القسم الثانى

الهندسة التحليلية

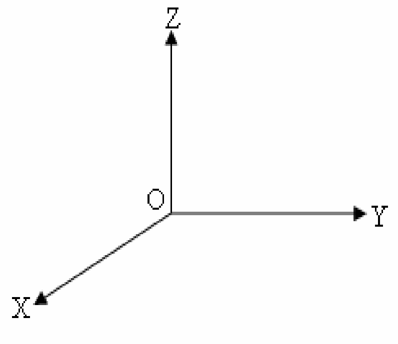
(في الفراغ)

الفصل الأول
الإحداثيات والمناحي في الفراغ

1-1- الإحداثيات الديكارتية

بفرض $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ ثلاث محاور غير واقعة في مستوٍ واحد و متلاقية في نقطة O ، هذه النقطة نسميها مبدأ الإحداثيات أو نقطة الأصل . تدعى هذه المحاور بالمحاور الإحداثية الديكارتية ؛ حيث يسمى المحور الأول ونرمز له اختصاراً OX بمحور الفواصل والثاني OY محور التراتيب والثالث OZ محور الرواقم . هذه المحاور تعين ثلاثة مستويات مختلفة تدعى بالمستويات الإحداثية OXY , OYZ , OZX.

إنَّ الفراغ الذي رسمنا فيه هذه المحاور نسميه فراغاً إحداثياً ثلاثي البعد R^3 . ونقول إنَّ مجموعة المحاور السابقة تشكل جملة إحداثية ديكارتية رمزها $OXYZ$.



الشكل (1)

تكون الجملة متعامدة (قائمة) ، إذا كانت المحاور الإحداثية وكذلك المستويات الإحداثية متعامدة مثنى مثنى (الشكل 1) ، وخلاف ذلك تكون الجملة مائلة ، وهي الحالة العامة .

تكون الجملة مباشرة إذا دار المحور OX حول النقطة O في المستوي OXY لينطبق على المحور OY ، باتجاه يخالف اتجاه دوران عقارب الساعة بالنسبة لراصد واقف وفق الاتجاه الموجب للمحور OZ .

ملاحظة : إنَّ كل محورين إحداثيين يعينان مستوياً إحداثياً ، والعكس صحيح : كل مستويين إحداثيين يعينان محوراً إحداثياً :

$$OZX \cap OXY = OX \quad , \quad OXY \cap OYZ = OY \quad , \quad OYZ \cap OZX = OZ$$

1-2- تعيين نقطة في الفراغ

لتكن M نقطة اختيارية في الفراغ المنسوب إلى جملة المحـــاور الإحداثيـــة . لنرسم من M ثلاثة مستويات توازي OZY, OZX, OXY فتقطع المحاور الإحداثية في M_3, M_2, M_1 التي تسمى مساقط النقطة M على المحاور الثلاثة ، وتتعيين هذه المساقط على المحاور الإحداثية بفواصلها الجبرية على المحاور ويكون :

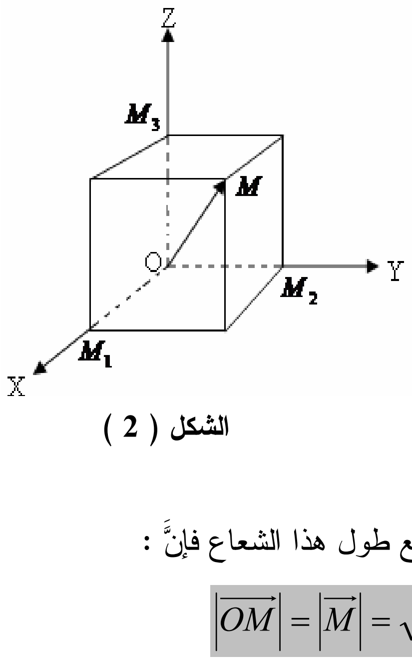
$$\overline{OM_3} = z \ , \ \overline{OM_2} = y \ , \ \overline{OM_1} = x$$

نسمي هذه الأعداد الجبرية بإحداثيات النقطة M . نـــسمي العـــدد x فاصـــلة النقطة والعدد y ترتيب النقطة والعدد z راقم النقطة .

وبالتالي : **تتعين نقطة مثل M في الفراغ بوساطة ثلاثـــة مقـــادير ســـلمية حقيقيـــة z, y, x تدعى الإحداثيات الديكارتية للنقطة M ونكتب $M(x, y, z)$. وبالعكس كل ثلاثية مرتبة $(z, y, x) \in R^3$ يقابلها نقطة واحدة في الفراغ مثل M .**

1-3- تعيين شعاع في الفراغ

أ- **أشعة الواحدة** i, j, k : هي أشعة محمولة على المحـــاور OZ, OY, OX أطوالها واحدة الطول .



الشكل (2)

ب- **تعيين شعاع في الفراغ مبدأه النقطة O**

إذا وصلنا OM فيصبح لدينا شعاع مبدأه O ونهايته M. (الشكل 2)

نلاحظ أنَّ OM قطر في متوازي المستطيلات لذلك يمكن أن نكتب :

$$OM = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM} \equiv \overrightarrow{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

وبما أنَّ الجداء الداخلي لشعاع في نفسه يساوي مربع طول هذا الشعاع فإنَّ :

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

وهو دستور بعد نقطة ما عن المبدأ .

جـــ- تعيين شعاع في الفراغ مبدأه ليس في مبدأ الإحداثيات :

بفرض $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ إحداثيات مبدأ ونهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، ولنوجد مسقطه على المحاور الثلاثة . من أجل ذلك نسقط بدايتــه ونهايتــه فنجــد أنَّ مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي :

$$Z = z_2 - z_1 \ , \ Y = y_2 - y_1 \ , \ X = x_2 - x_1$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وهو دستور البعد بين نقطتين .

مثال 1 : احسب البعد بين النقطتين $A(2,0,1)$, $B(-1,2,3)$ ؟

الحل : بتطبيق دستور البعد بين نقطتين نجد :

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

4-1- إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة معلومة

لتكن p نقطة تقسم القطعة المستقيمة المعينة بالنقطتين :

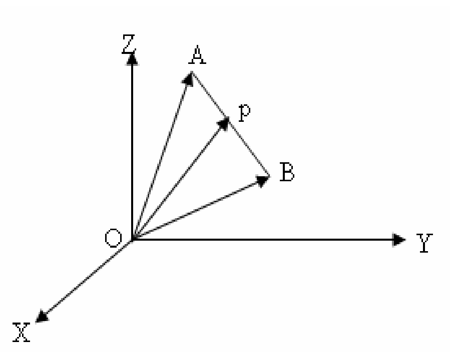
$B(x_2,y_2,z_2),A(x_1,y_1,z_1)$

بالنسبة المعلومة r ، أي أنَّ :

$$\frac{\overline{Ap}}{\overline{pB}} = r$$

والمطلوب تعيين إحداثيات النقطة p .

