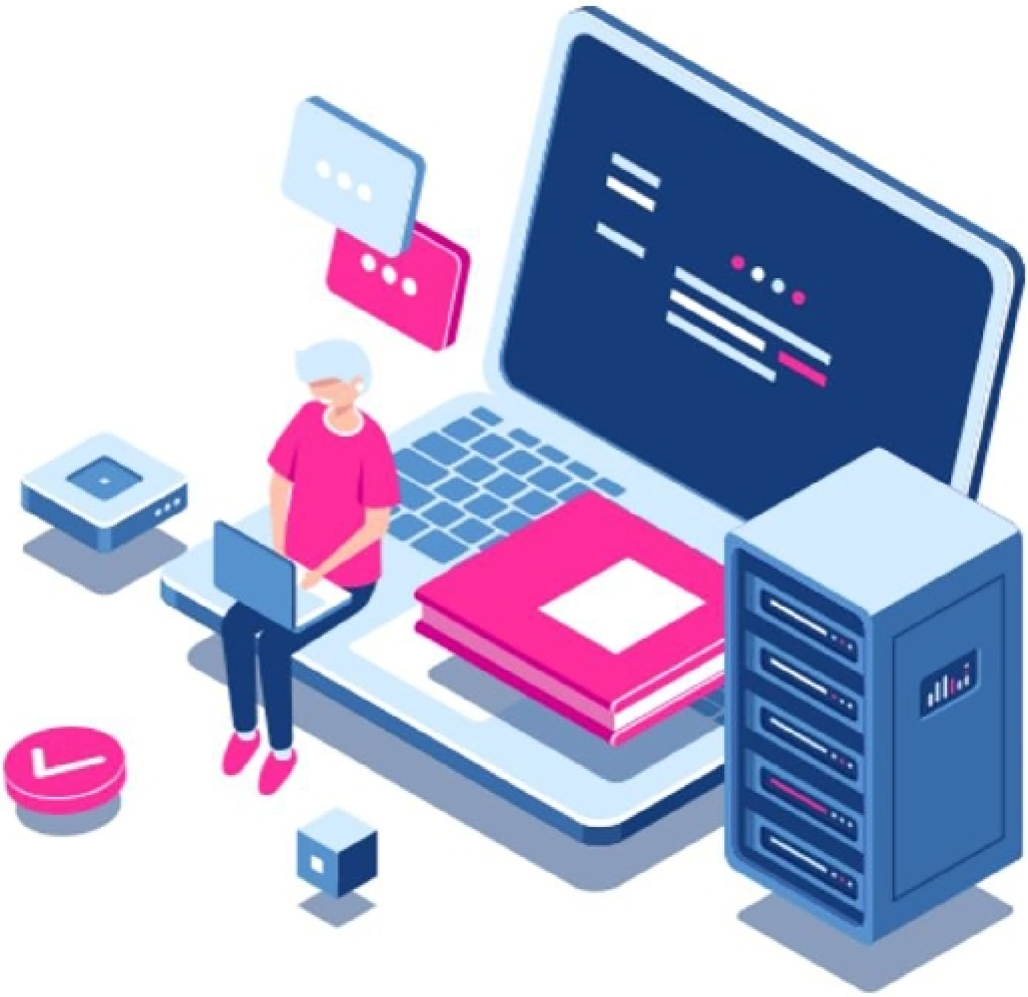
سلسلة

التجمع التعليمي

التجمع التعليمي



تعريف الشعاع وخواصه

- لتكن النقطتان A و B من المستوي أو الفراغ نسمي الانسحاب الذي ينقل A إلى B بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ وعناصره:

المنحى: هو منحى المستقيم (AB)

الجهة: من A إلى B

الطول (النظيم): وهو طول القطعة المستقيمة $[AB]$ أي أن

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

- نقول عن شعاعين أنهما متساوين إذا كان لهما نفس المنحى والجهة والطول.
- الشعاع الصفري $(\vec{0})$ وهو شعاع له نفس البداية والنهاية $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- الشعاعان المتعاكسان: هما شعاعان لهما نفس المنحى والطول وبجهتين متعاكستين. مجموع شعاعين متعاكسين هو الشعاع الصفري

جمع الأشعة:

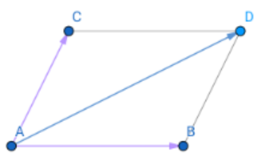
طريقة شال:

نستخدم طريقة شال عندما تكون نهاية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني

يمكن الاستفادة من علاقة شال عن طريق الزرع مثل:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

طريقة متوازي الأضلاع:



نستخدم طريقة متوازي الأضلاع عندما يكون للشعاعين نفس البداية ويكون مجموعهما هو قطر متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

إذا كانت A , B , C , D أربعة نقاط ليست على استقامة واحدة

$ABDC$ متوازي أضلاع $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

لجمع شعاعين نطبق الخطوات بالترتيب:

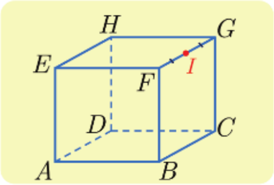
- نبحث إذا كان الشعاعين متعاقبين أو لهما نفس البداية.
- نبدل الشعاع بشعاع يساويه.
- نزرع نقطة تساعدنا على الجمع.

مثال

$ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف الحرف $[FG]$.

① عين النقطة M التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AM}$$



② أثبت صحة العلاقة الآتية

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$$

الحل:

①

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$$

وبالتالي M تنطبق على النقطة I.

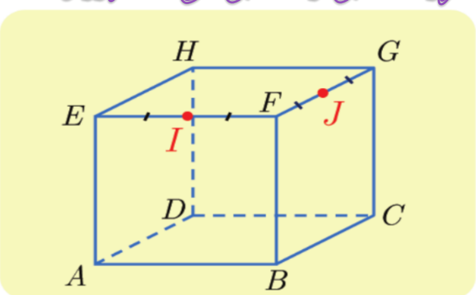
②

$$l_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CF}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \underbrace{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB}}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = l_2$$

تدرب صفحة 16

$ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

① في كل من الحالات الآتية بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب.



① $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$$

M تنطبق على النقطة F.

② $\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{AD}$

$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$$

M تنطبق على النقطة G .

③ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$$

M تنطبق على النقطة E .

④ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}$$

$$= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) = -\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{KG}$$

حيث K نقطة تجعل الرباعي $AGCK$ متوازي أضلاع

ومنه M لا تقع على أحد رؤوس المكعب.

④ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{HA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$$

M تنطبق على النقطة B .

② في كل من الحالات الآتية، حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

① $\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}} + \overrightarrow{FJ}$

$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$$

N تنطبق على النقطة J.

② $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \underbrace{\overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{HJ}$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$$

N تنطبق على النقطة J.

③ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}}_{\overrightarrow{AF}} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$$

$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI}}_{\overrightarrow{AI}} = \overrightarrow{AI}$$

N تنطبق على النقطة I.

③ في كل من الحالات الآتية، عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل.

① $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$$

② $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$$

③ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{AI}$$

$$= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{AI}$$

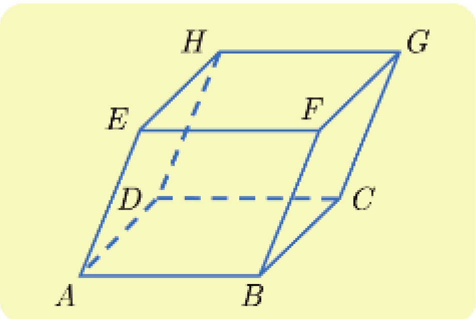
④ $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح.

① أثبت صحة المساواة الشعاعية في كل من الحالات الآتية.



① $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$

$$l_1 = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0} = l_2$$

② $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$$l_1 = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} = l_2$$

③ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

$$l_1 = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$$

④ $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$

$$l_1 = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} = l_2$$

② وضع النقاط P و Q و R بحيث يكون:

① $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$$l_2 = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_1} = \overrightarrow{AO_1} \Rightarrow P = O_1$$

حيث O_1 مركز الرباعي $BCGF$.

② $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$$l_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EO_2} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO_2} \Rightarrow Q = O_2$$

حيث O_2 مركز الرباعي $EHGF$.

③ $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$l_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$$
$$= \overrightarrow{DO_3} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO_3} \Rightarrow R = O_3$$

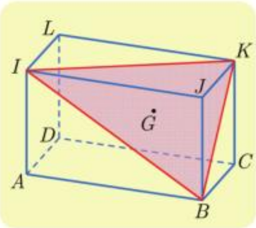
حيث O_3 مركز الرباعي $ADHE$.

الارتباط الخطي لشعاعين

- نقول عن شعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ أنهما مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أي $\vec{u} = k\vec{v}$ أو $\vec{v} = k\vec{u}$.
- نقول عن شعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ أنهما مرتبطان خطياً إذا كان لهما نفس المنحى.
- نقول عن شعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ أنهما مرتبطين خطياً إذا كان المستقيمين AB و CD متوازيان.
- تكون النقاط A و B و C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً.
- نستخدم الارتباط الخطي لـ
  - إثبات توازي مستقيمين أو نفي توازيهما.
  - إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

مثال

ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. وليكن G مركز ثقل المثلث BIK. أثبت أن النقاط D و G و J تقع على استقامة واحدة.



الحل:

لنثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DJ}$ مرتبطين خطياً.

بما أن G مركز ثقل المثلث BIK فإن

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$$

باستخدام علاقة شال:

$$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$$

باستخدام علاقة شال:

$$3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AJ} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{DJ} + \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JI}} + \overrightarrow{AJ} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AJ} = \vec{0}$$

ومنه نجد

$$3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{DJ} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DJ}$$

ومنه النقاط D و G و J تقع على استقامة واحدة.

تدرب صفحة 16

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح.

③ عين شعاعاً يساوي $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ وأثبت أن هذا الشعاع يرتبط خطياً مع بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BF}$$
$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG}$$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً.

④ أوجد شعاعاً يساوي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$ وأثبت أن هذا الشعاع يرتبط خطياً مع بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FD}$$

$\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{DF}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

مبرهنات:

- C, B, A ثلاثة نقاط ليست واقعة على استقامة واحدة عندئذٍ المستوي ABC هو مجموعة النقاط M التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

ونسمي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعي توجيه المستوي (ABC)

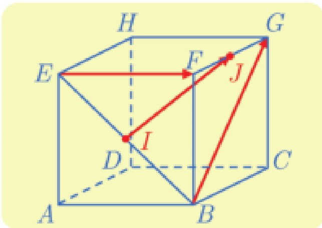
- $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ ثلاثة أشعة ونفرض $\vec{u}, \vec{v}$ غير مرتبطين خطياً، نقول عن الأشعة $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

- نستخدم الارتباط الخطي لثلاثة أشعة لبرهان وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.

مثال:

$ABCDEFGH$ مكعب. النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$. أثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطياً.



الحل:

أولاً لنختار شعاعين غير مرتبطين خطياً $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}$ (لأنهما متعامدان)

تكون الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطياً إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان $\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{BG}$

باستخدام علاقة شال على الشعاع $\overrightarrow{IJ}$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ} \quad \dots ①$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \quad \dots ②$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$2\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IE}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{FG}}_{\vec{0}}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

ومنه الأشعة مرتبطة خطياً.

تدرب صفحة 20

① A, B, C ثلاثة نقاط متمايزة من الفراغ. أتكون الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

باستخدام علاقة شال $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

ومنه الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

② A, B, C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. E نقطة تحقق $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ و F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. أتقع النقاط A, B, C, E, F في مستوٍ واحد.

الحل:

لدينا $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ ومنه النقاط B, E, C تقع على استقامة واحدة. وبالتالي النقطة E تقع في المستوي (ABC)

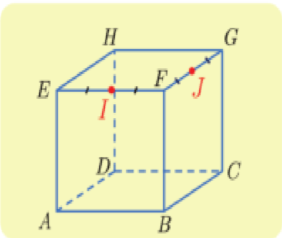
لدينا $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ ومنه النقاط A, F, E تقع على استقامة واحدة. وبالتالي النقطة E تقع في المستوي (ABE) أي (ABC)

ومنه النقاط A, B, C, E, F تقع في مستوٍ واحد.

③ $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

① أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI)

② أتقع الأشعة $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}$ في مستوٍ واحد.



الحل:

① بما أن النقطة J تقع على الحرف $[FG]$ العمودي على المستوي (ABI)، فإن النقطة J لا تنتمي إلى المستوي (ABI).

② وجدنا أن النقطة J لا تنتمي إلى المستوي (ABI) وبالتالي النقاط B, I, A, J لا تقع في مستوٍ واحد.

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ لا تقع في مستوٍ واحد.

④ $ABCD$ رباعي وجوه. M هي النقطة المحققة للعلاقة

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

عبِّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.

واستنتج أن M تنتمي إلى المستوي (ABC).

الحل:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

إن الأشعة $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً، وبالتالي النقطة M تنتمي إلى المستوي (ABC)

⑤ $ABCDEFGH$ مكعب. فيه M نقطة تُحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$

و N نقطة تُحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

① أثبت أن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

② أتكون الأشعة $\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EA}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

①

باستخدام علاقة شال على الشعاع $\overrightarrow{MN}$ نجد

$$\begin{aligned}MN &= \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB})\\ &= \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

②

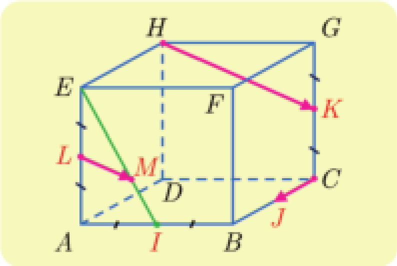
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA} + \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB})$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{EA}$ وبالتالي

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

ومنه الأشعة مرتبطة خطياً.

⑥ $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB], [BC], [CG], [AE]$. ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$.



① لماذا M هي مركز ثقل المثلث (AEB)

② أتكون الأشعة $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{LM}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

①

نلاحظ من الشكل أن EI متوسط في المثلث (AEB)

ولدينا

$$3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI} \Rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$$

أي أن النقطة M تقسم هذا المتوسط بنسبة $1 : 2$ وبالتالي

M هي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث (AEB).

ومنه M مركز ثقل المثلث (AEB).

②

إن BL متوسط في المثلث (AEB) ومنه:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{LB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{HG}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK}\end{aligned}$$

وبالتالي:

الأشعة $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{LM}$ مرتبطة خطياً.

ويمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} + 0.\overrightarrow{CJ}$$

المعلم في الفراغ

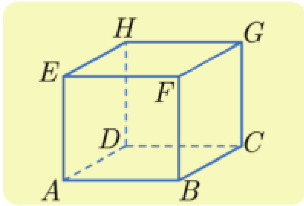
- بفرض $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ثلاثة أشعة غير مرتبطة خطياً و O نقطة من الفراغ عندئذٍ ندعو $(O: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلماً في الفراغ.
- أي نقطة من الفراغ المنسوب إلى المعلم $(O: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تملك ثلاثية وحيدة (x, y, z) تحقق $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

ونسمي الثلاثية (x, y, z) إحداثيات النقطة M.

- نقول عن المعلم $(O: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أنه متجانس إذا كان:

- الأشعة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامدة مثنى مثنى.
- $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = \| \vec{k} \| = 1$.

إيجاد إحداثيات مكعب باستخدام معلم متجانس



ليكن المعلم $(A: \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ عندئذٍ تكون إحداثيات رؤوسه وذلك إذا كان طول حرف المكعب يساوي 1.

$$\begin{cases} A(0,0,0) & B(1,0,0) \\ C(1,1,0) & D(0,1,0) \\ E(0,0,1) & H(0,1,1) \\ F(1,0,1) & G(1,1,1) \end{cases}$$

ليكن المعلم $\left(A: \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$ عندئذٍ تكون إحداثيات رؤوسه وذلك إذا كان طول حرف المكعب يساوي 1.

