجد الممدد النظامي F لكل من التوابع f التالية:

$$p_n(x) \quad (4 \qquad \cos x \quad (3 \qquad e^x \quad (2 \qquad \sum z^n \quad (1$$

الحل:

1- التابع f ممثلا بسلسلة القوى $\sum z^n$ المتقاربة في قرص الوحدة $E:|z|<1$ معرف بل نظامي في E:

$$f=\frac{1}{1-z}=\sum_{0} z^n \quad ; \quad z\in E$$

من جانب آخر التابع $F(z)=\frac{1}{1-z}$ هو الممدد النظامي لـ f من قرص الوحدة E إلى الساحة $D=C\setminus\{1\}$ لأن جميع شروط التعريف (1) محققة.

2- بنفس الأسلوب نجد أن: $f(x)=e^x$ معرف في المجموعة $E=\mathbb{R}$ وممدده هو التابع $F(z)=e^z$ من $\mathbb{R}$ إلى C وهذا ينسحب على التابعين cosx الذي ممدده cosz و $p_n(x)$ الذي ممدده $p_n(z)$.

نشير إلى أنه يمكن إثبات صحة العلاقات المثلثية والقطعية الشهيرة والكثير من خواص التوابع الأولية انطلاقاً من فكرة الممدد النظامي.

مثال (2): أثبت أن : $\cos^2 z+\sin^2 z=1$

الحل: بما أن التابعين $\cos^2 z$ و $\sin^2 z$ صحيحان فإن $F=\cos^2 z+\sin^2 z-1$ هو تابع صحيح، ولدينا: $f=\cos^2 x+\sin^2 x-1\equiv 0$ في المجموعة $E=\mathbb{R}$ و $F\equiv f\equiv 0$ في $\mathbb{R}$ بالتالي $F\equiv 0$ في كل C والعلاقة صحيحة.

(9-4) التكامل المركب التابع لوسيط:

تعريف (1): إذا كان $f(z,\zeta)$ تابع مركب متحوله ζ ووسيطه z و γ منحنى فإن التكامل المركب التابع للوسيط ζ هو:

$$F(\zeta)=\int_{\gamma} f(z,\zeta)\,dz \qquad (1)$$

تبين المبرهنة التالية متى يكون التكامل $F(\zeta)$ نظامياً وكيف نحسب $F'(\zeta)$؟

مبرهنة (1):

1) إذا كان التابع $f(z,\zeta)$ مستمراً في النقطة (z,ζ) لكل $z\in\gamma$ و $\zeta\in D$ حيث γ منحنى محدود و D ساحة وكان نظامياً لكل $\zeta\in D$ فإن التابع $F(\zeta)$ يكون نظامياً في D.

2) إذا كان التابع $f(z,\zeta)$ مستمراً في النقطة (z,ζ) لكل $z\in\gamma$ و $\zeta\in D$ حيث γ منحنى غير محدود و D ساحة وكان f نظامياً في D ولنفرض أن التكامل في العلاقة (1) متقارب بانتظام في كل ساحة جزئية مغلقة $\overline{D}_1\subset D$ فإن التابع $F(\zeta)$ نظامي في D.

3) إذا كان التابع $f(z,\zeta)$ مستمراً في النقطة (z,ζ) لكل $z\in\gamma$ و $\zeta\in D$ وكان نظامياً في D ويمكن لأحد طرفي γ أو كلاهما أن يكون نقطة شاذة للتابع f (بالنسبة لـ z) ولنفرض أن التكامل في العلاقة (1) متقارب بانتظام في كل ساحة جزئية مغلقة $\overline{D}_1\subset D$. عندئذ يكون التابع F نظامياً في D.

4) ضمن الشروط الواردة سابقاً فإن المشتق $F'(\zeta)$ يحسب بالعلاقة:

$$F'(\zeta)=\int_{\gamma}\frac{\partial f(z,\zeta)}{\partial\zeta}dz \ ; \ \zeta\in D \qquad (2)$$

الإثبات: نبرهن صحة (1) و (4) ونترك التعميمين (3) و (4) تدريباً.

بما أن تكامل تابع مستمر هو تابع مستمر فان $F(\zeta)$ مستمر في D. لتكن $a\in D$ نقطة كيفية و K قرص دائري صغير مركزه a بحيث $\overline{K}\subset D$ ولنأخذ منحنى مغلق $\gamma_1\subset K$. لكل $\zeta\in\gamma_1$ لدينا:

$$\int_{\gamma_1} F(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_1}\left[\int_{\gamma} f(z,\zeta)dz\right]d\zeta$$

لكن $\int_{\gamma} f(z,\zeta)d\zeta = 0$ حسب مبرهنة كوشي. بالتالي $\int_{\gamma_1} F(\zeta)d\zeta = 0$ وحسب مبرهنة موريرا يكون $F(\zeta)$ تابع نظامي في القرص K وكون a نقطة كيفية من D فإن F تابع نظامي في D.

نأتي لإثبات صحة العلاقة (2). إذا كانت $\gamma_1 : |\zeta - a| = r$ فإنه لكل $\zeta \in K$ حيث K هي داخلية γ_1 تصح علاقة كوشي العامة:

$$F'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{F(t)}{(t-\zeta)^2}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{1}{(t-\zeta)^2}\left(\int_{\gamma} f(z,t)dz\right)dt$$

$$= \int_{\gamma}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z,t)}{(t-\zeta)^2}dt\right)dz = \int_{\gamma}\frac{\partial f(z,\zeta)}{\partial \zeta}dz$$

لنلاحظ أن إمكانية المبادلة بين التكاملين $\int_{\gamma_1}$ و $\int_{\gamma}$ ناتجة من استمرار التوابع المستكملة وكون المنحنيين γ و γ_1 محدودان.

بناءً على هذا يمكن النظر إلى التكامل في علاقة كوشي التكاملية بمختلف أشكالها كتكامل تابع لوسيط $F(z,a)$ وهنا الوسيط هو a.

(10-4) التحويلات التكاملية المركبة الشهيرة – التتمة 8:

(1-10-4) ساحة النظامية للتحويلات التكاملية:

تعريف (1): ليكن f(t) تابع معرف لكل $[0,+\infty)$. **تحويل لابلاس** للتابع f هو التكامل التابع لوسيط z التالي:

$$L[f(t)] = F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}.f(t)dt \qquad (1)$$

إذا كان f(t) تابع معرفة لكل $t \in (-\infty,\infty)$. **تحويل فورييه** لـ f هو:

$$F[f(t)]=F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} f(t)\,dt \qquad (2)$$

يعرف **التحويل بيتا** $\beta(z,\omega)$ بالعلاقة:

$$\beta(z,\omega)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{\omega-1}\,d\tau \; ; \; \mathrm{Re}\,z>0 \; , \; \mathrm{Re}\,\omega>0 \qquad (3)$$

إذا كان $f(t)$ تابع معرف لكل $t\in[0,+\infty)$. **تحويل مللين** لـ f هو:

$$M[f(t)]=F(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1} f(t)\,dt \qquad (4)$$

حيث هنا $t>0$; $t^z=e^{z\ln t}$ & $\ln t$ وحيد القيمة.

في الحالة الخاصة عندما $f(t)=e^{-t}$ ينقلب تحويل مللين إلى **تحويل أولر**:

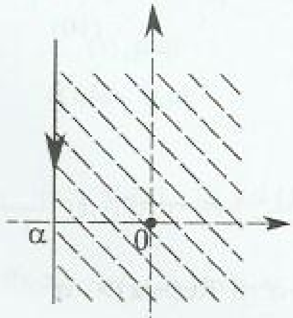
$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt \; ; \; t>0 \qquad (5)$$

إذا كان γ منحنى مفروض (مغلق أو غير منغلق) و $f(t)$ تابع مستمر على γ

التكامل من **نمط كوشي** الذي كثافته $f(t)$ ونواته $\dfrac{1}{\zeta-z}$ هو:

$$K[f(t)]=F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad (6)$$

تبين المبرهنات التالية أن ساحة النظامية لتحويل لابلاس هي نصف مستو أيمن ولتحويل فورييه هي شريط أفقي ولتحويل مللين هي شريط شاقولي.



الشكل (1)

مبرهنة (1): إذا كان:

1) $f(t)$ تابع مستمر في المجال $(0,\infty)$.

2) يوجد ثابت حقيقي $\alpha\in\mathbb{R}$ وثابت موجب c بحيث:

$$|f(t)| \le ce^{\alpha t} \;\; ; \;\; t \ge 0 \tag{7}$$

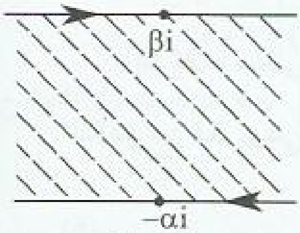
فإن تحويل لابلاس $L[f(t)]$ هو تابع نظامي في نصف المستوى الأيمن: (الشكل1)

$$\mathrm{Re}\, z > \alpha \tag{8}$$

الإثبات: التابع المستكمل $e^{-zt}f(t)$ في العلاقة (1) مستمر في النقطة (t,z) لكل $t \ni (0,\infty)$ & $z \ni C$ ونظامي في $D \equiv C$ وعندما $\mathrm{Re}\, z \ge \alpha + \delta \,,\, \delta > 0$ لدينا:

$$\left|e^{-zt}f(t)\right| \le ce^{(\alpha - \mathrm{Re}\, z)t} \le c.e^{-\delta t}$$

وبما أن التكامل المعتل $\int_0^\infty c.e^{-\delta t}dt$ متقارب (لماذا؟) فإن التكامل في (1) متقارب بانتظام في نصف المستوى $\mathrm{Re}\, z \ge \alpha + \delta$ وكون δ كيفية فإن التابع $F(z) = L[f(t)]$ نظامي في نصف المستوى (7).



الشكل (2)

مبرهنة (2): إذا كان:

1) f مستمر في $(-\infty,\infty)$.

2) يوجد ثوابت موجبة $c_2, c_1, \beta_1, \alpha_1$ بحيث:

$$\left.\begin{aligned} \left|f(t)\right| &\le c_1 e^{-\alpha t} \;\; ; \;\; t \ge 0 \\ \left|f(t)\right| &\le c_2 e^{\beta t} \;\; ; \;\; t \le 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

فإن تحويل فورييه $F[f(t)]$ هو تابع نظامي في الشريط الأفقي. (الشكل 2)

$$-\alpha < \mathrm{Im}\, z < \beta \tag{10}$$

الإثبات: لدينا:

$$F(z) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} \equiv F_1 + F_2$$

حسب المبرهنة (1) يكون التابع $F_1 = \int_0^\infty e^{izt}f(t)\,dt$ نظامي في نصف المستوى $\mathrm{Re}(-iz) > -\alpha$ أو $\mathrm{Im}\, z > -\alpha$ والتابع $F_2 = \int_{-\infty}^{0} e^{izt}f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{izt}f(t)\,dt$ نظامي في نصف المستوى $\mathrm{Re}(iz) > \beta$ أو $\mathrm{Im}\, z < \beta$.

بالتالي التابع $F=F_1+F_2$ أي تحويل فورييه نظامي في تقاطع نصفي المستويين السابقين، أي في الشريط (9).

نشير إلى الحالة الخاصة. إذا كان:

$$f(t)\equiv 0 \quad , \quad |t|>T \tag{10}$$

و f مستمر في $[-T,T]$ فإن $F[f(t)]$ هو تابع صحيح لأن: $F[f(t)]=\int_{-T}^{T} e^{izt}f(t)\,dt$.

مبرهنة (3) – إذا كان:

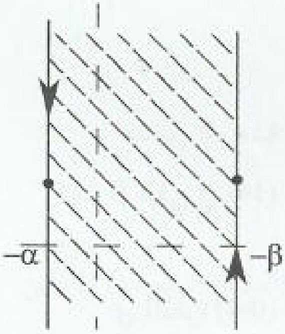
1) f تابع مستمر في $(0,\infty)$.

2) يوجد ثوابت c_2, c_1, β, α بحيث:

$$\begin{aligned}|f(t)|&\le c_1 t^{\alpha} \; ; \; t\in(0,1]\\ |f(t)|&\le c_2 t^{\beta} \; ; \; t\in[1,+\infty]\end{aligned} \qquad \alpha>\beta \tag{11}$$

فإن تحويل مللين $M[f(t)]$ هو تابع نظامي في الشريط الشاقولي:

$$-\alpha<\mathrm{Re}z<-\beta \quad \text{(الشكل3)} \tag{12}$$



الشكل (3)

الإثبات: لدينا:

$$F(z)=M[f(t)]=\int_0^1+\int_1^{\infty}\equiv F_1(z)+F_2(z)$$

عندما $\mathrm{Re}z\ge-\alpha+\delta \; ; \; \delta>0$ و $t\in(0,1]$ لدينا:

$\left|t^{z-1}f(t)\right|\le c_1 t^{\delta-1}$ والتكامل $\int_0^1 t^{\delta-1}dt$ متقارب

(لماذا؟) بالتالي التكامل $\int_0^1 t^{z-1}f(t)\,dt$ متقارب بانتظام من قيمته $F_1(z)$ في الساحة $\mathrm{Re}z\ge-\alpha+\delta$ لماذا؟ وعليه فإن $F_1(z)$ تابع نظامي في نصف المستوى $\mathrm{Re}z\ge-\alpha$.

عنـــدما $\delta>0$ ، $\operatorname{Re}z\le-\beta-\delta$ و $t\in[1,\infty)$ لــــدينا: $|t^{z-1}f(t)|\le c_2 t^{-\delta-1}$

والتكامل $\int\limits_1^\infty t^{-\delta-1}dt$ متقاربة وبالتالي التابع $F_2(z)=\int\limits_1^\infty t^{z-1}f(t)dt$ نظامي في نـصف المستوى $\operatorname{Re}z<-\beta$.

نستنتج مما سبق أن التابع $F=F_1+F_2$ نظامي في الشريط (12).

نتيجة (1): العلاقة بين تحويل فورييه وتحويل مللين.

بوضع $t=e^\tau$ في تحويل مللين (3) نجد:

$$\left[M(f(t))\right](z)=\int\limits_0^\infty t^{z-1}f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{z\tau}f\left(e^\tau\right)d\tau=\left[F\left(f(e^\tau)\right)\right](-iz)$$

وعليه فإن:

$$M[f(t)](z)=\left[F\left(f(e^t)\right)\right](-iz) \tag{13}$$

نتيجة (2): بملاحظة أن:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-t}\le 1\ ;\ t\in[0,1] \\ e^{-t}\le c_\beta t^{-\beta}\ ;\ t\ge 1\,,\ \beta>0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

نجد من المبرهنة (3) أن التابع غاما $\Gamma(z)$ نظامي في الشريط $0<\operatorname{Re}z<\beta$ وكون β كيفي في (14) فإن $\Gamma(z)$ هو تابع نظامي في نصف المستوى الأيمن:

$$\operatorname{Re}z>0 \tag{15}$$

في الفقرة (4-10-3) ندرس بالتفصيل التكامل من نمط كوشي ونجد من هي ساحة نظاميته.

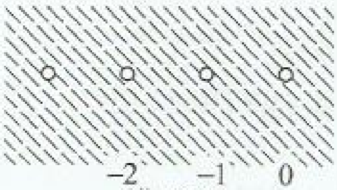
(4-10-2) الممدد النظامي لتحويل تكاملي:

1) ممدد التابع $\Gamma(z)$. من الواضح أن التابع $\Gamma(z)$ هو الممدد النظامي لتابع أولر الحقيقي $\Gamma(x)$ من المجموعة $E=(0,\infty)$ إلى الساحة $D:\operatorname{Re}z>0$.

نتساءل هل يمكن توسيع الساحة D بحيث نمدد $\Gamma(z)$ إليها؟

مبرهنة (4): يمكن تمديد تابع أولر $\Gamma(z)$ نظامياً إلى المستوى الموخوذ عند النقاط $0,-1,-2,...$ أي إلى الساحة (الشكل4):

$$D = C\setminus\{0,-1,-2,...\} \qquad (16)$$



الشكل (4)

الإثبات: لدينا $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x); x>0$ و $\Gamma(z)$ هو ممدد $\Gamma(x)$ إلى $\operatorname{Re} z>0$ أي أو: $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1) \;\; ; \;\; \operatorname{Re} z>0 \qquad (17)$$

التابع $\Gamma(z+1)$ نظامي في الساحة $D_1:\{\operatorname{Re} z>-1, z\neq 0\}$ (لماذا؟).

بالتالي العلاقة (17) تمثل الممدد النظامي للتابع $\Gamma(z)$ إلى الساحة D_1.

الآن الطرف الأيمن من (17) ممدد نظامياً الى:

$$D_2=\{\operatorname{Re} z>-2,\ z\neq 0,-1\}$$

وتم تمديد $\Gamma(z)$ إلى D_2:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\,\frac{1}{z+1}\;\Gamma(z+2) \;\; ; \;\; z\in D_2$$

بمتابعة العملية نجد المطلوب.

اعتمدنا في عملية التمديد النظامي للتابع $\Gamma(z)$ على العلاقة التابعية (17) لكن عملياً هناك طريقة أخرى.

مبرهنة (5): يعطى الممدد النظامي للتابع $\Gamma(z)$ بالعلاقة:

$$\Gamma(z)=\sum_{0}\frac{(-1)^n}{z+n}\;\frac{1}{n!}+\int_{1}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (18)$$

من نصف المستوى $\operatorname{Re} z>0$ إلى الساحة (16).

الإثبات: بطريقة تجزيء المنحنى التكاملي: لدينا $F=\int_0^1+\int_1^\infty=F_1+F_2$

التابع F_2 صحيح و F_1 نظامي في الساحة $\text{Re}\,z > 0$ ويتم المطلوب إذا أوجدنا الممدد النظامي للتابع F_1 ولهذا الغرض نستخدم سلسلة ماك لوران.

السلسلة $e^{-1} = \sum \frac{1}{n!} t^n$ متقاربة بانتظام في $[0,1]$ وضرب الطرفين بالتابع $(\text{Re}\,z \geq 0) t^{z-1}$ لايؤثر في التقارب المنتظم.

$$F_1 = \int_0^1 \left(t^{z-1} \sum_0 \frac{(-1)^n}{n!} t^n \right) dt = \sum_0 \frac{(-1)^n}{z+n} \cdot \frac{1}{n!} \;\; ; \;\; \text{Re}\,z \geq 1$$

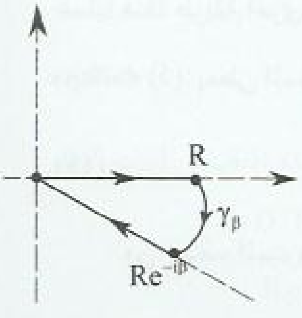
كل حد من حدود هذه السلسلة هو تابع نظامي في المستوى الموخوذ عند $0, -1, -2, \ldots$ على الترتيب. بعزل هذه النقاط بدوائر صغيرة نصف قطرها ρ نجد الساحة D_o التي فيها يكون $\left| \frac{1}{z+n} \right| \leq \frac{1}{\rho} \; ; \; z \in D_o$ والسلسلة متقاربة بانتظام في D_o وبالتالي مجموعها F_1 تابع نظامي في D_o ومنه المطلوب.

نتيجة (3) : تعطي العلاقة:

$$\beta(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$$

الممدد النظامي للتحويل β المعرف عندما $0 < \text{Re}\,z$ و $0 < \text{Re}\,\omega$ إلى كل القيم المركبة لـ z و ω.

2) ممدد تحويل لابلاس. عند تمديد تحويل أولر $\Gamma(z)$ اعتمدنا طريقة تجزيء المنحنى التكاملي. نمدد تحويل لابلاس بالاعتماد على طريقة تدوير المنحنى التكاملي.



الشكل (5)

مبرهنة (6): إذا كان $f(\zeta)$ تابعاً نظامياً ومحدوداً في القطاع الزاوي:

$$|\arg \zeta| \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad (19)$$

فإن بالإمكان تمديد تحويل لابلاس $L[f(t)]$ نظامياً إلى القطاع:

$$|\arg\zeta| < \frac{\pi}{2} + \alpha \tag{20}$$

الإثبات: لنأخذ التكامل:

$$F_\beta(z) = \int_{\ell_\beta} e^{-z\zeta} f(\zeta)\, d\zeta \tag{21}$$

$$\ell_\beta : \arg\zeta = -\beta \;,\; 0 < |\zeta| < \infty \;,\; 0 \le \beta < \alpha \tag{22}$$

ولنبرهن أن:

$$F_\beta(x) = F_o(x) = \int_o^\infty e^{-xt} f(t)\, dt \;;\; x > 0 \tag{23}$$

نأخذ المنحنى المغلق c_R المكون من القطعة $[0,R]$ و $\left[Re^{-i\beta},0\right]$ وجزء الدائرة $\gamma_\beta : |\zeta| = R \;;\; -\beta \le \arg\zeta \le 0$ (الشكل5). عندئذ من مبرهنة كوشي الأساسية يكون $0 = \int_{c_R} e^{-x\zeta} f(\zeta)\, d\zeta$.

من جانب آخر لدينا $|f(\zeta)| \le M \;;\; |\arg\zeta| \le \alpha, o \le |\zeta| < \infty$ ومن أجل $\zeta \in \gamma_R$ لدينا $\zeta = Re^{i\varphi}; -\beta \le \varphi \le 0$ بالتالي:

$$\left|\int_{C_R} e^{-x\zeta} f(\zeta)\, d\zeta\right| \le M \int_{C_R} \left|e^{-x\zeta}\right| |d\zeta| = MR \int_{-\beta}^{o} e^{-xR\cos\varphi} d\varphi$$

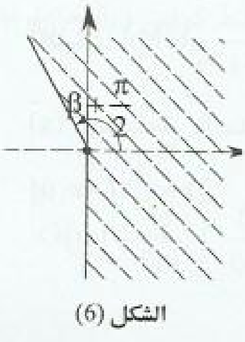
$$< MR.\beta e^{-xR\cos\varphi} ;\; x > 0$$

وعندما $R \to \infty$ يؤول الطرف الأيمن إلى الصفر.

أصبح لدينا:

$$\int_{C_R} = \int_o^R + \int_{\gamma_R} + \int_{Re^{-i\beta}}^{o} = 0$$

وعندما $R \to \infty$ نجد أن العلاقة (23) صحيحة.



الشكل (6)

على ℓ_β لدينا: $\zeta = \rho e^{-i\beta} \;; 0 \le \rho < \infty$ بالتالي:

$$F_{\beta}(z)=\int_{0}^{\infty} e^{-\rho(ze^{-i\beta})}.f\left(\rho e^{-i\beta}\right)e^{-i\beta}d\rho \;\; ; \;\; 0\leq\rho<\infty$$

وبما أن $\left|f\left(\rho^{-i\beta}\right)\right|\leq M \; ; \; 0\leq\rho<\infty$ فإن $F_{\beta}(z)$ تابع نظامي في $\operatorname{Re}\left(ze^{-i\beta}\right)>0$ و F_{0} نظامي في $\operatorname{Re}z>0$.

بوضع:

$$\phi(z)=\begin{cases}F_{0}(z) \;\; ; & \operatorname{Re}z>0\\ F_{\beta}(z) \;\; ; & \operatorname{Re}\left(ze^{-i\beta}\right)>0\end{cases}$$

وملاحظة أن $F_{0}(x)\equiv F_{\beta}(x) \; ; \; x>0$ نجد أن $\phi(z)$ تابع نظامي في تقاطع الساحتين $\operatorname{Re}z>0$ و $\operatorname{Re}\left(ze^{-i\beta}\right)>0$ أي في القطاع الزاوي $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}+\beta$ وكون $\beta>0$ كيفي تحقق $0\leq\beta<x$ فإن F ممدد نظامياً إلى القطاع $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}+\alpha$.

بنفس الأسلوب نجد أنه إذا كان $-\alpha\leq\beta<0$ فإن F ممدد نظامياً إلى القطاع $-\frac{\pi}{2}-\alpha<\arg<\frac{\pi}{2}$.

نستنتج أن $L[f]$ ممدداً نظامياً إلى القطاع (20) .

مثال (1): بين أن التابع $F(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt}}{t+1}dt, \; x>0$ ممدد نظامياً إلى المستوى المقطوع على طول $[-\infty,0)$.

الحل: بما أن التابع $F(\zeta)=\frac{1}{\zeta+1}$ نظامي ومحدود في القطاع $|\arg z|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$ بالتالي $F(x)$ يسمح بالتمديد النظامي إلى القطاع $|\arg z|<\frac{\pi}{2}+\alpha$ أي إلى الساحة $D=C\setminus(-\infty,0]$.

