المنطق الرياضي وطرائق البرهان

حساب التقارير

- **التقرير البسيط**: جملة خبرية تحمل خبر واحد ونتيجة صوابها خاطئ (F) أو صائب (T)
- **التقرير المركب**: جملة خبرية تحمل أكثر من خبر ونتيجة صوابها خاطئ (F) أو صائب (T)
- **العبارة التقريرية** أو العبارة (Formula)

هي تقرير بسيط أو مركب

ونرمز للعبارة بالحروف الانجليزية: ...

أو P, Q, R ... أو $P_1, P_2, \dots, P_n$

أدوات الربط

الادات	الرمز	
النفي	$\neg$	$\neg p$
أو : الفصل	$\vee$	$p \vee q$
و : العطف	$\wedge$	$p \wedge q$
الشرط	$\longrightarrow$	$p \longrightarrow q$
ثنائي الشرط	$\longleftrightarrow$	$p \longleftrightarrow q$

حساب التقارير

عدد الحالات: 2^n

n: عدد التقارير البسيطة في العبارة

p	$\neg p$
T	F
F	T

مقدمة نتيجة

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

ملاحظات :

الشرط $p \to q$

العكس : $q \to p$

المعاكس : $\neg p \to \neg q$

المكافئ العكسي : $\neg q \to \neg p$

تعريف: ليكن A و B كل منهما عبارة تقريرية
A تكافئ منطقياً B إذا كان A, B لهما نفس
قيمة الصواب (يأخذهما لهما نفس جدول الصواب).
نرمز لهذا $A \equiv B$

مثال (٧،١)، (٩،١) ص ٩، ١٠

١) أثبت أن $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

٢) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

حسب جدول الصواب نجد أن $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

و $p \to q \equiv \neg p \vee q$

مثال (١،٨) ص ٩

قاعدتا دي مورجن

$\neg(p\wedge q)\equiv \neg p\vee\neg q$

$\neg(p\vee q)\equiv \neg p\wedge\neg q$

(١) اثبت أن

(٢)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\vee\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$
T	T	F	F	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F	T	T	T

حسب جدول الصواب بأن

$\neg(p\wedge q)\equiv \neg p\vee\neg q$

$\neg(p\vee q)\equiv \neg p\wedge\neg q$

مثال (1,10) ص 10

اثبت أن $(p\wedge q)\to r \equiv \neg r\to(\neg p\vee \neg q)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$	$\neg p\vee\neg q$	$\neg r\to(\neg p\vee\neg q)$
T	T	T	F	F	F	T	T	F	T
T	T	F	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T	T

$\equiv$

(طريقة ثانية للحل) مثال ١٠ ص ١٠

المكافئ العكسي $(p \wedge q) \to r \equiv \neg r \to \neg(p \wedge q)$

دي مورغن $\equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q)$

مبدأ التعويض

مثال (١,١١) ص ١١

أثبت أن العبارة:

$X = ((x \wedge y) \vee \neg z) \to (u \to v)$

تكافئ منطقيا $Y = \neg((x \wedge y) \vee \neg z) \vee (u \to v)$

الحل: ليكن

$q = (u \to v)$, $p = (x \wedge y) \vee \neg z$

وبالتالي $X = ((x \wedge y) \vee \neg z) \to (u \to v) \equiv p \to q$

$\equiv \neg p \vee q$ (قاعدة الشرط)

$\equiv \neg((x \wedge y) \vee \neg z) \vee (u \to v) \equiv Y$

إذن $X \equiv Y$.

المصدوقات والتناقضات

تعريف : (الكتاب)

مثال : p : عبارة مخلوطة

$p \wedge \neg p \equiv F$: عبارة تناقض

$p \vee \neg p \equiv T$: عبارة مصدوقة

مثال (13، 1) ص 12

اثبت أن العبارة

$[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [\sim r \to (\sim p \vee \sim q)]$ مصدوقة

الحل: نعلم أنه في المثال 10:

$(p \wedge q) \to r \equiv [\sim r \to (\sim p \vee \sim q)]$

بما أن طرفي المعادلة المنطقية لهما نفس قيمة الصواب فإن العبارة

$[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [\sim r \to (\sim p \vee \sim q)]$ عبارة مصدوقة

ملاحظة: $A \equiv B$ يعني $A \leftrightarrow B$ عبارة مصدوقة

مثال (1,14) ص 12

أثبت أن العبارة: $[p \wedge (p \to q)] \to q$ مصدوقة:

الحل:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

حسب الجدول فإن العبارة $[p \wedge (p \to q)] \to q$ مصدوقة:

ملحوظة:

$[p \wedge (p \to q)] \to p$ عبارة مصدوقة

$[p \wedge (p \to q)] \to (p \wedge q)$ عبارة مصدوقة

مثال (1,15) ص 12, 13

اثبت أن العبارة التقريرية

$$A = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

عبارة تناقض

p	q	$\neg p$	$\neg q$	1 $p \vee q$	2 $\neg q \vee p$	3 $\neg p \vee q$	$p \wedge q$	4 $\neg(p \wedge q)$	A
T	T	F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F	T	F

حسب الجدول فان العبارة A عبارة تناقض

الاقتضاء المنطقي

تعريف: (١) $p \Longrightarrow q$

إذا كان $p \to q$ عبارة مصدوقة.