إذا رسمنا الأشعة $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{Op}$ (الشكل 3) ، فإننا نستطيع أنْ نكتب :



الشكل (3)

$$\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Ap} \qquad ; \quad \overrightarrow{Ap} = r\,\overrightarrow{pB}$$

$$\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{OA} + r(\overrightarrow{pB}) = \overrightarrow{OA} + r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{Op}) \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{Op}(1+r) = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{Op} = \frac{\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OB}}{1+r}$$

بإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية OZ, OY, OX بالترتيب نحصل على إحداثيات النقطة القاسمة :

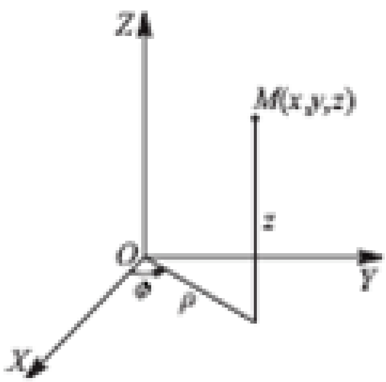
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad , \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \quad , \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1+r}$$

ملاحظة : في الشكل (3) ، كانت النقطة p واقعة داخل القطعة المستقيمة ، والنسبة $r > 0$. أما إذا كانت النقطة p واقعة خارج القطعة المستقيمة ، فتكون $r < 0$ وذلك بشرط $r \neq -1$.

1-5- الإحداثيات الاسطوانية

رأينا سابقاً أنَّ النقطة M في الفراغ تتعين بالثلاثية (x, y, z) والتي تدعى بالإحداثيات الديكارتية . والسؤال الآن هل يمكن تعيين نقطة في الفراغ في جملة غير الجملة الديكارتية ؟

للإجابة عن هذا السؤال نلاحظ من (الشكل 4) أنَّ وضع النقطة M يتعين بمعرفة وضع النقطة M' مسقطها على المستوي XOY ، وبمعرفة راقمها $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{Oc}$.



الشكل (4)

فإذا فرضنا أنَّ القياس الجبري $\overline{Oc}$ هو z ، وفرضنا أنَّ θ , ρ هما الإحداثيان القطبيان لـــ M' في المستوي XOY ، أي أنَّ : $M'(\rho,\theta)$

فإننا نجد أنَّ النقطة M قد تعينت بالثلاثية ρ, θ, z ، والتي تسمى بالإحداثيات الاسطوانية ، ونكتب $M(\rho,\theta,z)$ ؛ حيث يدل المسقط الأول على طول نصف القطر ألشعاعي (ألمتجهي) $\rho = \left|\overrightarrow{OM'}\right|$ ويدل المسقط الثاني على الزاوية القطبية التي يصنعها شعاع الموضع $\overrightarrow{OM'}$ مع المحور القطبي (وهنا اصطلاحاً هو OX) ، أما المسقط الثالث فهو راقم النقطة M .

حتى تمسح النقطة M جميع نقاط الفراغ مرة واحدة فقط ، بمعنى : حتى يتحقق التقابل بين مجموعة جميع الثلاثيات من الشكل (ρ,θ,z) وجميع نقاط الفراغ الثلاثي ، يجب أنْ يتحقق ما يلي :

$$\rho \geq 0 \quad , \quad -\infty < z < +\infty \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

هذه الشروط تعني أنَّ النقطة M تمسح كافة نقاط الفراغ مرَّة واحـدة فقـط (طبعـاً باستثناء نقاط المحور الشاقولي OZ والتي لا تكون من أجلها θ غير معيَّنة) .

السؤال الآن : ما هي العلاقة بين الإحداثيات الاسطوانية والإحداثيات الديكارتيـة لنقطة ما ؟

من (الشكل 4) ، نلاحظ أنَّ العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية للنقطة M وإحـداثياتها الاسطوانية تعطى بالعلاقات الآتية :

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta \quad , \quad z = z$$

هذه العلاقات تعطينا الإحداثيات الديكارتية لنقطة بدلالة إحداثياتها الاسـطوانية .

أما العلاقات التي تعطينا الإحداثيات الاسطوانية لنقطة بدلالة إحداثياتها الديكارتية فهي:

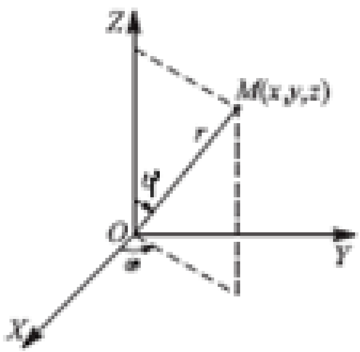
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \quad , \quad z = z$$

1-6- الإحداثيات الكروية

رأينا سابقاً أنَّ النقطة M في الفراغ تتعين بالإحـداثيات الديكارتيـة (x,y,z) وكذلك بالإحداثيات الاسطوانية (ρ,θ,z). والسؤال الآن هل يمكن أيضاً تعيين نقطـة في الفراغ في جملة غير ذلك ؟

للإجابة عن هذا السؤال نلاحظ من (الشكل 5) ، أنَّ النقطة M والمحور OZ يعينان مستوياً P.

إنَّ وضع النقطة M يتعين بمعرفة وضع هذه النقطة بالنسبة للمستوي P ، ووضع المستوي بالنسبة للفراغ .



الشكل (5)

إنَّ وضع المستوي يتعيَّن في الفراغ بالزاوية θ الكائنة بين OM' ؛ حيث M' مسقط

النقطة M على المستوي XOY ، والمحور OX . كما أنَّ وضع النقطة M يتعيَّن في المستوي P بإحداثيتيها القطبيتين φ, ρ ؛ حيث φ الزاوية القطبية في المستوي P وهي الزاوية الكائنة بين المحور OZ و OM ، و $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ نصف القطر ألشعاعي (ألمتجهي) . في هذه الحالة نقول إنَّ النقطة M قد تعينت بالثلاثية ρ, θ, φ ، والتي تسمى الإحداثيات الكروية أو القطبية الفراغية ، ونكتب $M(\rho, \theta, \varphi)$.