(3-10-4): خواص التكامل من نمط كوشي:

إن التكامل في علاقة كوشي التكاملية وأي تكامل في التحويلات السابقة هو تكامل تابع لوسيط ويمكن بناءً على ذلك استنتاج خواص تلك التكاملات ونتوقف عند خواص التكامل من نمط كوشي:

$$F(\zeta,z)=K[f(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (24)$$

الخاصة (1): إذا كان $\gamma=\gamma_1...\gamma_n$ منحنى محدود ويقسم المستوى إلى عدد منته أو غير منته m من الساحات D_k فإن التكامل في (24) يعرف في كل ساحة من هذه الساحات تابعاً نظامياً.

$$F(z)=F_k(z)\ ;\ z\in D_k \quad \text{لماذا؟} \qquad (25)$$

والتوابع F_k بشكل عام مختلفة فيما بينها فهي بالتالي ليست ممددات نظامياً (تحليلياً) لبعضها البعض في الحالة العامة.

على سبيل المثال إذا كان $\gamma:|\zeta|=1$ فإن:

$$F=K[f(\zeta)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}1 & ;\ |z|>1\\ 0 & ;\ |z|<1\end{cases}$$

والتابع $F=F_1=1\ ;\ |z|>1$ ليس ممدداً نظامياً للتابع $F=F_2=0\ ;\ |z|<1$ وبالعكس F_2 ليس ممدداً لـ F_1.

الخاصة (2): نقطة اللانهاية $z=\infty$ هي عادية للتكامل من نمط كوشي وبالتحديد فإن:

$$F(\infty)=0$$

لكل منحنى محدود γ.

الإثبات: بوضع $z=\frac{1}{\omega}$ و $F(z)=G(\omega)$ نجد: $G(\omega)=\frac{\omega}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta\omega-1}d\zeta$

وبما أن γ محدود فإن $\zeta\omega-1\neq 0$ عندما $\omega\to 0$ والنقطة $\omega=0$ عادية لـ $G(\omega)$ وبالتحديد $G(o)=0$ أي $z=\infty$ عادية للتكامل (23) وقيمته فيها معدومة.

الخاصة (3): إذا كان γ غير محدود (للتبسيط نأخذ $\gamma\equiv ox$) وكان:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt, |f(t)|\leq\frac{c}{(1+|t|)^{\alpha}}\ ;\ t\in(-\infty,\infty)\ ,\ \alpha>0 \qquad (26)$$

فإن:

$$F(z)=\begin{cases}F_1(z) & ; \quad \operatorname{Im} z>0\\ F_2(z) & ; \quad \operatorname{Im} z<0\end{cases} \qquad (27)$$

و F_1 تابع نظامي في النصف العلوي و F_2 نظامي في النصف السفلي.

الخاصة (4): إذا كان $f(t)$ مستمر في $[0,\infty)$ وكان:

$$|f(t)|\leq\frac{c}{(1+|t|)^{\alpha}}\ ;\ \alpha>0\ ,t\geq 0 \qquad (28)$$

فإن التكامل من نمط كوشي:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (29)$$

هو تابع نظامي في الساحة :

$$D=C\setminus[0,\infty) \qquad (30)$$

الخاصة (5): إذا كان $f(\zeta)$ تابع نظامي على المنحنى γ فإن التكامل من نمط كوشي يسمح بالتمديد النظامي على طول γ.

يتم البرهان بطريقة سحب المنحنى التكاملي (تغيير المتحول).

ينتج إذا كان γ مغلق و $f(\zeta)$ مستمر على γ فإن التكامل من نمط كوشي هو تابع نظامي داخل γ.

مثال (2): أثبت إمكانية تمديد التكامل: $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\frac{d\zeta}{(\zeta^2+1)(\zeta-z)}$

من القرص $E:|z|<2$ إلى الساحة $D\equiv C$.

الحل: لدينا $\gamma:|\zeta|=2$ و $F(z)$ نظامي داخل g ومن أجل كل $2<R$ نضع

$$F_R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{(\zeta^2+1)(\zeta-z)} \quad ; \quad |z|>R$$

إن $F_\beta(z)$ نظامي في القرص $|z|=R$ ويتم المطلوب إذا بيّنا أن:

$$F_R(z)\equiv F(z);|z|<2$$

التابع $\frac{1}{\zeta^2+1}$ يفقد نظاميته في النقطتين $\pm i$ والتابع المستكمل نظامي في الحلقة $|z|>1$, $|z|<|\zeta|<\infty$ وحسب مبرهنة كوشي: $\int_{|\zeta|=2}=\int_{|\zeta|=R} \quad ; \quad |z|<2$

الخاصة (6): إذا كان $f(\zeta)$ نظامياً في الساحة المغلقة ثنائية الاتصال D مستمراً حتى حدودها $\Gamma=\Gamma_o\cup\Gamma_1$ حيث Γ_o يحتوي Γ_1 فإن العلاقة:

$$F_{\Gamma_o}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{31}$$

تعطي الممدد النظامي للتابع $F(z)$ إلى الساحة D_o التي هي داخليه Γ_o.

الإثبات: التابع المستكمل $\frac{f}{\zeta-z}$ نظامي في D ولدينا: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}$.

التكامل في الطرف الأيسر يعين تابعاً نظامياً في D_o والتكامل في الطرف الأيمن يساوي $F(z)$ بالتالي $F_{\Gamma_o}(z)=F(z)\ ;\ z\in D_o$.

على المحور الحقيقي $\gamma\equiv ox$ تصح الخاصة:

الخاصة (7): إذا كان $f(\zeta)$ نظامياً في الشريط الأفقي:

$$-a\le \operatorname{Im}\zeta\le 0 \tag{32}$$

$$\left|f(\zeta)\right|\le\frac{c}{(1+|\zeta|)^\alpha} \ ; \ \alpha>0\,,-a\le \operatorname{Im}\zeta\le 0 \tag{33}$$

فإن التكامل:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (34)$$

يسمح بالتمديد النظامي إلى نصف المستوى:

$$\operatorname{Im} z > -a \qquad (35)$$

ويعطى الممدد $F_o(z)$ بالعلاقة:

$$F_o(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty}\frac{f(l)}{\zeta-z}d\zeta \ ; \ \operatorname{Im} z>-a \qquad (36)$$

بهذا نكون قد قدمنا ثلاث طرائق لإنجاز الحدد النظامي لتابع معطى على شكل صيغة تكاملية.

1) طريقة تجزيء المنحنى التكاملي (تحويل Γ).

2) طريقة تدوير المنحنى التكاملي (تحويل لابلاس).

3) طريقة سحب المنحنى التكاملي (التكامل من نمط كوشي).

تمارين محلولة

تمرين(1): حدد أوسع ساحة نظامية D لكل من التوابع f التالية:

$$\frac{1}{Shz}\ (1 \qquad \frac{z}{e^{iz}+1}\ (2 \qquad \frac{(x-1)-iy}{4z^2+i}\ (3 \qquad \frac{z^2+1}{x^2-y^2}\ (4$$

الحل:

التوابع المفروضة كسرية وبالتالي ساحة النظامية هي كل المستوى C باستثناء النقاط التي تعدم المقام ولاتعدم البسط.

$$C\backslash\{\pi ki\}\ (1 \qquad C\backslash\{\pi(1+2k)\}\ (2 \qquad C\backslash\left\{\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i\right\}\ (3$$

$$C\backslash\{y=\pm x\}\ (4$$

تمرين(2): أجب عن الأسئلة التالية:

1) بين أن التابع $f=e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right]$ صحيح.

2) أوجد العلاقة بين α و β كي يكون التابع $f=\alpha x+\beta y+\gamma$ صحيحاً.

3) أوجد قيمة a ، b كي يكون التابع $f=\left(x^2+ay^2-2xy\right)+i\left(bx^2-y^2+2xy\right)$ صحيحاً واحسب $f'(i)$.

الحل:

1) يكفي التحقق من أن $v=\operatorname{Im}f, u=\operatorname{Re}f, v_y, v_x, u_y, u_x$, توابع مستمرة وتحقق شرطي كوشي – ريمان في كل نقطة من C.

2) نكتب f بدلالة المتحول المركب z وذلك بأن نضع:

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}, y=\frac{z+\overline{z}}{2i}\Rightarrow f=\frac{\alpha}{2}(z+\overline{z})+\frac{\beta}{2i}(z+\overline{z})+\gamma$$

كي يكون f صحيحاً يجب أن يتحقق الشرط $f_{\bar{z}}=0$ لكل z ويتم ذلك إذا كان $\alpha+i\beta=0$.

3) باستخدام شرطي كوشي – ريمان نجد $b=1, a=-1$ و $f=(1+i)z^2$ و:

$$f'(z)|i=(u_x+iv_x)|_{(0,1)}=\left[2(1+i)z\right]_i=-2+2i$$

تمرين (3): ليكن $f=u+iv$ تابع نظامي في الساحة D.

1) هل $g=v+iu$ نظامي في D؟

2) بيّن أن $\overline{f(\bar{z})}$ نظامي في D.

الحل:

1) ليس بالضرورة أن يكون g نظامياً في D، فمثلاً من أجل التابع الصحيح $f=z^2$ لدينا $g=2xy+i(x^2-y^2)$ غير نظامي في أي ساحة.

2) نفرض أن $\overline{f(\bar{z})}=u_1+iv_1$.

يتم المطلوب إذا كانت $v_1, u_1, (u_1)_x, (u_1)_y, (v_1)_x, (v_1)_y$ مستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان في D.

لدينا:

$$\overline{f(\bar{z})}=u_1(x,y)+iv_1(x,y)=u(x,-y)-iv(x,-y)$$
$$\Rightarrow u_1(x,y)=u(x,-y), v_1=-v(x,-y)$$

لكن: $u_x=(u_1)_x=v_y=(v_1)_y\ ,\ u_y=-(u_1)_y=-v_x=(v_1)_x$

أي أن التوابع مستمرة وتحقق في D الشرطين:

$$(u_1)_x=(v_1)_y \quad \text{و} \quad (u_1)_y=-(v_1)_x$$

تمرين (4): ليكن g(t) تابع مستمر في $[-r,r]$ لكل $0<r$. بيّن أن التابع المعطى بالصيغة التكاملية $f=\int_0^T e^{zt}\cdot g(t)dt$ صحيح.

الحل:

لدينا التابع e^{zt} صحيح بالنسبة لـ t والسلسلة $e^{zt} = \sum_{0} \frac{z^n}{n!} t^n$ متقاربة بانتظام في المجال المغلق والمحدود $|t| \le r$ وكون g تابع مستمر في $[-r,r]$ فلن يتأثر التقارب المنتظم إذا ضربنا الطرفين بهذا التابع ثم كاملنا حداً حداً والسلسلة الناتجة متقاربة بانتظام من التابع المفروض f وبملاحظة أن r كيفي فإن f تابع صحيح.

تمرين (5): حل مسألة كوشي ذات القيم الابتدائية:

$$\left(1-z^2\right)f'' - 6zf'(z) + 4f(z) = 0$$
$$f(0) = 1, f'(0) = 0$$

الحل:

إن $z_o = 0$ نقطة عادية للمعادلة ويمكن البحث عن الحل بالشكل $f = \sum_{0} c_n z^n$ حيث $c_1 = 0, c_o = 1$ نحسب f'', f' ونعوض في المعادلة ونطابق أمثال الحدود المتشابهة نحصل على علاقة تدريجية تعطي $c_2, \dots, c_n \dots$ بدلالة c_1, c_o ونجد:

$$f = \sum_{0} (n+1) z^{2n} = \frac{1}{\left(1-z^2\right)^2} \; ; \; |z| < 1$$

تمرين (6): أثبت أن $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ تابع توافقي في C ثم أوجد التابع الصحيح $f = u + iv$ باستخدام طريقة مللين – تومسون.

الحل: التوابع u_{yy}, u_{xx}, u مستمرة في C وتتحقق معادلة لابلاس.

$$f(z) = \int_{\gamma} \left[u_x(z,0) - i\, y_y(z,0)\right] dz + c$$
$$= -z^3 + 2z + c$$

تمرين (7):

1) أثبت أنه إذا كان v, u تابعان توافقيان في الساحة D فإن $u.v$ توافقي في D.

2) أوجد جميع التوابع التوافقية ذات الشكل $u = \varphi(x \cdot y)$.

الحل:

1) علينا التحقق من أن $g = u.v$, g_{xx}, g_{yy} مستمرة وتحقق معادلة لابلاس $g_{xx} + g_{yy} = 0$ في D.

لدينا فرضاً $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

وإذا كان $f = u + iv$ فإن $u_y = -v_x$, $u_x = v_y$ من أجل $g = u \cdot v$ لدينا:

$$g_x = u \cdot v_x + v \cdot u_x , g_{xx} = u \cdot v_{xx} + 2u_x \cdot v_x + v \cdot u_{xx}$$
$$g_{yy} = u \cdot v_{yy} + 2u_y \cdot v_y + v \cdot u_{yy}$$
$$= u \cdot v_{yy} - 2v_x u_x + vu_{xx}$$

بالتالي:

$$g_{xx} + g_{yy} = u\left(v_{xx} + v_{yy}\right) + v\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0$$

2) نشكل معادلة لابلاس:

$$u_x = \varphi'(xy) \cdot (xy) = y \cdot \varphi'(xy) \ , \ u_y = x\varphi'(xy)$$
$$u_{xx} = y^2 \varphi''(xy), u_{yy} = x^2 \varphi''(xy)$$
$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = \left(y^2 + x^2\right)\varphi''(xy) = 0$$

بوضع $xy = t$ نجد المعادلة التفاضلية: $\left(y^2 + x^2\right)\varphi''(t) = 0$ التي حلها العام هو $\varphi(t) = c_1 t + c_2$، وعليه فإن:

$$u = \varphi(xy) = c_1 xy + c_2; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

تمرين (8): بيّن فيما إذا كان يوجد تابع نظامي $f = u + iv$ بحيث:

1) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ 2) $v = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

الحل:

1) التابع u توافقي في $D = \setminus\{0\}$ وبالتالي يوجد تابع f نظامي في D.

2) التابع v غير توافقي في أية ساحة D ولايوجد تابع f نظامي بحيث $v = \operatorname{Im} f$.

تمرين (9): شكل التابع النظامي $f = u + iv$ أو $f = \rho e^{i\theta}$ إذا علمت:

1) $u = e^{x}\left(x\cos y - y\sin y\right);\ f(0) = i$

2) $u = \alpha x^{2} - y^{2} + xy$

3) $\theta = xy\ ;\ f \neq 0$

4) $u + v = \left(x - y\right)\left(x^{2} + 4xy + y^{2}\right)$.

الحل:

1) من شرطي كوشي – ريمان نجد $f = ze^{z} + ic$ ، وبما أن $f(0) = i$ فإن $c = 1$ ومنه $f = ze^{z} + i$.

2) يجب أولاً تحديد α كي يكون u توافقياً.

من معادلة لابلاس نجد أن $\alpha = 1$ وعندئذ نجد:

$$f = \left(1 - \frac{i}{2}\right)z^{2} + c$$

3) إذا كان $f = \rho e^{i\theta}$ تابع نظامي في D و $f \neq 0$ فإن التابع (الفرع):

$$\ln f(z) = \ln\rho + i\theta = U + iV$$

نظامي في D ولدينا فرضاً $V = \operatorname{Im}\ln f = xy$ نوجد المرافق التوافقي U من شرطي كوشي – ريمان: $V = \frac{x^{2}}{2} - \frac{y^{2}}{2} + c$ وعليه فإن:

$$\ln f(z) = \frac{1}{2}z^{2} + c \Rightarrow f = Ae^{z^{2}/2};\ A > 0$$

4) لدينا فرضاً $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ ومن جهة أخرى:

$$u_x + v_x = \left(x^{2} + 4xy + y^{2}\right) + \left(x - y\right)\left(2x + 4y\right)$$

$$u_y + v_y = -\left(x^{2} + 4xy + y^{2}\right) + \left(x - y\right)\left(4x + 2y\right) = -v_x + u_x$$

من جملة المعادلتين السابقتين نجد أن:

$$u_x = 3\left(x^2 - y^2\right), \; v_x = 6xy$$
$$\Rightarrow f(z) = z^3 + c$$

تمرين (10): حل مسألة ديريخليه التالية:

يطلب ايجاد التابع التوافقي g في نصف المستوى العلوي بين المنحنيين $x^2 - y^2 = 2$ و $x^2 - y^2 = 4$ والذي يأخذ القيمة 3على الحدود اليسرى، والقيمة 7 على الحدود اليمنى.

الحل: لدينا $x^2 - y^2 = \operatorname{Re} z^2$ تابع توافقي بالتالي المنحنيات المحيطية هي منحنيات سوية لتابع توافقي g ولكي نحقق الشروط الحدية المعطاة نفرض أن:

$$g = A\left(x^2 - y^2\right) + B = \operatorname{Re}\left(Az^2 + B\right) \; ; \; A, B \in \mathbb{R}$$

عندما $g = 3$ و $x^2 - y^2 = 2$ يكون: $A.2 + B = 3$، وعندما $g = 7$ و $x^2 - y^2 = 4$ يكون $A.4 + B = 7$.

بحل جملة المعادلتين نجد: $g = 2\left(x^2 - y^2\right) - 1$

تمرين (11): احسب $I = \int_\gamma f \, dz$

1) $\gamma, \bar{z}^2$ المثلث الذي رؤوسه $2+2i, 2, 0$.

2) $\gamma : t + it^2 \; ; \; 0 \le t \le 1 \quad , \quad x - 2xyi$

3) $2z+1$ في الحالات $\gamma_1 = [-i, 1]$ ثم $\gamma_2 = [-i, 0] \cup [0, 1]$

ثم $\gamma_3 : z(t) = e^{it} \; -\frac{\pi}{2} \le t \le 0$

4) $\frac{1}{z-i}, \; \gamma : |z-i| = 2$ مغطاة مرتين سلباً.

5) $\gamma, \frac{3z-2}{z^2-z}$ مضلع مغلق يحتوي 0 ولايحتوي 1.

6) $\frac{z}{(z+2)(z-1)}, \; \gamma : |z+2| = 2$ مغطى ثلاث مرات إيجاباً.

7) $\dfrac{2z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}, \gamma$ منحنى الليمنسكات ذو الشكل ∞ والذي فرعه الأيسر موجه إيجاباً ويحتوي 1- وفرعه الأيمن موجه سلباً ويحتوي 1+.

الحل:

لايمكن تطبيق مبرهنة كوشي في 1) – 3) لأنه في (1) التابع المستكمل غير نظامي، وفي (2) التابع غير نظامي، وγ غير مغلق، وفي (3) المنحنيات $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ غير مغلقة وتحسب هذه التكاملات بالطرائق التقليدية الواردة في الفصل الثاني:

1) $$I=\int_0^2 + \int_2^{2+2i} + \int_{2+2i}^0 = I_1+I_2+I_3$$

على $[0,2]$ لدينا:

$$z=x \Rightarrow dz=dx\,,\ \overline{z}^2=x^2\ ;\ 0\le x\le 2$$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$$

على $[2,2+2i]$ لدينا: $I_2=\dfrac{-(2-2i)^2}{3}+\dfrac{8}{3}$

على $[2+2i,0]$ لدينا: $I_3=-(1+i)(1-i)^2.\dfrac{8}{3}$

وعليه فإن $I=\dfrac{16}{3}+\dfrac{32i}{3}$

2) و 3) بنفس أسلوب 1).

4) $I=-4\pi i$ (لماذا؟)

نحيط 0 بدائرة صغيرة γ_1 نجد:

5) $$I=\int_\gamma\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int_{\gamma_1}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz=2(2\pi i)+0=4\pi i$$

6) و 7) بنفس أسلوب 5).

تمرين (12) اختر تابع مستكمل $f(z)$ ومنحني تكاملي مغلق γ مناسبين وطبق مبرهنة كوشي لإثبات صحة ما يلي:

$$\int_0^{\pi/2} e^{a\cos t}\cos(t+a\sin t)\,dt=\frac{\sin a}{a},\ a>0 \qquad (1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-b^2+x^2)}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}=\pi\ ;\ 0<b<1 \qquad (2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-b^2+x^2)\cos kx+2bx\sin kx}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}=0\ ,\ 0<k<1 \qquad (3$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}+1} \qquad (4$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

الحل:

1) نأخذ $f=e^z$ و γ المنحنى المكون من جزء الدائرة $|z|=a$ الواقع في الربع الأول، والقطعتين $[ia,0]$ و $[0,a]$:

$$0=\int_\gamma e^zdz=\int_0^a e^xdx+ai\int_0^{\pi/a} e^{aeit}dt-i\int_0^a e^{iy}dy$$

بأخذ الجزء التخيلي في التكاملين الأخيرين نجد المطلوب.

2) نختار $f=\frac{1}{1+z^2}$ و γ منحنى المستطيل الذي رؤوسه $-a,-a+ib,a+ib,a$:

$$0=\int_\gamma\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2}+i\int_a^b\frac{dy}{(1+a^2-y^2)+2iay}-$$

$$-i\int_0^b\frac{dy}{(1+a^2-y^2-2aiy)}-\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(1+x^2-b^2-2ibx)}$$

والآن نجد المطلوب بأخذ النهاية عندما $a \to \infty$.

3) نختار $f = \frac{e^{ikz}}{z}$ و γ منحنى مستطيل مناسب.

4) نختار $f = e^{-z^2}$ و γ حدود القطاع الزاوي $0 \le |z| \le R$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{8}$

تمرين (13): باستخدام علاقة كوشي وتبعاتها. احسب $I = \int_\gamma f dz$.

1) $\frac{z^2 e^z}{2z+i}$, $\gamma : |z| = 1$ مغطاة ثلاث مرات.

2) $\frac{\cos z}{z^2(z-1)}, \gamma_1 : |z| = \frac{1}{3}, \gamma_2 : |z-1| = \frac{1}{3}, \gamma_3 : |z| = 2$

3) $\frac{\sin z}{(z-1)^3}, \gamma : z(t) = 2e^{it} + 1; 0 \le t \le 2\pi$

4) $\frac{z+i}{z^3+2z^2}, \gamma_1 : |z| = 1, \gamma_2 : |z+2-i| = 2, \gamma_3 : |z-2i| = 1$

الحل:

1) بما أن $z_0 = -\frac{i}{2}$ داخل γ فإن:

$$I = 3.2\pi i \left(z^2 e^z\right)|_{z_0} = -\frac{3\pi i}{4} e^{-i/2}$$

2) بما أن $z_0 = 0$ فقط داخل γ_1 فإن:

$$I_1 = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{\cos z}{z-1}\right)'\Bigg|_{z_0} = -2\pi i$$

على γ_2 لدينا $z_0 = 1$ فقط داخل γ_2 ومنه:

$$I_2 = 2\pi i \left(\frac{\cos z}{z^2}\right)\Bigg|_{z0} = 2\pi i \cos 1$$

على γ_3 لدينا $z_0 = 0$ و $z_1 = 1$ داخل γ_3 ومنه:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2\pi i(\cos 1 - 1)$$

3) $$I = \frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''|_1 = -\pi i \sin 1$$

4)على γ_1 نجد: $? = \left.\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{z+i}{z+2}\right)'\right|_0 = I_1$ وعلى γ_2 نجد: $I_2 = ?$، وعلى γ_3 نجد $I_3 = ?$

تمرين (14): احسب $I = \int_{|z|=1} \frac{e^{iz^n}}{z} dz$ واستفد منه في إثبات العلاقة:

فقط
$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos n\varphi} \cos(k \sin n\varphi) d\varphi = 2\pi; \; n \in \mathbb{N}$$

الحل: نستخدم علاقة كوشي ونضع: $z = e^{i\varphi}; 0 \le \varphi \le 2\pi$ ثم نقارن الطرفين.

تمرين (15): ليكن $\gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$f = \int_\gamma \frac{\zeta^2 - \zeta + 2}{\zeta - z} d\zeta$$

حيث $\zeta = z$ داخل γ. احسب $f(1), f'(i), f''(i)$.

الحل: لدينا:

$$f(z) = 2\pi i(\zeta^2 - \zeta + 2)\Big|_{\zeta=z}$$

$$= 2\pi i(z^2 - z + 2) \Rightarrow f(1) = 4\pi i$$

$$f'(i) = -2\pi(2+i), \; f''(i) = 4\pi i$$

~~**تمرين**~~ (16): ليكن f تابع نظامي و $|f| \le \frac{1}{1-|z|}$ في قرص الوحدة $|z| < 1$. أثبت أن: لاحظ

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le (n+1)!\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

الحل: يكفي أن نضع $M = \frac{1}{1-r}$ في متراجحات كوشي وتصغير النتيجة لكل قيم $r \in [0,1]$.

تمارين غير محلولة

تمرين (1): حدد أوسع ساحة D فيها يكون كل من التوابع f التالية نظامياً.