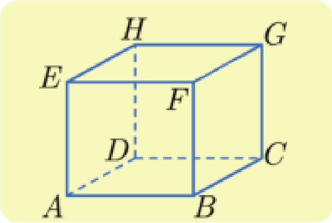
$$\begin{cases} A(0,0,0) & B(a,0,0) \\ C(a,a,0) & D(0,a,0) \\ E(0,0,a) & H(0,a,a) \\ F(a,0,a) & G(a,a,a) \end{cases}$$

في حال كان الشكل متوازي مستطيلات وأخذنا المعلم $(A: \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ تبقى الإحداثيات كما هي.

مثال:

نختار معلماً متجانساً $\left(A: \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$

أوجد إحداثيات رؤوس المكعب.



الحل:

$$\begin{cases} A(0,0,0) & B(2,0,0) \\ C(2,2,0) & D(0,2,0) \\ E(0,0,2) & H(0,2,2) \\ F(2,0,2) & G(2,2,2) \end{cases}$$

أعد حساب إحداثيات رؤوس المكعب بفرض المعلم

$$\left(D: \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$$

$$\begin{cases} D(0,0,0) & A(2,0,0) \\ C(0,2,0) & H(0,0,2) \\ B(2,2,0) & E(2,0,2) \\ G(0,2,2) & F(2,2,2) \end{cases}$$

أعد حساب إحداثيات رؤوس المكعب بفرض المعلم

$$\left(B: \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)$$

$$\begin{cases} B(0,0,0) & A(2,0,0) \\ C(0,2,0) & F(0,0,2) \\ D(2,2,0) & E(2,0,2) \\ G(0,2,2) & H(2,2,2) \end{cases}$$

أعد حساب إحداثيات رؤوس المكعب بفرض المعلم

$$\left(C: \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}\right)$$

$$\begin{cases} C(0,0,0) & B(2,0,0) \\ D(0,2,0) & G(0,0,2) \\ A(2,2,0) & F(2,0,2) \\ H(0,2,2) & E(2,2,2) \end{cases}$$

الحساب باستعمال الإحداثيات

في معلم من الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا الشعاعان $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ والنقاط $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$ عندئذٍ:

- $k\vec{u}(kx,ky,kz);\forall k\in R$
- $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$
- مركبات شعاع $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وليكن I

- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

مركز ثقل المثلث ABC وليكن G

- $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
- متوازي اضلاع $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

مثال:

لتكن النقاط $C(4,-1,2)B(-1,3,3)A(1,2,-3)$

ولتكن D نقطة تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع. احسب إحداثيات D

ثم احسب إحداثيات I مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

الحل:

نفرض $D(x,y,z)$ حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يكون

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

$$\begin{bmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}4-x=-2\Rightarrow x=6\\-1-y=1\Rightarrow y=-2\\2-z=6\Rightarrow z=-4\end{cases}$$

$$D(6,-2,-4)$$

مركز متوازي الأضلاع I هو منتصف قطره AC

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1+4}{2},\frac{2-1}{2},\frac{-3+2}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

تدرب صفحة 24

① تأمل النقاط $C(0,-2,2),B(2,-1,3),A(3,5,2)$

$P(8,13,3),E(3.9.2),D(-2,5,1)$

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{i},\vec{k})$

① احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[EF],[CD],[AB]$

② احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$

③ عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون $ABCK$ متوازي أضلاع.

④ جد مركبات كل من الشعاعين

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}\quad,\quad\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$$

الحل:

①

لتكن I منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{3+2}{2},\frac{5-1}{2},\frac{2+3}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$$

لتكن J منتصف $[CD]$

$$J\left(\frac{0-2}{2},\frac{-2+5}{2},\frac{2+1}{2}\right)\Rightarrow J\left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

لتكن N منتصف $[EF]$

$$N\left(\frac{3+8}{2},\frac{9+13}{2},\frac{2+3}{2}\right)\Rightarrow N\left(\frac{11}{2},11,\frac{5}{2}\right)$$

②

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$$
$$\overrightarrow{CD}(-2,7,-1)$$
$$\overrightarrow{EF}(5,4,1)$$

③

حتى يكون $ABCK$ متوازي أضلاع يجب أن يكون $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}$

نفرض $k(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix}-x\\-2-y\\2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x=-1\Rightarrow x=1\\-2-y=-6\Rightarrow y=4\\2-z=1\Rightarrow z=1\end{cases}$$

$$K(1,4,1)$$

④

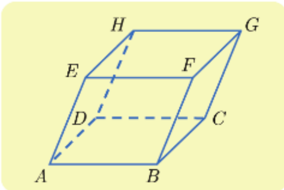
$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$$

$$3\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\7\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-18\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\14\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$$

$$2\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\7\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\-\frac{7}{2}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}$$

⑤ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ. نعطى إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً وهي:



$B(1,3,-1), A(2,1,-1)$

$E(3,-1,3), C(-3,2,0)$

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

الحل:

D نقطة تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3-x\\2-y\\-z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow D(-2,0,0)$$

F نقطة تجعل الرباعي $ABFE$ متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-1\\y-3\\z+1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases} \Rightarrow F(2,1,3)$$

من الشكل نجد أن

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+3\\y-2\\z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y=0\\z=4\end{cases} \Rightarrow G(-2,0,4)$$

من الشكل نجد أن

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$$

$$\begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-3\\y+1\\z-3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-2\\z=4\end{cases} \Rightarrow H(-1,-2,4)$$

③ لدينا في معلم للفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط

$C(1,2,-2), B(-2,3,2), A(3,0,-1)$

① جد إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$.

② جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C.

③ جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

④ جد إحداثيات النقطة N التي تحقق $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$.

الحل:

①

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

②

النقطة $D(x,y,z)$ نظيرة I بالنسبة إلى C أي أن النقطة C منتصف $[ID]$

$$(1,2,-2) = \left(\frac{x_D+x_I}{2}, \frac{y_D+y_I}{2}, \frac{z_D+z_I}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{2}+x_D}{2} = 1 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} + x_D \Rightarrow x_D = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} + y_D = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + y_D = 4 \Rightarrow y_D = \frac{5}{2}$$

$$2 \Rightarrow \frac{1}{2} + z_D = -4 \Rightarrow z_D = \frac{-9}{2}$$

وبالتالي $D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$

③

نفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}x+2\\y-3\\z-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\3\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6\\6\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\9\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-13\\y=12\\z=2\end{cases} \Rightarrow M(-13,12,2)$$

④

$$\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$$

$$\begin{bmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\-8\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=-4\\y=11\\z=-6\end{cases}$$

$$N(-4,11,-6)$$

④ لدينا النقطتان $A(2,3,-2)$ ، $B(5,-1,0)$ جد إن أمكن في كل حالة إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

الحل:

① $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$

$$\begin{bmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=11\\z=-6\end{cases}$$

وبالتالي $M(-4,11,-6)$

② $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

$$\begin{bmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-x\\-1-y\\-z\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2-x=5-x\Rightarrow 2=5 & \text{مرفوض}\\ 3-y=-1-y\Rightarrow 3=-1 & \text{مرفوض}\\ -2-z=-z\Rightarrow -2=0 & \text{مرفوض}\end{cases}$$

وبالتالي لا يمكن تعيين النقطة M المحققة للمساواة.

③ $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$$3\begin{bmatrix}-3\\4\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5-x\\-1-y\\-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-9\\12\\-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5-x\\-1-9\\-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-4-x\\11-y\\-6-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=11\\z=-6\end{cases}\Rightarrow M(-4,11,-6)$$

④ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$$

تناقض وبالتالي لا يمكن تعيين النقطة M المحققة للمساواة.

⑤ أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة.

الحل:

لكي تقع النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً.

$$\overrightarrow{AM}(a-2,b-3,2),\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$$

وبالتالي مركباتهما متناسبة

$$\frac{a-2}{1}=\frac{b-3}{-1}=\frac{2}{1}\begin{cases}\dfrac{a-2}{1}=2\\ \dfrac{b-3}{-1}=2\end{cases}\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$$

⑥ أيمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,5)$ ، $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطياً.

الحل:

لكي يكون الشعاعان مرتبطان خطياً يجب أن تكون مركباتهما متناسبة

$$\frac{2}{1}=\frac{a}{-2}=\frac{5}{a}\Rightarrow a^2=-10 \quad \text{مستحيلة}$$

وبالتالي لا يمكن تعيين a.

⑦ في كل من الحالات الآتية، بين إذا كانت النقاط C,B,A تقع على استقامة واحدة.

① $A(3,-1,2),B(0,2,4),C(2,0,-3)$

$$\overrightarrow{AB}(-3,3,2)\ ,\ \overrightarrow{BC}(2,-2,-7)$$

$$\frac{-3}{2}\neq\frac{3}{-2}\neq\frac{2}{-7}$$

المركبات غير متناسبة فالنقاط ليست على استقامة واحدة.

② $A(-4,1,3),B(-2,0,5),C(0,-1,7)$

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,2)\ ,\ \overrightarrow{BC}(2,-1,2)$$

$$\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}=\frac{2}{2}=1$$

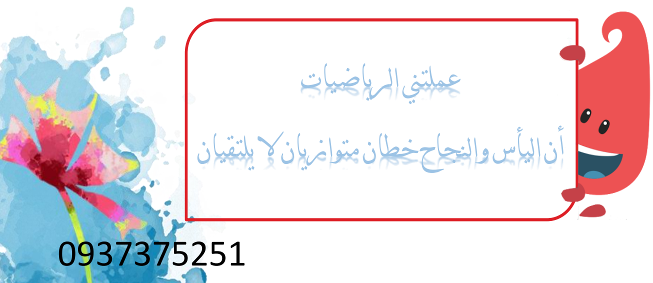
المركبات متناسبة فالنقاط تقع على استقامة واحدة.

③ $A(1,-1,0),B(1,-1,4),C(1,-1,-3)$

$$\overrightarrow{AB}(0,0,4)\ ,\ \overrightarrow{BC}(0,0,-7)$$

$$\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$$

شعاع نتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي وبالتالي النقاط تقع على استقامة واحدة.



المسافة في الفراغ

- في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا النقطتين

$$A(x_A,y_A,z_A) \qquad B(x_B,y_B,z_B)$$

عندئذٍ يُعطى قانون البعد بين A و B أو طول القطعة المستقيمة $[AB]$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

- في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا الشعاع $\vec{u}(a,b,c)$

عندئذٍ يعطى نظيم الشعاع $\vec{u}$ بالعلاقة

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

مثال (1):

في معلمٍ متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أوجد نظيم الشعاع

$$\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$$

أوجد المسافة بين النقطتين $A(4,-1,3), B(2,3,-2)$

$$AB=\sqrt{(2-4)^2+(3+1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{45}$$

مثال (2):

تأمل في معلمٍ متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية

$$A(2,3,2), B(-2,-1,2), C(-2,3,-2), D\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

① احسب المسافات AB, AC, AD, BC, BD, CD.

② بيّن طبيعة وجوه رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

①

$$AB=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2+(2-2)^2}=4\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(-2-2)^2+(3-3)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$$

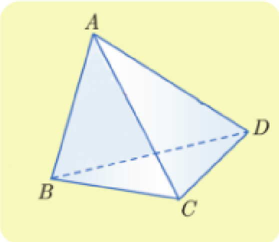
$$AD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+\left(\frac{2}{3}-3\right)^2+\left(\frac{-1}{3}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{123}}{3}$$

$$BC=\sqrt{(-2+2)^2+(3+1)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$$

$$BD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}+2\right)^2+\left(\frac{2}{3}+1\right)^2+\left(\frac{-1}{3}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{123}}{3}$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}+2\right)^2+\left(\frac{2}{3}-3\right)^2+\left(\frac{-1}{3}+2\right)^2}=\frac{\sqrt{123}}{3}$$

②



ABC مثلث متساوي الأضلاع لأن $AB=AC=BC=4\sqrt{2}$

DBC مثلث متساوي الساقين لأن $CD=DB=\frac{\sqrt{123}}{3}$

ABD مثلث متساوي الساقين لأن $AD=DB=\frac{\sqrt{123}}{3}$

ADC مثلث متساوي الساقين لأن $AD=DC=\frac{\sqrt{123}}{3}$

تدرب صفحة 27

① احسب نظيم $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ في كل من الحالات الآتية

①

$\vec{u}(2,-2,3) \Rightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{17}$

$\vec{v}(4,-4,-2) \Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(-2)^2}=6$

$\vec{w}(4,1,-2) \Rightarrow \|\vec{w}\|=\sqrt{(4)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$

②

$\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j} \Rightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{4+9+0}=\sqrt{13}$

$\Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{1+0+25}=\sqrt{26}$

$\Rightarrow \|\vec{w}\|=\sqrt{2+3+1}=\sqrt{6}$

② فيما يأتي بيّن هل المثلث ABC قائم، هل هو متساوي الساقين، هل متساوي الأضلاع.

① $A(1,3,-1), B(3,6,-2), C(0,4,0)$

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(6-3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{14}$$

$$AC=\sqrt{(0-1)^2+(4-3)^2+(0+1)^2}=\sqrt{3}$$

$$BC=\sqrt{(0-3)^2+(4-6)^2+(0+2)^2}=\sqrt{17}$$

حسب عكس مبرهنة فيثاغورث نجد $BC^2=AB^2+AC^2$

فالمثلث قائم ولكن غير متساوي الساقين.

② $A(1,3,-2), B(2,-1,0), C(6,-3,-1)$

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-3)^2+(0+2)^2}=\sqrt{21}$$

$$AC=\sqrt{(6-1)^2+(-3-3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{62}$$

$$BC=\sqrt{(6-2)^2+(-3+1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{21}$$

المثلث متساوي الساقين لأن $AB=BC$.

④ تأمل النقاط $A(1,1,\sqrt{2}), B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O، أثبت أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

الحل:

بما أن C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ فإن $C(-1,-1,-\sqrt{2})$

$$CA=\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{16}=4$$

$$CB=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(-\sqrt{2}+1)^2+(0+\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1+2-2\sqrt{2}+1+2}=\sqrt{8}$$

$$BA=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-0)^2}$$

$$=\sqrt{1-2\sqrt{2}+2+1+2\sqrt{2}+2+2}=\sqrt{8}$$

المثلث متساوي الساقين لأن $CB=BA$ وقائم في B حسب عكس فيثاغورث لأن

$$CB^2+BA^2=CA^2$$

تمرينات الوحدة الموافقة

04 ص 36

تأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية

$E(3,1,2), D(-3,-5,6), C(5,5,0), B(1,-2,1), A(2,0,1)$

أثبت انتماء النقاط A, B, C, D إلى مستوٍ واحد P وتبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P.

الحل:

لنحسب مركبات الأشعة

$\overrightarrow{AB}(1-2,-2,1-1)=(-1,-2,0)$

$\overrightarrow{AC}(5-2,5-0,0-1)=(3,5,-1)$

$\overrightarrow{AD}(-3-2,-5-0,6-1)=(-5,-5,5)$

$\overrightarrow{AE}(3-2,1-0,2-1)=(1,1,1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن

مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{-1}{3}\neq\frac{-2}{5}\right)$

لكي تقع النقاط D, C, B, A في مستوٍ واحد يجب أن يتحقق

يوجد عددان a و b بحيث تتحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\-2\alpha\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\beta\\5\beta\\-\beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha+3\beta\\-2\alpha+5\beta\\-\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta=-5\\-2\alpha+5\beta=-5\\-\beta=5\end{cases}$$

بالحل المشترك نجد

$$\xRightarrow{\text{من المعادلة③}}\beta=-5\xRightarrow{\text{نعوض في المعادلة②}}\alpha=-10$$

نعوض في المعادلة ① للتحقق

$$-(-10)+3(-5)=-5\Rightarrow-5=-5$$ محققة

فالأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

ومنه النقاط D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد.