حتى تمسح النقطة M جميع نقاط الفراغ مرة واحدة فقط ، بمعنى : حتى يتحقق التقابل بين مجموعة جميع الثلاثيات من الشكل (ρ, θ, φ) وجميع نقاط الفراغ الثلاثي ، يجب أنْ يتحقق ما يلي :

$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

هذه الشروط تعني أنَّ النقطة M تمسح كافة نقاط الفراغ مرَّة واحدة فقط (طبعاً باستثناء نقاط المحور الشاقولي OZ) .

والسؤال الآن ما هي العلاقة بين الإحداثيات الكروية والإحداثيات الديكارتية لنقطة ما ؟

من (الشكل 5) ، نلاحظ أنَّ العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية للنقطة M وإحداثياتها الكروية تعطى بالعلاقات الآتية :

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \quad , \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta \quad , \quad z = \rho \cos\phi$$

هذه العلاقات تعطينا الإحداثيات الديكارتية لنقطة ما بدلالة إحداثياتها الكروية . أما العلاقات التي تعطينا الإحداثيات الكروية لنقطة ما بدلالة إحداثياتها الديكارتية فهي :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \quad , \quad \phi = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

مثال 2 : أوجد الإحداثيات الاسطوانية والكروية للنقطة المعيَّنة بإحداثياتها الديكارتية :

$$x = 5 \quad , \quad y = 5\sqrt{3} \quad , \quad z = 10\sqrt{3}$$

الحل : نوجد أولاً الإحداثيات الاسطوانية (ρ, θ, z) للنقطة المعطاة :

لدينا :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{75 + 25} = \sqrt{100} = 10$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$z = z = 10\sqrt{3}$$

وبالتالي فالإحداثيات الاسطوانية لهذه النقطة هي : $\left(10, \frac{\pi}{3}, 10\sqrt{3}\right)$.

نوجد ثانياً الإحداثيات الكروية (ρ, θ, φ) للنقطة المعطاة :

لدينا :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{25 + 75 + 300} = \sqrt{400} = 20$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arctan \frac{10}{10\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي فالإحداثيات الكروية لهذه النقطة هي : $\left(20, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

1-7- وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه

ليكن $\overrightarrow{V}(p,q,r)$ شعاعاً ما في الفراغ . هذا الشعاع يعيِّن في الفراغ منحى ، هو منحى جميع المستقيمات والمحاور والأشعة التي توازي الشعاع $\overrightarrow{V}$.

نقول بالتعريف عن المقادير السلمية (p,q,r) (أي مركبات الشعاع الذي يعيِّن منحى) ، إنها وسطاء توجيه المنحى ، أو الوسطاء الموجهة لهذا المنحى .

واضح ، من هذا التعريف ، أنَّ الشعاعين المتوازيين يعيّنان منحى واحد ، فإذا كان $\overrightarrow{V}(p,q,r)$, $\overrightarrow{V'}(p',q',r')$ شعاعين متوازيين (مرتبطين خطياً) ، فإنه يمكننا أنْ نكتب :

$$\overrightarrow{V} // \overrightarrow{V'} \Leftrightarrow V = \lambda V' \quad ; \quad \lambda \neq 0$$

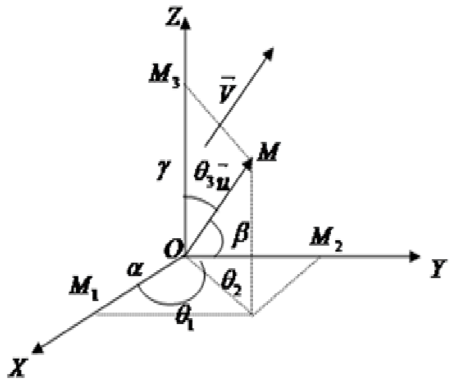
وبالتالي يمكننا أنْ نكتب : $p = \lambda p' \quad , \quad q = \lambda q' \quad , \quad r = \lambda r'$

من هذه العلاقة نستنتج أنَّ :

$$\boxed{\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}}$$

وهو الشرط اللازم والكافي لتوازي شعاعين في الفراغ .

ملاحظة : إذا انعدمت إحدى مركبات الشعاع $\overrightarrow{V}$ ، مثلاً $q = 0$ ، فإنَّ المركبة المقابلـة للشعاع $\overrightarrow{V'}$ تنعدم أيضاً ، أي $q' = 0$ ويكون الشعاعين عموديان على المحور OY .



الشكل (6)

إذا رسمنا من مبدأ الإحداثيات شعاع الواحدة $\vec{u}$ الذي مركباته (α, β, γ) والذي يوازي الشعاع $\overrightarrow{V}(p, q, r)$.

ولو فرضنا $\theta_1 , \theta_2 , \theta_3$ هي الزوايا التي يصنعها الشعاع $\vec{u}$ مع المحاور الإحداثية الثلاثة (الشكل 6) .

عند ذلك تعطى مساقط هذا الشعاع على المحاور الإحداثية بالشكل :

$$\overrightarrow{OM_1} = \alpha = |\vec{u}| \cos\theta_1 = \cos\theta_1$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \beta = |\vec{u}| \cos\theta_2 = \cos\theta_2 \quad ; \quad |\vec{u}| = 1$$

$$\overrightarrow{OM_3} = \gamma = |\vec{u}| \cos\theta_3 = \cos\theta_3$$

نسمي المركبات (α, β, γ) لشعاع الواحدة $\vec{u}$ على المحاور الإحداثية بجيوب تمام التوجيه لهذا الشعاع .