1) $thz - ctgz$ 2) $\dfrac{z^2-1}{e^z-i}$

3) $\dfrac{2x+iy}{x^2+y^2-2}$ 4) $\dfrac{z^2-1}{x^2+y^2}$

تمرين (2): أجب عن السؤالين التاليين :

1) أوجد العلاقة بين α , β , γ كي يكون التابع التالي تابع صحيحاً.

$$f=(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)y+\alpha+\beta+\gamma$$

2) عين b,a كي يكون التابع التالي صحيحاً واحسب f':

$$f=\cos x\,(chy+ashy)+i\sin x\,(chy+bshy)$$

تمرين(3): ليكن f تابع نظامي في الساحة D أثبت:

إذا كان $\overline{f}$ نظامي في D فإن $f\equiv const$ في D.

تمرين (4): a) حل مسألة كوشي الابتدائية التالية :

$$f''-zf'(z)-f(z)=0\,;\,f(0)=1,\,f'(0)=0$$

b) أثبت أن كل حل لمعادلة ماتيه: $f''+(a+b\cos z)f=0$ وكل حل لمعادلة فابير: $f''-(z^2-a^2)f=0$ هو تابع صحيح.

تمرين (5): أثبت أن التابع المعطى بالصيغة التكاملية:

$$f(z)=\int_0^1\frac{g(t)}{1-zt^2}dt\,;\,|z|<1$$

نظامي في قرص الوحدة المفتوح.

تمرين (6): أثبت أن التابع $u=\dfrac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2}$ توافقي في ساحة D يطلب تعيينها ثم أوجد التابع النظامي $f=u+iv$.

تمرين (7):

1) أثبت أنه إذا كان كل من u و v تابع توافقي في ساحة D فإن $au+bv$ توافقي في D لكل $b,a \in \mathbb{R}$.

2) أوجد جميع التوابع التوافقية ذات الشكل $u=g(x^2+y)$.

تمرين (8): بين فيما إذا كان يوجد تابع نظامي $f=u+iv$ بحيث: هام

$v=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$ (1

$u=e^{y/x}$ (2

تمرين (9): أوجد التابع النظامي $f=u+iv$ أو $f=\rho e^{i\theta}$ بحيث:

$v=x^2-y^2-5y+1\ ,\ f(0)=1+i$ -1

$\theta=\varphi+r\sin\varphi\ ,\ f(1)=e$ -2

$u-v=e^x(\cos y-\sin y)$ -3

تمرين (10): شكل التابع التوافقي g في الشريط $-1\le \operatorname{Re} z\le 3$ والذي يأخذ القيمة 0 على الحدود اليسرى والقيمة 4 على الحدود اليمنى.

تمرين (11): احسب قيمة التكامل I مستخدماً مبرهنة كوشي لكل من:

$\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+4}dz$ (1 حيث $\gamma:|z+2i|=1$ مكررة مرتين.

$\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ (2 حيث $\gamma:|z|=2$ مكررة ثلاث مرات.

$\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ (3 حيث γ القطع الناقص $x^2+4y^2=1$

تمرين (12): مستعيناً بمبرهنة كوشي. اختر تابع مستكمل f(z) ومنحني تكاملي γ مناسبين لإثبات أن:

(1

$$\int_0^T e^{at}\cos bt\,dt = \frac{e^{aT}\left(a\cos bT + b\sin bT\right) - a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^T e^{at}\sin bt\,dt = \frac{e^{at}\left(a\sin bT - b\sin bT\right) + b}{a^2+b^2}$$

توجيه: خذ $\gamma = \left[0,(a+ib)T\right], f = e^z$

(2

$$\int_0^T \sin at.\operatorname{ch}bt\,dt = \frac{b\sin aT\cdot \operatorname{sh}bT - a\cos aT\operatorname{ch}bT + a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^T \cos at.\operatorname{sh}bt\,dt = \frac{b\cos aT\cdot \operatorname{ch}bT + a\sin aT\cdot \operatorname{sh}bT - b}{a^2+b^2}$$

توجيه: خذ $f = \sin z$ و $\gamma = \left[0,(a+ib)T\right]$

$$\int_0^T \cos at.\operatorname{ch}bt\,dt = \frac{a\sin aT\cdot \operatorname{ch}bT + b\cos aT\operatorname{sh}bT}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^T \sin at\cdot \operatorname{sh}bt\,dt = \frac{b\sin aT\operatorname{ch}bT - a\cos aT\operatorname{sh}bT}{a^2+b^2}$$

توجيه: خذ $f = \cos z$ و $\gamma = \left[0,(a+ib)T\right]$

(3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1-b^2+x^2\right)\cos kx + 2xb\sin kx}{\left(1-b^2+x^2\right)^2 + 4b^2x^2}dx = e^{kb}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx\,dx}{1+x^2} = 0$$

حيث $k\in\mathbb{R}\ ,\ 0<b<1$

توجيه: خذ $f = \dfrac{e^{ikz}}{1+z^2}$

(4

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}\cos ax\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-a^2/4k}; k>0, a\in\mathbb{R}$$

توجيه: خذ $f = e^{-kz^2}$

5) $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (تكاملات فرسنيل)

خذ $f = e^{-z^2}$ و γ حدود القطاع: $0 \le |z| \le R \ , \ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$

6) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

خذ $f = \frac{e^{iz}}{z}$ و γ حدود نصف الحلقة.

$r \le |z| \le R \ , \ 0 \le \arg z \le \pi$

تمرين (13): باستخدام علاقة كوشي وتبعاتها احسب:

1) $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$ حيث $\gamma : |z| = 3$

2) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-3)} dz$ حيث $\gamma : |z| = 2$.

3) $\int_\gamma \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz$ حيث γ منحنى المستطيل الذي رؤوسه $\frac{1}{2} \pm i, \frac{3}{2} \pm i$.

4) $\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2+1)^2} dz$ حيث $\gamma : |z-1| = 2$.

5) $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\zeta^2 - 1) d\zeta}{2^n (\zeta - z)^{n+1}}$ حيث النقطة $z = \zeta$ داخل γ.

تمرين (14): احسب بعض التكاملات الحقيقية مستخدماً علاقة كوشي.

تمرين (15): ليكن $f = \int_\gamma \frac{\sin \zeta + 3}{(5-z)^2} d\zeta$ حيث $z = \xi$ داخل γ. احسب:

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right), f'\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)$$

تمرين (16) : ليكن f تابع نظامي محدود بالثابت M في $|z| \le R$ أثبت أن:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M}{(R-|z|)^n} \ ; |z| < r$$

تمرين (17): ليكن g,f تابعان صحيحان. حدد أياً من العبارات التالية صحيحاً دوماً.

-1 $f(z)^3$ صحيح، 2) $\frac{f}{g}$ صحيح، $5f+ig$ صحيح، 4) $f\left(\frac{1}{z}\right)$ صحيح،

-5 $g\left(z^2+z\right)$ صحيح.

تمرين (18): بفرض g(t) تابع مستمر في [-1,2] و:

$$f(z)=\int_{-1}^{2} g(t)\sin(zt)dt$$

-1 أثبت أن f تابع صحيح وأوجد سلسلة ماك – لوران له.

-2 أثبت أن: $f'(z)=\int_{-1}^{2} tg(t)\cos(zt)dt$ لكل z.

تمرين (19) : استخدم شرطي كوشي – ريمان لاثبات صحة مبرهنة التابع العكسي البسيطة .

تمرين (20) : باستخدام الممدد النظامي إلى تابع نظامي أثبت:

1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}.e^{z_2}$.

2) صحة بعض العلاقات المثلثية والقطعية.

لوران هو الحالة
العامة لتايلور
تايلور هو لوران و ~~لكن~~
a تكون نظامية وساحة
التقارب هي قرص.

25 علامة من
الامتحان

الفصل الخامس

سلسلة لوران والنقاط الشاذة للتوابع وحيدة القيمة

Laurent series and Singular points of unique value functions

درسنا في الفصل الثالث سلاسل القوى ووجدنا أن ساحة تقارب هذا النوع من السلاسل التابعية المركبة هي قرص دائري مركزه هو مركز السلسلة ويحسب نصف قطره R من خلال علاقة كوشي – آدامار ومجموعها $f(z)$ هو تابع نظامي في قرص التقارب.

وبالعكس إذا كان $f(z)$ تابعاً نظامياً في جوار النقطة a فإنه بالإمكان كتابته على شكل سلسلة قوى مركزها a متقاربة من f في قرص دائري مركزه a ونصف قطره R يساوي البعد بين النقطة a وأقرب نقطة شاذة للتابع f، وهذه السلسلة هي سلسلة تايلور للتابع f حول a وبالتالي كل نقطة من نقاط قرص التقارب بما في ذلك النقطة a هي نقطة عادية للتابع f.

إن محاولة نشر تابع مفروض $f(z)$ في سلسلة تابعية حول نقطة شاذة (ليست عادية) لهذا التابع تؤدي بنا إلى تعميم سلسلة تايلور ونقصد بذلك سلسلة لوران.

نتعرف في هذا الفصل على سلسلة لوران وساحة تقاربها ثم نعالج مسألة العكس، أي نشر تابع مفروض f في سلسلة لوران بالحالتين الأولى ضمن حلقة والثانية حول نقطة شاذة ثم نعرض العلاقة بين سلسلة لوران والنقاط الشاذة ونختم الفصل ببعض التطبيقات.

(5-1) سلسلة لوران ضمن حلقة:

(5-1-1) مفهوم سلسلة لوران وساحة التقارب:

تعريف (1): سلسلة لوران هي كل سلسلة تابعية مركبة من الشكل:

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (1)$$

مركزها النقطة $a\,(a\neq\infty)$ وأمثالها الثوابت المركبة c_n.

يقال إن سلسلة لوران (1) متقاربة في النقطة z إذا تقاربت كل من السلسلتين:

$$c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{0} c_n(z-a)^n \qquad (2)$$

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (3)$$

وإذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هو مجموع السلسلة في (2) و (3) على الترتيب فإن مجموع سلسلة لوران في (1) هو:

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z) \qquad (4)$$

نتساءل عن حل المسألة الأساسية الأولى والتي تتعلق بنوعية المجموعة النقطية التي فيها تتقارب سلسلة لوران.

السلسلة (2) هي سلسلة قوى، بالتالي تكون ساحة تقاربها قرصاً دائرياً $|z-a|<R$، وأما السلسلة (3) فإنها ليست سلسلة قوى كونها بأسس سالبة لكن التحويل:

$$\frac{1}{z-a}=t \qquad (5)$$

ينقل هذه السلسلة إلى سلسلة قوى:

$$c_{-1}t+c_{-2}t^2+\ldots+c_{-n}t^n+\ldots=\sum_{1}^{\infty} c_{-n}t^n \qquad (6)$$

والسلسلة (6) متقاربة في قرص دائري $|t|<\alpha$ وبالتالي السلسلة (3) متقاربة في الساحة $\left|\frac{1}{z-a}\right|<\alpha$ أو $|z-a|>\frac{1}{\alpha}=r$

مما سبق نستنتج أنه إذا كان:

$$r < R \tag{7}$$

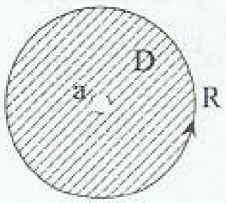
فإن ساحة تقارب سلسلة لوران (1) هي تقاطع القرصين الدائريين $|z-a|<R$

و $r<|z-a|$ أي هي الحلقة الدائرية: هامة جداً

$$D: r<|z-a|<R \tag{8}$$

واضح أنه في كل نقطة $z \notin \bar{D}$ تكون إحدى السلسلتين (2) و (3) متباعدة. بالتالي سلسلة لوران (1) متباعدة خارج الساحة المغلقة $\bar{D}$، أما في نقاط حدود الساحة D أي على الدائرتين:

$$|z-a|=r \quad , \quad |z-a|=R \tag{9}$$



الشكل (1)

فإن سلسلة لوران (1) قد تتقارب وقد تتباعد، بل قد تتقارب في بعض النقاط وتتباعد في بقية النقاط ومسألة التقارب هنا تعالج نقطياً.

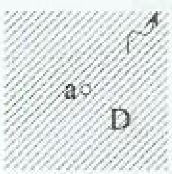
أخيراً إذا كان $r > R$ فإن السلسلة (1) متباعدة لأنه لايوجد تقاطع مشترك بين القرصين $|z-a| < R$ و $r < |z-a|$.

نشير إلى الحالات الخاصة التالية للحلقة (8) :

1) عندما $r = 0$ و $R \neq +\infty$ تأخذ الحلقة (8) (الشكل1) :

$$D:\ o<|z-a|<R \tag{10}$$

وهو جوار موخوذ للنقطة a.



الشكل (2)

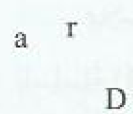
2) عندما $r = 0$ و $R = +\infty$ تأخذ (الشكل2):

$$D: o<|z-a|<+\infty \tag{11}$$

3) عندما $z \neq 0$ و $R = +\infty$ نجد (الشكل3):

$$D: r<|z-a|<+\infty$$

وهو جوار موخوذ لنقطة اللانهاية.



الشكل (3)

$\sum_{-\infty}^{\infty} = \sum_{-\infty}^{0} + \sum_{1}^{\infty}$

$= \sum_{0}^{\infty} + \sum_{-\infty}^{-1}$

في سلسلة لوران المجموع ينقسم الى مجموعين ويمكن وضع ٠ مع الحدود الموجبة نختلها منا ووضع ٠ مع الحدود السالبة .

4) إذا كانت $a = 0$ نجد أن سلسلة لوران لها الصورة :

$$..+\frac{c_{-n}}{z^n}+..+\frac{c_{-1}}{z}+c_o+c_1z+..+c_nz^n+..=\sum_{-\infty}^{\infty} c_nz^n \qquad (12)$$

كيف نحصل على السلسلة (12) من السلسلة (1)؟.

نأتي الآن للحالة التي فيها $z = a = \infty$.

تعريف (2): **سلسلة لوران حول نقطة اللانهاية $z = \infty$** (في جوار موخوذ) هي سلسلة بقوى $\frac{1}{z}$:

$$...+\frac{c_{-n}}{z^n}+...+\frac{c_{-1}}{z}+c_o+c_1z+c_nz^n+...=\sum_{-\infty}^{\infty} c_nz^n \qquad (13)$$

وبالمثل تكون السلسلة (13) متقاربة في النقطة z إذا تقاربت السلسلتان:

$$...+\frac{c_{-n}}{z^n}+...+\frac{c_{-1}}{z}+c_o=\sum_{-\infty}^{0} c_nz^n=\sum_{0}^{\infty} c_{-n}.\frac{1}{z^n} \qquad (14)$$

$$c_1z+...+c_nz^n+...=\sum_{0}^{\infty} c_n.z^n \qquad (15)$$

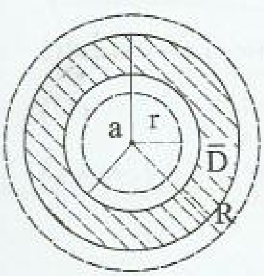
وإذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هو مجموع السلسلتين (14) و (15) على الترتيب فإن مجموع سلسلة لوران (13) هو $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$.

بمناقشة مماثلة نجد أن ساحة تقارب السلسلة (13) لها الشكل:

$$D:+\infty>|z|>R \qquad (16)$$

في كل نقطة $z \notin \overline{D}$ تكون السلسلة (13) متباعدة، أما على الحدود $|z| = R$ فإنها قد تتقارب وقد تتباعد ودراسة التقارب هنا تتم نقطياً.

بملاحظة أن سلسلة لوران هي سلسلة تابعية فإن السلسلة (1) أو (13) تكون متقاربة بانتظام في كل



الشكل (4)

ساحة جزئية مغلقة واقعة ضمن ساحة تقاربها بما في ذلك الحلقة الجزئية $r < r_1 \le |z-a| \le R_1 < R$ لماذا؟ (الشكل4).

ملاحظات:

1) شكلياً سلسلة لوران حول $a = 0$ هي ذاتها سلسلة لوران حول $z = \infty$ (لاحظ السلسلة في (12) هي ذاتها السلسلة في(13)).

2) جعلنا الحد الحر c_0 في سلسلة لوران (1) حول $a(a \neq \infty)$ ينتمي لسلسلة القوى (2) ذات الأسس الموجبة، بينما c_0 ينتمي في سلسلة لوران (13) حول $z = \infty$ للسلسلة (14) ذات الأسس السالبة.ولهذا الانتماء أهمية عند دراسة النقاط الشاذة.

3) إذا كانت $a(a \neq \infty)$ نقطة عادية وأخذنا سلسلة لوران حولها فإن هذه السلسلة تتطابق مع سلسلة تايلور حول a لأن حلقة التقارب تنقلب إلى قرص دائري $|z-a| < R$ وتختفي أسس z - a السالبة.

(2-1-5) نشر تابع معطى في سلسلة لوران ضمن حلقة مفروضة:

نبحث في هذا البند المسألة الأساسية المعاكسة وهي كيفية نشر تابع f في سلسلة لوران ضمن حلقة.

مبرهنة (1)- لوران:

إذا كان $f(z)$ تابعاً نظامياً في الحلقة:

$$D: r < |z-a| < R \quad ; \quad r < R \tag{17}$$

فإن:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{18}$$

حيث:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \; ; \; n \in Z \; , \; \gamma_\rho : |\zeta - a| = \rho \; (r < \rho < R) \tag{19}$$

الإثبات: نأخذ الحلقة الجزئية الكيفية المغلقة $D_1: r_1<|z-a|<R_1$ بحيث تقع مع حدودها الخارجية $\Gamma_1:|\zeta-a|=R_1$ والداخلية $\Gamma_2:|\zeta-a|=r_1$ ضمن الحلقة (17). عندئذ لكل $z \in D_1$ يكون: (الشكل5).

الشكل (5)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=I_1+I_2$$

حيث يرمز I_1 للتكامل الأول و I_2 للتكامل الثاني. لكن:

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{0} c_n(z-a)^n=f_1(z) \qquad (20)$$

حيث:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad ; \quad n=0,1,2,... \qquad (21)$$ لماذا؟

الآن ننشر التكامل I_2.

بما أن $\zeta \in \Gamma_2$ في التكامل I_2 فإن $|\zeta-a|<|z-a|$ (النقطة z خارج Γ_2) وبالتالي:

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}$$

$$=\sum_{k=0}(\zeta-a)^k\frac{1}{(z-a)^{k+1}}$$

وبما أن $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{r_1}{|z-a|}<1$ فإن السلسلة السابقة متقاربة بانتظام على المجموعة المحدودة Γ_2 لكل $z \in D_1$. وبما أن التابع f نظامي بالتالي مستمر على Γ_2 فلن يتأثر التقارب المنتظم بضرب الطرفين بالتابع $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ ونجد حينها:

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0} f(\zeta)(\zeta-a)^k\cdot\frac{1}{(z-a)^{k+1}}$$

الآن بمكاملة الطرفين حداً حداً على طول Γ_2 ثم وضع $k+1=-n$ نجد:

$$I_2=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n=f_2(z) \tag{22}$$

حيث:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d(\zeta)\ ;\ \ n=-1,-2,... \tag{23}$$

من (20) و (22) نجد أن:

$$f(z)=f_1+f_2=\sum_{0} c_n(z-a)^n+\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

يمكن في عبارتي c_n في كل من (21) و (23) أن نأخذ المنحنى $\gamma:|\zeta-a|=\rho\ ,\ r_1<\rho<R_1$ عوضاً عن Γ_2,Γ_1 على الترتيب لماذا؟. أي أن الأمثال c_n تعطى بالصيغة التكاملية (19).

وبما أنه يمكن أخذ r_1 قريباً من r و R_1 قريباً من R فإن السلسلة (18) متقاربة في الحلقة (17)، ويتعين أمثالها من (19).

مثال (1): أوجد سلسلة لوران التابع $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)(z+2)}$ في كل من الساحات:

1) $D_1:|z|<1$ ، 2) $D_2:1<|z|<2$ ، 3) $D_3:|z|>2$

الحل: نشير إلى أن التابع f نظامي في الساحات المعطة، حيث النقطتين الشاذتين $z=1$ و $z=-2$ تقعان على الحدود، وبالتالي سلسلة لوران موجودة.

نفرق f في كسور بسيطة نجد:

$$f=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{2}{z+2}\right)$$

في D_1 لدينا: $$\frac{1}{1-z}=\sum_{0} z^n \;;\; |z|<1$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\sum_{0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n \;;\; |z|<2$$

بالتالي:

$$f(z)=\frac{1}{3}\left[\sum_{0} z^n-2\sum_{0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{0}\left[1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^n$$

والسلسلة متقاربة في تقاطع القرصين $|z|<1$ و $|z|<2$ أي في الساحة D_1.

في D_2 لدينا:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\sum_{0}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{0}\frac{1}{z^{n+1}} \;;\; |z|>1$$

ونشر $\frac{1}{z+2}$ هو ذاته السابق. إذن:

$$f(z)=\frac{1}{3}\left[-\sum_{0}\frac{1}{z^{n+1}}-2\sum_{0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\sum_{0}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{0}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n\right]$$

والسلسلة متقاربة في تقاطع الساحتين $|z|>1$ و $|z|<2$، أي في D_2.

في D_3: لدينا منشور $\frac{1}{1-z}$ هو ذاته في حالة الساحة D_2 و:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{0}(-1)^n 2^n\frac{1}{z^n}=\sum_{0}(-2)^n\frac{1}{z^{n+1}} \;;\; |z|>2$$

وعليه:

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(-\sum_{0}\frac{1}{z^{n+1}}-2\sum_{0}(-2)^n\frac{1}{z^n}\right)=-\frac{1}{3}\left[\sum_{0}\left(1+(-1)^{n+1}2^{n+1}\right)\frac{1}{z^{n+1}}\right]$$

والنشر صحيح في تقاطع الساحتين $|z|>1$ و $|z|>2$ أي في D_3.

لنلاحظ أن سلسلة لوران للتابع f في الساحة D_1 تتطابق مع سلسلة تايلور حول $z=0$ (سلسلة ماك لوران) وإن السلسلة في D_2 تحتوي أسس z الموجبة والسالبة، بينما السلسلة في D_3 فإنها تحتوي أسس z السالبة فقط.

(3-1-5) وحدانية النشر في سلسلة لوران وتقدير الأمثال:

مبرهنة (2) – الوحدانية: نشر التابع النظامي $f(z)$ في سلسلة لوران ضمن الحلقة $D: r<|z-a|<R$ وحيد.

الإثبات: نفرض العكس، أي يوجد نشران للتابع f ضمن الحلقة D:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n=\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n \;;\; z\in D \tag{24}$$

ولنبين أن $c_n=\tilde{c}_n$ لكل عدد صحيح n.

لنضرب طرفي (24) بالمقدار $(z-a)^{-m-1}$ حيث m عدد صحيح مثبت نجد أن:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m-1}=\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^{n-m-1}$$

بما أن السلسلتين متقاربتان بانتظام على المجموعة $\gamma:|z-a|=\rho\ ,\ r<\rho<R$ فإننا نستطيع المكاملة حداً حداً على γ أي:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma} (z-a)^{n-m-1} dz=\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \int_{\gamma} (z-a)^{n-m-1} dz$$

وبملاحظة أن: $\int_{\gamma} (z-a)^{n-m-1} dz=\begin{cases} 2\pi i \;;\; n-m-1=-1 \\ 0 \;;\; n-m-1\neq -1 \end{cases}$ يكون:

$c_m=2\pi i\tilde{c}_m$ أي $c_m=\tilde{c}_m$ وكون m عدد صحيح كيفي فإن $c_n=\tilde{c}_n$ لكل $n\ni Z$.

نستنتج أن الأمثال c_n في سلسلة لوران لتابع مفروض f لاتتعلق بالطريقة التي نحصل فيها على تلك السلسلة.

عادة للحصول على سلسلة لوران يتم توظيف سلاسل ماك لوران للتوابع الأولية الى جانب الطرق المشروعة الأخرى والمدروسة في الفصل الثالث.

مبرهنة (3) تقدير الأمثال: إذا كان $f(z)$ تابعاً نظامياً في الحلقة $D: r_o < |z-a| < R_o$ فإن الأمثال c_n في سلسلة لوران لـ f ضمن D تحقق متراجحات كوشي:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n} \ ; \ n \in Z \ , \ M = \max_{(\gamma)} |f(z)| \tag{25}$$

حيث $\gamma : |z-a| = R \ ; \ r_o < R < R_o$

الإثبات: تقدر c_n باستخدام الصيغة (19).