لكي تنتمي النقطة E إلى المستوي P يجب أن يتحقق

يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث يكون

$$\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha+3\beta\\-2\alpha+5\beta\\-\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta=1\\-2\alpha+5\beta=1\\-\beta=1\end{cases}$$

بالحل المشترك نجد

$$\xRightarrow{\text{من المعادلة③}}\beta=-1\xRightarrow{\text{نعوض في المعادلة②}}\alpha=-3$$

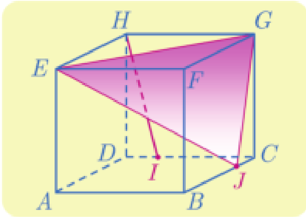
نعوض في المعادلة ① للتحقق

$$(-3)+3(-1)=1\Rightarrow0\neq1$$ غ.محققة

وبالتالي النقطة E لا تنتمي إلى المستوي P.

06 ص 38

تأمل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة I من الحرف CD تحقق المساواة $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة J من BC تحقق المساواة $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أن المستقيم HJ يوازي المستوي EGJ.



الحل:

لإثبات أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)

يجب إثبات أن الأشعة $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EJ}$ تقع في مستوٍ واحد.

أي إثبات أن الأشعة $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً.

لنأخذ المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ معلم في الفراغ وبالتالي

إحداثيات النقاط G, E, J, I, H هي:

$$G(1,1,1) \quad , \quad E(0,0,1) \quad , \quad H(0,1,1)$$
$$I\left(\frac{1}{4},1,0\right) \quad J\left(1,\frac{3}{4},0\right)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$, $\overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}\right)$.

لنثبت وجود عددين حقيقيين α و β يحققان

$$\overrightarrow{HI} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \frac{3}{4}\beta \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \frac{3}{4}\beta \\ -\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{4} & ① \\ \alpha + \frac{3}{4}\beta = 0 & ② \\ -\beta = -1 & ③ \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلتين ② و ③ نجد

$$\xrightarrow{\text{من المعادلة ③}} \beta = 1 \xrightarrow{\text{نعوض في المعادلة ②}} \alpha = \frac{-3}{4}$$

نعوض في المعادلة ① للتحقق

$$\frac{-3}{4} + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ومنه $\overrightarrow{HI} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً

ومنه المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).

دورة 2021 الأولى 🥰

تأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط الآتية

$D(6,2,5), C(5,0,5), B(1,-2,1), A(2,0,1)$

① أثبت أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

② عين العددين الحقيقيين β, α بحيث $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

واستنتج أن النقاط D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10 ص 41

A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ

D و E نقطتان تحققان $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$

① أثبت أن النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد.

② لتكن I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$. أثبت وقوع النقاط A و I و J على استقامة واحدة.

الحل:

①

لدينا $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ أي أن النقاط A و B و D تقع على استقامة واحدة، أي أن النقطة D من المستقيم $ABC \supseteq AB$

لدينا $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$ أي أن النقاط A و E و C تقع على استقامة واحدة، أي أن النقطة E من المستقيم $ABC \supseteq AC$

وبالتالي النقاط E, D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد.

② بما أن I منتصف $[CD]$

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD}$$
$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}(2\overrightarrow{AJ})$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

وبالتالي النقاط A و I و J تقع على استقامة واحدة.

هل حاولت؟ هل فشلت؟
لا يهم حاول مجدداً، وأفشل مجدداً،
ولكن أفشل بصورة أفضل

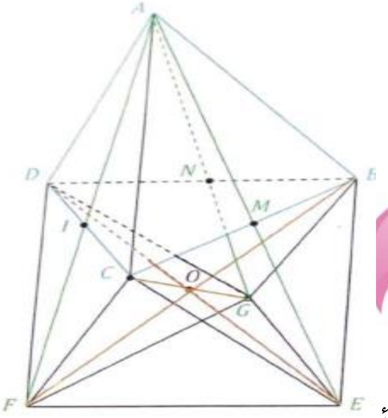
11 ص 41

ABCD رباعي وجوه. و E و F و G هي نظائر A بالنسبة إلى منتصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$ بالترتيب.

① أثبت أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

② استنتج أن للقطعتين $[DE]$ و $[FB]$ المنتصف نفسه.

③ أثبت أن المستقيمات $(CG), (DE), (BF)$ تتلاقى في نقطة.



الحل:

①

من الشكل نجد أن

$ABEC$ متوازي أضلاع لأن قطراه $[AE], [BC]$ متناصفان

وبالتالي $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$

$ADFC$ متوازي أضلاع لأن قطراه $[AF], [DC]$ متناصفان

وبالتالي $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

②

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}\\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$$

ومنه الرباعي $DBEF$ متوازي أضلاع وبالتالي قطراه $[FB], [DE]$ متناصفان، أي لهما المنتصف نفسه.

$ABGD$ متوازي أضلاع لأن قطراه $[AG], [BD]$ متناصفان

وبالتالي $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG}$

ولكن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$ لأن $ADFC$ متوازي أضلاع ومنه

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BG}$$

وبالتالي $CFGB$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[CG], [BF]$ متناصفان.

وبالتالي $(CG), (DE), (BF)$ تتلاقى في نقطة واحدة ولتكن I.

12 ص 41

$ABCD$ رباعي وجوه و E نظيرة A بالنسبة إلى C،

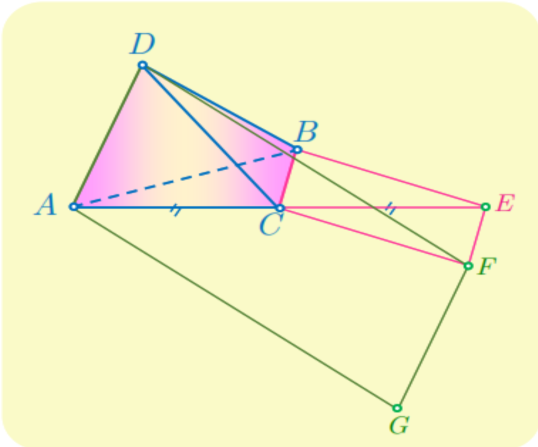
و F و G هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF, FDAG$ متوازيي أضلاع.

① أثبت أن $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$.

② استنتج أن $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ ثم أن النقاط

B, C, D, G تقع في مستوٍ واحد.

الحل:



①

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$$

②

من الطلب السابق لدينا

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

بما أن

$\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{BC}$ غير مرتبطان خطياً لأنهما حرفان من رباعي الوجوه

ولدينا $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ وبالتالي

الأشعة $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً

فالنقاط G, D, C, B تقع في مستوٍ واحد.

13 ص 41

تأمل في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط

$C(3,1,-2), B(1,2,0), A(3,2,1)$

① أثبت أن النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

② عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى (ABC)

③ ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط C, B, A و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد.

الحل:

①

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)\\ \overrightarrow{AC}(0,-1,-3)\end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}\right)$$

الشعاعان غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي

النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

②

لكي تنتمي النقطة M إلى المستوي (ABC) يجب أن تكون الأشعة

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ مرتبطة خطياً، وبما أن $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

أي يوجد عددين حقيقيين β, α

يحققان $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta \\ -\beta \\ -2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha+2\beta \\ -\beta \\ -\alpha-2\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+2\beta = m-3 & ① \\ -\beta = -1 & ② \\ -\alpha-2\beta = 2 & ③ \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلتين ② و ③ نجد

$$\xRightarrow{\text{من المعادلة ②}} \beta = 1 \xRightarrow{\text{نعوض في المعادلة ③}} \alpha = -4$$

نعوض في المعادلة ①:

$$-2(-4) + 2(1) = m - 3 \Rightarrow m = 13$$

③

حتى تقع النقاط D, C, B, A في مستوٍ واحد يجب أن يوجد عددين حقيقيين β, α يحققان $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + 2\beta \\ -\beta \\ -\alpha - 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = -2\alpha + 2\beta & ① \\ y - 2 = -\beta & ② \\ -\alpha - 2\beta = 2 & ③ \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلتين ② و ③ نجد

$$\xrightarrow{\text{من المعادلة ②}} \beta = 2 - y$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض في المعادلة ③}} -\alpha - 2(2-y) = 2 \Rightarrow \alpha = 2y - 6$$

نعوض في المعادلة ①:

$$x - 3 = -2(2y - 6) + 2(2 - y)$$
$$x - 3 = -4y + 12 + 4 - 2y$$
$$x + 6y - 19 = 0$$

14 ص 41

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

① أثبت أن النقاط $C(2, 0, 1), B(5, 0, 0), A(7, 1, 0)$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$.

② أثبت أن النقاط C, B, A تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ أثبت أن مركبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y - 3z, y, z)$.

ثم استنتج أن $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$ ماذا تستنتج من ذلك.

④ أثبت أن أية نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي $\mathcal{E}$ تحقق المعادلة: $x - 2y + 3z - 5 = 0$ ماهي المجموعة $\mathcal{E}$.

الحل:

①

بتعويض النقاط في المعادلة نجد أنها محققة. (تسلو بالتعويض)

وبالتالي النقاط C, B, A تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$

②

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-2, -1, 0) \\ \overrightarrow{AC}(-5, -1, 1) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{-1}\right)$$

الشعاعان غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي

النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة فهي تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

③

$$M(x, y, z) \begin{cases} \overrightarrow{BM}(x - 5, y, z) \\ x - 5 = 2y - 3z \end{cases} \overrightarrow{BM}(2y - 3z, y, z)$$

$$\overrightarrow{BA}(2, 1, 0) \Rightarrow y\overrightarrow{BA}(2y, y, 0)$$
$$\overrightarrow{BC}(-3, 0, 1) \Rightarrow z\overrightarrow{BC}(-3z, 0, z)$$
$$y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC} = (2y - 3z, y, z) = \overrightarrow{BM}$$

نستنتج أن النقاط B, C, M, A تقع في مستوٍ واحد.

④

نفرض $M(x, y, z)$ تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$ وبالتالي

يوجد عددين حقيقيين α, β يحققان

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} x-7 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-7 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\beta \\ -\beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-7 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 5\beta \\ -\alpha - \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 7 = -2\alpha - 5\beta & ① \\ y - 1 = -\alpha - \beta & ② \\ z = \beta & ③ \end{cases}$$

نعوض ③ في ② فنجد

$$y - 1 = -\alpha - z \Rightarrow \alpha = 1 - y - z$$

نعوض في ①

$$x - 7 = -2(1 - y - z) - 5z$$
$$\Rightarrow x - 2y + 3z - 5 = 0$$

وبالتالي تنتمي النقطة M إلى المستوي $\mathcal{P}$

ومجموعة النقاط $\mathcal{E}$ هي نفسها $\mathcal{P}$.

16 ص 42

جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين

$B(0,5,-1),\ A(2,-1,3)$

الحل:

بما أن النقطة C تقع على محور الفواصل فإن احداثياتها $C(x,0,0)$

$$AC = BC$$
$$AC^2 = BC^2$$
$$(x-2)^2 + 1 + 9 = x^2 + 25 + 1$$
$$x^2 - 4x + 4 - x^2 - 16 = 0$$
$$-4x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$$

وبالتالي النقطة $C(-3,0,0)$

17 ص 42

ليكن α عدداً حقيقياً، ولنتأمل النقاط الثلاث

$C(-1,1,\alpha),\ B(-1,5,-3),\ A(3,1,-3)$

أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين، أياً كان α

أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع.

الحل:

نحسب اطوال اضلاع المثلث ABC

$$AB = \sqrt{16+16+0} = 4\sqrt{2}$$
$$CB = \sqrt{0+16+(\alpha+3)^2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$
$$CA = \sqrt{16+0+(\alpha+3)^2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$

ومنه نجد $CB = CA$ فالمثلث ABC متساوي الساقين أياً كان α

حتى يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع يجب أن يكون

$$CA = AB$$
$$\sqrt{16+(\alpha+3)^2} = 4\sqrt{2}$$
$$16+(\alpha+3)^2 = 32$$
$$(\alpha+3)^2 = 16 \begin{cases} \text{اما } \alpha+3 = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \text{او } \alpha+3 = -4 \Rightarrow \alpha = -7 \end{cases}$$

19 ص 42

تأمل النقاط $M(4,-1,2),\ B(2,3,6),\ A(2,3,0)$

نهدف إلى حساب بُعد M عن المستقيم (AB)

① أثبت أن M لا تقع على المستقيم (AB).

② أثبت أن لكل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$

③ احسب MK^2 بدلالة z.

④ عند أي قيمة للعدد z يكون MK أصغر ما يمكن

حدد إذاً بعد M عن (AB).

الحل:

①

$$\begin{matrix}\overrightarrow{MA}(-2,4,-2)\\ \overrightarrow{MB}(-2,4,4)\end{matrix} \Rightarrow \left\{\left(\frac{-2}{-2} = \frac{4}{4} \neq \frac{-2}{4}\right)\right.$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً .

وبالتالي النقطة M لا تقع على المستقيم (AB)

②

بما أن K نقطة من المستقيم AB فالشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطياً أي

$$\overrightarrow{Ak} = t \cdot \overrightarrow{AB} \quad ; t \in R$$
$$(x-2, y-3, z) = t \cdot (0,0,6)$$
$$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 6t \end{matrix}$$

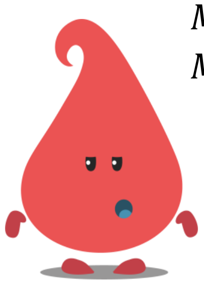
③

$$Mk^2 = (2-4)^2 + (3+1)^2 + (z-2)^2$$
$$= 20 + (z-2)^2$$

④

يكون MK أصغر ما يمكن عندما $z = 2$

$$Mk^2 = 20$$
$$Mk = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



الجداء السلمي في المستوي

العبارات المختلفة للجداء السلمي

الجداء السلمي الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$$

إذا كان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين كان

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta$$

إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في معلم متجانس هي (x,y) و (x',y') بالترتيب كان

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

التعامد والمسافة

نقول عن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما متعامدين إذا كان جداؤهما السلمي معدوم

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

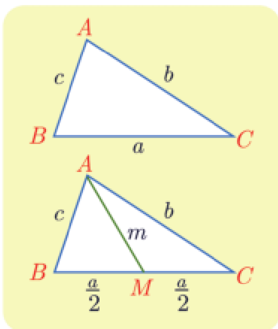
وهذا يكافئ

$$xx'+yy'=0$$

خواص الجداء السلمي

- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

استخدامات الجداء السلمي:



علاقة كاشي في المثلث:

$$\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

مبرهنة المتوسط:

$$b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$$

في متوازي الأضلاع:

مجموع مربعات أطوال أضلاع متوازي الأضلاع يُساوي مجموع مربعي طولا قطريه.

إيجاد الزاوية بين شعاعين:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

معادلة المستقيم

تُعطى معادلة المستقيم d في المستوي بالشكل

$$d: ax+by+c=0$$

- نسمي الشعاع $\vec{n}(a,b)$ الشعاع الناظم على d، وهو كل شعاع عمودي على المستقيم d.
- نسمي الشعاع $\vec{u}(-b,a)$ الشعاع الموجه لـ d، وهو كل شعاع موازي أو منطبق على المستقيم d.