السؤال الآن : ما هي العلاقة التي تربط بين جيوب تمام التوجيه لشعاع ؟ وما هي العلاقة التي تربط بين وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه شعاع ؟

للإجابة على هذا السؤال ننطلق مـن أنَّ : $|\vec{u}| = 1$ ، وبالتـالي فجيـوب تمـام التوجيه لشعاع ترتبط فيما بينها بالعلاقة الآتية : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

أيضاً لدينا :

$$\vec{V} = |\vec{V}| . \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

بإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية نحصل على :

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \ , \ \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \ , \ \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ملاحظة : إذا كان لدينا النقطتان $A(x_1,y_1,z_1)\ ,\ B(x_2,y_2,z_2)$ في الفـــراغ ، فـــإنَّ هاتين النقطتين تعينان منحى في الفراغ وسطاء توجيهه هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$p = x_2 - x_1\ \ ,\ \ q = y_2 - y_1\ \ ,\ \ r = z_2 - z_1$$

مثال 3 : أوجد وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه الشعاع المعيَّن بالنقطتين :

$$A(2,1,0)\ ,\ B(4,3,1)$$

الحل : لدينا :

$$x = x_2 - x_1 = 2\ \ ,\ \ y = y_2 - y_1 = 2\ \ ,\ \ z = z_2 - z_1 = 1$$

وبالتالي فوسطاء توجيه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $\overrightarrow{AB}(2,2,1)$

أما جيوب تمام التوجيه للشعاع $\overrightarrow{AB}$ فتعطى بالشكل :

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{2}{3} = \beta\ ,\ \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{1}{3}$$

1-8- الزاوية بين منحيين

إذا كان لدينا منحيـــين الأول معـــيَّن بالـــشعاع $\overrightarrow{V_1}(p_1,q_1,r_1)$ والثـــاني معـــيَّن بالشعاع $\overrightarrow{V_2}(p_2,q_2,r_2)$ ، وكانت θ الزاوية الكائنة بين المنحيين (بين الـــشعاعين) فإنَّ :

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left|\overrightarrow{V_1}\right|.\left|\overrightarrow{V_2}\right|\cos\theta\ \ \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}}{\left|\overrightarrow{V_1}\right|.\left|\overrightarrow{V_2}\right|}$$

وبالتالي :

$$\cos\theta = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}.\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

نلاحظ أنه إذا كانت θ زاوية حادة ، فإنَّ الطرف الأيمن يكون ذا قيمة جبريـــة موجبة . بينما إذا كانت θ زاوية منفرجة ، فإنَّ الطرف الأيمن يكون ذا قيمـــة جبريـــة سالبة . هذا الأمر مرتبط بجهة كلٍ من الشعاعين .

إذا اصطلحنا أنَّ الزاوية الكائنة بين منحيين هي زاوية حادة ، عندئذٍ يكون :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\left|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2\right|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}.\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}}$$

في حالة تعامد المنحيين ، يكون :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$$

وهو شرط تعامد منحيين .

ملاحظة : إذا كان المنحيان معينان بجيوب تمام التوجيه فـإنَّ الزاويـة بينهمـا تتعـيَّن بالعلاقة :

$$\cos\theta = \left|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2\right|$$

ويتعيَّن شرط التعامد بالعلاقة :

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

1-9- تغيير جملة المحاور الإحداثية

أ) انسحاب جملة المحاور الإحداثية :

بفرض $OXYZ$ جملة محاور إحداثية ؛ حيث $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ أشعة الواحدة المحمولة على هذه المحاور الإحداثية .

لنطبِّق على هذه الجملة انسحاباً معرَّفاً بالشعاع $\overrightarrow{oO}$ ؛ حيـث $O(x_0, y_0, z_0)$ (انظر الشكل 7) ، مبدأ إحداثيات الجملة الجديدة $OXYZ$ ، التـي حـصلنا عليهـا بانسحاب الجملة القديمة $oxyz$ (أي أنَّ المحاور الإحداثية في الجملتين متوازية) .

في هذه الحالة يكون :

$$\vec{i} = \vec{I} \ , \ \vec{j} = \vec{J} \ , \ \vec{k} = \vec{K}$$

لتكن M نقطة من الفراغ المنسوب إلى الجملتين الإحداثيتين القديمة والجديدة ، عندها $M(x, y, z)$ منسوبة للجملة القديمة و $M(X, Y, Z)$ منسوبة للجملة الجديدة .

ولنفتش عن العلاقة بين الإحداثيات القديمة والإحداثيات الجديدة .

الشكل (7)

من الشكل (7) لدينا :

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oO} + \overrightarrow{OM}$$

بالإسقاط على المحاور نحصل على دساتير نقل المحاور الإحداثية بالانسحاب :

$$x = x_0 + X \quad , \quad y = y_0 + Y \quad , \quad z = z_0 + Z$$

مثال 4 : أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة M ، إذا علمـــت أنَّ $M(-1,2,-1)$ نقطة في الفراغ منسوبة للجملة القديمة ، وأجرينا على الجملة انسحاباً معرَّفاً بالشعاع :

$$\overrightarrow{oO} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

الحل : إنَّ المركز الجديد للجملة هو $O(1,2,-2)$، بتطبيق دساتير الانسحاب نجد:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = 1 + X \;\Rightarrow\; X = -2 \\ 2 = 2 + Y \;\Rightarrow\; Y = 0 \\ -1 = -2 + Z \Rightarrow Z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M(-2,0,1)$$

ب) دوران جملة المحاور الإحداثية حول أحد المحاور :

بفرض $oxyz$ جملة محاور إحداثية مباشرة ، ولنفرض أننا طبقنا على هذه الجملة دوراناً مباشراً حول المحور oz بزاوية θ فحصلنا على الجملة الجديدة $OXYZ$ (انظر الشكل 8) .

لتكن $\vec{I}\ ,\vec{J}\ ,\ \vec{K}$ أشعة الواحدة على المحاور الجديدة .

ولتكن M نقطة في الفراغ إحداثياتها بالنسبة للجملة القديمة هي (x, y, z) وللجملة الجديدة هي (X, Y, Z) .

من الشكل (8) نلاحظ :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

الشكل (8)

ولكن :

$$\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{J} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{K} = \vec{k}$$

بالتعويض نجد :

$$\overrightarrow{OM} = X(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + Y(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) + Z\overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{OM} = (X\cos\theta - Y\sin\theta)\vec{i} + (X\sin\theta + Y\cos\theta)\vec{j} + Z\overrightarrow{K}$$

ولكن : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

بالمقارنة بين العلاقتين نجد أنَّ :

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$
$$z = Z$$

تدعى هذه العلاقات بدساتير الدوران حول المحور oz بزاوية $\theta > 0$.