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}} |d\zeta|$$

$$\le \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int_\gamma |d\zeta| = \frac{M}{R^n} \ ; \ n \in Z$$

تعريف (3): سلسلة فوربيه للتابع المركب بمتحول حقيقي $F(\varphi)$ هي:

$$f(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\varphi n} \tag{26}$$

تتمة – العلاقة بين سلسلة فوربيه ولوران

تقدم العلاقة بين سلسلة لوران وسلسلة فوربيه.

إذا كان $F(t)$ تابع قابل للمكاملة على $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ فإن سلسلة فوربيه لهذا التابع هي:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_1 a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} F(t) \cos nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} F(t) \sin nt dt \ , \ n = o, 1, \ldots ; b_o = o$$

بوضع:

$$\cos nt=\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}\ ,\ \sin t=\frac{e^{-nt}-e^{-int}}{2i}$$

نجد:

$$\frac{a_o}{2}+\sum_{1}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{int}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-int}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{int};$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}F(t)e^{-int}dt,\ n=o,1,...$$

$$c_n=\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}F(t)e^{-int}dt,\ n=-1,-2,...$$

والصيغة المركبة لسلسلة فورييه للتابع F(t) هي:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{int};\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}F(t)e^{-int}dt$$

بوضع $e^{it}=z$, $F(t)=f(e^{it})=f(z)$ نجد أنها تأخذ الشكل $\sum_{-\infty}^{\infty}c_nz^n$ حيث:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}f(e^{int})e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}f(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$$

وعليه فإن سلسلة فورييه المركبة للتابع F(t) هي سلسلة لوران للتابع $f(z)=F(t)$ حيث $z=e^{it}$ على دائرة الوحدة $|z|=1$.

وبالعكس سلسلة لوران لـ f(z) على دائرة الوحدة هي سلسلة فورييه لـ $f(e^{it})=F(t)$ على المجال $[0,2\pi]$.

نشير إلى أنه في الحالة العامة وحتى لو كانت سلسلة فورييه لـ F متقاربة من F في كل $[0,2\pi]$ فإنه من أجل سلسلة لوران المقابلة قد يكون $R=r=1$ أي إن ساحة التقارب خالية وضمن شروط قاسية على F نضمن أن تكون الساحة غير خالية.

نلخص ماسبق بالآتي:

ليكن f تابعاً نظامياً في الحلقة $D:\delta_1<|z|<1+\delta_2$ حيث $o\le\delta_1<1,\delta_2>o$ التي تحتوي دائرة الوحدة $|\zeta|=1$. عندئذ حسب المبرهنة (1) يمكن نشر f في سلسلة لوران ضمن D:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad ; \quad z\in D \tag{27}$$

في الحالة الخاصة عندما تقع z على دائرة الوحدة يكون $z=e^{i\varphi}$ ونحصل على سلسلة فورييه (26):

$$F(\varphi)=f\left(e^{i\varphi}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\varphi n} \tag{28}$$

وبالعكس إذا كان $F(\varphi)$ تابعاً يكتب بالشكل $F(\varphi)=f\left(e^{i\varphi}\right)$ بحيث إن $f(z)$ تابع نظامي في حلقة تحتوي دائرة الوحدة فإن السلسلة (28) هي سلسلة فورييه للتابع $F(\varphi)$.

(2-5) : سلسلة لوران حول نقطة شاذة:

درسنا في (1-5) مسألة نشر تابع نظامي معطى f ضمن حلقة مفروضة $D:r<|z-a|<R$ (المبرهنة (1)).

نتابع في هذه الفقرة حل المسألة ذاتها إنما النشر حول نقطة شاذة للتابع f.

(1-2-5) النقطة الشاذة لتابع وحيد القيمة:

تعريف (1): ليكن f(z) تابع وحيد القيمة مفروض. يقال إن $z=a$ **نقطة شاذة ذات طبيعة واحدة** للتابع f إذا لم يكن f نظامياً في a.

تسمى النقطة الشاذة $z=a\,(a\neq\infty)$ **معزولة** للتابع f إذا كان f نظامياً في جوار a الموخوذ $o<|z-a|<r$ أي إذا أمكن إحاطة النقطة a بدائرة لاتحتوي داخلها أية نقاط شاذة للتابع f سوى a.

نذكر أن النقطة $z=\infty$ تكون شاذة للتابع f(z) إذا وفقط إذا كانت النقطة $\zeta=0$ شاذة للتابع $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

تسمى النقطة الشاذة $z=\infty$ معزولة للتابع $f(z)$ إذا كان f نظامياً في جوار $z=\infty$ الموخوذ $R<|z|<+\infty$ أي إذا وجدت دائرة مركزها المبدأ بحيث لا يقع خارجها أية نقاط شاذة لـ f سوى ∞.

إذا لم تكن النقطة الشاذة a معزولة نسميها نقطة شاذة غير معزولة، ومن الواضح أنه كي يوجد نقطة شاذة غير معزولة لتابع f يجب أن يكون عدد النقاط الشاذة غير منته وعندئذ تكون تلك النقطة نقطة تراكم لمجموعة النقاط الشاذة.

تصنيف النقاط الشاذة المعزولة:

تبعاً لسلوك التابع f قرب نقطة شاذة معزولة فان النقاط الشاذة المعزولة تقسم إلى ثلاثة أنواع:

لتكن a نقطة شاذة معزولة للتابع الوحيد القيمة f (يمكن أن تكون $a=\infty$) فإن a تسمى:

1) **شاذة قابلة للإصلاح** إذا كانت النهاية $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ موجودة ومحدودة. كالنقطة $z=-i$ للتابع $f=\dfrac{z^2+1}{z+i}$ والنقطة $z=0$ للتابع $f=\dfrac{\sin z}{z}$ والنقطة $z=\infty$ للتابع $f=\dfrac{z}{z+1}$.

2) **قطباً** للتابع f إذا كانت النهاية $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ موجودة لكنها غير محدودة أي $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$ كالنقطة $z=+1$ للتابع $f=\dfrac{z}{(z+1)^2}$ والنقطة $z=\infty$ للتابع $f=P_n(z)$.

3) **شاذة أساسية** للتابع f إذا كانت النهاية $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ غير موجودة (لا محدودة ولا غير محدودة) كالنقطة $z=0$ لكل من التوابع $\sin\dfrac{1}{z}$, $e^{1/z}$, $\cos\dfrac{1}{z}$ والنقطة $z=\infty$ لكل من التوابع $\cos z, \sin z, e^z$ لأن النهاية تتعلق بالمسار.

مثال (1): حدّد نوع النقاط الشاذة في المستوى الموسع $\overline{C}$ لكل من التوابع f التالية:

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} \quad (3 \qquad\qquad e^{\frac{1}{z-1}} \quad (2 \qquad\qquad \frac{z^2+9}{z^2(z-3)} \quad (1$$

الحل :

1) النقاط الشاذة هي $z_1 = 3$ و $z_2 = 0$ فقط فهما معزولتان لماذا؟. وبما أن لكل $z \neq 3$:

$$\lim_{z\to 3}\frac{z^2+9}{z^2(z-3)} = \lim_{z\to 3}\frac{z+3}{z^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

فإن $z_1 = 3$ قابلة للإصلاح.

أما النقطة $z_2 = 0$ فإنها قطب لأن $\lim_{z\to 0}\frac{z^2+9}{z^2(z-3)} = \infty$.

لنلاحظ أن $z = \infty$ نقطة عادية لهذا التابع لأن $f(\infty) = 0$.

2) النقطة الشاذة المعزولة الوحيدة هي $z = 1$ وهي شاذة أساسية لأن النهاية $\lim_{z\to 1} e^{1/(z-1)}$ غير موجودة.

3) النقاط الشاذة لهذا التابع هي جذور المعادلة $\sin\frac{1}{z} = 0$ أي $z_k = \frac{1}{\pi k}$ حيث $k \in Z$

وبما أن $\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} = \infty$ فإن هذه النقاط من نوع أقطاب ولكن نقطة التراكم للمجموعة غير المنتهية $\{z_k\}$ هي $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ وبالتالي فإن $z_0 = 0$ شاذة غير معزولة.

لاحظ أن كل جوار للنقطة $z = 0$ يحتوي نقاطاً شاذة أخرى، مثل هندسياً.

ما هو نوع النقطة ∞ في التابعين 2) و 3) ؟.

(2-2-5) نشر تابع مفروض في سلسلة لوران حول نقطة شاذة:

تجيب المبرهنة التالية عن الجزء المتبقي من التساؤل المطروح في بداية الفقرة.

مبرهنة (1) – لوران: إذا كان f تابعاً نظامياً في الجوار الموخوذ (الحلقة):

$$K : 0 < |z-a| < r \qquad (1)$$

فإن:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad ; \qquad z \in K \tag{2}$$

حيث الأمثال c_n تعطى بالعلاقة (19) في (1-5) و فيها هنا: $0<\rho<r$.

الإثبات: ينتج مباشرة من المبرهنة (1) في الفقرة (1-5) كحالة خاصة.

مبرهنة (2)- لوران: إذا كان f تابعاً نظامياً في الجوار الموخوذ للنقطة ∞ :

$$K: R<|z|<+\infty \tag{3}$$

فإن:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad ; \qquad z \in K \tag{4}$$

كيف تحسب c_n ؟

تعريف (2): **القسم الرئيس** f_1 من سلسلة لوران (2) هو القسم ذو الأسس السالبة، أي:

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}=\sum_{-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n \tag{5}$$

والقسم العادي f_2 لها هو القسم ذو الأسس الموجبة مع الحد الحر c_0 أي:

$$c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{6}$$

والقسم الرئيس f_1 من سلسلة لوران (4) حول النقطة $z=\infty$ هو القسم ذو الأسس الموجبة، أي:

$$c_1 z+\ldots+c_n z^n+\ldots=\sum_{1}^{\infty} c_n z^n \tag{7}$$

والقسم العادي f_2 لهذه السلسلة هو القسم ذو الأسس السالبة مع حدها الحر c_0، أي:

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z}+c_o=\sum_{-\infty}^{0} c_n z^n \qquad (8)$$

واضح أنه إذا كان $f_2(z), f_1(z)$ هو مجموع السلسلة (5) و (6) على الترتيب فإن $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ هو مجموع السلسلة (2) في الحلقة (1).

بالمثل إذا كان f_1 و f_2 هو مجموع السلسلة (7) و (8) على الترتيب فإن $f=f_1+f_2$ هو مجموع السلسلة (4) في الحلقة (3).

لاحظ أننا رمزنا في الحالتين للقسم الرئيس بـ f_1.

نتيجة (1): القسم الرئيس من سلسلة لوران f_1 حول نقطة شاذة a لتابع مفروض f (يمكن أن تكون $a=\infty$) هو مجموع تلك الحدود والذي لأجله كل حد يؤول إلى اللانهاية عندما $z\to a$ وهذا القسم يمثل تابعاً $f_1(z)$ نظامياً في كل المستوى باستثناء النقطة a، أما القسم العادي f_2 فإنه حاصل طرح القسم الرئيس f_1 من التابع المدروس f :

$$f_2(z)=f(z)-f_1(z) \qquad (9)$$

ويمثل تابعاً نظامياً في النقطة a.

ملاحظة (1): السبب في تسمية القسم الرئيس بهذا الاسم هو أنه يحدد نوع النقطة الشاذة a التي ننشر التابع f حولها.

مثال (2): أوجد سلسلة لوران للتابع $f(z)=P_n(z)$ حول كل من النقاط 0 ،∞، 1 .

الحل: نفرض أن: $f(z)=c_n z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_o$.

بما أن التابع f(z) نظامي في النقطة $z=0$ فإن سلسلة لوران حول هذه النقطة هي ذاتها سلسلة ماك لوران، أي:

$$f(z)=P_n(z)=c_o+c_1 z+\ldots+c_n z^n+0.z^{n+1}+\ldots=P_n(z)$$

وهذه السلسلة المنتهية متقاربة في كل المستوى وقسمها الرئيس هو

$f_1(z)=o$ والعادي هو $f_2(z)=P_n(z)$

بملاحظة أن السلسلة السابقة متقاربة في كل المستوى فإنها تمثل في الوقت ذاته سلسلة لوران حول النقطة $z=\infty$ لكن القسم الرئيس في هذه الحالة هو $f_1(z)=P_n(z)-c_o$ والقسم العادي هو $f_2(z)=c_o$.

أخيراً $z=1$ نقطة عادية للتابع $P_n(z)$ وسلسلة لوران حول هذه النقطة هي ذاتها سلسلة تايلور، أي:

$$f(z)=P_n(z)=c_o+c_1\left[(z-1)+1\right]+c_2\left[(z-1)+1\right]^2+...+c_n\left[(z-1)+1\right]^n.$$

وباستخدام مفكوك ثنائي الحد لنيوتن نجد المطلوب.

مثال (3): أوجد سلسلة لوران للتابع $f(z)=z^2e^{1/z}$ حول النقطة $z=0$ واستنتج سلسلة لوران حول $z=\infty$ محدداً القسم الرئيس في كل حالة.

الحل: إن $z=0$ نقطة شاذة أساسية للتابع f ولكل $z\in K\equiv C\setminus\{0\}$ لدينا:

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{1}{z}+...+\frac{1}{n!}z^n+...\right)$$

$$=z^2+z+\frac{1}{2}+\sum_1\frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}\ ;\ z\in K$$

وهي سلسلة لوران حول $z=0$ قسمها الرئيس هو:

$$f_1(z)=\sum_1\frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}$$

والقسم العادي $f_2(z)=f(z)-f_1(z)=z^2+z+\frac{1}{2}$

النقطة $z=\infty$ قطب للتابع f والسلسلة الناتجة السابقة متقاربة في الجوار الموخوذ لهذه النقطة فهي ذاتها سلسلة لوران للتابع f حول $z=0$ وعندئذ القسم الرئيس يكون $f_1(z)=z^2+z$ والعادي بقية السلسلة.

مثال (4): أوجد سلسلة لوران للتابع $f(z)=\cos\frac{z}{z+1}$ حول $z=-1$ وحدد القسم الرئيس.

الحل: النقطة $z=-1$ شاذة أساسية للتابع المعطى f ولكل $z\ni K=C\setminus\{-1\}$ يكون:

$$f(z)=\cos\frac{(z+1)-1}{z+1}=\cos\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$=\cos 1\cos\frac{1}{z+1}+\sin 1.\sin\frac{1}{z+1}$$

$$=\cos 1\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}}+\sin 1.\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$$

هنا $c_0=\cos 1$ هو القسم العادي والبقية يمثل القسم الرئيس.

مثال (5): أوجد القسم الرئيس من سلسلة لوران لكل من التوابع f التالية حول النقطة المبينة.

1) $z=-1\ ,\ f=z^2\cos\frac{z}{z+1}$ 2) $z=i, f=\frac{1}{z^2+1}$

3) $z=\infty\ ,\ f=\frac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}$

الحل:

1) بنشر z^2 في سلسلة لوران حول $z=-1$ نجد:

$$z^2=\left[(z+1)-1\right]^2=(z+1)^2-2(z+1)+1$$

بضرب هذه السلسلة المنتهية بالسلسلة الناتجة في المثل (4) وأخذ أسس $(z+1)$ السالبة نجد القسم الرئيس.

2) لدينا:

$$f(z)=\frac{1}{z-i}.g(z)\ ;\ \ g(z)=\frac{1}{z+i}$$

لكن التابع $g(z)$ نظامي في النقطة $z=i$ وسلسلة لوران هي سلسلة تايلور ولها الشكل:

$$g(z)=\frac{1}{2i}+a_1(z-i)+...+a_n(z-i)^n+...$$

بالتالي القسم الرئيس المطلوب هو $f_1(z)=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}$

3) بإجراء القسمة العادية للبسط على المقام نجد أن:

$$f(z)=z^2+\text{[illegible]}+g(z)$$

حيث $g(z)$ هو باقي القسمة ويمثل تابعاً نظامياً في النقطة $z=\infty$ وعليه فإن القسم الرئيس هو $f_1(z)=z^2$.

بشكل عام إذا كان $f(z)=\frac{P_n}{q_m}$; $n>m$ فإن القسم الرئيس هو الجزء الصحيح من ناتج قسمة البسط P_n على المقام q_m بدون الحد الحر لماذا؟.

(3-5) أصفار تابع نظامي:

ندرس في هذه الفقرة أهم أنواع النقاط العادية (غير الشاذة) لتابع وحيد القيمة f وهو الأصفار لارتباطه الوثيق مع أقطاب التابع f.

تعريف (1): يقال إن النقطة $z=a$ (يمكن أن تكون $a=\infty$) هي **صفر** للتابع $f(z)$ إذا كان f نظامياً في a وكان $f(a)=0$.

مرتبة أو درجة الصفر $z=a$ للتابع f هي مرتبة أول مشتق غير معدوم للتابع f في a . بتعبير آخر يكون الصفر a للتابع f من المرتبة m إذا كان:

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0 \;\&\; f^{(m)}(a)\neq 0 \qquad (1)$$

في الحالة $m=1$ نسمي a صفراً بسيطاً.

مبرهنة (1):

1) تكون النقطة a$(a\neq\infty)$ صفراً من المرتبة m للتابع f إذا وفقط إذا كان التابع f يكتب قرب a بالشكل:

$$f(z)=(z-a)^m.h(z) \qquad (2)$$

حيث $h(z)$ تابع نظامي لاينعدم في a .

[illegible]

2) تكون النقطة ∞ صفراً من المرتبة m للتابع f اذا وفقط اذا كان التابع يكتب قرب ∞ بالشكل:

$$f = z^{-m}.\psi(z) \tag{3}$$

حيث $\Psi(z)$ تابع نظامي لاينعدم في نقطة اللانهاية ∞.

إثبات (1):

لزوم الشرط: بما أن a صفراً لـ f فإن f تابع نظامي في a و $c_0 = f(a) = 0$ وينشر f في سلسلة بقوى $(z-a)$ بالشكل $f(z) = \sum\limits_{1} c_n (z-a)^n$ حيث $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ لكن بما أن a صفراً من المرتبة m فإنه من (1) نجد أن $c_1 = c_2 = ... c_{m-1} = 0$ بالتالي:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m} c_n (z-a)^n = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + ... \\ &= (z-a)^n \left[c_m + c_{m+1}(z-a) + ...\right] \end{aligned}$$

السلسلة $h(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + ...$ تمثل تابعاً نظامياً غير معدوم في النقطة a لأن $h(a) = c_m \neq 0$ فرضاً والعلاقة (2) صحيحة.

كفاية الشرط: إذا كان التابع f يكتب بالشكل (2) حيث h(z) تابع نظامي غير معدوم في النقطة a فإن h(z) ينشر حول a في سلسلة قوى حدها الحر غير معدوم $h(a) = c_m \neq 0$ أي:

$$h(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + ...$$

بالتالي:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-a) + ...\right] \\ &= c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + ... \end{aligned}$$

وهذه تعني أن $z = a$ هي صفر من المرتبة m للتابع f.

إثبات 2):

لزوم الشرط: إذا كانت النقطة $z=\infty$ صفراً من المرتبة m للتابع f فإن f تابع نظامي فيها و $f(\infty)=0$ و $f(z)=c_o+\sum_{1} c_n \frac{1}{z^n}$.

لكن $c_1=c_2=...=c_{m-1}=0$ لماذا؟ بالتالي:

$$f(z)=\sum_{n=m} c_n \frac{1}{z^n}=\frac{1}{z^m}\left(c_m+c_{m+1}\frac{1}{z}+...\right)$$
$$=z^{-m}.\psi(z)$$

حيث $\psi(z)=c_m+c_{m+1}\frac{1}{z}+...$ تابع نظامي غير معدوم عند $z=\infty$ لأن $\psi(\infty)=c_m\neq 0$ فرضاً.

اترك إثبات كفاية الشرط تدريباً.

نتيجة هامة (1):

1) تكون النقطة $z=a$ $(a\neq\infty)$ صفراً من المرتبة m للتابع f إذا وفقط إذا تحققت قرب a الصيغة التقريبية.

$$f(z)\underset{z\to a}{=}B(z-a)^m \quad ; \quad B\neq 0 \qquad (4)$$

2) تكون $z=\infty$ صفراً من المرتبة m للتابع f إذا وفقط إذا تحققت قرب ∞ الصيغة التقريبية:

$$f(z)\underset{z\to\infty}{\simeq}A.z^{-m} \quad ; \quad A\neq 0 \qquad (5)$$

البرهان: ينتج مباشرة من العلاقتين (2) و (3).

ملاحظة (1): يمكن اعتماد الصيغة (4) أو (5) **كتعريف لمرتبة الصفر.**

يقال إن الصفر a $(a\neq\infty)$ من المرتبة m للتابع f إذا تحققت (4).

ويقال إن الصفر ∞ هو من المرتبة m لـ f إذا تحققت (5).

نتيجة (2): إذا كانت النقطة a صفراً من المرتبة m للتابع g فإنها تكون صفراً من المرتبة $m.P$ للتابع $f(z)=\left[g(z)\right]^{P}$ حيث $P\geq 1$ عدد صحيح لماذا؟.

مثال (1): أوجد أصفار كل من التوابع f التالية في المستوى $\overline{C}$ وحدد مرتبة كل صفر.

$$\text{1) } \operatorname{sh}\frac{1}{z} \qquad \text{2) } \left(e^{z}+1\right)^{3} \qquad \text{3) } \frac{\left(z^{3}+1\right)^{6}}{\left(z^{2}+4\right)^{11}}e^{1/z}$$

الحل:

1) أصفار هذا التابع هي جذور المعادلة $\operatorname{sh}\frac{1}{z}=0$ أي $k=\pm 1,\ldots$ ، $z_k=\frac{i}{\pi k}$، وبما أن $\left.\left(\operatorname{sh}\frac{1}{z}\right)'\right|_{z_k}\neq 0$ فإن z_k أصفار بسيطة.

لاحظ أن $z=0$ نقطة تراكم لمجموعة الأصفار $\left\{\frac{i}{\pi k}\right\}$. ما نوعها بالنسبة للتابع المعطى؟

بوضع $z=\frac{1}{\zeta}$ نجد $f(z)=g(\zeta)=\operatorname{sh}\zeta$ وبما أن $\zeta=0$ صفر بسيط للتابع g فإن $z=\infty$ صفر بسيط للتابع f وينتج ذلك أيضاً من الصيغة التقريبية:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z}\underset{z\to\infty}{=}\frac{1}{z}$$

2) أصفار التابع هي جذور المعادلة $e^{z}+1=0$ أي $k\in Z$ ، $z_k=(2k+1)\pi i$، وهي بسيطة للتابع $e^{z}+1$ لأن $\left(e^{z}+1\right)'/_{z_k}\neq 0$ وحسب النتيجة (2) تكون z_k أصفار من المرتبة الثالثة للتابع المعطى.

لنلاحظ أن النقطة $z=\infty$ ليست عادية بل شاذة أساسية للتابع f لماذا؟.

3) أصفار هذا التابع هي النقاط التي تعدم البسط ولا تعدم المقام وبما أن $e^{1/z}\neq 0$ فإن هذه الأصفار هي جذور المعادلة $z^{3}+1=0$ أي $k=0,1,2$; $z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3}}$ وهي أصفار من المرتبة السادسة للتابع f.

بما أن $e^{\frac{1}{z}} \underset{z\to\infty}{=} 1$ فإن $f(z) \underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{z^{18}}{z^{22}}.1 = \frac{1}{z^4}$ صفر من المرتبة الرابعة $z=\infty$ للتابع المفروض f.

تشير المبرهنة التالية إلى أن أصفار تابع نظامي هي نقاط معزولة وبالتحديد يكون:

مبرهنة (2): إذا كان f تابعاً نظامياً في النقطة a و $f(a)=0$ فإنه إما $f(z)\equiv 0$ في جوار ما للنقطة a أو يوجد جوار لـ a لايحتوي أي أصفار للتابع f سوى a ذاتها.

الإثبات: لدينا احتمالين:

الأول أن تكون جميع الأمثال c_n في السلسلة $f=\sum c_n(z-a)^n$ معدومة وعندئذ $f(z)\equiv 0$ حول a.

الثاني يوجد عدد صحيح $1\le m$ لأجله يكون $c_0=c_1=\ldots=c_{m-1}=0\ ,\ c_m\neq 0$ وعندئذ تكون a $(a\neq\infty)$ صفراً من المرتبة m للتابع f و يكتب f حسب المبرهنة (1) بالشكل $f(z)=(z-a)^m.h(z)$ حيث h(z) تابع نظامي غير معدوم في a لكن بما أن h(z) تابع نظامي و $h(a)\neq 0$ فإن h(z) تابع مستمر في a و $h(z)\neq 0$ في جوار a هذا يعني أنه يوجد جوار للنقطة a لايحتوي أي أصفار للتابع f سوى a.

اترك الحالة عندما $a=\infty$ تدريباً.