حالات مستقيمين:

ليكن لدينا المستقيمين

$$d':a'x+b'y+c'=0\quad,\quad d:ax+by+c=0$$

$$d \text{ و } d' \text{ متوازيان} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}=\vec{n}'\\ \vec{u}=\vec{u}'\end{cases}$$

$$d \text{ و } d' \text{ متعامدان} \Rightarrow \begin{cases}\vec{u}=\vec{n}'\\ \vec{n}=\vec{u}'\end{cases}$$

بعد نقطة عن مستقيم

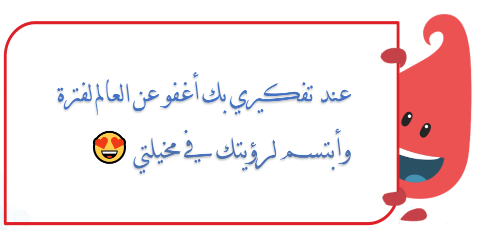
في معلم متجانس، بُعد النقطة $A(\alpha,\beta)$ عن المستقيم d الذي معادلته $ax+by+c=0$ يساوي

$$dist\ (A,d)=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

محور قطعة مستقيمة

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمود على القطعة في منتصفها.

وهو مجموعة نقاط المستوي المتساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة.



0937375251

😡 تدرب صفحة 50:

نُعطي في الفقرة الآتية معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين:

① $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ و $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{i}-2\vec{j}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\left(\frac{1}{2}\right)+(-3)(5)=-14$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+(5)(-2)=\frac{-59}{6}$$
$$\vec{w}\cdot\vec{u}=\left(\frac{1}{3}\right)(2)+(-2)(-3)=\frac{20}{3}$$

② $\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},3\right)$ و $\vec{w}(5,2)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)(3)=-4$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(-\frac{1}{2}\right)(5)+(3)(2)=\frac{7}{2}$$
$$\vec{w}\cdot\vec{u}=(5)(2)+(2)(-1)=8$$

② أعط في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d.

① $d: 2x+5y-5=0$ $\quad A(5,3)$

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل:

$$\Delta: ax+by+c=0$$
$$d\perp\Delta \Leftrightarrow \vec{n_d}=\vec{u_\Delta}$$
$$\vec{n_d}(a,b)=\vec{u_\Delta}(2,5)$$

بالمطابقة نجد $a=5$ و $b=-2$

$$\Delta: 5x-2y+c=0$$
$$A(5,3)\in\Delta \Rightarrow 5(5)-2(3)+c=0\Rightarrow c=-19$$

وبالتالي معادلة المستقيم

$$\Delta: 5x-2y-19=0$$

② $d: x-3y+2=0$ $\quad A(-1,2)$

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل:

$$\Delta: ax+by+c=0$$
$$d\perp\Delta \Leftrightarrow \vec{n_d}=\vec{u_\Delta}$$
$$\vec{n_d}(a,b)=\vec{u_\Delta}(1,-3)$$

بالمطابقة نجد $a=-3$ و $b=-1$

$$\Delta: -3x-y+c=0$$
$$A(-1,2)\in\Delta \Rightarrow -3(-1)-(2)+c=0\Rightarrow c=-1$$

وبالتالي معادلة المستقيم

$$\Delta: -3x-y-1=0$$

③ أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أن

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

الحل:

$$\begin{aligned}L_2&=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2\\&=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{DA}^2\\&=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\\&=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{CA}\\&=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AC}[\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}]\\&=\overrightarrow{AC}[\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})]\\&=\overrightarrow{AC}[\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD}]=\overrightarrow{AC}[\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}]\\&=\overrightarrow{AC}(2\overrightarrow{DB})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=L_1\end{aligned}$$

④ أعط في الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستقيم d

$$dist\ (A,d)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

① $d: 2x+y-5=0$ $\quad A(-2,4)$

$$dist\ (A,d)=\frac{|2(-2)+4-5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

② $d: \sqrt{2}x-3y-1=0$ $\quad A(-\sqrt{2},2)$

$$dist\ (A,d)=\frac{|\sqrt{2}(-\sqrt{2})-3(2)-1|}{\sqrt{2+9}}=\frac{9}{\sqrt{11}}$$

الجداء السلمي في الفراغ

العبارات المختلفة للجداء السلمي

الجداء السلمي الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$$

إذا كان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين كان

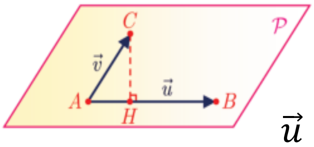
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta$$

إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في معلم متجانس هي

$\vec{v}(x',y',z'),\vec{u}(x,y,z)$ بالترتيب كان

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

إذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي p للنقطة C

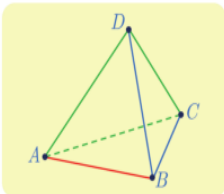


على المستقيم (AB) فإن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

مثال (1):

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم. كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a.



احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

الحل:

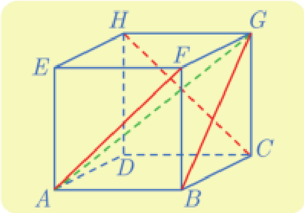
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos(C\hat{A}B)$$
$$=(a)(a)\cos 60=a^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\cos(D\hat{A}B)$$
$$=(a)(a)\cos 60=a^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$$

مثال (2):

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

احسب $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AF}$

الحل:



$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=AE^2=a^2$$

حيث أن E هي المسقط القائم للنقطة F على المستقيم AE

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=AE^2=a^2$$

حيث أن A هي المسقط القائم للنقطة B على المستقيم AE

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=AE^2=a^2$$

حيث H هي المسقط القائم للنقطة G على المستوي $(ADHE)$

و E هي المسقط القائم للنقطة H على المستقيم (AE)

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HC}=\underbrace{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}}_{\text{قطرا المربع متعامدان}}=0$$

تدريب صفحة 53:

نُعطى في الفقرة الآتية معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين:

① $\vec{w}(0,-\sqrt{3},1),\vec{v}(1-\sqrt{2},0,-1),\vec{u}(1+\sqrt{2},\sqrt{3},0)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})+(\sqrt{3})\cdot(0)+(0)\cdot(-1)$$
$$=1-2=-1$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(1-\sqrt{2})\cdot(0)+(0)\cdot(1)+(-1)\cdot(1)=-1$$
$$\vec{w}\cdot\vec{u}=(0)(1+\sqrt{2})+(-\sqrt{3})(\sqrt{3})+(1)(0)=-3$$

② $\vec{w}(1,0,1),\vec{v}\left(\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3}\right),\vec{u}\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-2)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=1$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(\frac{1}{2}\right)(1)+(-2)(0)+\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}$$
$$\vec{w}\cdot\vec{u}=(1)\left(\frac{2}{3}\right)+(0)\left(-\frac{1}{6}\right)+(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}$$

② إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$

احسب المقادير الآتية:

① $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$= \vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=25-4=21$

② $\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

$= \vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=-4-9=-13$

③ $(2\vec{u})\cdot(\vec{v}-3\vec{u})$

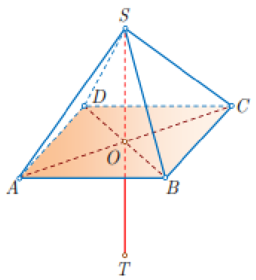
$= 2\vec{u}\cdot\vec{v}-6\vec{u}^2=2(-4)-6(25)=-158$

④ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$

$= \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^2=25-2(-4)-3(9)=6$

③ تأمل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربع ورأسه S . وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a . احسب

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$



الحل:

بما أن أطوال أحرف الهرم وأطوال قاعدته متساوية وطولها يساوي a فكل وجه جانبي فيه مثلث متساوي الأضلاع وقياس كل زاوية من الأوجه الجانبية $(60°)$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{SB}\|\cdot\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB})$

$= (a)\cdot(a)\cos(60°)=(a^2)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{SC}\|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC})$

بما أن $[AC]$ قطر المربع فطوله يساوي $\sqrt{2}a$ (حسب فيثاغورث)

وحسب عكس فيثاغورث المثلث SAC قائم في S

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=(a)\cdot(a)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}$

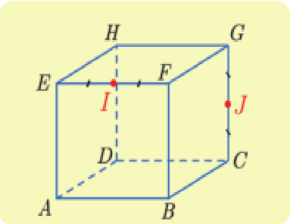
$= -\|\overrightarrow{AS}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC})$

$= -(a)\cdot(a\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= -a^2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-a^2$

③ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a .

فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$



احسب $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}$

و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}$

الحل:

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}=\|\overrightarrow{EI}\|\cdot\|\overrightarrow{EA}\|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}=\|\overrightarrow{EI}\|\cdot\|\overrightarrow{FC}\|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\|\overrightarrow{EI}\|\cdot\|\overrightarrow{GJ}\|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IE}=-EI^2=-\frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}=(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH})\cdot(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{JC}+\underbrace{\overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{CD}}_{\text{متعامدان}}+\underbrace{\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{JC}}_{\text{متعامدان}}+\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{GJ}+0+0+\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GH}$

$= -JG^2+GH^2=-\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{3a^2}{4}$

❣ التعامد في الفراغ ❣

Math is Life

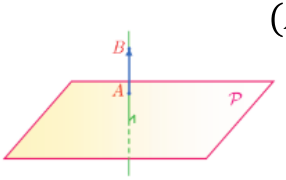
الأشعة المتعامدة:

- يتعامد شعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- في معلم متجانس إذا كان $\vec{u}(x,y,z),\vec{v}(x',y',z')$ فإن:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين $\Leftrightarrow x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'=0$

الشعاع الناظم على مستوي:

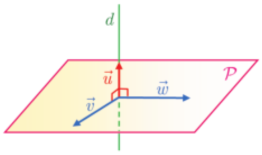
نقول عن الشعاع غير الصفري $\overrightarrow{AB}$ أنه شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{P}$ إذا كان المستقيم (AB) عمودي على المستوي $\mathcal{P}$



تعامد مستقيم ومستوي:

نقول عن مستقيم d أنه عمودي على مستوٍ $\mathcal{P}$

إذا كان عمودياً على مستقيمين متقاطعين فيه.



$$d \perp \mathcal{P} \Leftarrow \begin{cases} \text{الشعاعين } \vec{u}, \vec{v} \text{ غير مرتبطين خطياً} \\ d \perp \vec{v} \\ d \perp \vec{u} \end{cases}$$

تعامد مستقيمين:

نقول عن مستقيمين أنهما متعامدين إذا كان شعاع توجيه المستقيم الأول

عمودي على شعاع توجيه المستقيم الثاني.

تدريب صفحة 56:

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

① بين فيما يأتي إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين أو عين الوسيط α ليكونا كذلك.

① $\vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 2, 3\right), \vec{u}\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(3)$$
$$= -\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -2 \neq 0$$

فالشعاعان غير متعامدان.

② $\vec{v}(-\sqrt{2}, 1, 1), \vec{u}(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})(1) + (1-\sqrt{2})(1)$$
$$= -2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$$

فالشعاعان متعامدان.

③ $\vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha\right), \vec{u}\left(2, -\frac{1}{2}, 5\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2)\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(3) + (5)(\alpha)$$
$$= -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha = -\frac{23}{10} + 5\alpha$$

لكي يكون الشعاعان متعامدان يجب أن يتحقق

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow -\frac{23}{10} + 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{23}{50}$$

④ $\vec{v}\left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right), \vec{u}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{3})(\alpha) + \left(\frac{1}{3}\right)(2\alpha) + (2)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \sqrt{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha + 1 = \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\alpha + 1$$

لكي يكون الشعاعان متعامدان يجب أن يتحقق

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3} + \frac{2}{3}}$$

② تأمل النقطتين $B(0,2,6), A(2,-5,1)$ والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2,3,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

أثبت أن d عمودي على المستقيم (AB)

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-2,7,5) \quad , \quad \vec{u}(-4,1,-3)$$

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = (-4)(-2) + (1)(7) + (-3)(5)$$
$$= 8 + 7 - 15 = 0$$

وبالتالي d و (AB) متعامدان.

③ أطوال الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10

أيكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين؟

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$
$$= \frac{1}{2}[(10)^2 - (6)^2 - (8)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[100 - 36 - 64] = 0$$

وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

④ تأمل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، ونفترض أن $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان.

أثبت أن للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه.

بما أن $(\vec{u}+\vec{v})$ و $(\vec{u}-\vec{v})$ متعامدان فإن:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$$
$$\Rightarrow \vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

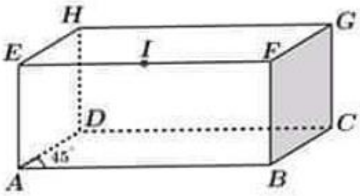
0937375251

دورة 2018 الثانية

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $BC = GC = 1, AB = 2$

وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$

والنقطة I منتصف $[EF]$ والمطلوب



① احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

② عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

الحل:

تمرينات الوحدة الموافقة

01 ص 64

نُعطى معلماً متجانساً في المستوي.

① بين أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$$\vec{s}\left(2,-\frac{4}{5}\right), \vec{t}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right), \vec{w}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right), \vec{v}(-2,-5), \vec{u}(2,5)$$

$(\vec{u},\vec{v}): -4-25=-29 \neq 0$ غير متعامدان

$(\vec{u},\vec{w}): -1+1=0$ متعامدان

$(\vec{u},\vec{t}): 1-1=0$ متعامدان

$(\vec{u},\vec{s}): 4-\frac{24}{5}=\frac{-4}{5} \neq 0$ غير متعامدان

$(\vec{v},\vec{w}): 1-1=0$ متعامدان

$(\vec{v},\vec{t}): -1=1=0$ متعامدان

$(\vec{v},\vec{s}): 4-4=0$ متعامدان

$(\vec{w},\vec{t}): -\frac{1}{4}-\frac{1}{25}=-\frac{29}{100} \neq 0$ غير متعامدان

$(\vec{w},\vec{s}): -1-\frac{4}{25}=-\frac{29}{25} \neq 0$ غير متعامدان

$(\vec{t},\vec{s}): 1+\frac{4}{25}=\frac{29}{25} \neq 0$ غير متعامدان

② في الحالتين الآتيتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$

① $A(4,1)$, $B(-1,2)$

بفرض $M(x,y)$ نقطة من محور القطعة $[AB]$ فيكون:

$$AM = BM$$
$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$
$$(x-4)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$$
$$x^2-8x+16+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2-4y+4$$
$$d: -10x+2y+12=0$$

② $A(-5,3)$, $B\left(-2,\frac{1}{3}\right)$

بفرض $M(x,y)$ نقطة من محور القطعة $[AB]$ فيكون:

$$AM = BM$$
$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$(x+5)^2+(y-3)^2 = (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$$
$$x^2+10x+25+y^2-6y+9 = x^2+4x+4+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}$$
$$d: 6x-\frac{16}{3}y+\frac{269}{9}=0$$

③ تأمل النقاط $A(-5,2), B(1,-1), C(-3,3), E\left(-\frac{9}{4},-1\right)$

أتكون النقطة E متساوية البعد عن المستقيمات التي تؤلفها أضلاع المثلث ABC.

نوجد معادلة المستقيم (AB)

$$m_{AB}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$(AB):(y+1)=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y+1=0$$

نوجد بعد النقطة E عن المستقيم (AB)

$$dist\ (E,AB)=\frac{\left|-\frac{9}{4}-2+1\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{13}{4\sqrt{5}}$$

نوجد معادلة المستقيم (AC)

$$m_{AC}=\frac{1}{2}$$

$$(AC):(y-3)=\frac{1}{2}(x+3)\Rightarrow x-2y+9=0$$

نوجد بعد النقطة E عن المستقيم (AC)

$$dist\ (E,AC)=\frac{\left|-\frac{9}{4}+2+9\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{35}{4\sqrt{5}}$$

$dist\ (E,AB)\neq dist(E,AC)$ فالنقطة E غير متساوية البعد عن المستقيمات التي تؤلفها أضلاع المثلث ABC.