وإذا تمَّ الدوران حول المحور ox بزاوية $\theta > 0$ فإنَّ دساتير الــدوران تأخــذ الشكل الآتي :

$$x = X$$
$$y = Y\cos\theta - Z\sin\theta$$
$$z = Y\sin\theta - Z\cos\theta$$

وإذا تمَّ الدوران حول المحور oy ، فدساتير الدوران تأخذ الشكل الآتي :

$$x = Z\sin\theta + X\cos\theta$$
$$y = Y$$
$$z = Z\cos\theta - X\sin\theta$$

مثال 5 : عيِّن إحداثيات النقطة $M(2,4,2)$ المنسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية $oxyz$ ، بالنسبة لجملة محاور إحداثية جديدة تنتج عن الجملة القديمة بــدورانها حــول المحور oz بزاوية $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ؟ ثــمَّ اكتــب المعادلــة : $2x^2 + z^2 + 2\sqrt{3}\,x.y = 0$ منسوبة للجملة الجديدة ؟

الحل : بتطبيق دساتير الدوران حول المحور oz ، نجد أنَّ :

$$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{Y}{2} \quad , \quad 4 = \frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \quad , \quad 2 = Z$$

بحل جملة المعادلتين في Y, X نحصل على :

$$X = \sqrt{3} + 2 \quad , \quad Y = -1 + 2\sqrt{3} \quad , \quad 2 = Z$$

لحل الطلب الثاني نعوِّض من دساتير الدوران في المعادلة المعطاة ، نجد أنَّ :

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X-\frac{Y}{2}\right)^2+Z^2+2\sqrt{3}\left(\frac{X}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)=0$$

بفك الأقواس والإصلاح نجد : $3X^2-Y^2+Z^2=0$

جـ) الحالة العامة :

بفرض $oxyz$ جملة محاور إحداثية ؛ حيث $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ أشعة الواحـدة المحمولـة على هـذه المحـاور . ولـتكن $OXYZ$ جملـة جديـدة معيَّنـة بمركزهـا الجديـد $O(x_0,y_0,z_0)$ وبأشعة الواحدة $\vec{I},\vec{J},\vec{K}$ المعيَّن كل منها بمركباتـه الثلاثـة علـى المحاور القديمة .

فإذا كانت a_{11},a_{12},a_{13} مركبات الشعاع $\vec{I}$ على المحاور ox,oy,oz علـى الترتيب ، عندئذٍ يكون :

$$\vec{I}=a_{11}\vec{i}+a_{12}\vec{j}+a_{13}\vec{k}$$

وبالمثل نجد :

$$\vec{J}=a_{21}\vec{i}+a_{22}\vec{j}+a_{23}\vec{k}$$

$$\vec{K}=a_{31}\vec{i}+a_{32}\vec{j}+a_{33}\vec{k}$$

ولدينا :

$$\overrightarrow{oO}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$$

فإذا كانت M نقطة من الفراغ ، إحداثياتها (x,y,z) بالنسبة للجملة القديمة و (X,Y,Z) إحداثياتها بالنسبة للجملة الجديدة ، أي أنَّ :

$$\overrightarrow{oM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

لنوجد العلاقات التي تربط الإحداثيات الجديدة بالإحداثيات القديمة للنقطة M ؟

من الشكل (9) ، نلاحظ أنَّ :

الشكل (9)

$$\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oO}+\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oO}+X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$$

بإسقاط العلاقة الأخيرة على الجملة القديمة ، والاستفادة مما سبق ، نجد :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z \\ y &= y_0 + a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z \\ z &= z_0 + a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z \end{aligned}$$

حيث الأمثال $(i, j = 1,2,3)$ a_{ij} لا تساوي الصفر معاً .

العلاقات الأخيرة تعيِّن دساتير التحويل العامة في الفراغ ، وهي تجمع الانسحاب والدوران معاً .

10-1- الجداء الداخلي لشعاعين (الجداء السلمي)

ليكن $\vec{A}$, $\vec{B}$ شعاعين . يعرَّف الجداء الداخلي لهذين الشعاعين ، ونرمز له بـــ $\vec{A}.\vec{B}$ ، بأنه عدد (مقدار سلمي) معرَّف بالعلاقة :

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|\cos\theta \;\; ; \; 0 \le \theta \le \pi$$

حيث θ الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}$, $\vec{B}$.

إنَّ للجداء الداخلي لشعاعين بعض الخواص ، نذكر منها ما يلي :

1- الجداء الداخلي تبديلي ، أي أنَّ : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

2- يكون الشعاعان $\vec{A}$, $\vec{B}$ متعامدين إذا كان $\vec{A}.\vec{B} = 0$ ، أي أنَّ :

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

3- إذا كان الشعاعان محمولين على حامل واحد ومن نفس الاتجاه ، فإنَّ :

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|$$

وإذا كان $\vec{A} = \vec{B}$ ، يكون : $\vec{A}.\vec{A} = |A|^2$

وفي حالة أشعة الواحدة يكون :

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = (\vec{k})^2 = 1$$

$$\vec{i} \,.\, \vec{j} = \vec{j} \,.\, \vec{k} = \vec{k} \,.\, \vec{i} = 0$$

4- الجداء الداخلي لشعاعين بدلالة المركبات :

$$\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \;\; , \;\; \vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

هو :

$$\vec{A}.\vec{B}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$
$$\vec{A}.\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

11-1- الجداء الخارجي لشعاعين (الجداء الشعاعي)

ليكن $\vec{B}$, $\vec{A}$ شعاعين . يعرَّف الجداء الخارجي لهذين الشعاعين ، ونرمز لـــه بـــ $\vec{A}\wedge\vec{B}$ ، بأنه شعاع معرَّف بالعلاقة :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|\sin\theta\ .\vec{N}$$

حيث θ الزاوية بين الشعاعين $\vec{B}$, $\vec{A}$ و $\vec{N}$ شعاع الواحدة العمود علـــى كـــلٍ مـــن الشعاعين $\vec{B}$, $\vec{A}$ ، والمتجه بحيث تكون الثلاثية $\vec{A},\vec{B},\vec{N}$ موجبة .

إنَّ للجداء الخارجي لشعاعين بعض الخواص ، نذكر منها ما يلي :

1- الجداء الخارجي ليس تبديلياً ، أي أنَّ : $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$ ، وذلك لأنَّ :

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

2- يكون الشعاعان $\vec{B}$, $\vec{A}$ متوازيين (أي $\theta=0$) ، إذا كان $\vec{A}\wedge\vec{B}=0$. كذلك $\vec{A}\wedge\vec{A}=0$.

أما بالنسبة لأشعة الواحدة على المحاور الإحداثية الثلاثية فإنه يكون :

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=0$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=-\vec{j}\wedge\vec{i}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=-\vec{k}\wedge\vec{j}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=-\vec{i}\wedge\vec{k}=\vec{j}$$

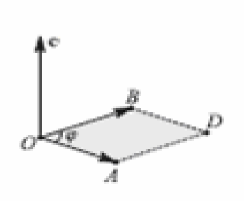
3- الجداء الخارجي لشعاعين بدلالة المركبات :

$$\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\ \ ,\ \ \vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

هو :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\wedge(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$
$$\vec{A}\wedge\vec{B}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_1-y_1x_2)\vec{k}$$

العلاقة الأخيرة يعبَّر عنها بالمحدد الآتي :



$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

الشكل (10)

هندسياً : يعبِّر عن $\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|$ بسطح (مساحة) متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $\vec{A}\ ,\ \vec{B}$ (الشكل 10) .