(4-5) العلاقة بين سلسلة لوران والنقاط الشاذة:

يحدد القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع الوحيد القيمة f حول النقطة الشاذة a نوع هذه النقطة وبالعكس بمعرفة نوع النقطة الشاذة نستطيع معرفة عدد حدود القسم الرئيس. هذا ما ندرسه بالتفصيل على الأنواع الثلاثة للنقاط الشاذة.

(1-4-5) النقطة الشاذة القابلة للإصلاح:

لتكن $z=a$ نقطة شاذة معزولة للتابع f.

مبرهنة (1): تكون $z=a$ قابلة للإصلاح للتابع f إذا وفقط إذا كان القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع f حول a معدوماً (غير موجود).

إثبات لزوم الشرط: بما أن a قابلة للإصلاح للتابع f فإن $\lim_{z\to a} f(z)=A$ حيث A ثابت محدود وبالتالي f هو تابع نظامي ومحدود في جوار موخوذ للنقطة a أي يوجد ثابت موجب $0<M$ بحيث:

$$|f(z)|\le M \quad ; \quad z\in K: 0<|z-a|<r \qquad (1)$$

من أجل كل $r_1\ (0<r_1<r)$ حسب متراجحات كوشي يكون:

$n\in Z \quad ; \quad |c_n|\le \dfrac{M}{r_1^n}$ حيث c_n أمثال سلسلة f حول a وعندما $r_1\to 0$ ، وبعد ملاحظة أن c_n مستقلة عن r_1 نجد أن:

$$c_n=0 \quad ; \quad n=-1,-2,...$$

هذا يعني أن القسم الرئيس من سلسلة لوران لـ f حول a غير موجود.

إثبات كفاءة الشرط: بما أن القسم الرئيس غير موجود فإن $f(z)=c_0+c_1(z-a)+...$ وهذه السلسلة متقاربة في الحلقة (1) وفي ذات الوقت هي سلسلة قوى تايلورية، بالتالي فإنها متقاربة في كل القرص $|z-a|<r$ ولدينا النهاية $\lim_{z\to a} f(z)=c_0$ موجودة ومحدودة. وعليه فإن النقطة الشاذة المعزولة a هي من نوع قابلة للإصلاح.

نتيجة (1): تكون النقطة الشاذة المعزولة a من نوع قابلة للإصلاح للتابع f إذا وفقط إذا كان التابع f نظامياً ومحدودا في جوار موخوذ لهذه النقطة لماذا؟.

ملاحظة (1): نشير ثانية الى أن السبب في تسمية النقطة القابلة للإصلاح بهذا الإسم هو أنه بالإمكان التخلص من شذوذها (الضعيف) أو ردها إلى نقطة عادية وذلك بتمديد تعريف التابع f إليها بوضع $f(a)=\lim_{z\to a} f(z)=c_0$ وأخذ:

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & ; \quad z\ne a \\ c_0 & ; \quad z=a \end{cases} \qquad (2)$$

لذلك نعتبر النقطة القابلة للإصلاح في كثير من الأحيان نقطة عادية وعندئذ تتطابق سلسلة لوران مع سلسلة تايلور ويمكن استبدال $\tilde{f}$ شكلياً بـ f.

$$f(z)=\sum_{0} c_n(z-a)^n \quad ; \quad z\in K : |z-a|<r \qquad (3)$$

مثال (1): حدد نوع النقطة $z=0$ بالنسبة لكل من التابعين f التاليين:

1) $\dfrac{(e^z-1)}{1-\cos z}$ 2) $\operatorname{ctg}z-\dfrac{1}{z}$

كيف تجعل هذه النقطة عادية؟.

الحل:

1) إن $z=0$ نقطة شاذة معزولة وهي قابلة للإصلاح لأن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2e^z(e^z-1)}{\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{4e^{2z}-2e^z}{\cos z}=2\neq 0$$

وبوضع $f(0)=\lim_{z\to 0}f(z)=2$ وأخذ التابع:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(e^z-1)^2}{1-\cos z} & ; \quad z\neq 0\\ 2 & ; \quad z=0\end{cases}$$

تصبح النقطة $z=0$ عادية.

لاحظ أنه يمكن أيضاً الحصول على المساواة $f(0)=2$ من خلال الصيغ التقريبية:

$$1-\cos z \underset{z\to 0}{=} \frac{z^2}{2}\ ,\ (e^z-1)^2 \underset{z\to 0}{=} z^2 \Rightarrow f \underset{z\to 0}{\simeq} \frac{z^2}{z^2/2}=2$$

2) النقطة $z=0$ شاذة من نوع قابلة للإصلاح لأن:

$$\lim_{z\to 0}\left(\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{z.\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-z\sin z-\cos z}{\sin z+z\cos z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z-\sin z-z\cos z-\cos z}{\cos z+\cos z-2\cos z}=\frac{-1}{2}\neq 0$$

أو لأن:

$$\operatorname{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-\dfrac{z^2}{2!}+\ldots}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots}=\frac{1}{z}+g(z)$$

بالتالي $f(z)=\text{ctg}z-\frac{1}{z}=g(z)$ تابع نظامي في النقطة $z=0$.

ما هو نوع النقطة$z=0$ بالنسبة لكل من $\text{ctg}\, z$ و $1/z$ وماذا تستنتج؟

(2-4-5) القطب:

لتكن $z=a$ نقطة شاذة معزولة للتابع f.

مبرهنة (2):

1) تكون النقطة a $(a\neq\infty)$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z)=(z-a)^{-m}.\psi(z) \tag{4}$$

حيث $\psi(z)$ تابع نظامي لاينعدم في النقطة a و $m\geq 1$ عدد صحيح.

2) تكون النقطة $z=\infty$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z)=z^{m}.h(z) \tag{5}$$

حيث h(z) تابع نظامي لاينعدم في النقطة a و $m\geq 1$ عدد صحيح.

إثبات 1):

لزوم الشرط: بما أن a قطب للتابع f فإن f تابع نظامي في جوار موخوذ لـ a و $\lim\limits_{z\to a} f=\infty$ بالتالي يوجد $o<r$ بحيث:

$$|f(z)|>1 \quad ; \quad z\in K:\ o<|z-a|<r \tag{6}$$

ويمكن اختيار r بحيث يكون f نظامياً في K.

من المتراجحة في (6) نجد $f(z)\neq 0$ في K وعندها يكون $g=\frac{1}{f}$ تابع نظامي ومحدود $|g|<1$ في الحلقة K و a نقطة شاذة قابلة للإصلاح لـ g حسب النتيجة (1) وبوضع $g(a)=\lim\limits_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=0$ يصبح التابع g نظامياً في القرص $|z-a|<r$ والنقطة a صفر له، وإذا فرضنا أن مرتبة هذا الصفر هي $1\leq m$ فإن: $g(z)=(z-a)^{m}.h(z)$

حيث h تابع نظامي غير معدوم في النقطة a. وعليه فإن:

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=(z-a)^{-m}.\psi(z)$$

حيث $\psi=\frac{1}{h}$ تابع نظامي لاينعدم في a $\left(\psi(a)=\frac{1}{h(a)}\neq o\right)$.

كفاية الشرط: بما أن f يكتب بالشكل (4) و $\psi(z)$ تابع نظامي غير معدوم في a فإن f تابع نظامي في جوار موخوذ لـ a و $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$ وهذه تعني أن a قطب للتابع f.

إثبات 2):

لزوم الشرط: بما أن $z=\infty$ قطب لـ f فإنه بنفس الأسلوب نجد أن $z=\infty$ هي صفر للتابع $g=\frac{1}{f}$ ويكون $g(z)=z^{-m}.\psi(z)$ حيث ψ تابع نظامي غير معدوم في النقطة ∞ وافترضنا m هي مرتبة الصفر ∞ لـ g ومنه نجد أن العلاقة (5) صحيحة.

اترك كفاية الشرط تدريباً.

نتيجة هامة (2):

1) تكون النقطة الشاذة المعزولة a $(a\neq\infty)$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا تحققت الصيغة التقريبية التالية قرب a.

$$f(z)\underset{z\to a}{=}A(z-a)^{-m}\quad;\quad A\neq 0 \tag{7}$$

2) تكون النقطة الشاذة المعزولة $z=\infty$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z)\underset{z\to\infty}{=}Bz^{m}\quad;\quad B\neq 0 \tag{8}$$

البرهان: ينتج مباشرة من إثبات المبرهنة (2) أو من(4) و (5).

ملاحظة (2): يمكن اعتماد الصيغة (7) كتعريف لمرتبة القطب a $(a\neq\infty)$ والصيغة (8) كتعريف لمرتبة القطب $z=\infty$.

بمقارنة هذه النتيجة مع النتيجة الهامة (1) في البند (5-3) نستنتج العلاقة الهامة التالية بين الأصفار والأقطاب للتابع f(z) :

تكون النقطة a قطباً من المرتبة m للتابع f(z) إذا وفقط إذا كانت صفراً من المرتبة m للتابع $\frac{1}{f(z)}$.

مبرهنة (3): لتكن a $(a \neq \infty)$ نقطة شاذة معزولة للتابع f. تكون a قطباً من المرتبة $1 \leq m$ للتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع f حول a منته وأكبر أسسه السالبة هو $-m$ (أعلى أس في المقام يساوي m).

الإثبات:

لزوم الشرط: لنفرض أن a $(a \neq \infty)$ قطب من المرتبة m لـ f. عندها يكون:

$$f(z)=(z-a)^{-m}.\psi(z)$$

حيث $\psi(z)$ تابع نظامي غير معدوم في a.

لكن حول a لدينا:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^{-m}\left[c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\dots\right] \\ &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m+1}}+\dots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\dots \end{aligned}$$

القسم الرئيس من سلسلة لوران السابقة هو $f_1=\sum_{1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}\ ;\ c_{-m} \neq 0$

وعدد حدوده منته وأكبر أسسه السالبة هو $-m$.

كفاية الشرط: من سلسلة لوران للتابع f حول a السابقة نجد أن الصيغة (7) محققة وبالتالي فإن a قطب من المرتبة m للتابع f.

مبرهنة (4): لتكن $z=\infty$ نقطة شاذة معزولة لـ f. تكون $z=\infty$ قطباً من المرتبة m للتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيس من سلسلة لوران لـ f حول $z=\infty$ (قوى z الموجبة) منته وأكبر أس موجب هو m.

اترك الاثبات تدريباً.

مثال (2): أوجد النقاط الشاذة في المستوى $\overline{C}$ لكل من التوابع f التالية وعيّن نوع كل نقطة.

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z}} \ (1 \qquad \frac{1-\cos z}{\left(e^z-1\right)^3} \ (2 \qquad P_n(z) \ (3 \qquad \frac{1}{e^{1/z^2}+1} \ (4$$

الحل:

1) النقاط الشاذة المعزولة لهذا التابع في المستوى C هي جذور المعادلة $\operatorname{sh}\frac{1}{z}=0$ أو $-i\sin\frac{i}{z}=0$ أي $z_k=\frac{1}{\pi k}i\,;\,k=\pm1,\ldots$ وبما أن z_k أصفار بسيطة للتابع $g=\operatorname{sh}\frac{1}{z}$ فإنها أقطاب بسيطة للتابع $f=\frac{1}{g}$.

وبما أن $\lim_{k\to\infty} z_k=0$ فإن $z=0$ نقطة شاذة غير معزولة للتابع المعطى f

بالنسبة للنقطة $z=\infty$ لدينا:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z}=-i\sin\frac{i}{z}\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{1}{z}\Rightarrow f=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z}}\underset{z\to\infty}{\simeq}z$$

وهذا يعني أن النقطة $z=\infty$ هي قطب بسيط للتابع f.

2) النقطة $z=0$ قطب بسيط لأن كل من البسط $P(z)=1-\cos z$ والمقام $q(z)=\left(e^z-1\right)$ تابع نظامي في جوار الصفر وعندما $z\to0$ يكون:

$$1-\cos z\underset{z\to0}{\simeq}\frac{z^2}{2}\ ,\ \left(e^z-1\right)^3\underset{z\to0}{\simeq}z^3\Rightarrow f=\frac{P(z)}{q(z)}\underset{z\to0}{\simeq}\frac{1}{2z}$$

هل يمكنك الحصول على هذه النتيجة باستخدام قاعة أوبيتال؟.

جذور المقام $q(z)$ أي $z_k=2\pi ki\,;\,k=\pm1,\pm2,\ldots$ أصفار من المرتبة الثالثة لـ q و z_k لاتعدم البسط $P(z)$. بالتالي فإن z_k هي أقطاب من المرتبة الثالثة للتابع f.

النقطة $z=\infty$ شاذة غير معزولة لأنها نقطة تراكم لمجموعة الأقطاب $\lim_{k\to+\infty} z_k=\infty$.

3) سلسلة لوران حول النقطة $z=\infty$ لكثيرة الحدود $f=P_n(z)$ هي ذاتها سلسلة ماك لوران لكن قسمها الرئيس هو أسس z الموجبة، أي $a_1z+\ldots+a_nz^n$ وبما أن عدد حدود هذا القسم منته وأكبر أسسه الموجبة هو $n\,(a_n\neq 0)$ فإن $z=\infty$ هي قطب من المرتبة n لكثيرة الحدود P_n.

ونصل إلى هذه النتيجة مباشرة من الصيغة التقريبية $P_n(z) \underset{z\to\infty}{=} z^n$.

4) النقطة $z=0$ شاذة غير معزولة لأنها نقطة تراكم للأقطاب البسيطة:

$$z_k=\pm\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi i}}$$

ما هو نوع النقطة ∞ بالنسبة للتابع المفروض؟

(3-4-5) النقطة الشاذة الأساسية:

لتكن a نقطة شاذة معزولة للتابع f.

مبرهنة (5): تكون النقطة a شاذة أساسية للتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع f حول a غير منته.

الإثبات:

لزوم الشرط: لتكن a شاذة أساسية لـ f ولنفرض العكس وعندئذ نميز احتمالين: الأول أن يكون القسم الرئيس من سلسلة لوران غير موجود وعندئذ a يجب أن تكون قابلة للإصلاح، وهذا تناقض. والاحتمال الثاني هو أن يكون عدد حدود القسم الرئيس منته وعندئذ يجب أن تكون a قطب وهذا تناقض أيضاً.

اترك إثبات كفاية الشرط تدريباً.

مثال (3): أعطِ توابع لأجلها تكون النقطة $z=1$ شاذة أساسية وعلل السبب.

الحل: النقطة $z=1$ شاذة أساسية للتابع $e^{1/(z-1)}$ لأن سلسلة لوران لهذا التابع حولها هي $e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{0}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}$ وعدد حدود القسم الرئيس من هذه السلسلة (أسس (z-1) السالبة) غير منته.

و $z=1$ شاذة أساسية للتوابع $\cos\frac{1}{z-1}, \sin\frac{1}{z-1}, \text{sh}\frac{1}{z-1}$.

وبملاحظة أن $z=\infty$ عادية للتوابع السابقة فإن النقطة الشاذة الوحيدة هي $z=1$.

مثال (4): أعطِ توابع لأجلها تكون النقطة $z=\infty$ شاذة أساسية.

الحل:

$\text{chz}, \text{shz}, \cos z, \sin z, e^z$ لأن القسم الرئيس من سلسلة لوران لأي من هذه التوابع (أسس z الموجبة) غير منته.

تصنف المبرهنتان التاليتان سلوك تابع f قرب نقطة شاذة أساسية.

مبرهنة (6)- سوخوتسكي: لتكن a نقطة شاذة أساسية للتابع f عندئذ:

1) لكل عدد مركب A توجد متتالية نقاط $\{z_k\}$ متقاربة من a بحيث:

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k)=A \tag{9}$$

2) من أجل $A=\infty$ توجد متتالية نقاط $\{z_n\}$ متقاربة من a بحيث:

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k)=\infty \tag{10}$$

الإثبات:

1) بما أن $A\neq\infty$ فإنه يتم المطلوب إذا أثبتنا صحة الشرط:

$$\forall\varepsilon\succ 0\ ,\ \forall\delta\succ 0\,\exists z_\delta\ ;\ 0<|z_\delta-a|<\delta\Rightarrow|f(z_\delta)-A|<\varepsilon$$

يكفي أن نأخذ $\varepsilon=\frac{1}{n}$ و $\delta=\frac{1}{n}\ ;\ n=1,2,...$.

لنفرض العكس أي أن الشرط غير محقق، عندئذ يوجد عددان $0<\varepsilon_0$ و $0<\delta_0$ بحيث إنه:

$$\forall z\ ;\ 0<|z-a|<\delta_0\Rightarrow|f(z)-A|\geq\varepsilon_0$$

نأخـذ التـابع $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ نجـد أنـه عنـدما $0<|z-a|<\delta_0$ يكـون $|g(z)|\le\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ ولكن بما أن a شاذة معزولة لـ f فإنها شاذة معزولة لــ g ($g(z)\neq 0$ في الحلقة $0<|z-a|<\delta_0$) وبالتالي a هي نقطة قابلة للإصـلاح لــ g و $\lim\limits_{z\to a} g(z)=B$ موجودة و محدودة.

من جانـب آخـر لـدينا $f(z)=A+\dfrac{1}{g(z)}$ في الحلقـة $0<|z-a|<\delta_0$ بالتـالي النهاية $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ موجودة (محـدودة عنـدما $B\neq 0$ وغـير محـدودة عنـدما $B=0$) و a نقطة قابلة للإصلاح أو قطب للتابع f وهذا تناقض مع كون النقطة a شاذة أساسية.

2) التابع f غير محدود في أي جوار للنقطة a لأنه لو كان محدوداً لتوجب أن تكون a قابلة للإصلاح. إذن لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,\exists z_n\in K_0 : 0<|z-a|<\frac{1}{n}\Rightarrow |f(z_n)|>n$$

أي أن $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a$ و $f(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

مثال (5): طبق مبرهنة سوخوتسكي على التابع $f_1=e^{1/z}$.

مبرهنة (7) – بيكار : لتكن a نقطة شاذة أساسية للتابع f. عندئذ يأخـذ التـابع f كـل قيمة مركبة A باستثناء قيمة واحدة على الأكثر.

بتعبير أدق للمعادلة $f(z)-A=0$ عدد غير منته من الحلول بالنسبة لـ z.

لكل قيمة مركبة مثبتة A باستثناء - احتمالاً - قيمة واحدة على الأكثر.

اترك الاثبات تدريباً.

تعريف **(1): القيمة الاستثنائية أو البيكارية للتابع f هي ذلك العدد A. الذي لأجله**

لا تكون المعادلة $f(z)-A_\circ=0$ قابلـة للحـل حيـث يوجـد لــ f نقطـة شـاذة أساسية.

مثال (6) : طبق مبرهنة بيكار على كل من التابعين التاليين:

$$f(z)=e^{z} \quad (1 \qquad\qquad f(z)=\sin z \quad (2$$

وحدد القيمة الاستثنائية في حال وجودها.

الحل:

1) إن $z=\infty$ نقطة شاذة أساسية للتابع e^{z} ولأي قيمة A باستثناء $A^{*}=0$ للمعادلة $e^{z}-A=0$ حلولاً تعطى بالعلاقة:

$$z_k=\ln|A|+i\,(\mathrm{Arg}A+2\pi k)$$

بالتالي في كل جوار للنقطة $z=\infty$ لدينا عدد غير منته من النقاط (الحلول z_k) والتي فيها يأخذ التابع e^{z} القيمة A والقيمة الاستثنائية هي $A_{*}=0$ ($e^{z}\neq 0$ لكل z).

2) $z=\infty$ شاذة أساسية للتابع sinz ولأي قيمة A بدون استثناء للمعادلة $\sin z-A=0$ عدداً لانهائياً من الحلول تعطى بالعلاقة :

$$z_k=\frac{1}{i}\ln\left(iA+\sqrt{1-A^{2}}\right)+2\pi k$$

ولاتوجد نقطة استثنائية.

(4-4-5) **ملاحظات ونتائج هامة:**

أدعو القارئ للتحقق رياضياً من جميع النتائج في هذا البند.

1) التابع الكسري: إذا كان f و g تابعان نظاميان في النقطة a ($a\neq\infty$) وكان:

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)} \tag{10}$$

فإن النقطة a إما عادية أو قطب للتابع F وبالتحديد فإن:

I – إذا كان $g(a)\neq 0$ فإن F تابع نظامي في a (a عادية لـ F).

II – إذا كان $g(a)=g'(a)=...=g^{(m-1)}(a)=0$ & $g^{(m)}(a)\neq 0$ أي أن a صفر من المرتبة m للتابع g وكان $f(a)\neq 0$ فإن a هي قطب من المرتبة m للتابع F في (10).

III – إذا كـان $f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$ & $f^{(n)}(a)\neq 0$ أي a صـفر مـن المرتبـة n للبسـط f وكـان $g(a)=g'(a)=...=g^{(m-1)}(a)=0$ و $g^{(m)}(a)\neq 0$

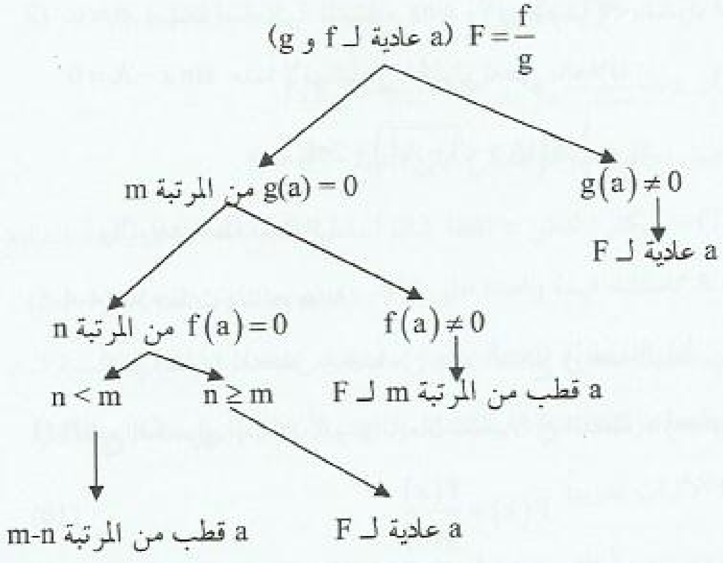
(a صفر من الدرجة m للمقام g) فإن:

*) a نقطة عادية للتابع F عندما $n \geq m$.

*) a قطب من المرتبة m-n للتابع F عندما $n < m$.

على سبيل المثال جميع النقاط الشاذة للتـابع $F = tgz$ في المستوى C هـي أقطـاب بسيطة $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ والنقاط الشاذة للتابع $F = ctgz$ هي الأقطاب البسيطة $z_k = \pi k$.

يلخص المخطط التالي مناقشتنا السابقة:



2) التابع الكسري العادي (حالة خاصة من 1):

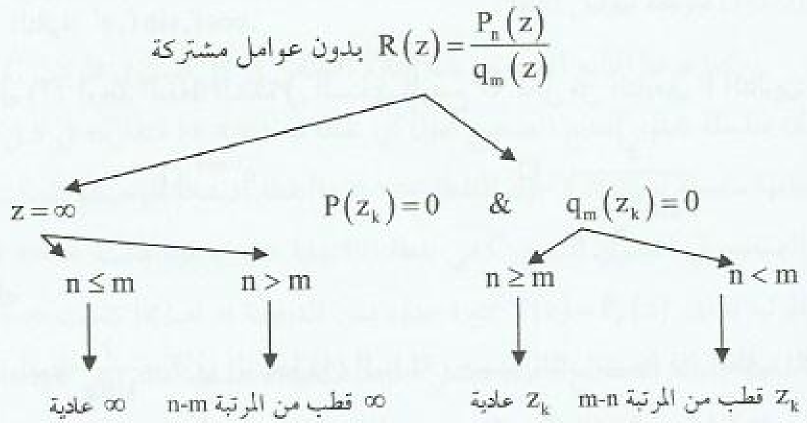
ليكن التابع الكسري العادي:

$$R(z)=\frac{P_n(z)}{q_m(z)} \tag{11}$$

حيث لاتوجد أصفار مشتركة بين P_n و q_m . عندئذ جذور المعادلـة $q_m(z)=0$ تكون أقطاباً للتابع $R(z)$ في (11) ولاتوجد نقاط شاذة محدودة أخرى لهذا التابع في C أما في $\overline{C}$ فإن النقطة $z=\infty$ تكون:

أ – قطب من المرتبة n-m للتابع $R(z)$ عندما $n>m$.

ب – عادية للتابع $R(z)$ عندما $n \le m$ انظر المخطط التالي:



3) **مقلوب تابع:** لتكن a نقطة شاذة أساسية للتابع f ولنأخذ التابع:

$$F(z)=\frac{1}{f(z)} \tag{12}$$

عندئذ تكون a شاذة أساسية أو شاذة غير معزولة للتابع F في (12) وبالتحديد فإن:

أ – a شاذة أساسية لـ F إذا كان $f(z)\neq 0$ في جوار موخوذ لـ a. كالنقطة $z=0$ بالنسبة للتابع $F=\frac{1}{e^{1/z}}=e^{-1/z}$.