(٢) $p_1, p_2, \dots, p_n \Longrightarrow q$

إذا كان $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \to q$ عبارة مصدوقة.

مثال (1,16) ص 13

اثبت أن $\neg(p \to q) \Rightarrow p$

الحل: المطلوب إثبات $\neg(p \to q) \to p$ عبارة مصدوقة

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \to p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

لما أن $\neg(p \to q) \to p$ عبارة مصدوقة

بان $\neg(p \to q) \Rightarrow p$

$(p \to q)$ خاطئ إذا كان

p صائب و q خاطئ

وما عدا ذلك فهو صائب

مثال (1,17) ص 14

هل $p \vee r, p \to \neg q, q \to r \Rightarrow \neg q$ ؟

الحل:

هل أن: $\overbrace{(p \vee r) \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)}^{A} \to \neg q$

عبارة مصدوقة؟

p	q	r	p∨r	p→q	q→r	A	¬q	A→¬q
T	T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F	F	
T	F	T	T	F	T	F	T	
T	F	F	T	F	T	F	T	
F	T	T	T	T	T	T	F	
F	T	F	F	T	F	F	F	
F	F	T	T	T	T	T	T	
F	F	F	F	T	T	F	T	

بما أن: $(p \vee r) \wedge (p \to q) \wedge (q \to r) \to \neg q$ هي عبارة
ليست مصدوقة

فإن $(p \vee r), (p \to q), (q \to r) \not\Rightarrow \neg q$

الخصائص الجبرية لأدوات الربط

$p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (1)

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (2)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (3)

$p \vee \neg p \equiv T$, $p \wedge \neg p \equiv F$ (5)

$p \vee T \equiv T$, $p \wedge T \equiv p$

$p \vee F \equiv p$, $p \wedge F \equiv F$ (9, 4)

عنصر المحايد

$p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$ (7)

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$, $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (8)

$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$, $p \to q \equiv \neg p \vee q$ (12)

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ (14)

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (10)

$p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to q$ (11)

$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$ (13)

$$\equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$ (15)

برهان بعض الخصائص

11

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$
$$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$
$$\equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

15

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \neg p \vee (q \rightarrow r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r$$
$$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

ص 21:11-3 سبتمبر

مثال (1,18) ص 16

أثبت أن $\neg(p\wedge(\neg p\vee q)) \equiv \neg p\vee\neg q$

الحل:

$$\neg(p\wedge(\neg p\vee q)) \equiv \neg p\vee\neg(\neg p\vee q)$$
$$\equiv \neg p\vee(p\wedge\neg q)$$
$$\equiv (\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q)$$
$$\equiv T\wedge(\neg p\vee\neg q)$$
$$\equiv \neg p\vee\neg q$$

مثال (1,19) ص 16، 17

أثبت أن $[(p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r)]\to r$ مصدوقة

الحل:

$$[(p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r)]\to r$$

$$\equiv \neg[(p\vee q)\wedge\underbrace{(p\to r)\wedge(q\to r)}]\vee r$$

$$\equiv \neg[(p\vee q)\wedge((p\vee q)\to r)]\vee r$$

$$\equiv (\neg(p\vee q)\vee\neg[(p\vee q)\to r])\vee r$$

$$\equiv [\neg(p\vee q)\vee\neg(\neg(p\vee q)\vee r)]\vee r$$

$$\equiv (\neg(p\vee q)\vee[(p\vee q)\wedge\neg r])\vee r$$

$$\equiv [(\underbrace{\neg(p\vee q)\vee(p\vee q)})\wedge(\neg(p\vee q)\vee\neg r)]\vee r$$

$$\equiv [T\wedge(\neg(p\vee q)\vee\neg r)]\vee r$$

$$\equiv [\neg(p\vee q)\vee\neg r]\vee r$$

$$\equiv \neg(p\vee q)\vee(\neg r\vee r)\equiv\neg(p\vee q)\vee T\equiv T$$

وبالتالي فإن العبارة .... مصدوقة

حساب المسندات

تعريف:

← الجملة المفتوحة ونرمز لها $P(x), P(x,y), \ldots$

← مجال الجملة المفتوحة ونرمز له D, D_P

← مجال صواب الجملة المفتوحة ونرمز: T_P

مثال:

(1) $P(x): x+5>9$, $D=\mathbb{Z}$, $T_P=\{5,6,\ldots\}$

(2) $P(x): x+5>9$, $D=\mathbb{R}$, $T_P=(4,+\infty)$

(3) $P(x,y): x+4y=13$; $D=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $T_P=\emptyset$