02 ص 64

$ABCD$ مربع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$

أثبت أن المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان.

الحل:

نختار معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

$$B(1,0)\quad,\quad A(0,0)\quad,\quad D(0,1)$$

$$\overrightarrow{CI}\left(\frac{-1}{2},-1\right)\quad,\quad \overrightarrow{DJ}\left(1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\left(\frac{-1}{2}\right)(1)+(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان فالمستقيمين (DJ) و (CI) متعامدين.

07 ص 67

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تأمل نقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$، ومستوياً $\mathcal{P}$ يقبل $\vec{u}(1,1,-2), \vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي $\mathcal{P}$

الحل:

$$\left.\begin{matrix}\vec{u}(1,1,-2)\\ \vec{v}(3,-1,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{-2}{-1}\right)$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً

حتى يكون المستقيم (AB) عمودي على المستوي $\mathcal{P}$ يجب أن يكون عمودياً على شعاعين غير مرتبطين خطياً فيه.

$$\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(-3)(1)+(-5)(1)+(-4)(-2)=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=(-3)(3)+(-5)(-1)+(-4)(-1)=0$$

ومنه $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان

وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي $\mathcal{P}$.

16 ص 70

تأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,1,3), B(1,0,-1), C(4,0,0), D(0,4,0), E(1,-1,1)$

① أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

الحل:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{CD}(-4,4,0)\\ \overrightarrow{CE}(-3,-1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{-4}{-3}\neq\frac{4}{-1}\neq\frac{0}{1}\right)$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً

فالنقاط E, D, C ليست على استقامة واحدة.

ليكن (AB) عمودي على المستوي (CDE) يجب أن يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه.

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-1)(-4)+(-1)(4)+(-4)(0)=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=(-1)(-3)+(-1)(-1)+(-4)(1)=0$$

وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ فهو عمودي على المستوي (CDE)

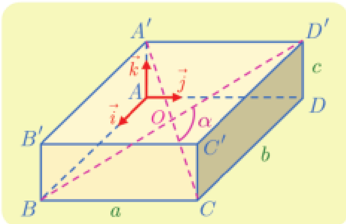
09 ص 68

$ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O. نضع $\alpha = \widehat{COD'}$, ونفترض أن $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$.

نختار معلماً متجانساً $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ بحيث يكون $\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً وكذلك $\vec{k}$ و $\overrightarrow{AA'}$ مرتبطين خطياً.

① أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات O.

② أثبت أن $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$، ثم ادرس بوجه خاص حالة المكعب.



الحل:

①

$$A(0,0,0), B(b,0,0), C(b,a,0), D(0,a,0)$$
$$A'(0,0,c), B'(b,0,c), C'(b,a,c), D'(0,a,c)$$

②

α هي الزاوية بين $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD'}$ وبالتالي

$$\overrightarrow{OC}\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{-c}{2}\right), \overrightarrow{OD'}\left(\frac{-b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$$

$$\parallel \overrightarrow{OC} \parallel = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}, \parallel \overrightarrow{OD'} \parallel = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'} = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{-b}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{-c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$$

$$\cos a = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'}}{\parallel \overrightarrow{OC} \parallel \cdot \parallel \overrightarrow{OD'} \parallel} = \frac{\frac{-b^2+a^2-c^2}{4}}{\frac{b^2+a^2+c^2}{4}}$$
$$= \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعب فإن $a = b = c$ ومنه

$$\cos\alpha = \frac{a^2-a^2-a^2}{a^2+a^2+a^2} = \frac{-a^2}{3a^2} = \frac{-1}{3}$$

المعادلة الديكارتية لمستوٍ

معادلة المستوي:

بفرض لدينا الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ فإن معادلة المستوي في الفراغ تُعطى

$$ax + by + cz + d = 0$$

ويدعى الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ الشعاع الناظم على المستوي.

حالات تعيين معادلة مستوي

معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويقبل شعاعاً ناظماً

بفرض $A(x_0,y_0,z_0)$ و $\vec{n}(a,b,c)$

طريقة 1

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

بنشر المعادلة نحصل على معادلة المستوي.

طريقة 2

نعلم أن معادلة المستوي من الشكل

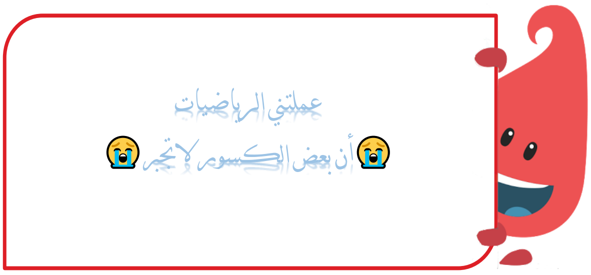
$$ax + by + cz + d = 0$$

لدينا الناظم $\vec{n}(a,b,c)$، وبتعويض إحداثيات A نحصل على قيمة d.

مثال

أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,-1)$ ويقبل شعاعاً ناظماً $\vec{n}(2,1,1)$.

$$2(x-2)+(y-1)+(z+1)=0$$
$$2x-4+y-1+z+1=0$$
$$\Rightarrow 2x+y+z-4=0$$



تدرب صفحة 59:

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

① في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً.

① $\vec{n}(1,-1,0), A(1,0,5)$

$$1(x-1)-1(y-0)+0(z-5)=0$$
$$\Rightarrow x-y-1=0$$

② $\vec{n}(2,-3,-1), A(\sqrt{2},-2,5)$

$$2(x-\sqrt{2})-3(y+2)-1(z-5)=0$$
$$\Rightarrow 2x-3y-z-2\sqrt{2}-1=0$$

③ $\vec{n}\left(\frac{2}{3},4,-1\right), A\left(\frac{1}{2},3,-1\right)$

$$\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+4(y-3)-1(z+1)=0$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}x+4y-z-\frac{40}{3}=0$$

④ $\vec{n}(\sqrt{3},2,0), A(0,-3,0)$

$$\sqrt{3}(x-0)+2(y+3)+0(z-0)=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}x+2y+6=0$$

معادلة مستوٍ مار بنقطة معلومة ويوازي مستوٍ معلوم .

للمستويين المتوازيين الناظم نفسه .

أصبح لدينا الناظم ولدينا نقطة معلومة، نعود إلى الحالة الأولى .

مثال

أوجد معادلة المستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطة $A(-2,1,3)$ والموازي للمستوي $Q: x-2y+z-5=0$

الحل:

بما أن المستوي $\mathcal{P}$ يوازي المستوي Q فيكون لهما نفس الناظم .

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{n_Q}(1,-2,1)$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}: x-2y+z+d=0$$
$$A\in\mathcal{P} \Rightarrow -2-2+3+d=0 \Rightarrow d=1$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}: x-2y+z+1=0$$

تدرب صفحة 59:

② في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي Q المار بالنقطة A موازياً المستوي $\mathcal{P}$.

① $\mathcal{P}: 2x-y+3z=4 \qquad A(1,0,1)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{n_Q}=(2,-1,3)$$
$$2(x-1)-1(y-0)+3(z-1)=0$$
$$\Rightarrow Q: 2x-y+3z-5=0$$

② $\mathcal{P}: z=2 \qquad A(0,0,0)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{n_Q}=(0,0,1)$$
$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$
$$\Rightarrow Q: z=0$$

③ $\mathcal{P}: x+y=5 \qquad A(0,3,0)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{n_Q}=(1,1,0)$$
$$1(x-0)+1(y-3)+0(z-0)=0$$
$$\Rightarrow Q: x+y-3=0$$

④ $\mathcal{P}: 5x-3y+4z=8 \qquad A(-1,2,-3)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{n_Q}=(5,-3,4)$$
$$5(x+1)-3(y-2)+4(z+3)=0$$
$$\Rightarrow Q: 5x-3y+4z+23=0$$

دورة 2020 الثانية

تأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي

$$P: 2x+y-3z+2=0$$

والنقطة $A(1,1,-2)$ والمطلوب:

① أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.

② اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

معادلة مستوٍ مار بثلاث نقاط:

يفرض لدينا النقاط A و B و C

- نثبت أن النقاط A و B و C تشكل مستوٍ

أي يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي.
- نعلم أن الناظم عمودي على المستوي فهو عمودي على أي مستقيم في هذا المستوي.

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \qquad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \qquad \dots ②$$

- نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a و b و c.
- نفرض قيمة لـ c.
- نعوض في المعادلتين ونحسب a و b.
- أصبح لدينا الناظم، نعود إلى الحالة الأولى.

مثال

ليكن لدينا النقاط $A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0)$

أوجد معادلة المستوي (ABC).

الحل:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)\\ \overrightarrow{AC}(3,5,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{-1}{3}\neq\frac{-2}{-1}\neq\frac{0}{-1}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي النقاط A و B و C تشكل مستوٍ.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a-2b=0 \qquad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow 3a+5b-c=0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c=1$

$$\begin{cases}-a-2b=0 & \dots ①\\ 3a+5b-1=0 & \dots ②\end{cases}$$

نعوض في ② $a=-2b$

$$\overset{\text{من } ①}{\Longrightarrow} a=-2b \xRightarrow{\text{نعوض في } ②} -6b+5b-1=0$$
$$\Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=2$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(2,-1,1)$

$$\Rightarrow (ABC): 2x-y+z+d=0$$
$$A\in(ABC) \Rightarrow 4-0+1+d=0 \Rightarrow d=-5$$
$$\Rightarrow (ABC): 2x-y+z-5=0$$

معادلة مستوٍ Q مار بنقطتين A و B ويعامد مستوٍ $\mathcal{P}$.

- نأخذ $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ناظم المستوي Q

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \qquad \dots ②$$

- نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a و b و c.
- نفرض قيمة لـ c.
- نعوض في المعادلتين ونحسب a و b.
- أصبح لدينا الناظم، نعود إلى الحالة الأولى.

مثال

أوجد معادلة المستوي Q المار بالنقطتين $A(1,-1,1), B(0,1,2)$

والعمودي على المستوي $\mathcal{P}: -x+y-4=0$

الحل:

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$

ولدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(-1,1,0) \quad \overrightarrow{AB}(-1,2,1)$

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \Rightarrow -a+b=0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a+2b+c=0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c=1$

$$\overset{\text{من } ①}{\Longrightarrow} a=b \xRightarrow{\text{نعوض في } ②} -b+2b+1=0$$
$$\Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=-1$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(-1,-1,1)$

$$\Rightarrow Q: -x-y+z+d=0$$
$$A\in\mathcal{P} \Rightarrow -1+1+1+d=0 \Rightarrow d=1$$
$$\Rightarrow Q: -x-y+z+1=0$$

تمرينات الوحدة الموافقة

04 ص 65

تأمل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين الآتيتين $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x-y+3z-4=0$

جد معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

الحل:

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$

ولدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-1,3)$ $\quad \overrightarrow{AB}(1,1,2)$

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \Rightarrow a-b+3c=0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow a+b+2c=0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c=2$

$$\begin{cases} a-b+6=0 & \dots ① \\ a+b+4=0 & \dots ② \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ① و ②

$$\Rightarrow 2a=-10 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow b=1$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_Q}(-5,1,2)$

$$\Rightarrow Q: -5x+y+2z+d=0$$
$$A\in Q \Rightarrow -5-1+4+d=0 \Rightarrow d=2$$
$$\Rightarrow Q: -5x+y+2z+2=0$$

14 ص 69

في كل من الحالات الآتية، نُعطى نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوٍ $\mathcal{P}$. تيقن في كل حالة أن المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$ ثم أعطِ معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B.

ملاحظة:

لإثبات تعامد المستوي $\mathcal{P}$ مع المستقيم (AB) يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}},\overrightarrow{AB}$ ناظم المستوي وتوجيه المستقيم غير مرتبطين خطياً.

$B(0,1,1)$, $A(1,0,0)$, $\mathcal{P}: x+y+z=0$ ①

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(-1,1,1)\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,1,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\right)$$

المركبات غير متناسبة فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي.

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$

ولدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,1,1)$ $\quad \overrightarrow{AB}(-1,1,1)$

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \Rightarrow a+b+c=0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a+b+c=0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c=1$

$$\begin{cases} a+b+1=0 & \dots ① \\ -a+b+1=0 & \dots ② \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ① و ②

$$\Rightarrow 2b=-2 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=0$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_Q}(0,-1,1)$

$$\Rightarrow Q: -y+z+d=0$$
$$A\in Q \Rightarrow -0+0+d=0 \Rightarrow d=0$$
$$\Rightarrow Q: -y+z=0$$

$B(1,0,1)$, $A(1,2,0)$, $\mathcal{P}: x+z=0$ ②

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(0,-2,1)\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,0,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\right)$$

المركبات غير متناسبة فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي.

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$

ولدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,0,1)$ $\quad \overrightarrow{AB}(0,-2,1)$

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \Rightarrow a+c=0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -2b+c=0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c=2$

$$\overset{\text{من } ①}{\Longrightarrow} a=-2 \overset{\text{من } ②}{\Longrightarrow} -2b+2=0 \Rightarrow b=1$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_Q}(-2,1,2)$

$$\Rightarrow Q: -2x+y+2z+d=0$$
$$A\in Q \Rightarrow -2+2+0+d=0 \Rightarrow d=0$$
$$\Rightarrow Q: -2x+y+2z=0$$

③ $B(1,1,1)$, $A(2,3,-1)$, $\mathcal{P}: 2x+z-4=0$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1,-2,2)\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2}{-1} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{1}{2}\right)$$

المركبات غير متناسبة فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي.

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$

ولدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,0,1)$ $\overrightarrow{AB}(-1,-2,2)$

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 0 \Rightarrow 2a + c = 0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -a - 2b + 2c = 0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c = 4$

$$\begin{cases} 2a + 4 = 0 & \dots ① \\ -a - 2b + 8 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

$$\overset{\text{من } ①}{\Longrightarrow} a = -2 \xrightarrow{\text{نعوض في } ②} 2 - 2b + 8 = 0 \Rightarrow b = 5$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_Q}(-2,54)$

$$\Rightarrow Q : -2x + 5y + 4z + d = 0$$
$$B \in Q \Rightarrow -2 + 5 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -7$$
$$\Rightarrow Q : -2x + 5y + 4z - 7 = 0$$

معادلة مستوٍ $\mathcal{P}$ مار بنقطة A ويقبل شعاعي توجيه $\vec{u}$ و $\vec{v}$

- نفرض $\overrightarrow{n_p}(a,b,c)$ ناظم المستوي.
- نعلم أن الناظم عمودي على المستوي فهو عمودي على أي شعاع فيه

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\vec{u} = 0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \dots ②$$

- نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a و b و c.
- نفرض قيمة لـ c.
- نعوض في المعادلتين ونحسب a و b.
- أصبح لدينا الناظم، نعود إلى الحالة الأولى.

مثال

أوجد معادلة المستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطتين $A(1,-1,1)$ ويقبل $\vec{v}(-3,1,4)$ و $\vec{u}(2,1,0)$ شعاعي توجيه له.