ب – عندما $f(z)=0$ في كل جوار موخوذ لـ a فإن أصفار f تكون أقطاباً للتابع F كالنقطة $z=i$ بالنسبة للتابع $F(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z-i}}$ انظر المخطط التالي:

$F=\dfrac{1}{f}$ (a شاذة أساسية لـ f)

$f(z) \neq 0$ حول a ← a شاذة أساسية لـ F

$f(z_k)=0$ حول a ← z_k أقطاب لـ F ، a شاذة غير معزولة لـ F

4) a قطب : إذا كانت a قطبا للتابع f فإنها تكون شاذة أساسية لكل من التوابع F التالية: $\cos f, \sin f, e^f$.

مثال (7): أوجد النقاط الشاذة في المستوى الموسع $\overline{C}$ لكل من التابعين F التاليين:

1) $e^{1/\sin z}$. 2) $\dfrac{z^3}{\sin^2 \dfrac{1}{z+1}}$

الحل:

1) لدينا $f=\dfrac{1}{\sin z}$ في النتيجة (4) السابقة وحسب تلك النتيجة فإن اقطاب التابع f تكون نقاط شاذة أساسية للتابع المفروض لكن أقطاب f هي أصفار sinz أي $z_k=\pi k\,;\, k=0,\pm1,..$ ولاتوجد نقاط شاذة محدودة (في C) أخرى.

النقطة $z=\infty$ هي نقطة تراكم لمجموعة النقاط الشاذة الأساسية $\lim\limits_{k\to+\infty}(\pi k)=\infty$ فهي شاذة غير معزولة للتابع F المعطى.

2) أصفار المقام أي $z_k=-1+\dfrac{1}{\pi k}\,;\, k=\pm1,...$ هي أقطاب من المرتبة الثانية، و $z=-1$ نقطة شاذة غير معزولة لأن $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k=-1$ ، أما بالنسبة للنقطة $z=\infty$ فنلاحظ أن:

$$\sin\frac{1}{z+1}\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{1}{z},\ \sin^2\frac{1}{z+1}\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{1}{z^2},\ z^3\underset{z\to\infty}{=}z^3\Rightarrow$$

$$F(z)\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{z^3}{\frac{1}{z^2}}=z^5$$

بالتالي $z=\infty$ هي قطب من المرتبة الخامسة للتابع المفروض F.

(5-5) تطبيقات:

نستعرض في هذه الفقرة بعض التطبيقات النظرية الهامة:

(5-5-1) مبرهنة ليوفيل العامة:

كنا عرفنا التابع الصحيح بأنه التابع النظامي في كل المستوي المركب C ووجدنا أن سلسلة تايلور للتابع الصحيح حول أي نقطة a $(a\neq\infty)$ متقاربة في كل C وهي ذاتها سلسلة لوران لـ f حول النقطة $z=\infty$ والنقطة **الشاذة الوحيدة** الممكنة للتابع الصحيح في المستوى الموسع $\overline{C}$ هي نقطة اللانهاية $z=\infty$ فإذا كانت $z=\infty$ قطباً من المرتبة n فإن $f(z)=P_n(z)$ كثيرة حدود من الدرجة n، أما إذا كانت $z=\infty$ شاذة أساسية للتابع الصحيح f فإننا نسمي f تابعاً **صحيحاً متسامياً** كالتوابع $\cos z, \sin z, e^z$.

أخيراً إذا كانت $z=\infty$ عادية للتابع الصحيح f فإن $f(z)=c_0=\text{const}$.

نستنتج من هذا أن صف التوابع الثابتة هو الصف الوحيد الذي ليس له أية نقاط شاذة في كل المستوى الموسع $\overline{C}$.

مبرهنة (1)- ليوفيل: ليكن f(z) تابع صحيح يحقق المتراجحة:

$$|f(z)|\leq M|z|^n\ ;\ \text{عدد صحيح}\ n\geq 0\ ,\ |z|>R_1 \qquad (1)$$

عندئذ f(z) هو كثيرة حدود درجتها ليست أكبر من n.

الإثبات: باستخدام متراجحات كوشي والمتراجحات في (1) نجد أنه عندما $R>R_1$ يكون:

$$|c_k| \leq \frac{MR^n}{R^k} = MR^{n-k} \;\; ; \;\; k = 1,2,...$$

إذا كانت $k > n$ فإن $c_k = 0$ لأنه بالإمكان أخذ R كبيراً بالقدر الذي نريد ($R \to +\infty$) والأمثال c_k مستقلة عن R. أصبح لدينا: $c_{n+1} = c_{n+2} = ... = 0$ في سلسلة لوران للتابع f حول ∞ وبالتالي فإن f هو كثيرة حدود درجتها ليست أكبر من n (الدرجة هي n عندما $c_n \neq 0$ وهي أصغر من n عندما $c_n = 0$).

نتيجة (1): إذا كان التابع الصحيح f محدوداً في كل المستوى C أي $|f(z)| \leq M$ لكل z فإن $f(z) \equiv const$.

البرهان: يكفي وضع $n = 0$ في المبرهنة السابقة.

(2-5-5) **المبرهنة الأساسية في الجبر:**

بالاعتماد على مبرهنة ليوفيل نثبت صحة المبرهنة الشهيرة في الجبر.

مبرهنة (2): لكل كثيرة حدود مركبة $P_n(z) = c_n z^n + ... + c_o$ صفر واحد على الأقل حيث $1 \leq n$ و $c_n \neq 0$.

هذا يكافئ : لكل كثيرة حدود مركبة من الدرجة n أصفاراً عددها n (مع مراعاة تكرار الأصفار المضاعفة).

الإثبات: نفرض العكس، أي لاتوجد لكثيرة الحدود P_n أية أصفار عندئذ التابع $g(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ يكون صحيحاً. لكن $P_n(z) \underset{z \to \infty}{\simeq} c_n z^n$ بالتالي $g(z) \underset{z \to \infty}{\simeq} 0$ وهذه تعني أن $g(z)$ هو تابع محدود في كل المستوى C.

وحسب النتيجة السابقة فإن $g(z) \equiv const$ وهذا تناقض لأن $1 \leq n$.

إذن يوجد صفر واحد z_1 على الأقل لكثيرة الحدود، وبتقسيم P_n على $(z - z_1)$ نجد كثيرة حدود $P_{n-1}(z)$ من الدرجة (n-1) وحسب المبرهن أعلاه فإن لها صفر واحد على الأقل z_2. وبتقسيم P_{n-1} على $(z - z_2)$ نحصل على كثيرة حدود $P_{n-2}(z)$

وهكذا بتكرار العملية نجد أن لـ P_n أصفاراً في المستوى C عددها يساوي n مع مراعاة تكرار الأصفار المضاعفة.

(3-5-5) التوابع الميرومورفية التي عدد أقطابها منته:

إن صف التوابع الميرومورفية هو صف أوسع من صف التوابع الصحيحة.

تعريف (1): يقال إن التابع f ميرومورفي إذا كان نظامياً في كل جزء محدود من المستوى المركب باستثناء عدد منته من الأقطاب على الأكثر وليس له نقاط شاذة من نوع آخر.

لنلاحظ أنه إذا لم يوجد أية أقطاب للتابع الميرومورفي f في كل جزء محدود من المستوى فإنه يكون صحيحاً.

من جهة ثانية يمكن أن يكون عدد أقطاب تابع ميرومورفي غير منته في كل C كالتوابع $\mathrm{ctg}z, \frac{1}{\cos z}, \frac{1}{e^z-1}$ لكن يبقى العدد منتهياً في كل جزء محدود من C لماذا؟ كما يمكن أن يكون عدد أقطاب التابع الميرومورفي f في كل C منتهياً كالتابع $\frac{z}{(z+i)(z-1)^3}$.

وبصورة خاصة فإن التابع الكسري العادي $f=\frac{P_n}{q_m}$ هو تابع ميرومورفي عدد أقطابه في كل المستوى C (أو $\overline{C}$) منته ويصح العكس:

مبرهنة (3): الحالة البسيطة لنشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة: إذا كان التابع الميرومورفي f(z) يملك في كل المستوى الموسع $\overline{C}$ عدداً منتهياً فقط من الأقطاب $a_1, a_2, ..., a_s$ (هنا يمكن أن تكون $z=\infty$ إحدى الأقطاب a_j) فإن f(z) هو تابع كسري عادي وينشر في سلسلة منتهية من الكسور البسيطة.

$$f(z)=A+f_o(z)+\sum_{1}^{S} f_k(z) \tag{2}$$

حيث $f_o(z)$ هو القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع f حول النقطة $z=\infty$.

$f_k(z)$ هو القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع f حول القطب $a_k\left(k=\overline{1,s}\right)$ و:

$$A=\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-f_0(z)\right] \qquad (3)$$

الإثبات: ليكن $f_0(z)=A_m z^m+\ldots+A_1 z$ و $f_k(z)=\sum_{j=1}^{m_k}\dfrac{A_{j,k}}{(z-a_k)^j}$ هو القسم الرئيس لـ f حول ∞ وحول a_k على الترتيب $\left(k=\overline{1,s}\right)$ وهنا افترضنا m_k مرتبة القطب a_k. عندئذ يكون $g(z)=f(z)-f_0(z)-\sum_1^s f_k(z)$ تابع نظامي في كل المستوى الموسع $\overline{C}$ وبالتالي $g(z)\equiv const$ ومنه (2) صحيحة.

من جهة ثانية بما أن $\lim_{z\to\infty} f_k(z)=0$ لكل $k=\overline{1,s}$ فإن (3) صحيحة.

ملاحظة (1): المقدار $A+f_0(z)$ هو الجزء الصحيح و $\sum_1^s f_k(z)$ الجزء الكسري في منشور التابع الميرومورفي (2).

مبرهنة (4): كل تابع ميرومورفي يكتب كنسبة لتابعين صحيحين لماذا؟.

مبرهنة (5): يأخذ التابع الميرومورفي غير الثابت f جميع القيم المركبة باستثناء قيمتين على الأكثر.

بتعبير أدق فإن المعادلة $f(z)-A=0$ قابلة للحل لكل قيمة مثبتة A باستثناء لا أكثر من قيمتين $A^* \& A^{**}$.

تسمى القيمتان $A^* \& A^{**}$ التي لايأخذها التابع الميرومورفي في A في حال وجودهما قيمتان استثنائيتان **(بيكاريتان)** للتابع f.

على سبيل المثال للتابع الميرومورفي $tg\ z$ قيمتان استثنائيتان هما $A^*=i$ و $A^{**}=-i$ لأن $tgz\neq \pm i$ لأي $z \in C$.

(5– 6) التوابع المركبة الخاصة – التتمة 9:

نقدم بعض التوابع الخاصة كتطبيقات على تكاملات مركبة تابعة لوسيط دون الدخول في التفاصيل. ومن المهم تذكر بعض التكاملات الحقيقية الشهيرة إلى جانب نشور ماك لوران مثل:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (1)$$

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \dots \qquad (2)$$

1) تابع احتمال الخطأ: يعرف هذا التابع بالصيغة التكاملية:

$$F(z) = \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta \qquad (3)$$

بنشر $e^{-\zeta^2}$ في سلسلة قوى حول $\zeta = 0$ ثم المكاملة حداً حداً نجد:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}; \; z \in C \qquad (4)$$

إن السلسلة (4) متقاربة لكل z وعندما $z \to \infty$ وفق النصف الموجب للمحور الحقيقي فان نهاية التابع erf(z) موجودة ومحدودة وتساوي 1: $\operatorname{erf}\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = 1$

ولنلاحظ أن سرعة النهاية كبيرة للغاية (تختلف عن erf 2 بـ 0.5%)

لكن من أجل مسار كيفي لـ z نحو ∞ لن تكون النهاية $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{erf}$ موجودة (لامحدودة ولا غير محدودة) وهذا ينتج – حسب (4) – كون ∞ شاذة أساسية للتابع.

2) تابع متمم احتمال الخطأ:

$$\operatorname{Erf}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \qquad (5)$$

3) الجيب التكاملي والتجيب التكاملي:

تابع الجيب التكاملي المركب هو:

$$\operatorname{si} z = \int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta} d\zeta \qquad (6)$$

$$\operatorname{si} z = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \; z \in C \qquad (7)$$

$$\mathrm{Si}\,z = \mathrm{si}\,z - \frac{\pi}{2} = \int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta - \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

ويعرف تابع التجيب التكاملي بالشكل:

$$\mathrm{Ci}\,z = \int_0^z \frac{\cos\zeta}{\zeta}\,d\zeta \tag{9}$$

ما هو نوع النقطة ∞ بالنسبة للتوابع الثلاثة السابقة ؟.

4) توابع كثيرات حدود لوجاندر $P_n(z)$

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[\left(z^2-1\right)^n\right] \tag{10}$$

أو هي الأمثال في سلسلة ماك – لوران التالية:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}} = 1 + P_1(z)\zeta + \cdots + P_n(z)\zeta^n + \cdots = \sum_0 P_n(z)\cdot\zeta^n \tag{11}$$

حيث $c_n(z) = P_n(z)$ و z وسيط مستقل عن ζ.

للحصول على الصيغ التحليلية لـ $P_n(z)$ نفاضل طرفي (11) بالنسبة لـ ζ ونطابق بين الأمثال المتشابهة نجد:

$$P_1(z) = z\ ,\quad P_2(z) = \frac{3z^2-1}{2} \tag{12}$$

وهكذا نجد:

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \tag{13}$$

والعلاقة التدريجية (13) تحسب لنا $P_4, P_3 \cdots$ بدلالة P_2, P_1 المعرفين في (12).

الصيغ الرياضية لكثيرات حدود لوجاندر:

الصيغة الأولى:

باستخدام علاقة كوشي التكاملية نجد الصيغة:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(\zeta^2-1\right)}{2^n\left(\zeta-z\right)^{n+1}}\,d\zeta \tag{14}$$

حيث γ مغلق تقع النقطة $z=\zeta$ داخله.

اترك البرهان تدريباً.

الصيغة الثانية:

لنفرض أن $z=x\,;|x|<1$ و γ دائرة مركزها x ونصف قطرها $\sqrt{1-x^2}$ عندئذ بوضع $\zeta-x=\sqrt{1-x^2}\,e^{it}$ نجد:

$$\zeta^2-1=2\sqrt{1-x^2}\left(x+i\sin t\sqrt{1-x^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sin t\sqrt{1-x^2}\right)^n dt$$

بما أن كل من الطرفين في المساواة السابقة يمثل تابعاً نظامياً بالنسبة لقيم x الحقيقية فان هذه المساواة تبقى صحيحة لقيم $x=z$ المركبة حيث $|z|<1$ حسب مبرهنة الوحدانية في التوابع النظامية. أضف لهذا يمكن استبدال $\sin t$ بـ $\cos t$ والمجال $(0,2\pi)$ بالمجال $(0,\pi)$ لماذا؟ وبعدئذ نحصل على الصيغة:

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t\right)^n dt$$

الصيغة الثالثة:

بوضع $x+i\sqrt{1-x^2}\cos t=\zeta$ نجد أن $dt=\frac{id\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}}$ والمنحنى التكاملي في C_ζ هو القطعة المستقيمة الشاقولية الواصلة بين النقطتين $x+i\sqrt{1-x^2}=e^{i\varphi}$ و $x-i\sqrt{1-x^2}=e^{-i\varphi}$. بالتالي:

$$P_n(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}}\frac{\zeta^n d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}}$$

وحسب مبرهنة كوشي التكاملية نستطيع استبدال القطعة المستقيمة السابقة بالجزء $\zeta=e^{i\theta}\,;-\varphi\le\theta\le\varphi$ من دائرة الوحدة $|\zeta|=1$. بعدئذ نجد أن :

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{e^{i(n+1)\theta}d\theta}{\sqrt{1-2xe^{i\theta}+e^{i2\theta}}}=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}d\theta}{\sqrt{\cos\theta-x}}$$

الآن بوضع $x=\cos\varphi$ ثم عزل القسم الحقيقي عن التخيلي نحصل على الصيغة:

$$P_n(\cos\varphi)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}$$

يمكن التحقق من أن $P_n(z)$ هو حل لمعادلة لوجاندر التفاضلية المركبة :

$$\left(1-z^2\right)P_n''(z)-2zP_n'(z)+n(n+1)P_n(z)=0$$

5) توابع شيبشيف – لاكير $L_n(z)$

تعرف هذه التوابع بالعلاقة :

$$L_n(z)=e^z\frac{d^n}{dz^n}\left(z^ne^{-z}\right)\qquad(15)$$

اترك تدريباً التحقق من أن:

$$L_n(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta^2e^{-(\zeta-z)}}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\qquad(16)$$

حيث النقطة $\zeta=z$ داخل γ، وأن $L_n(z)$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$zL_n''+(-1-z)L_n'+nL_n=0$$

6) كثيرات حدود شيبشيف – هيرمت $T_n(z)$:

تعرف بأنها الأمثال $c_n(z)=T_n(z)$ في سلسلة ماك لوران التالية :

$$\frac{4-\zeta^2}{4-4z\zeta+\zeta^2}=1+T_1(z)\zeta+\cdots+T_n(z)\cdot\zeta^n+\cdots=\sum_{0}T_n(z)\cdot\zeta^n\qquad(17)$$

لنبرهن أن :

$$T_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z) \tag{18}$$

حيث $\arccos z$ فرع مثبت مناسب.

نفرق المقدار $I(\zeta)=\dfrac{4-\zeta^2}{4-4z\zeta+\zeta^2}$ في كسور بسيطة ونفرض $z=\cos\omega$ بالتالي $\omega=\arccos z$ نجد:

$$I(\zeta)=-1+\frac{1}{1-\frac{\zeta}{2}e^{-i\omega}}+\frac{1}{1-\frac{\zeta}{2}e^{i\omega}}=1+\sum_{1}\frac{\cos n\omega}{2^{n-1}}\cdot\zeta^n$$

حيث ω وسيط مستقل عن ζ.

بالمقارنة مع الطرف الأيمن من (17) نجد:

$$T_n(z)(\cos\omega)=\frac{\cos n\omega}{2^{n-1}}$$

ومنه نحصل على (18).

إن T_n هو حل للمعادلة التفاضلية المركبة:

$$T_n''-2zT_n'+2nT=0$$

7) توابع بيسل $J_n(z)$ من النوع الأول والمرتبة الصحيحة:

ليكن n عدد صحيح . تعرف **توابع بيسل** $J_n(z)$ من النوع الأول والمرتبة n بأنها أمثال النشر:

$$e^{\frac{z}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}=\cdots+\frac{J_{-2}(z)}{\zeta^2}+\frac{J_{-1}(z)}{\zeta}+J_0(z)+$$
$$+J_1(z)\cdot\zeta+J_2(z)\cdot\zeta^2+\cdots$$
$$=\sum_{-\infty}^{-1}J_n(z)\cdot\zeta^n+\sum_{0}J_n(z)\zeta^n=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(z)\zeta^n \tag{19}$$

لنلاحظ أن السلسلة في (19) هي سلسلة لوران لماذا؟

لذلك نوجد $J_n(z)$ على شكل سلسلة قوى. لدينا:

$$e^{\frac{z}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}=\sum_{o}\frac{(z/2)^n}{n!}\zeta^n\sum_{o}\frac{(-1)^n(z/2)^n}{n!}\frac{1}{\zeta^n}$$

$$\Rightarrow J_n(z)=\sum_{k=0}\frac{(-1)^n}{(k+n)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}\quad ;n=0,1,... \tag{20}$$

عندئذ أمثال ζ^n من أجل $n=-1,-2,\cdots$ وأمثال $\frac{1}{\zeta^n}$ عندما $n=1,2,\cdots$ تعطي:

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z) \tag{21}$$

في الحالة الخاصة عندما $n=0$ يكون :

$$J_o(z)=\sum_{k=0}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

الصيغ التكاملية لتوابع بيسل $J_n(z)$:

الصيغة الأولى:

باستخدام علاقة كوشي التكاملية العامة نجد :

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{z/2\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta \tag{22}$$

حيث $\zeta=0$ داخل γ.

الصيغة الثانية:

لنبين أن:

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)d\varphi \tag{23}$$

نأخذ $\gamma:|\zeta|=1$ أو $\zeta=e^{i\varphi},0\le\varphi\le2\pi$ في الصيغة (22) نجد:

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\varphi}.e^{-ni\varphi}id\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)d\varphi-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\varphi-z\sin\varphi)d\varphi$$

لكن التكامل الثاني في الطرف الأيمن يساوي الصفر لأن التابع المستكمل فـردي ويمكن استبدال $(0,2\pi)$ بـ $(-\pi,\pi)$ ومنه نحصل على المطلوب.

8) توابع غوص فوق الهندسية $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$:

تابع غوص فوق الهندسي بالوسطاء α,β,γ هو مجموع لسلسلة ماك – لوران:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2+..$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}z^n+..=\sum_0\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n \quad (24)$$

حيث:

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1),(\alpha)_o=1 \quad (25)$$

إن التابع (24) نظامي في قرص الوحدة ويمثل حلاً لمعادلة تفاضلية.

- بوضع $\alpha=\beta=\gamma=1$ نحصل على السلسلة الهندسية المعروفة.
- بوضع $\alpha=\beta=-n$ نحصل على كثيرة حدود من الدرجة n.

في الحالة عندما $(\alpha)_n=1$ نجد تابع غوص المندمج:

$$F(\beta,\gamma;z)=\sum_0\frac{(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n \quad (26)$$

على سبيل التوضيح لدينا:

1) إذا كان $(\alpha)_n=(\beta)_n=1$, $(\gamma)_n=2$ فإن:

$$F(1,1,2;z)=\sum_0\frac{1}{n+1}z^n$$

2) إذا كان $(\alpha)_n=(\beta)_n=1$, $(\gamma)_n=n+1$ فإن:

$$\tilde{F}(1,n+1;z)=\frac{n!}{z}\left[e^z-\sum_{o}^{n-1}\frac{1}{k!}z^n\right],\ k=1,2,\cdots$$

مثال(1): أثبت أن تابع بيسل $J_o(z)$ صحيح وأنه حل للمعادلة:

$$J_o''(z)+\frac{1}{z}J_o'(z)+J_o(z)=0$$

الحل: لدينا:

$$J_o(z)=\sum_{o}\frac{1}{k!k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

نحسب $J_o'(z),J_o''(z)$ بالمفاضلة حداً حداً ونعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على مطابقة مما يعني أن J_o حل لهذه المعادلة.

إن J_o تابع صحيح لأن نصف قطر تقارب سلسلة القوى الممثلة له يساوي $R=+\infty$.

وهكذا فإن التوابع الخاصة $F,J_n,T_n,L_n,P_n,\tilde{F}$ هي حلول لمعادلات تفاضلية مركبة و كل تابع يمكن أن يعطى بثلاثة أشكال:

الأول بشكل صريح (بدلالة مشتق تابع)، والثاني ضمني (بدلالة صيغة تكاملية) والثالث ضمني (بدلالة سلسلة قوى).

نترك التفاصيل للجزء الثاني ولمقرر نظرية المعادلات التفاضلية المركبة.

تمارين محلولة

تمرين (1): أوجد سلسلة لوران لكل من التوابع f التالية ضمن الحلقة D المبينة جانبه:

1) $\frac{5}{z^2-z-6};\ 2<|z-1|<3$ ، 2) $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ في $1<|z|<3$ ثم $3<|z|$ ثم $0<|z+1|<2$ ثم $|z|<1$، 3) $\frac{z-1}{(z+2)(z+3)}$ في $|z|<2$ ثم $2<|z|<3$ ثم $3<|z|$، 4) $\frac{e^{2z}}{z^4};\ 0<|z|<1$، 5) $\frac{1}{z};\ 1<|z-1|<\infty$، 6) $\frac{5z+2i}{z(z+i)};1<|z-i|<2$.