مثال 6 : أوجد شعاع الواحدة العمود على كلٍ من الشعاعين :

$$\vec{A}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\ \ ,\ \vec{B}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

الحل : لدينا :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|..\vec{N}\ \Rightarrow \vec{N}=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}$$

ومنه :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$$

وبالتالي :

$$\vec{N}=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})$$

مثال 7 : أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه :

$$A(2,3,5)\ ,\ B(4,2,-1)\ \ ,\ C(3,6,4)$$

الحل : لدينا :

$$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}-6\vec{k}\ \ ,\ \overrightarrow{AC}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

ومساحة المثلث هي :

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -6\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=19\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(19)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = \sqrt{426}$$

وبالتالي :
$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{426}$$

12-1- الجداء المختلط لثلاثة أشعة

ليكن $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ثلاثة أشعة . يعرَّف الجداء المختلط لهذه الأشعة ، ونرمز له بـــأحد الرمزين الآتيين $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ ، بأنه عدد يساوي الجداء الداخلي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B} \wedge \vec{C}$.

لنوجد الآن **المعنى الهندسي** لهذا الجداء (الشكل 11) .

نعلم أنَّ $\vec{B} \wedge \vec{C}$ هو شعاع عمودي على مستوي الشعاعين $\vec{B},\vec{C}$ ، وأنَّ $\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$ هو سطح متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين . أما الجداء الداخلي $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ فهو كمية عددية تساوي جداء مركبة $\vec{A}$ على $\vec{B} \wedge \vec{C}$ بسطح متوازي الأضلاع السابق ، أي أنَّ $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ يساوي $\pm$ حجم متوازي السطوح الذي أحرفه الأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ وتكون الإشارة + إذا كانت الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B} \wedge \vec{C}$ حادة .

الشكل (11)

ملاحظـــة : يعطى حجم الهرم الثلاثي ، الذي حروفه الأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ بدلالـــة الجـــداء المختلط لهذه الأشعة ، بالعلاقة الآتية :

$$V' = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\left|\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})\right|$$

إنَّ للجداء المختلط لثلاثة أشعة بعض الخواص ، نذكر منها ما يلي :

1- بما أنه يمكننا اعتبار أي وجه من أوجه متوازي السطوح قاعدة له ، فإنَّ :

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

وذلك على أن تؤخذ الأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ بترتيب دوري .

2- بما أنَّ الجداء الداخلي تبديلي ، يكون :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = (\vec{B} \wedge \vec{C}).\vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$$

وإذا تغيَّر الترتيب الدوري للأشعة ، فإنَّ إشارة الحجم تتغير :

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = -\vec{A}.(\vec{C} \wedge \vec{B})$$

3- إذا كانت الأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ مستوية ، فإنَّ حجم متوازي السطوح يساوي الصفر . وبالتالي يكون : $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$

إذاً :

نقول عن ثلاث أشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ إنها مستوية (تقع في مستوٍ واحد) إذا وفقط إذا كان جداؤها المختلط يساوي الصفر .

4- الجداء المختلط لثلاث أشعة بدلالة المركبات :

$$\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \ , \ \vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \ , \vec{C} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

هو :

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

مثال 7 : أثبت أنَّ النقاط الأربعة الآتية :

$$A(3,9,4)\ , \mathrm{B}(-4,4,4)\ , \mathrm{C}(4,5,1), D(0,-1,-1)$$

تقع في مستوٍ واحد ؟

الحل : إنَّ الشرط اللازم والكافي حتى تقع النقاط الأربعة في مستوٍ واحد ، هو أن تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ في مستوٍ واحد ، أي جداؤها المختلط معدوم .

لذلك :

$$\overrightarrow{AB} = -7\vec{i} - 5\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{AD} = -3\vec{i} - 10\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix}-7 & -5 & 0\\ 1 & -4 & -3\\ -3 & -10 & -5\end{vmatrix}=0$$

أي أنَّ النقاط الأربعة تقع في مستوٍ واحد

مثال 8 : أوجد حجم الهرم الثلاثي ، الذي رؤوسه النقاط الآتية :

$A(0,0,1)\,,\mathrm{B}(2,3,5)\,,\mathrm{C}(6,2,3)\,,D(3,7,2)$

الحل : لدينا :

$\overrightarrow{BA}\,(-2,-3,-4)\quad,\quad\overrightarrow{BD}\,(1,4,-3)\;\;,\;\;\overrightarrow{BC}\,(4,-1,-2)$

وبالتالي :

$$V^{'}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(22+30+68)=20$$

✱

تمارين محلولة

1) أوجد الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الكروية للنقطة المعيَّنـــة بإحـــداثياتها الاسطوانية الآتية : $M\left(2,\frac{\pi}{4},2\sqrt{3}\right)$

الحل : نوجد أولاً الإحداثيات الديكارتية للنقطة المعطاة :

لدينا :

$$x = \rho\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = \rho\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$z = z = 2\sqrt{3}$$

وبالتالي فالإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة هي $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$.

نوجد ثانياً الإحداثيات الكروية (ρ,θ,φ) للنقطة المعطاة :

لدينا :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2+2+12} = 4$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \arctan\frac{2}{2\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي فالإحداثيات الكروية هي : $M\left(4,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$

2) أوجد الإحداثيات الاسطوانية والإحداثيات الكروية للنقطة المعيَّنة بإحـــداثياتها الديكارتية الآتية : $M\left(2,2\sqrt{3},3\right)$

الحل : نوجد أولاً الإحداثيات الاسطوانية للنقطة المعطاة :

لدينا :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 3$$

نوجد ثانياً الإحداثيات الكروية (ρ,θ,φ) للنقطة المعطاة :

لدينا :

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5$$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$\varphi=\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\arctan\frac{4}{3}$$

3) اكتب المعادلة الديكارتية للسطح الممثل بالمعادلة الآتية المعطاة بالإحـــداثيات الكروية : $\rho=2\cos\theta\cos\varphi$

الحل : نعلم أنَّ : $\rho^2=x^2+y^2+z^2\ ,\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}$

ومنه : $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2}$

وبالتالي : $\cos^2\theta=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

لدينا : $\cos\varphi=\dfrac{z}{\rho}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

أي أنَّ : $\cos^2\varphi=\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$

لنربِّع معادلة السطح المطلوب فنجد :

$$x^2+y^2+z^2=4\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

ومنه : $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\left(x^2+y^2\right)-4x^2z^2=0$

4) أوجد جيوب تمام توجيه الشعاع : $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$

الحل : لدينا : $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

وبالتالي فجيوب تمام التوجيه للشعاع $\vec{A}$ تعطى بالشكل :

$$\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\ ,\ \beta=\frac{2}{\sqrt{14}}\ ,\ \gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

5) أوجد جيوب تمام توجيه المنحى الذي يوازي المستوي OXY ويعامد المنحى المعيَّن بالشعاع $\vec{V}(2,-1,1)$.