الحل:

نفرض $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(a,b,c)$ ناظم المستوي

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \qquad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow -3a + b + 4c = 0 \qquad \dots ②$$

بفرض $c = 5$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 & \dots ① \\ -3a + b + 20 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

$b = -2a$ نعوض في ②

$$\overset{\text{من } ①}{\Longrightarrow} b = -2a \xrightarrow{\text{نعوض في } ②} -3a - 2a + 20 = 0$$
$$\Rightarrow -5a = -20 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -8$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(4,-8,5)$

$$\Rightarrow \mathcal{P} : 4x - 8y + 5z + d = 0$$
$$A \in \mathcal{P} \Rightarrow 4 + 8 + 25 + d = 0 \Rightarrow d = -37$$
$$\Rightarrow \mathcal{P} : 4x - 8y + 5z - 37 = 0$$

معادلة مستوٍ مار بنقطة A ويُعامد مستويين $\mathcal{P}$ و Q:

- نفرض $\overrightarrow{n_p}(a,b,c)$ ناظم المستوي.
- نعلم أن الناظم عمودي على المستوي فهو عمودي على أي شعاع فيه

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0 \quad \dots ②$$

- نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a و b و c.
- نفرض قيمة لـ c.
- نعوض في المعادلتين ونحسب a و b.
- أصبح لدينا الناظم، نعود إلى الحالة الأولى.

مثال

أوجد معادلة المستوي $\mathcal{R}$ المار بالنقطتين $A(1,-1,1)$ ويعامد المستويين

$$\begin{cases}\mathcal{P}: 2x-2y-z-1=0\\ Q: -x+2y+z+1=0\end{cases}$$

الحل:

لدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,-2,-1),\overrightarrow{n_Q}(-1,2,1)$

نفرض $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(a,b,c)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0\Rightarrow 2a-2b-c=0 \quad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0\Rightarrow -a+2b+c=0 \quad \dots ②$$

بفرض $c=2$

$$\begin{cases}2a-2b-2=0 & \dots ①\\ -a+2b+2=0 & \dots ②\end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد

$$\Rightarrow a=0 \xRightarrow{\text{نعوض في } ②} 2b+2=0\Rightarrow b=-1$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(0,-1,2)$

$$\Rightarrow Q: -y+2z+d=0$$
$$A\in Q\Rightarrow 1+2+d=0\Rightarrow d=-3$$
$$\Rightarrow Q: -y+2z-3=0$$

معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$:

طريقة (1)

بفرض $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المطلوب.

$$\|\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{BM}\|$$

بالتربيع والاختزال نحصل على المعادلة المطلوبة.

طريقة (2)

- نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$، ويكون $\overrightarrow{AB}$ ناظم المستوي المطلوب
- نحسب إحداثيات النقطة M منتصف $[AB]$
- نعود إلى الحالة الأولى.

مثال

أوجد معادلة المستوي المحوري $\mathcal{P}$ للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث

$$B(3,1,0)\quad,\quad A(1,2,-2)$$

الحل:

طريقة (1)

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,2)\quad,\quad M\left(2,\frac{3}{2},-1\right)$$

وبالتالي معادلة المستوي

$$\mathcal{P}: 2x-y+2z+d=0$$
$$M\in\mathcal{P}\Rightarrow 4-\frac{3}{2}-2+d=0\Rightarrow d=-\frac{1}{2}$$
$$\mathcal{P}: 2x-y+2z-\frac{1}{2}=0$$

طريقة (2)

$$\overrightarrow{AM}(x-1,y-2,z+2)$$
$$\overrightarrow{BM}(x-3,y-1,z)$$
$$\|\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{BM}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{AM}\|^2=\|\overrightarrow{BM}\|^2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=(x-3)^2+(y-1)^2+z^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+4z+4 = x^2-6x+9+y^2-2y+1+z^2$$
$$\Rightarrow 4x-2y+4z-1=0$$

دورة 2017 الثانية

تأمل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين الوحدة الموافقة

18 ص 42

تأمل النقطتين $A(2,1,0), B(-1,4,2)$

① أوجد نقطة متساوية البعد عن A و B.

② أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B.

③ أثبت أن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط «$3x-3y-2z+8=0$»

الحل:

①

لتكن I منتصف $[AB]$ وهي متساوية البعد عن A و B.

$$I\left(\frac{2-1}{2},\frac{1+4}{2},\frac{0+2}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$$

②

بفرض $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B وبالتالي:

$$AC=BC\Rightarrow AC^2=BC^2$$

$$(1-2)^2+(1-1)^2+(0-\lambda)^2 = (1+1)^2+(4-1)^2+(2-\lambda)^2$$

$$1+\lambda^2=4+9+4-4\lambda+\lambda^2$$

$$1=17-4\lambda\Rightarrow 4\lambda=16\Rightarrow\lambda=4$$

③

أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ تكون متساوية البعد عن طرفي هذه القطعة، والعكس صحيح.

$$BM=AM\Rightarrow BM^2=AM^2$$

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+z^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-8y+16+z^2-4z+4 = x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2$$

$$6x-6y-4z+16=0$$

$$\overset{\div 2}{\Rightarrow} 3x-3y-2z+8=0$$

M تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $\Leftrightarrow AM=BM$ وهو

$$3x-3y-2z+8=0$$

بُعد نقطة عن مستوي

في معلم متجانس ليكن لدينا المستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته

$$ax+by+cz+d=0$$

والنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$، عندئذٍ يعطى بعد النقطة A عن المستوي $\mathcal{P}$ بالعلاقة:

$$dist\,(A,\mathcal{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال

احسب بُعد النقطة $A(1,-1,-1)$ عن المستوي

$$\mathcal{P}: x-3y+z-1=0$$

$$dist(A,\mathcal{P})=\frac{|1+3-1-1|}{\sqrt{1+9+1}}=\frac{2}{\sqrt{11}}$$

تدريب صفحة 59:

⑤ احسب بُعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي

$$\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$$

وكذلك احسب بُعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي

$$\mathcal{Q} : y - z = 0$$

$$dist\,(A,P) = \frac{|2(5) - 1(-3) + 3(4) - 5|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

$$dist\,(B,Q) = \frac{|0(2) + 1(2) - 1(5) + 0|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

تمرينات الوحدة الموافقة

10 ص 69

في الحالتين الآتيتين، احسب بُعد النقطة A عن المستوي $\mathcal{P}$

① $A(1,2,-3)$ و $\mathcal{P}: 2x - y + z + 1 = 0$

$$dist\,(A,P) = \frac{|2(1) - 1(2) + 1(-3) + 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

② $A(-1,1,1)$ و $\mathcal{P}$ هو المستوي المار بالنقاط

$D(-1,-2,-3), C(-1,1,0), B(0,1,0)$

أولاً نقوم بإيجاد معادلة المستوي

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{BC}(-1,0,0)\\ \overrightarrow{BD}(-1,-3,-3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-3} = \frac{0}{-3}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي النقاط D و C و B تشكل مستوٍ.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (BCD)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow -a = 0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow -a - 3b - 3c = 0 \quad \dots ②$$

بفرض $c = 1$

$$\begin{cases} -a = 0 & \dots ① \\ -a - 3b - 3 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

$$\overset{①\text{ من}}{\Longrightarrow} a = 0 \overset{②\text{ نعوض في}}{\Longrightarrow} -3b - 3 = 0 \Rightarrow b = -1$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(0,-1,1)$

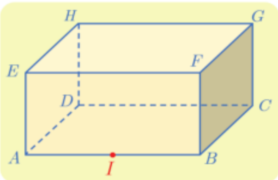
$$\Rightarrow (BCD) : -y + z + d = 0$$
$$B \in (ABC) \Rightarrow -1 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$
$$\Rightarrow (BCD) : -y + z + 1 = 0$$

وبالتالي بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

$$dist\,(A,BCD) = \frac{|0(-1) - 1(1) + 1(1) + 1|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

11 ص 69

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $BC = GC = 1, AB = 2$



لتكن النقطة I منتصف $[AB]$.

① أعطِ معلماً متجانساً مبدؤه A

ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات ببساطة.

② اكتب معادلة للمستوي (IFH).

③ احسب بُعد G عن المستوي (IFH).

④ احسب بُعد G عن المستقيم (IH). أينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH).

①

نأخذ المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث

$$\vec{k} = \overrightarrow{AE}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{i} = \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

وبالتالي إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات

$A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,1,0), D(0,1,0)$, $I(1,0,0)$
$E(0,0,1), F(2,0,1), G(2,1,1), H(0,1,1)$

②

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{IF}(1,0,1)\\ \overrightarrow{IH}(-1,1,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي النقاط H و F و I تشكل مستوٍ.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (IFH)

$$\vec{n}\cdot\vec{IF}=0 \Rightarrow a+c=0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\vec{IH}=0 \Rightarrow -a+b+c=0 \quad \dots ②$$

بفرض $c=1$

$$\begin{cases} a+1=0 & \dots ① \\ -a+b+1=0 & \dots ② \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{من } ①} a=-1 \xRightarrow{\text{نعوض في } ②} b+2=0 \Rightarrow b=-2$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(-1,-2,1)$

$$\Rightarrow (IFH): -x-2y+z+d=0$$
$$I\in(IFH) \Rightarrow -1-0+0+d=0 \Rightarrow d=1$$
$$\Rightarrow (IFH): -x-2y+z+1=0$$
$$\Rightarrow (IFH): x+2y-z-1=0$$

③

$$dist\,(G,(IFH))=\frac{|1(2)+2(1)-1(1)-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

④

بفرض النقطة G' هي المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (IH) ومنه

$$\vec{IH}\cdot\vec{IG}=\vec{IH}\cdot\vec{IG}$$

لدينا $\vec{IH}(-1,1,1)$ و $\vec{IG}(1,1,1)$

$$(-1)(1)+(1)(1)+(1)(1)=\|\vec{IH}\|\cdot\|\vec{IG'}\|\cos 0$$
$$\Rightarrow \|\vec{IG'}\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

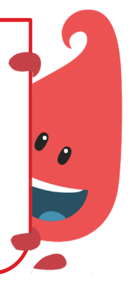
وحسب نظرية فيثاغورث في المثلث القائم $IG'G$:

$$\|\vec{GG'}\|^2=\|\vec{IG}\|^2-\|\vec{IG'}\|^2=(\sqrt{3})^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{GG'}\|=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \|\vec{GG'}\|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

نلاحظ أن $dist\,(G,(IH)) \neq dist\,(G,(IFH))$

إذاً المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) لا ينتمي إلى المستقيم (IH)



علمتني الرياضيات
أن الانتقال من جهة لأخرى سيغير من قيمتي
وأنه متى ما كبر المقام صغر كل شي ~

معادلة الكرة

تعريف الكرة

هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً.

معادلتها

معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها r

$$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

مثال

تأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

① أوجد معادلة الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 5.

أياً كانت $M(x,y,z)$ نقطة من الكرة عندئذ

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=25$$
$$S: x^2+y^2+z^2=25$$

② أوجد معادلة الكرة S' التي مركزها O وتمر بالنقطة A.

الكرة مركزها O وتمر بالنقطة A فإن

$$r^2=OA^2=(1-0)^2+(2-0)^2+(-4-0)^2$$
$$=1+4+16=21$$
$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=21$$
$$S': x^2+y^2+z^2=21$$

تدرب صفحة 27:

⑤ تأمل النقاط

$C(7,3,-1), B(2,8,-1), A(2,3,-1)$

$E(5,3,3), D(-1,3,3)$ أثبت أن B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A.

الحل:

حتى تقع النقاط E,D,C,B على كرة واحدة يجب أن يتحقق:

$$AB=AC=AD=AE$$

$$AB=\sqrt{0+25+0}=5 \quad AD=\sqrt{9+0+16}=5$$
$$AC=\sqrt{25+0+0}=5 \quad AE=\sqrt{9+0+16}=5$$
$$AB=AC=AD=AE=5=R$$

فالنقاط E,D,C,B تقع على كرة واحدة مركزها A.

تمرينات الوحدة الموافقة

23 ص 43

لدينا في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,-1,2)$ و $B(-2,1,-2)$، نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ المقدار $f(M)=MA^2+MB^2$

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z.

② أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M)=18$ مؤلفة من نقطة واحدة.

③ أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M)=30$ كرة مركزها O أوجد نصف قطرها.

④ أثبت أنه وفق شرط على العدد الحقيقي k، مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O.

①

$$f(M)=MA^2+MB^2$$
$$=(2-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2+(-2-x)^2+(1-y)^2+(-2-z)^2$$
$$=4-4x+x^2+1+2y+y^2+4-4z+z^2+4+4x+x^2+1-2y+y^2+4+4z+z^2$$
$$f(M)=2x^2+2y^2+2z^2+18$$

②

$$f(M)=18$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+18=18$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=0$$
$$x^2+y^2+z^2=0$$

ومنه مجموعة النقاط مؤلفة من نقطة وحيدة هي $(0,0,0)$

③

$$f(M)=30$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+18=30$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=12$$
$$x^2+y^2+z^2=6$$

ومنه مجموعة النقاط مؤلفة من كرة مركزها 0 ونصف قطرها $r=\sqrt{6}$

④

$$f(M)=k$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+18=k$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=k-18$$
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(k-18)$$

ندرس إشارة المقدار $\frac{1}{2}(k-18)$

$$\frac{1}{2}(k-18)=0\Rightarrow k=18$$

k	$-\infty$	18	$+\infty$
$\frac{1}{2}(k-18)$	$-$	0	$+$
ما تمثله المجموعة	مجموعة خالية	نقطة وحيدة هي $(0,0,0)$	كرة مركزها 0 ونصف قطرها $\sqrt{\frac{1}{2}(k-18)}$

20 ص 70

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r.

① $\Omega(1,2,3)$ $r=2$

$$S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$$

② $\Omega(0,5,-1)$ $r=\sqrt{3}$

$$S:x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$$

19 ص 70

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

① $\Omega(0,0,1)$ $A(11,1)$

$$R=\Omega A=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$$
$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2$$
$$S:x^2+y^2+(z-1)^2=2$$

② $\Omega(0,5,-1)$ $A(1,-2,3)$

$$R=\Omega A=\sqrt{1+49+16}=\sqrt{66}$$
$$S:x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=66$$

0937375251

21 ص 70

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

① $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

بالإتمام إلى مربع كامل

$$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$$
$$\underbrace{x^2-2x+1}-1+\underbrace{y^2+6y+9}-9+z^2-2=0$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega(1,-3,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{12}$

② $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

$$x^2-10x+y^2+z^2+2z+26=0$$
$$\underbrace{x^2-10x+25}-25+y^2+\underbrace{z^2+2z+1}-1+26=0$$
$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$$

تمثل نقطة وحيدة إحداثياتها $\Omega(5,0,-1)$.

③ $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

$$x^2+x+y^2+y+z^2+z=0$$
$$\underbrace{x^2+x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+\underbrace{y^2+y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+\underbrace{z^2+z+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

$$\underbrace{x^2-4x+4}-4+y^2+z^2+5=0$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2=-1<0$$

تمثل مجموعة خالية من النقاط.

حين تصافحني .. خذ يدي بقوة بين يديك ..
ضمها بكل ما لديك من حنان ..
قلبي يقفز في راحة يدي ..
لحظة أن تلمسها .. 💙

22 ص 71

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تأمل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي

$$\mathcal{P}: x+2y+3z=5$$

اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

الحل:

بما أن الكرة تمس المستوي $\mathcal{P}$ فإن $r=dist\,(A,\mathcal{P})$

$$dist\,(A,\mathcal{P})=\frac{|1(2)+2(-2)+3(2)-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$
$$S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$$

دورة 2017 الأولى

اكتب معادلة للكرة S التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها

$$R=\sqrt{3}$$

تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$

يمس الكرة S.

الحل:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

دورة 2018 الثانية

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$E(1,-1,1)D(0,4,0)C(4,0,0)B(1,0,-1)A(2,1,$

① جد $\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$.

② أثبت أن النقاط ليست واقعة على استقامة واحدة.

③ أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE).

④ اكتب معادلة المستوي (CDE).

⑤ احسب بعد B عن المستوي (CDE).