الحل: لدينا:

1)
$$f=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-1)-2}-\frac{1}{(z-1)+3}$$
$$=\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)}$$

وحيث إن $\left|\frac{2}{z-1}\right|<1$ و $\left|-\frac{z-1}{3}\right|<1$ أي $2<|z-1|<3$ فرضاً فإن:

$$f=\frac{1}{z-1}\sum_{0}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{0}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n$$
$$=\sum_{0}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{0}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$$

2) لدينا $f=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right)$ في الحلقة $1<|z|<3$ يكون $\frac{|z|}{3}<1$ و $\frac{1}{|z|}<1$

$$f=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}\right]=\frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}$$

$$=\frac{1}{2z}\sum_{0} (-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{6}\sum_{0} (-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0} (-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{6}\sum_{0} \frac{(-1)^n}{3^n}z^n$$

في الحلقة $|z|>3$ يكون $\left|\frac{3}{z}\right|<1$ و $\frac{1}{|z|}<\frac{1}{3}<1$

$$f=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)}\right]=\frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}}$$

$$=\frac{1}{2z}\sum_{0} (-1)^n\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2z}\sum(-1)^n\cdot 3^n\frac{1}{z^n}=\sum_{0} \frac{(-1)^n}{2}\left(1-3^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}$$

في $0<|z+1|<2$ نضع $z+1=t$ نجد في $0<|t|<2$

$$f=\frac{1}{t(t+2)}=\frac{1}{2t}\frac{1}{1+\frac{t}{2}}=\frac{1}{2t}\sum_{0} \frac{(-1)^n}{2^n}t^n=\sum_{0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2(z+1)}+\sum_{1} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

في الحلقة $|z|<1$ يكون $\left|\frac{z}{3}\right|<\frac{1}{3}<1$

$$f=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{0} (-1)^n z^n-\frac{1}{3}\sum_{0} \frac{(-1)^n}{3^n}z^n\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{0} (-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n\right]$$

3) لدينا $f=\frac{4}{z+3}-\frac{3}{z+2}$

في $|z|<2$ تتطابق سلسلة لوران مع سلسلة تايلور (لماذا؟)

$$f=\frac{4}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}-\frac{3}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\frac{4}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}-\frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\sum_{0}\frac{(-1)^n}{3^n}z^n-\frac{3}{2}\sum_{0}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n=\sum_{0}(-1)^n\left(\frac{4}{3^{n+1}}-\frac{3}{2^{n+1}}\right)z^n$$

في $2<|z|<3$ نجد أن:

$$f=\frac{4}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}-\frac{3}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)};\left|\frac{z}{3}\right|<1,\left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$=\frac{4}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}-\frac{3}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{4}{3}\sum_{0}\frac{(-1)^n}{3^n}z^n-\frac{3}{z}\sum_{0}(-1)^n\cdot 2^n\frac{1}{z^n}$$

في $|z|>3$ لدينا $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ و $\left|\frac{3}{z}\right|<1$

$$f=\frac{4}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)}-\frac{3}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}$$

$$=\frac{4}{z}\sum_{0}(-1)^n 3^n\frac{1}{z^n}-\frac{3}{z}\sum_{0}(-1)^n\cdot 2^n\frac{1}{z^n}=\sum_{0}(-1)^n\left(4.3^n-3.2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}$$

4) نلاحظ أن $z=0$ شاذة للتابع f ومن سلسلة ماك – لوران نجد:

$$f=\frac{1}{z^4}\sum_{0}\frac{2^n}{n!}z^n=\frac{1}{z^4}\left[1+2z+\frac{4}{2!}z^2+\frac{8}{3!}z^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{3z}+\sum_{0}\frac{2^{n+4}}{(n+4)!}z^n$$

5) عندما $1<|z-1|<+\infty$ يكون $\frac{1}{|z-1|}<1$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$

$$=\frac{1}{z-1}\sum_{0}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}=\sum_{1}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$f=\frac{2}{z}+\frac{3}{z+i} \qquad (6$$

في $1<|z-i|$ يكون $\frac{1}{|z-i|}<1$

$$\frac{2}{z}=\frac{2}{z-i+i}=\frac{2}{(z-i)\left[1+\frac{i}{z-i}\right]}=\frac{2}{z-i}\sum_{0}(-1)^n i^n \frac{1}{(z-i)^n}$$

في $|z-i|<2$ يكون $\left|\frac{z-i}{2}\right|<1$

$$\frac{3}{z+i}=\frac{3}{z-i+2i}=\frac{3}{2i\left[1+\left(\frac{z-i}{2i}\right)\right]}=3\sum_{0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}i^n}(z-i)^n$$

بالتالي في $1<|z-i|<2$ يكون:

$$f=2\sum_{0}(-1)^n i^n \frac{1}{(z-i)^{n+1}}+3\sum_{0}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$=2\sum_{1}(-1)^{n-1} i^{n-1} \frac{1}{(z-i)^n}+3\sum_{0}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^n$$

تمرين (2): انشر كلاً من التوابع f التالية في سلسلة لوران في جوار موخوذ للنقطة a المبينة جانبه وحدد القسم الرئيسي من المنشور.

1) $\frac{1}{8+z^3}\ ;\ \infty$ ، 2) $z^2\sin\frac{1}{z-1},1$ ، 3) $\frac{1}{(1+2z)^2},\infty$

الحل:

1) إن سلسلة لوران حول ∞ هي ذاتها حول 0 بعد اعتبار z كبيرة.

$$f=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\left(-\frac{8}{z^3}\right)}=\frac{1}{z^3}\sum_{0}(-8)^n\frac{1}{(z^3)^n}$$

$$=\sum_{0}(-1)^n 8^n\frac{1}{z^{3n+3}}\ ;\ \left|\frac{8}{z^3}\right|<1 \quad \text{أو} \quad |z|>\sqrt[3]{|2|}$$

القسم الرئيسي أي الحدود ذات أسس z الموجبة يساوي 0.

(2
$$Z^2=\left[(z-1)+1\right]^2=(z-1)^2+(z-1)+1$$

$$\sin\frac{1}{z-1}=\sum_{o}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$f=(z-1)+2+\sum_{1}\left[\frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}}\right]+$$

$$+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(2n-1)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right)\frac{1}{(z-1)^{2n-1}}$$

القسم الرئيسي أي الحدود ذات أسس (z-1) السالبة هو النشر السابق باستثناء أول حدين فيه.

(3
$$\frac{1}{1+2z}=\frac{1}{2z}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2z}\right)}=\frac{1}{2z}\sum_{o}\left(-\frac{1}{2z}\right)^n=\sum_{o}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1}{z^{n+1}}$$

بمفاضلة الطرفين حداً حداً نجد:

$$-\frac{2}{(1+2z)^2}=-\sum_{o}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+1}}\frac{1}{z^{n+2}}\Rightarrow$$

$$f=\sum_{o}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}\frac{1}{z^{n+2}}\;;\left|\frac{1}{2z}\right|<1 \text{ أو } |z|>\frac{1}{2}$$

القسم الرئيسي ذو أسس z الموجبة يساوي الصفر.

تمرين (3): أوجد أمثال $\frac{1}{z}$ في سلسلة لوران للتابع $e^{z+\frac{1}{z}}$ حول ∞.

الحل:

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z e^{\frac{1}{z}}=\sum_{o}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{o}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

ومنه الأمثال المطلوبة هي:

$$c_{-1}=1+\frac{1}{1!\cdot 2!}+\frac{1}{2!\cdot 3!}+\cdots=\sum_{0}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

تمرين (4): أوجد عدداً من الحدود الأولى من سلسلة لوران لكل من التوابع f التالية ضمن الحلقة المبينة جانبه.

1) $\frac{e^{1/z}}{z^2-1}, |z|>1$ ، 2) $\frac{1}{e^z-1}; 0<|z|<2\pi$ ، 3) $\frac{1}{e^{1-z}}; |z|>1$

الحل:

1) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$ 2) $\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}+\cdots$ 3) $\frac{1}{e}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)$

تمرين (5):

a) ما هو نوع النقطة $z=1$ بالنسبة للتابع $\frac{\sin z}{(z^2-1)^2}$؟

b) أوجد الأصفار والنقاط الشاذة المحدودة لكل من التوابع: 1) $\sin\left(1-\frac{1}{z}\right)$ ، 2) $\frac{tgz}{z}$

الحل:

a) بما أن $\frac{\sin z}{(z^2-1)^2}=\frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$

والبسط تابع نظامي لاينعدم عند $z=1$ فإن هذه النقطة هي قطب من المرتبة الثانية.

b) 1) الأصفار هي جذور المعادلة $\sin\left(1-\frac{1}{z}\right)=0$ أي $z_k=\frac{1}{1-\pi k}; k\in Z$ وهي أصفار بسيطة لأن مشتق التابع فيها غير معدوم.

$$\left[\sin\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]'\Bigg|_{z_k}=(1-\pi k)^2\cos\pi k\neq 0$$

النقطة الشاذة الوحيدة هي $z=0$.

عندما $z\to 0$ نجد أن التابع يتذبذب ما بين 1+ و 1- فهي من نوع شاذة أساسية.

2) بما أن $f=\dfrac{\sin z}{z.\cos z}$ فإن الاحتمال الوحيد الممكن لأصفار f هو جذور المعادلة $\sin z=0$ أي $z=\pi k;\ k\in Z$ لكن من أجل $k=0$ أي $z=0$ شاذة قابلة للإصلاح و

$z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ أقطاب بسيطة.

تمرين (6): أوجد النقاط الشاذة في $\overline{C}$ ثم عين نوع كل نقطة من خلال النشر في سلسلة لوران.

1) $\dfrac{\sin z^2}{z^5}$ ، 2) $z\left(1-e^{1/z}\right)$

الحل:

1) التابع غير معرف في $z_2=\infty, z_1=0$ فهما نقطتان شاذتان (معزولتان لماذا؟) وفي جوار موخوذ لكل منهما لدينا:

$$\frac{\sin z^2}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(z^2-\frac{1}{3!}z^6+\frac{1}{5!}z^{10}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{z}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

في جوار $z_1=0$ نرى أن السلسلة تحتوي ثلاث حدود ذات أسس سالبة (هنا أمثل z^{-1} و z^{-2} معدومة) بالتالي النقطة $z_1=0$ قطب من المرتبة الثالثة كون أعلى الأسس السالبة في القسم الرئيسي يساوي 3.

في جوار $z_1=\infty$ نجد أن السلسلة تحتوي عدداً لانهائياً من أسس z الموجبة، وبالتالي فالنقطة شاذة أساسية.

2) للتابع نقطتان شاذتان $z_2=\infty, z_1=0$ وفي جوار أي منهما يكون:

$$z\left(1-e^{1/z}\right)=z\left(1-1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}-\cdots\right)=-1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}-\cdots$$

بالتالي $z_1=0$ شاذة أساسية و $z_2=\infty$ قابلة للإصلاح.

تمرين (7): أوجد النقاط الشاذة في $\overline{C}$ لكل من التوابع التالية بالطريقة التي تراها مناسبة.

$\dfrac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}$ (1 ، $\dfrac{e^z}{1+z^2}$ (2 ، $e^{z+\frac{1}{z}}$ (3

$\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ (4 ، $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$ (5 ، $\dfrac{\sin^2 z}{\cos z-1}$ (6

الحل:

1) بكتابة التابع بالشكل $f=\dfrac{1}{z(z+2i)^2(z-2i)^2}$ نجد أن النقاط الشاذة هي التي تعدم المقام $z_2=2i, z_1=0, z_3=-2i$.

في جوار $z_1=0$ لدينا: $f=\dfrac{h(z)}{z}\,;\, h(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$

وبما أن $\lim\limits_{z\to 0} h(z)=\dfrac{1}{16}\neq 0,\infty$ بالتالي $z_2=2i$ قطب من المرتبة الثانية. بالمثل نجد أن $z_3=-2i$ قطب من المرتبة الثانية.

2) نكتب التابع بالشكل $f=\dfrac{e^z}{(z+i)(z-i)}$ نجد أن النقاط الشاذة هي $z_3=\infty, z_2=-i, z_1=i$.

إن $\pm i$ قطبان بسيطان (لماذا ؟).

وبما أن $\lim\limits_{z\to\infty} f$ غير موجودة (لماذا ؟) فإن ∞ شاذة أساسية.

3) لدينا القيم التي تجعل الأس $z+\dfrac{1}{z}$ مساوٍ لـ 0 أو ∞ هي نقاط شاذة أساسية أي $z_* = \infty$ و $z_1=0$.

4) النقاط الشاذة هي $z_0=0$ و $z_*=\infty$ ، $z_k=\ln 1+2\pi k i\,;\, k\in Z$.

إن $z_*=\infty$ شاذة غير معزولة وبقية النقاط شاذة معزولة من قاعدة أوبيتال نجد أن:

$z_0=0$ شاذة قابلة للإصلاح.

أيضاً $z_k=2\pi k i;\, k=\pm 1,\cdots$ أقطاب بسيطة.

5) بما أن $f=\operatorname{ctg}\frac{1}{z}=\frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}$ فإنه من المعادلة $\sin\frac{1}{z}=0$ نجد $z_0=\infty$،

$z_k=\frac{1}{\pi k}\ ;\ k=\pm 1,\cdots$ نقاط شاذة معزولة.

بما أن $\lim_{z\to z_k} f=\infty$ والنهايات:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f}{z}\neq 0,\infty\ ,\ \lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)\neq 0,\infty$$

فإن جميع النقاط هي أقطاب بسيطة.

إضافة لهذا فإن $z_\circ=0$ نقطة شاذة لـ f لكنها غير معزولة.

6) النقاط الشاذة هي $z_k=2\pi ki;\ k=0,\pm 1,\cdots$ و $z_\circ=\infty$ وهنا z_k قابلة للإصلاح و $z_\circ=\infty$ غير معزولة.

تمرين (8): حدد نوع النقطة ∞ لكل من التوابع f التالية من خلال السلوك:

1) $\sin z$ ، 2) $\frac{iz+1}{z-1}$ ، 3) z^2+2 4) e^z ، 5) $\operatorname{Ch}z$ ، 6) $\frac{z-1}{z+1}$

7) $\frac{z}{z^3+i}$ ، 8) $\frac{z^3+i}{z}$ ، 9) $e^{\operatorname{sh}z}$ 10) $\frac{\sin z}{z^2}$ ، 11) $\frac{1}{\sin z}$ ، 12) $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$

الحل:

1) شاذة أساسية لأن f متذبذب قرب ∞. 2) عادية لأن $f\underset{z\to\infty}{\sim} i$

3) قطب من المرتبة الثانية. 4) شاذة أساسية. 5) شاذة أساسية

6) عادية. 7) صفر من المرتبة الثانية. 8) قطب من المرتبة الثانية.

9) شاذة أساسية. 10) شاذة أساسية. 11) شاذة أساسية. 12) عادية.

تمرين (9): أوجد:

a) كل التوابع f التي تكون نظامية في $\overline{C}$.

b) كل التوابع التي لها في $\overline{C}$ قطب واحد كنقطة شاذة.

الحل:

a) بما أن f نظامي في ∞ فإنه محدود في $|z|> R$ وكون f مستمراً فإنه محدود في $|z|\leq R$ وبالتالي f تابع محدود ونظامي في كل $\overline{C}$ وحسب مبرهنة ليوفيل $f \equiv const$.

b) إذا كانت $z_o(z_o \neq \infty)$ النقطة الشاذة الوحيدة لـ f في $\overline{C}$ من نوع قطب من المرتبة m فإن:

$$f = \frac{c_{-m}}{(z-z_o)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_o)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_o} + \sum_{o} c_n (z-z_o)^n$$

والسلسلة متقاربة لكل $z(z \neq z_o)$ وبما أن $z_o \neq \infty$ فإن f نظامي، وبالتالي محدود عند ∞ والتابع الصحيح الذي يمثل مجموع السلسلة $\sum_{o} c_n (z-z_o)$ محدود عند ∞ (لماذا؟) وبالتالي يجب أن يكون مطابقاً لثابت هو c_o ومنه:

$$f = \frac{c_{-m}}{(z-z_o)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_o} + c_o$$

عندما $z = \infty$ هي القطب الوحيد لـ f فإن $\zeta = 0$ هو القطب الوحيد للتابع $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ وعندئذ:

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{c_{-m}}{\zeta^m} + \frac{c_{-m+1}}{\zeta^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \sum_{o} c_n \zeta^n$$

بما أن f(z) محدود قرب $z = 0$ فإن $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ محدود من أجل قيم كبيرة لـ $|\zeta|$ وكما في السابق ينتج أن $c_n = 0$ لكل $n > 0$ ونجد:

$$f = c_{-m} z^m + c_{-m+1} z^{m-1} + \cdots + c_{-1} z + c_o$$

أي أن f كثيرة حدود من الدرجة m.

تمرين (10): احسب $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta)^m \cos n\theta d\theta$ حيث n,m صحيحان من خلال المقارنـة

بين أمثال سلسلة لوران للتابع $\left(z+\frac{1}{z}\right)^m$ مع مفكوكه ككثيرة حدود.

الحل:

لدينا $\left(z+\frac{1}{z}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{2n} z^{m-2n}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^m}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \cos^m \theta d\theta$$

بالتالي: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta . \cos^m \theta d\theta = \binom{m}{n}$

تمارين غير محلولة

تمرين (1): أوجد سلسلة لوران لكل من التوابع f التالية ضمن الحلقة D المبينة جانبه.

-1 $\dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}$ و D حلقة مركزها 0 بحيث تقع النقطتان $\pm 2i$ خارجها.

-2 $\dfrac{z+1}{z(z-4)^3}; 0<|z-4|<4$ ، (3 $z^2\cos\dfrac{1}{2z}; |z|>0$

(4 $\dfrac{e^{iz}}{iz^5}; |z|>0$ ، (5 $\dfrac{1}{z+1}; 1<|z|<+\infty$

تمرين (2): انشر كلاً من التوابع f التالية في سلسلة لوران حول النقطة المبينة جانبه وحدد القسم الرئيسي.

(1 $\dfrac{1}{z(1-z)}, z=1$ ، (2 $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}, z=\infty$

(3 $\mathrm{sh}\dfrac{z}{1-z}, z=1$ ، (4 $\ln\dfrac{z-2}{z-5}, z=\infty$.

تمرين (3): حدد أمثال $\dfrac{1}{z}$ في سلسلة لوران للتابع $\sin z.\sin\dfrac{1}{z}$ حول $z=\infty$.

تمرين (4): أوجد عدداً من الحدود الأولى من سلسلة لوران لكل من التوابع f التالية ضمن الحلقة المبينة جانبه.

(1 $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}; |z|>1$ ، (2 $\dfrac{z^3}{e^z-1}; 0<|z|<2\pi$

(3 $\dfrac{1}{e^{z-1}}; |z|>1$ ، (4 $\sin\left(z+\dfrac{1}{z}\right); |z|>0$

تمرين (5):

a) حدد مرتبة القطب $z=0$ بالنسبة للتابع: $f=\dfrac{1}{(2\cos z-2+z^2)^2}$

b) أوجد النقاط الشاذة المحدودة لكل من: 1) $\frac{z}{z^3+z}$ ، 2) $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ ، 3) $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$

تمرين (6): أوجد النقاط الشاذة في $\overline{\mathbb{C}}$ ثم عين نوع كل نقطة من خلال النشر في سلسلة لوران: 1) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ، 2) $e^{\frac{z}{1-z}}$

تمرين (7): أوجد النقاط الشاذة في $\overline{\mathbb{C}}$ لكل من التوابع f التالية بالطريقة التي تجدها مناسبة.

1) $\frac{z^8}{(z^8+9)(z+1)^3}$ ، 2) $\frac{\cos z}{z^2}$ ، 3) $z^3\sin\frac{1}{z-1}$

4) $\operatorname{cth}z-\frac{1}{z}$ ، 5) $e^{\frac{1}{\operatorname{sh}z}}$ ، 6) $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

تمرين (8): شكل تابع فيه $z=-1$ قابلة للإصلاح و $z_2=0$ قطب من المرتبة الثانية و $z_3=1$ شاذة أساسية ثم أوجد سلسلة لوران له في الحلقة $0<|z|<1$

تمرين (9): إذا كانت z_0 قطباً من المرتبة n للتابع g فإنها قطب بسيط للتابع $f=\frac{g'}{g}$.

احسب أمثال $\frac{1}{z-z_0}$ في سلسلة لوران لـ f حول z_0.

تمرين (10): أثبت أن كل من التوابع التالية يملك $z=0$ نقطة قابلة للإصلاح ثم تخلص من شذوذ هذه النقطة وأوجد سلسلة ماك – لوران.

1) $f=\int_0^z \frac{\cos\zeta-1}{\zeta}d\zeta$ ، 2) $f=\int_0^z \frac{e^{\zeta}-1}{\zeta}d\zeta$ ، $f=\int_0^z \frac{\ln(1+\zeta)}{\zeta}d\zeta$

حيث يشير اللوغاريتم إلى فرع مناسب.

تمرين (11): أثبت أن سلسلة لوران للتابع $f(z)=e^{\frac{\lambda}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ في $0<|z|$ هي $\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\lambda)z^n$ حيث:

$$J_n(\lambda)=(-1)^n J_{-n}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda\theta-\lambda\sin\theta)d\theta$$

تمرين (12): ليكن f تابع نظامي في ساحة D وله $z_k; k=\overline{1,n}$ أصفار مرتبتها m_k.

أثبت أنه يوجد تابع g نظامي في D بحيث: $f=\prod_1^{m_n}(z-z_k)^{m_k}.g(z)$

تمرين (13): ليكن a عدد مركب، و $(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1);\ k\geq 1,(a)_0=1$

1- أثبت أن: $\sum_0^\infty \frac{z^k}{k+1}=F(1,1,2,z)$

2- أثبت أن: $e^z-\sum_0^{n-1}\frac{z^k}{k!}=\frac{z^k}{k!}F(1,n+1;z)$

3- إذا كان $\gamma\neq 0,-1,-2,\dots$ فإن سلسلة التابع $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ متقاربة في $|z|<1$ وتمثل حلاً للمعادلة:

$$z(1-z)f''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]f'-\alpha f=0$$

4- إذا كان $\gamma\neq 0,-1,-2,\dots$ فإن سلسلة التابع المندمج: $F(\beta,\gamma;z)$ متقاربة لكل z وتحقق: $zf''+(\gamma-z)f'-\beta f=0$

المصطلحات العلمية

A

Abel's limit theorem	مبرهنة آبل للنهاية
Abel's theorem	مبرهنة آبل
Absolute convergence	تقارب مطلق
Absolute value	قيمة مطلقة
Accumulation point	نقطة تجمع (تراكم)
Additive identity	واحدة الجمع
Additive inverse	المعكوس بالنسبة للجمع
Admissible parametrization	تمثيل مسموح به
Amplitude	سعة
Analytic function	تابع تحليلي
Antiderivative	تكامل
Antiderivative theorem	مبرهنة التكامل
Arc	قوس
Arc length	طول القوس
Arc piecewise smooth	منحى أملس جزئيا (مقطعيا)
Arc simple	منحنى بسيط
Arc smmoth	منحنى أملس
Area mean values theorem	مبرهنة القيم المتوسطة للمساحة
Argument	إزاحة (انسحاب) زاوية
Argument principle	مبدأ الزاوية

B

Bessel's function	تابع بيسل
Binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين
Bolzano - Weierstrass	بولزانور – فايرشتراس
Boundary	محيط
Boundary values problem	مسألة القيم الحدودية
Bounded	محدود
Bounded set	مجموعة محدودة
Branch	فرع
Branch cut	مقطع (قطع) الفرع – قاطع الفرع
Branch logarithmic	فرع اللوغاريتم
Branch of argument	فرع الزاوية
Branch principal	فرع رئيسي

C

Cauchy	كوشي
Cauchy – Goursat theorem	مبرهنة كوشي – كورسات
Cauchy – Riemann equations	معادلات كوشي – ريمان

Cauchy convergence	تقارب كوشي
Cauchy estimate	تقدير كوشي
Cauchy integral formula	صيغة (علاقة) كوشي التكاملية
Cauchy principal values	قيم كوشي الأساسية
Cauchy theorem for derivatives	مبرهنة كوشي للتفاضل
Center of mass	مركز الثقل
Circle of convergence	دائرة التقارب
Circulation	تدوير
Closed	مغلق
Closed curve	منحنى مغلق
Closure	إغلاق
Commutative law	قانون المبادلة
Compact	متراص
Complement	متمم (مكمل)
Complex conjugate	مرافق مركب
Complex exponential	أسس مركب
Complex function	تابع مركب
Complex number	عدد مركب
Complex plane	مستوى مركب
Complex potential	جهد مركب
Complex trigonometry	مثلثية مركبة
Complex variable	متغير مركب
Composition	تركيب – تحصيل
Composition	تركيب – تحصيل
Condenser	مكثف
Conductor	موصل
Conformal mapping	دالة تطبيق (تحويل) متماثل
Conjugate	مرافق
Continuous	مستمر
Continuous function	تابع مستمر
Contour	كونتور – طريق
Converges	يتقارب
Convex	محدب
Cosine	جيب التمام
Coursat	كورسات
Curve	منحنى

D

De Moiver's theorem	مبرهنة دي موافر
Deformation invariance theorem	مبرهنة عدم تغير التشكل (الهوموتوبية)
Deformation of contours	هوموتبيه الطرق إعادة تشكيل الطرق
Derivative	اشتقاق