الحل : نفرض وسطاء التوجيه للمنحى المطلوب هي (p,q,r) ، ولكن المنحى يعامد المحور OZ وبالتالي $r=0$ ، أي أنَّ وسطاء التوجيه هي $(p,q,0)$.

وبما أنَّ المنحى المطلوب يعامد المنحى $\vec{V}(2,-1,1)$ ، لذلك نكتب شرط التعامد فيكون :

$$2p-q=0 \;\Rightarrow\; q=2p$$

وتكون وسطاء التوجيه هي : $(1,2,0)$.

أما جيوب تمام التوجيه فهي :

$$\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\ ,\ \beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\ ,\ \gamma=0$$

نعوض عن q فنجد :
$$\beta=\frac{2p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

أي :
$$\beta=2\alpha$$

ولكن :
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \Rightarrow \alpha^2+4\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

وبالتالي :
$$\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \ ,\ \ \gamma=0$$

6) عيِّن قيمة n , m بحيث يتعامد الشعاع $\vec{V}(2,m,n)$ مع الشعاعين $\overrightarrow{V_1}(-1,4,2)\ ,\ \overrightarrow{V_2}(3,3,-1)$ ؟

الحل : من شرط تعامد شعاعين نجد :
$$\overrightarrow{V_1}.\vec{V}=0\ ,\ \overrightarrow{V_2}.\vec{V}=0$$

ومنه :
$$-2+4m+2n=0\ \ ,\ \ 6+3m-n=0$$

بحل جملة المعادلتين نجد :
$$m=-1\ \ ,\ \ n=3$$

7) عيِّن شعاع الواحدة العمود على كلٍ من الشعاعين :

$$\vec{A}=2\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}\ \ ,\ \ \vec{B}=4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

واحسب الزاوية الحاصلة بين $\vec{A},\vec{B}$ ؟

الحل : لدينا :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}=15\vec{i}-10\vec{j}+30\vec{k}$$

$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|=\sqrt{(15)^2+(-10)^2+(30)^2}=35$$

وبالتالي :

$$\vec{N}=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}=\frac{15}{35}\vec{i}-\frac{10}{35}\vec{j}+\frac{30}{35}\vec{k}=\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$

ولحساب الزاوية بين الشعاعين ، نعلم أنَّ :

$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|}=\frac{35}{7\sqrt{26}}\Rightarrow \theta=\arcsin\frac{35}{7\sqrt{26}}$$

8) أثبت أنَّ النقاط الثلاثة الآتية : $A(3,2,-4)\ ,B(5,4,-6)\ ,\ C(9,8,-10)$
تقع على استقامة واحدة ؟

الحل : لإثبات أنَّ النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة ، نحسب الزاوية بين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)\ \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2,2,-2)$

وبالمثل نجد : $\overrightarrow{AC}(6,6,-6)$

وبالتالي : $$\cos\theta=\frac{2.6+2.6+2.6}{\sqrt{4+4+4}\sqrt{36+36+36}}=1$$

هذا يعني أنَّ الزاوية الكائنة بين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ تساوي الصفر ، وبالتالي فالنقاط الأربعة تقع على استقامة واحدة .

9) عيِّن الإنسحاب المناسب للجملة $oxyz$ ؛ بحيث تنعدم الحدود الخطية من المعادلة الآتية :

$$x^2+x.y+2x+y-1=0$$

الحل : نفرض أنَّ مركز الجملة الجديدة هو النقطة $O(x_0, y_0, z_0)$. بتطبيق دساتير الانسحاب في المعادلة المعطاة نجد :

$$(x_0 + X)^2 + (x_0 + X).(y_0 + Y) + 2(x_0 + X) + (y_0 + Y) - 1 = 0$$

نفك الأقواس ونرتب الحدود فنحصل على :

$$X^2 + X.Y + (2x_0 + y_0 + 2)X + (x_0 + 1)Y + x_0^2 + x_0.y_0 + 2x_0 + y_0 - 1 = 0$$

وحتى تنعدم الحدود الخطية يجب أن تكون أمثال الحدود من الدرجة الأولى معدومة . أي أنَّ :

$$2x_0 + y_0 + 2 = 0 \quad , \quad x_0 + 1 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد : $y_0 = 0 \quad , \quad x_0 = -1$

ويكون المركز الجديد هو : $O(-1,0,0)$.

10) احسب سطح المثلث المنشأ على الشعاعين :

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \ , \ \vec{V} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

ثمَّ احسب الزاوية الكائنة بينهما ؟

الحل : من المعلوم أنَّ سطح المثلث يعطى بالعلاقة : $S = \frac{1}{2}\left|\vec{U} \wedge \vec{V}\right|$

لدينا :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 28\vec{i} - 21\vec{j} - 14\vec{k}$$

وبالتالي :

$$\left|\vec{U} \wedge \vec{V}\right| = \sqrt{(28)^2 + (-21)^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{29}$$

ومنه :

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{U} \wedge \vec{V}\right| = \frac{7}{2}\sqrt{29}$$

لحساب الزاوية بين الشعاعين $\vec{U}, \vec{V}$ ، نكتب :

$$\left|\vec{U} \wedge \vec{V}\right| = \left|\vec{U}\right|.\left|\vec{V}\right| \sin\theta \ ; \ \left|\vec{U}\right| = 13 \ , \ \left|\vec{V}\right| = 3$$

وبالتالي :

$$\sin\theta = \frac{7\sqrt{29}}{39} \ \Rightarrow \ \theta = \arcsin\left(\frac{7\sqrt{29}}{39}\right)$$

11) احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $C(4,3,2)$, $B(2,3,4)$, $A(1,1,2)$ ؟