⑥ اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

الحل:

دورة 2018 الأولى

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$

والمستوي $P: x+2y+z-1=0$

احسب بعد النقطة A عن المستوي P، ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

دورة 2021 الثانية

تأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي

$$P: 2x+y-2z-4=0$$

① احسب بُعد A عن المستوي P

② اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

18 ص 70

تأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $\Omega(2,-1,3)$ و $A(-1,0,1)$. نهدف إلى كتابة معادلة للكرة S التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

① احسب ΩA.

② لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ احسب ΩM^2.

③ أثبت أن «$M(x,y,z)$ نقطة من S» إذا وفقط إذا تحقق الشرط «$\Omega M^2 = \Omega A^2$» واستنتج معادلة الكرة المطلوبة.

الحل:

①

$$\Omega A = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

②

$$\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$$

③

الكرة مركزها Ω وتمر بالنقطة A فإن $\Omega A = R$

و $M \in S$ فإن $\Omega M = R = \Omega A$ وهذا يكافئ الشرط

$\Omega A^2 = \Omega M^2$ ومنه معادلة الكرة

$$S : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$$

23 ص 71

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

الحل:

$$\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,2-z)$$
$$\overrightarrow{MB}(-2-x,-y,2-z)$$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
$$(2-x)(-2-x)+(1-y)(-y)+(2-z)(2-z)=0$$
$$-4-2x+2x+x^2-y+y^2+(2-z)^2=0$$
$$x^2+\underbrace{y^2-y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+(z-2)^2-4=0$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

②

المجموعة تمثل كرة مركزها $\Omega\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{17}}{2}$

24 ص 71

تأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r=\frac{1}{2}AB$، ونعرف I منتصف $[AB]$

① أثبت أنه في حالة نقطة M من الفراغ تحقق المساواة
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$$

② أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل:

①

$$L_1=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AI})\qquad :\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$
$$=MI^2-IA^2\qquad :IA^2=r^2$$
$$=MI^2-r^2=L_2$$

②

من الفرض لدينا $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$$\Rightarrow MI^2-r^2=0\Rightarrow MI^2=r^2$$

ومنه مجموعة النقاط M هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها MI

ويكون $[AB]$ قطراً فيها.

ملاحظات:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

علمتني الرياضيات
أن الانتقال من جهة لأخرى سيغير من قيمتي
وأنه متى ما كبر المقام صغر كل شيء

25 ص 71

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=2MB$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

③ أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{P}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$.

④ ما طبيعة المجموعة $\mathcal{P}$؟

الحل:

①

$$MA=2MB\Rightarrow MA^2=4MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[x^2+(1+y)^2+(1+z)^2]$$

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$$

$$3x^2+3y^2+3z^2+2x+10y+10z+5=0$$

$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$$

$$\underbrace{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}-\frac{1}{9}+\underbrace{y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}}-\frac{25}{9}+\underbrace{z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=4$$

②

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3}\right)$ ونصف قطرها $r=2$.

③

$$MA=MB\Rightarrow MA^2=MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=x^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2$$

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2$$

$$\Rightarrow -2x-4y-4z+1=0$$

④

المجموعة $\mathcal{P}$ تمثل معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

التمثيلات الوسيطية لمستقيم

بفرض d مستقيم معرف بنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع موجه $\vec{u}(a, b, c)$, تنتمي النقطة $M(x, y, z)$ إلى d إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث:

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} \qquad ; t \in R$$

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at \\ bt \\ ct \end{bmatrix} ; t \in R$$

أي أن $x - x_0 = at\,,\ \ y - y_0 = bt\,,\ \ z - z_0 = ct$

$$\Rightarrow d : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad ; t \in R$$

نسمي المعادلات السابقة المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$.

مثال (1)

أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة $A(2, -1, 3)$ ويقبل شعاعاً موجهاً $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

الحل:

$$d : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -3t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad ; t \in R$$

مثال (2)

أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطتين $A(2,1,1)$ و $B(-1,1,2)$

الحل:

d يمر بالنقطتين A و B فهو يقبل شعاعاً موجهاً $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-3,0,1)$

ونختار النقطة A فيكون التمثيل الوسيطي

$$d : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \qquad ; t \in R$$

مثال (3)

أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة $A(-1, 2, 1)$ ويوازي المستقيم

$$d' : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = -2t \end{cases} \quad ; t \in R$$

الحل:

بما أن المستقيمان متوازيان فإن $\vec{u} = \vec{u'}(1,1,-2)$

وبالتالي يكون تمثيل المستقيم d

$$d : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases} \qquad ; t \in R$$

التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم وقطعة مستقيمة

بفرض $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$ نقطتين من الفراغ ولنضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(a, b, c)$

عندئذٍ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق

$$[AB] : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad ; t \in [0,1]$$

Math is Life

نصف المستقيم $[AB)$ الذي مبدؤه A ويمر بالنقطة B هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق

$$[AB) : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad ; t \in [0, +\infty[$$

مثال (4)

تأمل النقطتين $A(2, 1, 0), B(3, 2, -1)$ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من

① القطعة المستقيمة $[AB]$

$$[AB] : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases} \quad ; t \in [0,1]$$

0937375251

② نصف المستقيم $[AB)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ ويمر من A.

$$[AB]:\begin{cases}x=t+2\\y=t+1\\z=-t\end{cases}\quad ;t\in[0,+\infty[$$

③ نصف المستقيم $[BA)$

$\vec{u}'=\overrightarrow{BA}(-1,-1,1)$ ويمر من A.

$$[AB]:\begin{cases}x=-t+2\\y=-t+1\\z=t\end{cases}\quad ;t\in[0,+\infty[$$

تدرب صفحة 84:

نُعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

① أعطِ معادلة وسيطية للمستقيم d:

① المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$

$$d:\begin{cases}x=-1\\y=t+2\\z=-t\end{cases}\quad ;t\in R$$

② $d=(AB)$ حيث $A(2,1,-1)$ و $B(3,-1,1)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$ ويمر من A.

$$d:\begin{cases}x=t+2\\y=-2t+1\\z=2t-1\end{cases}\quad ;t\in R$$

② تأمل النقطتين $A(-2,1,0), B(2,3,1)$. أعطِ تمثيلاً لكل من

① المستقيم (AB)

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ ويمر من A.

$$(AB):\begin{cases}x=4t-2\\y=2t+1:t\in R\\z=t\end{cases}$$

② القطعة المستقيمة $[AB]$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ ويمر من A.

$$[AB]:\begin{cases}x=4t-2\\y=2t+1:t\in[0,1]\\z=t\end{cases}$$

③ نصف المستقيم $[AB)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ ويمر من A.

$$[AB):\begin{cases}x=4t-2\\y=2t+1\\z=t\end{cases}\quad ;t\in[0,+\infty[$$

④ نصف المستقيم $[BA)$

$\vec{u}'=\overrightarrow{BA}(-4,-2,-1)$ ويمر من A.

$$[BA):\begin{cases}x=-4t-2\\y=-2t+1\\z=-t\end{cases}\quad ;t\in[0,+\infty[$$

❋ الأوضاع النسبية ❋

الوضع النسبي لمستقيمين:

ليكن لدينا المستقيمين d_1 شعاع توجيهه $\vec{u}_1$ و d_2 شعاع توجيهه $\vec{u}_2$

نقول عن المستقيمين أنهما:

متوازيين:

إذا كان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطين خطياً.

متقاطعين:

إذا كان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطين خطياً. والمستقيمان يقعان في مستوٍ واحد.

لإيجاد نقطة التقاطع نقوم بمساواة الإحداثيات بين المعادلتين فنحصل على ثلاث معادلات بمجهولين هما s و t. نأخذ معادلتين ونحسب قيمتي s و t ونعوض في المعادلة الثالثة، إذا تحققت يكون المستقيمين متقاطعان بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي نحصل على نقطة التقاطع.

متخالفين:

إذا كان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطين خطياً. والمستقيمان لا يقعان في مستوٍ واحد.

إذا لم تتحقق المعادلة الثالثة عند الحل المشترك يكون المستقيمين متخالفين.

متعامدين:

إذا كان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ متعامدين أي أن $\vec{u}_1.\vec{u}_2=0$

مثال (1)

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d و d' المعرفين كما يلي:

$$(S')\begin{cases} x=-9t+4 \\ y=-12t+4\,;t\in\mathbb{R} \\ z=3t \end{cases},\quad (S)\begin{cases} x=3t+1 \\ y=4t \\ z=-t+1 \end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الحل:

يمثل (S) التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار بالنقطة $A(1,0,1)$

والموجه بالشعاع $\vec{u}(3,4,-1)$

يمثل (S') التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار بالنقطة $B(4,4,0)$

والموجه بالشعاع $\vec{u}'(-9,-12,3)$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u}(3,4,-1) \\ \vec{u}'(-9,-12,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{-9}=\frac{4}{-12}=\frac{-1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

المركبات متناسبة ومنه الشعاعان مرتبطان خطياً

وبالتالي المستقيمان d و d' متوازيين.

ونلاحظ أن (S) و (S') تمثيلان وسيطيان للمستقيم d نفسه.

مثال (2)

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d و d' المعرفين كما يلي:

$$(d')\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-t-1\,;t\in\mathbb{R} \\ z=t+1 \end{cases},\quad (d)\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-t+2 \end{cases}$$

الحل:

المستقيم d موجه بالشعاع $\vec{u}(1,2,-1)$ ويمر بالنقطة $A(1,-3,2)$

المستقيم d' موجه بالشعاع $\vec{u}'(3,-1,1)$ ويمر بالنقطة $B(2,-1,1)$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u}(1,2,-1) \\ \vec{u}'(3,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}\neq\frac{-1}{1}\right)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعان غير مرتبطان خطياً.

لندرس إذا كان المستقيمان في نفس المستوي أو لا؟

أولاً نغير الوسيط لإحدى المستقيمين وليكن d'

$$(d')\begin{cases} x=3s+2 \\ y=-s-1\,;s\in\mathbb{R} \\ z=s+1 \end{cases},\quad (d)\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-t+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t+1=3s+2 & ① \\ 2t-3=-s-1 & ② \\ -t+2=s+1 & ③ \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ① و ③ نجد:

$$3=4s+3\Rightarrow s=0 \xrightarrow{\text{نعوض في } ①} t=1$$

نعوض قيمتي s و t في المعادلة ② للتحقق:

$$\left.\begin{matrix} l_1=2\times1-3=-1 \\ l_2=-0-1=-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow l_1=l_2 \quad \text{محققة}$$

ومنه المستقيمان يقعان في نفس المستوي وبالتالي المستقيمان متقاطعان.

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $s=0$ في تمثيل (d')

$$x=2,y=-1,z=1\Rightarrow I(2,-1,1)$$

مثال (3)

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d و d' المعرفين كما يلي:

$$(d')\begin{cases} x=s \\ y=-3s-3\,;s\in\mathbb{R} \\ z=-s+1 \end{cases},\quad (d)\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-3t+3 \end{cases}$$

الحل:

المستقيم d موجه بالشعاع $\vec{u}(1,-3,-3)$ ويمر بالنقطة $A(1,2,3)$

المستقيم d' موجه بالشعاع $\vec{u}'(1,-3,-1)$ ويمر بالنقطة $B(0,-3,1)$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u}(1,-3,-3) \\ \vec{u}'(1,-3,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{1}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{-3}{-1}\right)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعان غير مرتبطان خطياً.

لندرس إذا كان المستقيمان في نفس المستوي أو لا؟

$$\Rightarrow\begin{cases} t+1=s & ① \\ -3t+2=-3s-3 & ② \\ -3t+3=-s+1 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{من المعادلة } ①} s=t+1 \xrightarrow{\text{نعوض في } ③} -3t+3=-(t+1)+1$$

$$\Rightarrow -3t+3=-t\Rightarrow t=\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{نعوض في } ③} s=\frac{5}{2}$$

نعوض قيمتي s و t في المعادلة ② للتحقق:

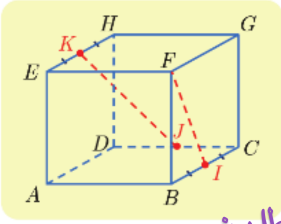
$$-3\left(\frac{3}{2}\right)+2\overset{?}{=}-3\left(\frac{5}{2}\right)-3\Rightarrow\frac{-5}{2}\neq\frac{-21}{2}\quad \text{غ. محققة}$$

ومنه المستقيمان لا يقعان في نفس المستوي وبالتالي المستقيمان متخالفان.

0937375251

تدرب صفحة 84:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 .



فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$

و K منتصف $[EH]$.

تأمل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:

① أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ) .

② أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟ هل تقع النقاط F,K,J,I في مستوٍ واحد ؟

الحل:

①

نوجد إحداثيات النقاط F,J,I,K :

$$F(1,0,1),J\left(\frac{1}{2},1,0\right),I\left(1,\frac{1}{2},0\right),K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$

التمثيل الوسيطي للمستقيم (IK)

$$\vec{u}=\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$$

$$(IK):\begin{cases}x=-t\\ y=\dfrac{1}{2}\\ z=t+1\end{cases}\quad ;t\in R$$

التمثيل الوسيطي للمستقيم (FJ)

$$\vec{u'}=\overrightarrow{FJ}\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

$$(FJ):\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}s+1\\ y=s\\ z=-s+1\end{cases}\quad ;s\in R$$

②

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{IK}(-1,0,1)\\ \overrightarrow{FJ}\left(\dfrac{1}{2},1,-1\right)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{-2}{1}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-1}\right)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعان غير مرتبطان خطياً . فالمستقيمان غير متوازيين

بالحل المشترك لجملة المعادلتين نجد:

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}s+1=-t & ①\\ s=\dfrac{1}{2} & ②\\ -s+1=t+1 & ③\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{من المعادلة ②}} s=\frac{1}{2}\xRightarrow{\text{نعوض في ③}}-\frac{1}{2}+1=t+1\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

نعوض قيمتي s و t في المعادلة ① للتحقق:

$$\left.\begin{matrix}L_1=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)+1=\dfrac{3}{4}\\ L_2=-\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow L_1\neq L_2 \quad \text{غ محققة.}$$

وبالتالي المستقيمين متخالفين وليسا متقاطعين .

وبالتالي النقاط الأربعة F,J,I,K لا تقع في مستوٍ واحد .

دورة 2019 الأولى

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تأمل النقطتين $B(0,1,1),A(1,0,1)$

① اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيهه $\vec{u}(2,2,1)$.

② أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

دورة 2017 الثانية

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d'

$$(d')\begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3; s \in R \\ z = -s + 1 \end{cases}, (d)\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2; t \in R \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

وهل المستقيمان d و d' في مستوٍ واحد ؟ علل إجابتك.

الحل:

دورة 2020 الثانية

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$(d')\begin{cases} x = 2s - 1 \quad x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \quad ; Sy = s - 2 \\ z = 3s - 2 \quad z = 3s - 2 \end{cases}, (d)\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 ; t \in R \\ z = -t \end{cases}$$

① أثبت أن d و d' متقاطعان، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع.

② جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d و d'.

الحل:

0937375251

تمرينات الوحدة الموافقة

05 ص37

في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان

$A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$

والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$.

d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$

d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع $\vec{v}$

أثبت أن المستقيمين d و d' متقاطعان، ثم عين I نقطة تقاطعهما.

الحل:

المستقيم d موجه بالشعاع $\vec{u}(1,0,-2)$ ويمر بالنقطة $A(3,-1,1)$

المستقيم d' موجه بالشعاع $\vec{v}(2,1,-3)$ ويمر بالنقطة $B(3,-3,-1)$

$$\left.\begin{matrix}\vec{u}(1,0,-2)\\ \vec{v}(2,1,-3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{-2}{-3}\right)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعان غير مرتبطان خطياً.