(4) $P(x): x^2+2>0$, $D=\mathbb{R}$; $T_P=\mathbb{R}$

ملاحظة: مجال الصواب T_P هو جزء من مجال الجملة المفتوحة: D $(T_P \subseteq D)$

6-11:07 ص سبتمبر

المسورات

العبارة: $(\forall x \in D, P(x))$

$\forall$: المسور الشامل تقرأ لكل أو لجميع

العبارة $(\exists x \in D, P(x))$

$\exists$: المسور الوجودي وتقرأ يوجد على الأقل

العبارة ($\forall x \in D, P(x)$) صائبة

إذا كان لكل $x \in D$, $P(x)$ صائبة

العبارة ($\forall x \in D, P(x)$) خاطئة

إذا كان يوجد على الأقل $x \in D$, $P(x)$ خاطئة

$$\boxed{\neg(\forall x \in D, P(x)) \equiv (\exists x \in D, \neg P(x))}$$

$$\boxed{\neg(\exists x \in D, P(x)) \equiv (\forall x \in D, \neg P(x))}$$

مثال (1,31) ص 37

بحث فيما إذا كان التقارير الشاملة صائبة أم خاطئة:

أ) $(\forall x \in D, 2^x < x!)$ حيث $D = \{1, 2, 3\}$

تذكير: $n \in \mathbb{N}$

$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ و $0! = 1$

مثال $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 5 = 4! \cdot 5 = 120$

$1! = 1$

$n! = (n-1)! \times n = (n-2)!\,(n-1) \times n$

بما أن $1! = 1$ ، $2^1 = 2 \not< 1!$ فإن العبارة خاطئة.

ب) $(\forall x \in D, 2^x < x!)$ حيث $D = \{4, 5, 6\}$

لدينا

$2^4 = 16 < 4! = 24$ صائبة

$2^5 = 32 < 5! = 120$

$2^6 = 64 < 6! = 5! \cdot 6 = 720$

وبالتالي العبارة صائبة.

(ج) $\forall x \in D \left(x > \frac{1}{x}\right)$ حيث $D = \mathbb{R}^*$

لدينا $\frac{1}{0.1} = 10$ ، $0.1 \ngtr 10$ فإن العبارة التقريرية الشاملة:

$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, x > \frac{1}{x}\right)$ عبارة خاطئة.

(د) $\left(\forall x \in D, x^2 = x+2\right)$ حيث $D = \mathbb{Q}$

لدينا $1^2 \neq 1+2$ فإن العبارة التقريرية الشاملة

$\left(\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 = x+2\right)$ خاطئة.

تذكير: $\mathbb{R}$: الأعداد الحقيقية.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ الأعداد الطبيعية

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ الأعداد الصحيحة

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$ الأعداد الكسرية.

(هـ) $\forall x \in D$ (عدد أولي x^2+x+41)

حيث $\mathbb{N} = D$

نلاحظ أن

$41^2+41+41 = (41+1+1)41 = 43 \times 41$

عدد غير أولي وبالتالي العبارة التقريرية الشاملة ($\forall x \in \mathbb{N}$, عدد أولي x^2+x+41) خاطئة.

(و) ($\forall x \in \mathbb{R}, x^2+2>0$)

لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن $x^2 \geq 0$

فإن $x^2+2 \geq 2$ لكل $x \in \mathbb{R}$

وبالتالي لكل $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2>0$

وبالتالي العبارة التقريرية الشاملة ($\forall x \in \mathbb{R}, x^2+2>0$) صائبة.

مثال (1,32) ص 38,37

أ) $(\exists x \in D,\ 2^x < x!)$ حيث $D=\{2,3,4,5\}$

نلاحظ أن:

$2^4 = 16 < 4! = 24$ صائب

بأن العبارة التقريرية الوجودية

$(\exists x \in \{2,3,4,5\};\ 2^x < x!)$ عبارة صائبة.

ب) $(\exists x \in D,\ x > \frac{1}{x})$ حيث $D = \mathbb{R}$

العبارة التقريرية الوجودية صائبة لأن:

$5 > \frac{1}{5}$.

$D = \mathbb{Q}$ $\quad (\exists x \in D, x^2 = 2)$ (ج)

بيان

$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

و $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

بما أن $(\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2)$

فإن العبارة التقريرية الوجودية خاطئة

$(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0)$ (د)

$\boxed{x^2 + x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

غير ممكن في $\mathbb{R}$ لأن $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

وبالتالي: العبارة التقريرية الوجودية $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0)$ خاطئة.

التقرير الشرطي الشامل

$$\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)$$

$$\neg(\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)) \equiv \neg(\forall x \in D, \neg P(x) \vee Q(x))$$
$$\equiv (\exists x \in D, \neg(\neg P(x) \vee Q(x)))$$
$$\equiv (\exists x \in D, (P(x) \wedge \neg Q(x)))$$

1
$$\neg(\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)) \equiv (\exists x \in D, P(x) \wedge \neg Q(x))$$

2
$$\neg(\exists x \in D, P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in D, \neg P(x) \vee \neg Q(x))$$
$$\equiv (\forall x \in D, P(x) \longrightarrow \neg Q(x))$$