الحل : نكتب الشعاعين $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

لذلك :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

وبالتالي :
$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \sqrt{24}$$

12) عيِّن زاوية الدوران θ حول المحور OZ حتى ينعدم الحد المستطيلي من معادلة السطح الآتية : $x^2 + y^2 + 2z^2 - 3xy + x - 1 = 0$

ثمَّ اكتب المعادلة الناتجة ؟

الحل : نعوض دساتير تغيير الإحداثيات بالدوران حول المحور OZ في معادلة السطح ، فنجد :
$$(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + (X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + 2Z^2 - 3(X\cos\theta - Y\sin\theta).$$
$$.(X\sin\theta + Y\cos\theta) + X\cos\theta - Y\sin\theta - 1 = 0$$

بفك الأقواس والاختصار نجد :
$$X^2(1 - 3\cos\theta.\sin\theta) + Y^2(1 + 3\sin\theta.\cos\theta) + 2Z^2 -$$
$$-3XY(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + X\cos\theta - Y\sin\theta - 1 = 0$$

والحد المستطيلي ينعدم عندما :
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

أو :
$$\cos 2\theta = 0 \ \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

نعوض قيمة θ في المعادلة ، نجد :
$$X^2 + 5Y^2 + 4Z^2 + \sqrt{2}X - \sqrt{2}\,Y - 2 = 0$$

وهي المعادلة الناتجة بعد إجراء الدوران بزاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$.

تمارين غير محلولة

1) عيِّن وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه الشعاع المعيَّن بالنقطتين :

$A(1,2,3)\ ,\ B(0,4,0)$

2) لتكن $A(-1,2,-1)$ نقطة في الفراغ منسوبة للجملة $oxyz$ ، فإذا أجرينا على الجملة انسحاباً معرَّفاً بالشعاع : $\overrightarrow{oO}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$

فأوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة A ؟

الجواب : $A(-2,0,1)$.

3) إذا كانت $\theta_3\,,\theta_2\,,\theta_1$ الزوايا التي يصنعها مستقيم مع المحاور الإحداثية ، أثبت أنَّ :

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2$$

4) أوجد وسطاء توجيه وجيوب تمام التوجيه للمنحى الذي يوازي المستوي OXY ويعامد المنحى المعيَّن بالشعاع : $\vec{V}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ؟

الجواب : $(1,2,0)$ ، $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}},0\right)$.

5) لتكن الأشعة الآتية : $\vec{A}(6,3,0)\ ,\ \vec{B}(1,7,2)\ ,\ \vec{C}(4,-4,-2)$ ، والمطلوب : عيِّن الشعاع الذي يعامد كلاً من الشعاعين $\vec{A}\,,\vec{B}$ ويحقق أيضاً العلاقة : $\vec{X}.\vec{C}=6$ ؟

الجواب : $\vec{X}(-6,12,-39)$.

6) أوجد الإحداثيات الديكارتية والكروية للنقطة المعيَّنة بإحداثياتها الاسطوانية الآتية :

$M\left(2,\dfrac{\pi}{4},1\right)$ ؟

7) أوجد الإحداثيات الديكارتية والاسطوانية للنقطة المعيَّنة بإحداثياتها الكروية الآتية :

$M\left(3,30^\circ,105^\circ\right)$ ؟

8) أوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، إذا علمت أنَّ النقطة A معيَّنة بالإحداثيات الاسطوانية الآتية :

$A\left(1,\dfrac{4\pi}{3},2\right)$ ، والنقطة B معيَّنة بالإحداثيات الكروية الآتية : $B\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right)$

9) اكتب المعادلات الديكارتية للسطح الممثَّل بالمعادلة المعطاة بالإحداثيات الاسطوانية الآتية : $z = \rho$

الجواب : $z^2 = x^2 + y^2$

10) اكتب المعادلات الديكارتية للسطح الممثَّل بالمعادلة المعطاة بالإحداثيات الكروية الآتية :

$$\rho = 2\cos\theta.\cos\varphi$$

الجواب : $(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2) - 4x^2 z^2 = 0$

11) عيِّن الانسحاب المناسب للجملة $oxyz$ كي نحذف الحدود الخطية (المستقيمة) من المعادلة الآتية :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 2 = 0$$

واكتب الشكل الجديد للمعادلة ؟

الجواب : المبدأ الجديد $(1,-2,1)$ ، $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

12) عيِّن قيمة الثابتين λ , μ حتى تقع النقاط الثلاثة الآتية :

$A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, $C(1,\lambda,\mu)$

على استقامة واحدة ؟

الجواب : $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\mu = \frac{5}{3}$.

13) عيِّن الزاوية الداخلية عند الرأس B للمثلث الذي رؤوسه هي النقاط :

$A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$

الجواب : 45° .

14) أثبت أنَّ المثلث الذي رؤوسه النقاط :

$A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$, $C(-3,2,1)$

هو مثلث متساوي الساقين ؟

15) أثبت أنَّ المثلث الذي رؤوسه النقاط :

$A(3,-1,6)$, $B(-1,7,-2)$, $C(1,-3,2)$

هو مثلث قائم الزاوية ؟

16) أثبت أنَّ الزوايا الداخلية للمثلث الذي رؤوسه :

$A(3,-2,5)\ ,B(5,1,-1)\ ,\ C(-2,1,-3)$

هي زوايا حادة ؟

17) أثبت أنَّ القطرين $AC\ ,\ BD$ في الشكل الرباعي ، الذي رؤوسه :

$A(1,-2,2)\ ,B(1,4,0)\ ,\ C(-4,1,1)\ ,\ D(-5,-5,3)$

متعامدان ؟

18) عيِّن الشعاع $\overrightarrow{X}$ الذي يحقق الشروط $\overrightarrow{Xc}=20\ ,\ \overrightarrow{Xb}=-11\ ,\ \overrightarrow{Xa}=-5$

وذلك إذا كانت الأشعة :

$$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\ \ ,\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\ \ ,\ \vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$$

الجواب : $\overrightarrow{X}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$.

19) احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط :

$A(1,2,0)\ ,B(3,0,-3)\ ,\ C(5,2,6)$

الجواب : 14 وحدة مربعة .

20) احسب حجم رباعي السطوح الذي تقع رؤوسه في النقاط :

$A(2,-1,1)\ ,B(5,5,4)\ ,\ C(3,2,-1)\ ,\ D(4,1,3)$

الجواب : 3 وحدة مكعبة .

انتهى الفصل الأول

من القسم الثاني