Derivative, one – sided	اشتقاق من جهة واحدة
Dipole	قطب مزدوج (مكرر مرتين)
Directrix	دليل
Dirichlet's integral	تكامل ديريخلية
Dirichlet's problem	مسألة ديريخلية
Disc	قرص
Distributive law	قانون التوزيع
Diverges	متباعد
Domain	مجال

E

Element	عناصر
Ellipse	قطع ناقص
Enestromkakeya theorem	مبرهنة انستروم كاكيا
Entire function	دالة كلية (أو شاملة، صحيحة)
Essential singularity	نقطة شاذة أساسية
Euler's equation	معادلة أولر
Exponential	أسي
Exponential order	رتبة أسية
Extended complex plane	المستوى المركب الموسع
Exterior	خارج

F

Field axioms	مسلمات الحقل
Fixed point	نقطة ثابتة
Focus	بؤرة – محرقة
Fourier coefficients	معاملات فوربيه
Fourier series	سلسلة فوربيه
Fourier transform	تحويل فوربيه
Funcdamental theorem of calculus	المبرهنة الأساسية للتفاضل و التكامل
Function	تابع – دالة
Function of force	تابع القوة
Function of meromorphic	تابع تحليلي جزئيا
Function of power	تابع القوى
Function of transfer	تابع التحويل
Fundamental theorem	المبرهنة الأساسية

G

Gamma function	التابع غاما
Gauss function	تابع غوص
Gauss mean value theorem	مبرهنة القيمة المتوسطة لغاوص
Geometric series	سلسلة هندسية
Gradient	التدرج

Green's theorem	مبرهنة غرين
Group	زمرة

H

Hadamard's formula	صيغة ادمارد
Harmonic conjugate	مرافق توافقي
Harmonic function	تابع توافقي
Holomorphic function	تابع تليلي (هولومورفي)
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي

I

Image	صورة
Imaginary	تخيلي
Imaginary axis	محور تخيلي
Imaginary part	جزء تخيلي
Imaginary unit	وحدة تخيلية
Improper integrals	تكاملات ضمنية
Independence of platf	الاستقلال عن المنحنى (المسار)
Infinity	لانهائي
Injection	أحادي
Inside	داخلي
Intensity	شدة
Interior	داخلي
Interior point	نقطة داخلية
Inverse of function	تابع كسري
Inverse theorem	مبرهنة الانعكاس (التناظر)
Inverse transform	تحويل عكسي
Inversion	الانعكاسية
Irrotational	غير دوراني
Isolated	منعزل – معزول
Isolated singularity point	نقطة شاذة معزولة

J

Jacobian matrix	مصفوفة يعقوبيان
Jordan arc theorem	مبرهنة منحنى غوردان
Jordan curve theorem	مبرهنة غوردن للمنحنى
Joukouwski	جوكوفسكي

L

Lagrange's indentity	متطابقة لاغرانج
Laplace	لابلاس
Laplace equation	معادلة لابلاس
Laplace transform	تحويل لابلاس

Laurent	لوران – لورنت
Laurent seires	سلسلة لورنت (لوران)
Laurent theorem	مبرهنة لوران
Legender	لوجاندر
Legendre polynomial	كثيرة حدود لوجاندر
Leibniz	ليبنتز
L'Hopital	لوبيتال
L'Hopital's theorem	مبرهنة لوبيتال
Liebniz's formula	صيغة ليبنتز
Limit	نهاية
Limit rules	قواعد النهاية
Limit superior	نهاية عليا
Limit, one – sided	نهاية من جهة واحدة
Line integral	تكامل خطي
Linear fractinal transformation	التحويل الكسري الخطي
Linear transformation	تحويل خطي
Liouville	ليوفيل
Liouville's theorem	مبرهنة ليوفيل
Logarithm	لوغاريتم – لغارتم

M

Maclaurin series	سلسلة ماكلورين (ماك – لوران)
Magnification	التكبير
Maximum principle	مبدأ القيم العظمى
Mean value theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
Meromorphic function	تابع تحليلي جزئي (ميرومورفي)
Minimum principle	مبدأ القيم الصغرى
Modulus	مقياس
Monogenic	انفرادي
Morera's theorem	مبرهنة موريرا
Multiple connected	متعدد الترابط (الاتصال)
Multiplet	متعدد الأقطاب
Multiplicative identity	عنصر الوحدة للضرب
Multiplicative inverse	المقلوب بالنسبة للضرب
Multivalued	متعدد القيم
Multivalued function	تابع متعدد القيم

N

Neighborhood	جوار

O

One – sided limit	النهاية من جهة واحدة
One – to – one	واحد إلى واحد (أحادي)

One – to – one locally	واحد إلى واحد محلياً
Onto	فوق
Open	مفتوح
Order	رتبة
Order of a multiplet	رتبة متعددة الأقطاب
Order of a pole	رتبة القطب
Order of a zero	رتبة الجذر (الصفر)
Order of exponential	رتبة أسية
Oriented contour	طريق موجهة
Origin point	نقطة الأصل
Outside	خارجي

P

Parabola	قطع مكافئ
Parallelogram law	قانون متوازي الأضلاع
Picard's theorem	مبرهنة بيكار
Piecewise smooth	أملس جزئياً (مقطعيا)
Point at infinity	نقطة اللانهاية
Pointuise	نقطي
Poisson integral formula	صيغة بواصون التكاملية
Poisson theorem	مبرهنة بواسون
Polar form	الشكل (الصيغة) القطبي
Polar representation	تمثيل قطبي
Poles	أقطاب
Polynomial	كثيرة حدود
Potential	جهد
Potential field	حقل للجهد
Power function	تابع القوى
Principal branch	المقطع الرأسي
Principal value	القمية الأساسية
Pws	أملس – جزئياً

R

Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Range	مدى – صورة
Ratio test	اختبار النسبة
Rational function	تابع كسري
Real axis	محور حقيقي
Real number	عدد حقيقي
Real part	الجزء الحقيقي
Region	منطقة – ساحة
Regular function	تابع نظامي

Regular point	نقطة عادية (نظامية)
Removable singularity point	نقطة شاذة قابلة للإصلاح
Riemann	ريمان
Riemann sphere	كرة ريمان
Riemann surface	سطح ريمان
Riemann theorem	مبرهنة ريمان
Root of unity	جذور الوحدة
Rotation	الدوران
Rules of limis	قواعد النهايات

S

Schwarz lemma	توطئة شفارتز
Simple connected	وحيدة الاتصال – بسيطة الترابط
Simple zero	صفر بسيط (من المرتبة الاولى)
Sine function	تابع الجيب
Singular points	نقاط شاذة
Singularities	شواذ
Stereographic projection	إسقاط استيريو غرافي
Symmetry preserving property	حفظ التناظرية

T

Taylor series	سلسلة تايلور
Taylor theorem	مبرهنة تايلور
Transfer function	تابع التحويل
Translation	انسحاب
Triangle inequality	متراجحة مثلثية

U

Unbounded	غير محدود
Uniform convergence	تقارب منتظم

V

Variation	تغير
Variation ofargument	تغير الزاوية
Vector	متجه
Vector field	حقل اتجاهي (شعاعي)
Velocity vector	السرعة

W

Wake	أثر
Weierstrass test	اختبار فايرشتراس
Weierstrass theorem	مبرهنة فايرستراس

المراجع العلمية

المراجع العربية

1- د. شحادة الأسدي – أسس التحليل العقدي (6) و (7)، جامعة حلب، 1988.

2- ساف. ب. إ وسيندر .د.أ. – أسس التحليل المركب، ترجمة د. أبو بكر بيومي ود. سعدون إبراهيم، كلية العلوم – قسم الرياضيات، جامعة الملك سعود، 2002م.

3- وليام درويك – التحليل المركب وتطبيقاته، ترجمة د. أبو بكر بيومي ود. سعدون إبراهيم، كلية العلوم – قسم الرياضيات – جامعة الملك سعود، 2001م.

4- مواقع متنوعة من شبكة الحاسوب (الانترنت)، بين عامي 2000 و 2011م.

المراجع الأجنبية

يشير الرمز Ф.К.П للعبارة: Функции Комплексного Переменного

والرمز: М – Н لـ Мосва-Наука.

5- Шабат. В.Б.Введение в К. А. М. Н. 1969.

6- Лаврентьев. А. М. Шабат В.Б. Методы теории .Ф.К.П - М.Н. 1987.

7- Бицадзе. А. В. Основы теории аналитических Ф.К.П- М.Н. 1972.

8- Привалов. И. И. Введение в теорию Ф.К.П- М.Н. 1974.

9- Маркушевич. А. И. Краткий курс теории аналитических функций М.Н. 1978.

10- Маркушевич. А. И. Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций М. Н. 1977.

11- Свешников. А. Г. Тихонов. А.Н. Теория Ф.К.П- М.Н. 1979.

12- Сидоров ю. В. и др. Лекции по Теории Ф.К.П- М.Н. 1976.

13- Волковыский. D. И. и др. Сборник задач по Теории Ф.К.П - М.Н. 1975.

14- Евграфов. М. А. и др. Сборник задач по Теории аналитических функций. М. Н. 1972.

15- Ahlfors. L. V. Complex analysis 2d ed. Mc Graw-Hill New York. 1966.

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

الدكتور	الدكتور	الدكتور
محمد كردي	**عبد المحسن عبد المحسن**	**محمد جمال حمندوش**

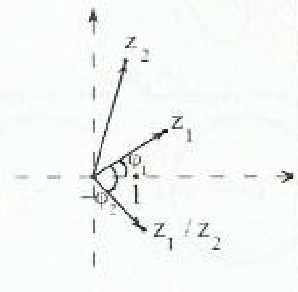
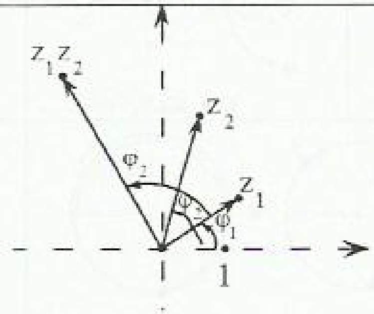
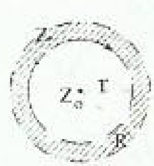
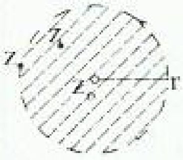
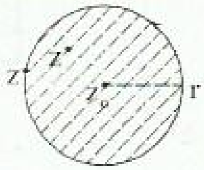
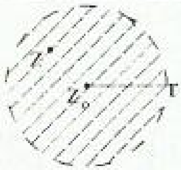
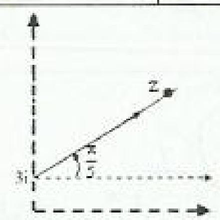
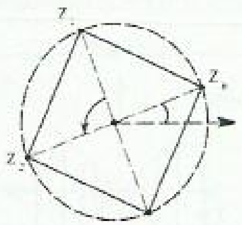
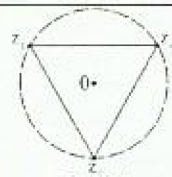
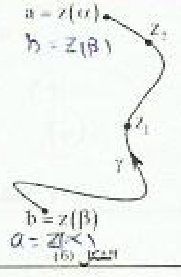
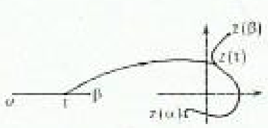
تم تدقيق الكتاب لغوياً من قبل:

الدكتور

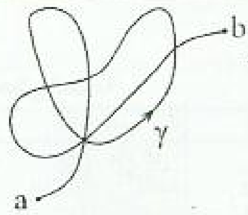
نضال الصالح

١٧ آذار ٢٠١٦

الأشكال التي لم تظهر في الكتاب من خلال الطباعة

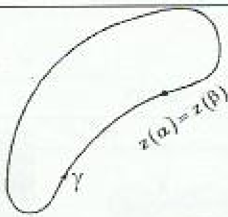
رقم الصفحة	الشكل	رقم الصفحة	الشكل
٣٥	 الشكل (٣)	٣٥	 الشكل (٢)
٣٨	 الشكل (12)  الشكل (11)  الشكل (10)  الشكل (9)		
٤٠	 الشكل (20)	٤٣	 الشكل (2)
٤٣	 الشكل (3)	٧٨	 الشكل (2)  الشكل (3)
٧٩	 الشكل (6)	٧٩	 الشكل (5)

٨٠



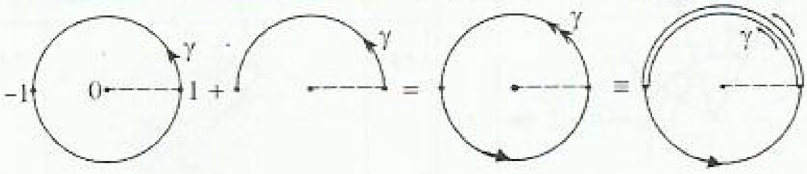
الشكل (8)

٨٠



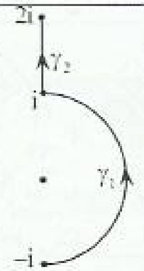
الشكل (7)

٨١



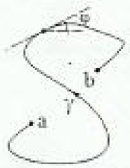
الشكل (11)

٨٣

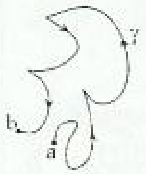


الشكل (15)

٨٦

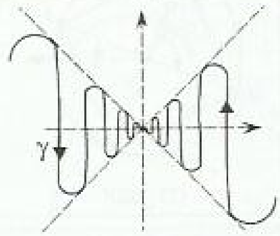


الشكل (17)

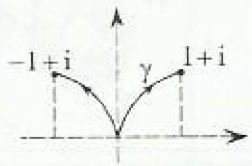


الشكل (16)

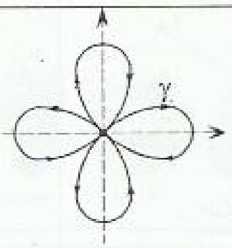
٨٨



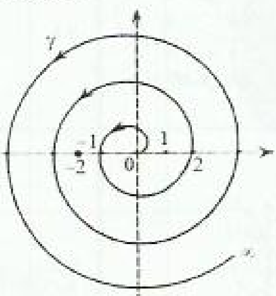
الشكل (20)



الشكل (19)

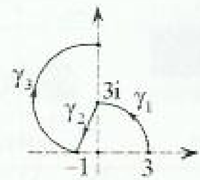
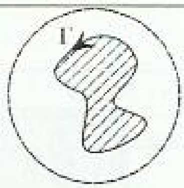
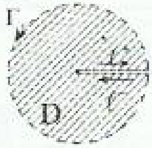
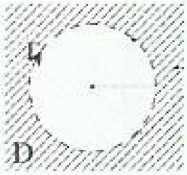
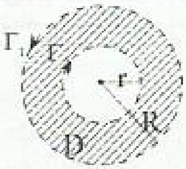
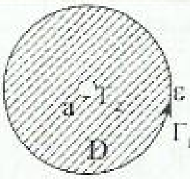
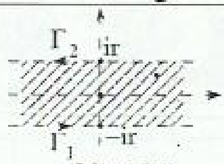
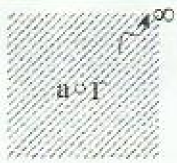
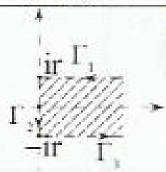
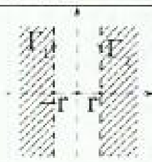
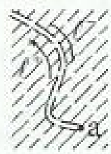
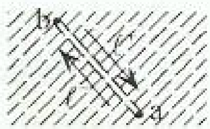
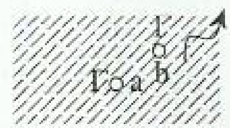


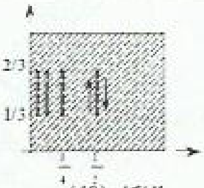
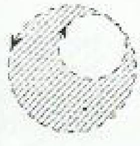
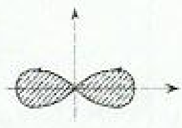
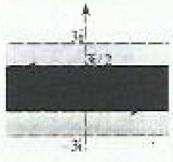
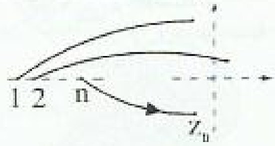
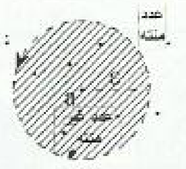
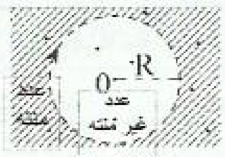
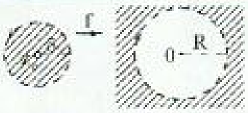
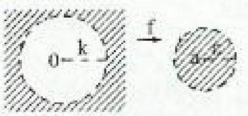
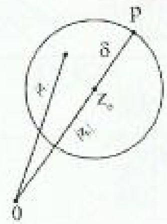
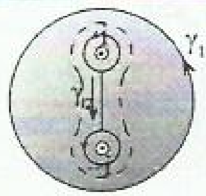
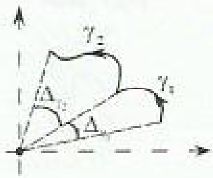
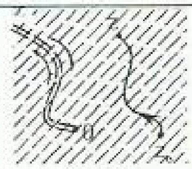
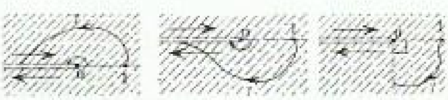
الشكل (18)



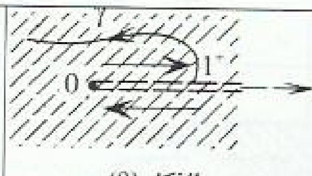
الشكل (22)

الشكل (21)

٩١	 الشكل (٢٤)	٩١	 الشكل (26)  الشكل (25)
٩٥	 الشكل (36)  الشكل (35)  الشكل (34)  الشكل (33)		
٩٥	 الشكل (39)  الشكل (38)  الشكل (37)		
٩٦	 الشكل (42)  الشكل (41)  الشكل (40)  الشكل (45)  الشكل (44)  الشكل (43)		

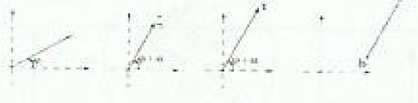
٩٨	 الشكل (49)	 الشكل (54)  الشكل (53)	 الشكل (52)
٩٨	 الشكل (1)	٩٩	 الشكل (2)
١٠ ٧	 الشكل (4)	١٣ ٧	 الشكل (6)  الشكل (3)
١٤١		٢٢٢	 الشكل (1) الشكل (4) الشكل (2) الشكل (1)
٢٢٣	 الشكل (٧)	٢٢٨	 الشكل (20)
٢٣٢	 الشكل (2)	٢٣٤	 الشكل (8) الشكل (7) الشكل (6)

٢٣٥



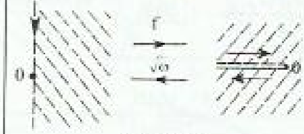
الشكل (9)

٢٣٨



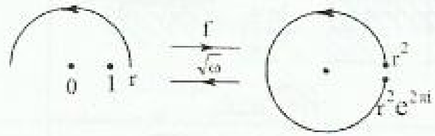
الشكل (١)

٢٤٣



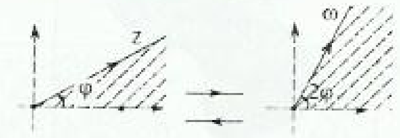
الشكل (3)

٢٤٥

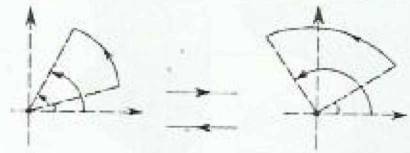


الشكل (٩)

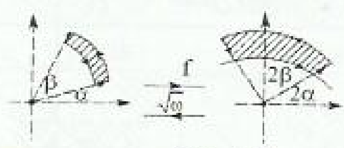
٢٤٥



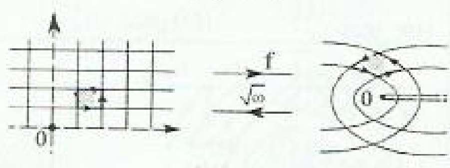
الشكل (10)



الشكل (11)

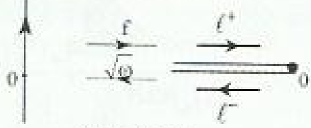


الشكل (12)

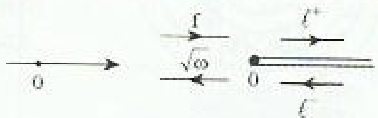


الشكل (13)

٢٤٧

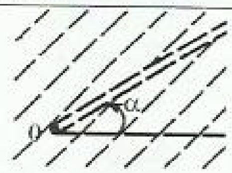


الشكل (14)



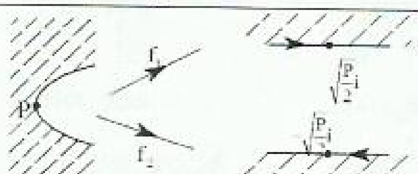
الشكل (15)

٢٤٩



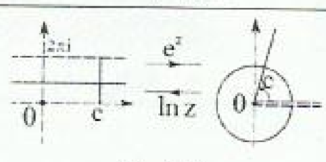
الشكل (16)

٢٥١

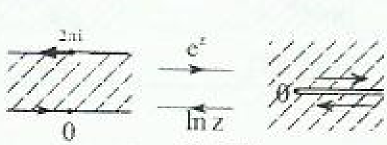


الشكل (17)

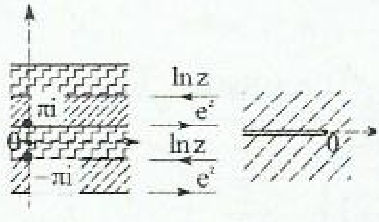
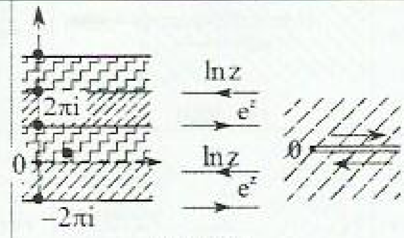
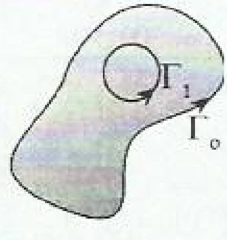
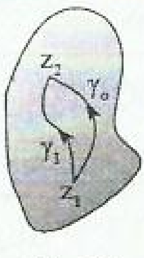
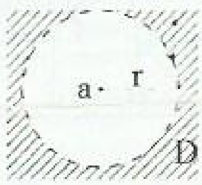
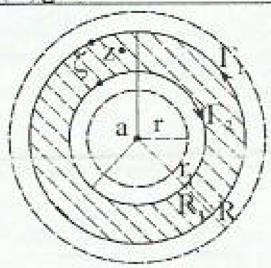
٢٥٥



الشكل (1)

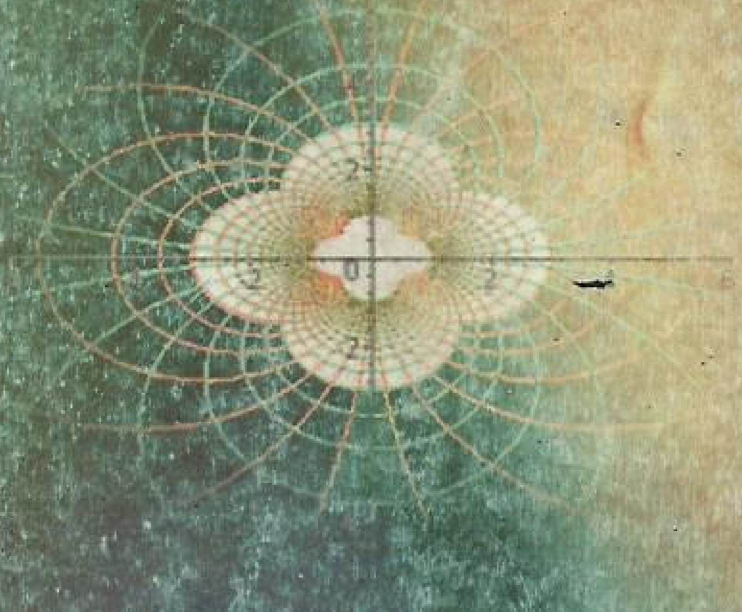


الشكل (2)

٢٥٦	 الشكل (4)		 الشكل (3)
٣١٧	 الشكل (9)	٣١٧	 الشكل (11)  الشكل (10)
٣٧٩	 الشكل (3)	٣٨٢	 الشكل (5)

Aleppo University Publications
Faculty of Science 2

Complex Analysis (1)



By

Dr. Zakaria NOUT

1220425

Academic Year
2011 - 2012

سعر المبيع للطلاب
٣٢٥ ل.س