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيمين d و d'

$$(d')\begin{cases}x=2s+3\\ y=s-3\\ z=-3s-1\end{cases};s\in\mathbb{R}\ ,\ (d)\begin{cases}x=t+3\\ y=-1\\ z=-2t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

لندرس إذا كان المستقيمان في نفس المستوي أو لا؟

$$\Rightarrow\begin{cases}t+3=2s+3 & ①\\ -1=s-3 & ②\\ -2t+1=-3s-1 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{من المعادلة ②}} s=2 \xrightarrow{\text{نعوض في ①}} t=4$$

نعوض قيمتي s و t في المعادلة ③ للتحقق:

$$-2(4)+1\overset{?}{=}-3(2)-1\Rightarrow -7=-7 \quad \text{محققة}$$

ومنه المستقيمان يقعان في نفس المستوي وبالتالي المستقيمان متقاطعان.

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $s=2$ في تمثيل (d')

$$x=7,y=-1,z=-7\Rightarrow I(7,-1,7)$$

15 ص42

تأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,5)$

والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$، والمستقيم d' المار بالنقطة

$B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$.

هل d و d' متقاطعان؟ في حالة الإيجاب، عين نقطة تقاطعهما.

الحل:

المستقيم d موجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$ ويمر بالنقطة $A(2,0,5)$

المستقيم d' موجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$ ويمر بالنقطة $B(2,2,-1)$

$$\left.\begin{matrix}\vec{u}(2,5,-1)\\ \vec{v}(1,2,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2}{1}\neq\frac{5}{2}\neq\frac{-1}{1}\right)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعان غير مرتبطان خطياً.

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيمين d و d'

$$(d')\begin{cases}x=s+2\\ y=2s+2\\ z=s-1\end{cases};s\in\mathbb{R}\ ,\ (d)\begin{cases}x=2t+2\\ y=5t\\ z=-t+5\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

لندرس إذا كان المستقيمان في نفس المستوي أو لا؟

$$\Rightarrow\begin{cases}2t+2=s+2 & ①\\ 5t=2s+2 & ②\\ -t+5=s-1 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{نطرح ③ من ①}} 3t-3=3\Rightarrow t=2 \xrightarrow{\text{نعوض في ③}} s=4$$

نعوض قيمتي s و t في المعادلة ② للتحقق:

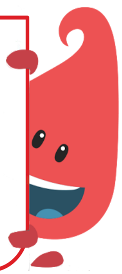
$$5(2)\overset{?}{=}4(2)+2\Rightarrow 10=10 \quad \text{محققة}$$

ومنه المستقيمان يقعان في نفس المستوي وبالتالي المستقيمان متقاطعان.

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $s=4$ في تمثيل (d')

$$x=6,y=10,z=3\Rightarrow I(6,10,3)$$

إن سر النجاح هو أن تتعلم كيف تستخدم
الألم والمتعة بدلاً من السماح
للألم والمتعة باستخدامك



الوضع النسبي لمستويين:

ليكن لدينا المستويين

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \qquad \overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}(a_1, b_1, c_1) \\ \mathcal{P}_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \qquad \overrightarrow{n_{\mathcal{P}_2}}(a_2, b_2, c_2) \end{cases}$$

نقول عن المستويين أنهما:

طبوقان:

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_2}}$ مرتبطين خطياً و

$$\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}\right)$$

متوازيين ومختلفان:

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_2}}$ مرتبطين خطياً و

$$\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}\right)$$

متقاطعين:

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_2}}$ غير مرتبطين خطياً

يتقاطع مستويين بفصل مشترك لإيجاد تمثيله الوسيطي، نقوم بحل معادلتي المستويين حلاً مشتركاً، نوجد مجهولين بدلالة الثالث ونفرض t فنحصل على التمثيل الوسيطي.

متعامدين:

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_2}}$ متعامدين أي أن $n_{\mathcal{P}_1} . n_{\mathcal{P}_2} = 0$

مثال (1)

في الحالات الآتية نعطى المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ادرس الوضع النسبي للمستويين.

① $\begin{cases} \mathcal{P} : x - 4y + 7 = 0 \\ \mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1, -4, 0) \\ \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(1, 2, -1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{1} \neq \frac{-4}{2} \neq \frac{0}{-1}\right)$$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان.

② $\begin{cases} \mathcal{P} : x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ \mathcal{Q} : 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1, -2, 3) \\ \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(2, -4, 6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$ مرتبطين خطياً.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ متوازيان ومختلفان.

③ $\begin{cases} \mathcal{P} : x + 2y + 4z - 5 = 0 \\ \mathcal{Q} : 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1, 2, 4)$$
$$\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(2, 1, -1)$$
$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} . \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}} = 1(2) + 2(1) + 4(-1) = 0$$

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ متعامدان.

مثال (2)

تأمل المستويين

$$\begin{cases} \mathcal{P} : 2x - y - z + 2 = 0 \\ \mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

أثبت أن المستويين متقاطعان، ثم أوجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d

الحل:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2, -1, -1) \\ \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(1, 2, -1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{-1}{-1}\right)$$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ متقاطعان.

إيجاد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك

$$\begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 & ① \\ x + 2y - z + 1 = 0 & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{من المعادلة ②}} x = -2y + z - 1 \qquad ③$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض في ①}} 2(-2y + z - 1) - y - z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -4y + 2z - 2 - y - z + 2 = 0 \Rightarrow z = 5y$$

نعوض قيمة z في المعادلة ③

$$\Rightarrow x = 3y - 1$$

نفرض $y = t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

$$d : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad ; t \in R$$

تدرب صفحة 59:

③ ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية

$$\begin{cases}\mathcal{P}: 7x+3y-z-1=0\\ \mathcal{Q}: 6x-11y-9z-5=0\\ \mathcal{R}: 2x-3y+5z+4=0\end{cases}$$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(2,-3,5)$, $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(6,-11,-9)$, $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(7,3,-1)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}=(7)(6)+(3)(-11)+(-1)(-9)=42-33+9=18\neq 0$$

المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ليسا متعامدين.

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}=(7)(2)+(3)(-3)+(-1)(5)=14-9-5=0$$

المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ متعامدين.

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}=(6)(2)+(-11)(-3)+(-9)(5)=12+33-45=0$$

المستويان $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ متعامدين.

④ في كل من الحالات الآتية بيّن إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين

① $\begin{cases}\mathcal{P}: x-y+z=0\\ \mathcal{Q}: x-y+z-3=0\end{cases}$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-1,1)\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(1,-1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-3}\right)$$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$ مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما متناسبة.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متوازيان ومختلفان

② $\begin{cases}\mathcal{P}: 2x+y+5=0\\ \mathcal{Q}: 4x+2y+z+5=0\end{cases}$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,1,0)\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(4,2,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{0}{1}\right)$$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان.

تدرب صفحة 87:

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

① في الحالات الآتية تحقق من تقاطع المستويين $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$، وأعطِ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

① $\begin{cases}\mathcal{P}_1: x+y=2\\ \mathcal{P}_2: x+z=1\end{cases}$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_1}(1,1,0)\\ \overrightarrow{n_2}(1,0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}\right)$$

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ متقاطعان.

$$\begin{cases}x+y=2\\ x+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2-x\\ z=1-x\end{cases}$$

نفرض $x=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=-t+2\\ z=-t+1\end{cases};t\in R$$

② $\begin{cases}\mathcal{P}_1: -x+y+z=3\\ \mathcal{P}_2: 2x-y+2z=1\end{cases}$

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}_1(-1,1,1)\\ \overrightarrow{n_2}(2,-1,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{-1}{2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{1}\right)$$

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ متقاطعان.

$$\begin{cases}-x+y+z=3 & ①\\ 2x-y+2z=1 & ②\end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد

$$x=4-3z\xrightarrow{\text{نعوض في ①}}-4+3z+y+z=3$$
$$\Rightarrow y=7-4z$$

نفرض $z=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

$$d:\begin{cases}x=-3t+4\\ y=-4t+7\\ z=t\end{cases};t\in R$$

② في الحالات الآتية، أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبيِّن إذا كان $d' \parallel d$ أو كان d منطبقاً على d'

① $d': \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, $d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_1}(3,-1,-2) \\ \overrightarrow{n_2}(1,-1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{-2}{-1}\right)$$

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان متقاطعان بفصل مشترك d'

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 & ① \\ x - y - z = 0 & ② \end{cases}$$

بطرح المعادلة ② من ① نجد:

$$2x - z = 1 \Rightarrow z = 2x - 1$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض في ②}} x - y - 2x + 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

نفرض $x = s$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d'

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = -s + 1 \\ z = 2s - 1 \end{cases} \quad ; s \in R$$

وبالتالي أصبح لدينا

$\vec{u}(1,-1,2)$ شعاع توجيه المستقيم d

$\overrightarrow{u'}(1,-1,2)$ شعاع توجيه المستقيم d'

$$\vec{u} = \overrightarrow{u'}$$

ومنه الشعاعان مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان متوازيان.

لنبحث فيما إذا كان المستقيمان d و d' منطبقان

بالحل المشترك لجملتي المعادلات

$$\begin{cases} s = t & ① \\ -s + 1 = -t & ② \\ 2s - 1 = 2t - 1 & ③ \end{cases}$$

نعوض ① في ②

$$\Rightarrow -s + 1 = -s \Rightarrow 1 = 0 \quad \text{مستحيلة}$$

وبالتالي المستقيمان d و d' متوازيان وغير طيوقان.

② $d': \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$, $d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_1}(1,1,-2) \\ \overrightarrow{n_2}(1,-1,-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-2}\right)$$

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان متقاطعان بفصل مشترك d'

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 & ① \\ x - y - 2z = 5 & ② \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$2x = 8 + 4z \Rightarrow x = 4 + 2z$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض في ①}} 4 + 2z + y = 3 + 2z \Rightarrow y = 1$$

نفرض $z = s$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d'

$$d' : \begin{cases} x = 2s + 4 \\ y = -1 \\ z = s \end{cases} \quad ; s \in R$$

وبالتالي أصبح لدينا

$\vec{u}(2,0,1)$ شعاع توجيه المستقيم d

$\overrightarrow{u'}(2,0,1)$ شعاع توجيه المستقيم d'

$$\vec{u} = \overrightarrow{u'}$$

ومنه الشعاعان مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان متوازيان.

لنبحث فيما إذا كان المستقيمان d و d' منطبقان

بالحل المشترك لجملتي المعادلات

$$\begin{cases} 2s + 4 = 2t - 1 & ① \\ -1 = 2 & ② \\ s = t + 1 & ③ \end{cases}$$

نلاحظ من المعادلة② أن $-1 = 2$ وهذا تناقض

وبالتالي المستقيمان d و d' متوازيان وغير طيوقان.

أنت وحدك في هذا الطريق المملوء بأحلامك وآمالك . . .
أحسن السير ولا تميل

دورة 2020 الأولى

تأمل المستويين

$$\begin{cases} p_1: 2x - y + z + 1 = 0 \\ p_2: x + y - z = 0 \end{cases}$$

① تيقن أن المستويين متعامدان.

② اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

الحل:

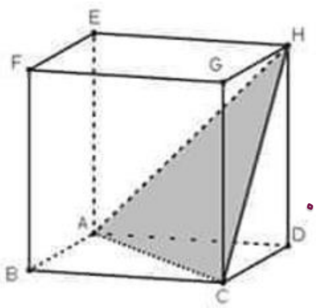
....

....

....

دورة 2019 الأولى

تأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$



① اكتب في هذه المعلم إحداثيات النقاط A, C, H, F, D.

② اكتب معادلة المستوي (ACH).

③ أثبت أن المستوي P معادلته

$$P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

يوازي المستوي (ACH).

④ بفرض أن I مركز ثقل المثلث (ACH) أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

⑤ اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

الحل:

....

....

....

تمرين الوحدة الموافقة

15 ص 70

تأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$

$$\begin{cases}\mathcal{P}: x-2y+3z-5=0\\ \mathcal{Q}: x+y+z+1=0\end{cases}$$

① علل كون المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

② أثبت أن d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما تتحول z في $\mathbb{R}$.

③ أعطِ شعاعاً موجهاً للمستقيم d.

④ اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ العمودي على كل من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

الحل:

①

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_\mathcal{P}}(1,-2,3)\\ \overrightarrow{n_\mathcal{Q}}(1,1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{3}{1}\right)$$

$\overrightarrow{n_\mathcal{P}}$ و $\overrightarrow{n_\mathcal{Q}}$ غير مرتبطين خطياً، لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويان متقاطعان بفصل مشترك d.

②

d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$

$$\begin{cases}x+y+z+1=0 & ①\\ x-2y+3z-5=0 & ②\end{cases}$$

بطرح المعادلة ② من ① نجد:

$$3y-2z+6=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}z-2$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض في } ①} x+\frac{2}{3}z-2+z+1=0\Rightarrow x=-\frac{5}{3}z+1$$

أي أن d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$

عندما تتحول z في $\mathbb{R}$.

③

لإيجاد شعاعاً موجهاً للمستقيم d نحتاج إلى نقطتين

نختار قيمتين للعدد z فنجد:

$$z=0\Rightarrow A(1,-2,0)$$
$$z=3\Rightarrow B(-4,0,3)$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(5,-2,-3)$$

④

طريقة (1)

لدينا $\overrightarrow{n_\mathcal{Q}}(1,1,1)$ و $\overrightarrow{n_\mathcal{P}}(1,-2,3)$

نفرض $\overrightarrow{n_\mathcal{R}}(a,b,c)$

$$\overrightarrow{n_\mathcal{R}}\cdot\overrightarrow{n_\mathcal{P}}=0\Rightarrow a-2b+3c=0 \quad \dots ①$$
$$\overrightarrow{n_\mathcal{R}}\cdot\overrightarrow{n_\mathcal{Q}}=0\Rightarrow a+b+c=0 \quad \dots ②$$

نفرض $c=3$

$$\begin{cases}a-2b+9=0 & \dots ①\\ a+b+3=0 & \dots ②\end{cases}$$

بطرح المعادلة ② من ① نجد:

$$\Rightarrow -3b+6=0\Rightarrow b=2\xrightarrow{\text{نعوض في } ②} a=-5$$

ومنه ناظم المستوي $\overrightarrow{n_\mathcal{R}}(-5,2,3)$

$$\Rightarrow \mathcal{R}: -5x+2y+3z+d=0$$
$$A\in\mathcal{R}\Rightarrow -10+10-6+d=0\Rightarrow d=6$$
$$\Rightarrow \mathcal{R}: -5x+2y+3z+6=0$$

طريقة (2)

بما أن المستوي $\mathcal{R}$ عمودي على المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ فهو عمودي على فصلهما المشترك d

وبالتالي فإن $\overrightarrow{n_\mathcal{R}}=\overrightarrow{AB}$ ومنه تكون معادلة المستوي

$$\Rightarrow \mathcal{R}: 5x-2y-3z+d=0$$
$$A\in\mathcal{R}\Rightarrow 10-10+6+d=0\Rightarrow d=-6$$
$$\Rightarrow \mathcal{R}: 5x-2y-3z-6=0$$

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي:

ليكن لدينا المستوي

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

والمستقيم d تمثيله الوسيطي

$$d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad ; t \in R$$

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{u_d}$ متعامدين أي أن

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{u_d} = 0$$

إما المستقيم يوازي المستوي

أو المستقيم محتوى في المستوي

ونعتمد في ذلك على تعويض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي

$$\begin{cases} l_1 = l_2 \Rightarrow \text{المستقيم محتوى في المستوي} \\ l_1 \neq l_2 \Rightarrow \text{المستقيم يوازي المستوي} \end{cases}$$

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{u_d}$ غير متعامدين أي أن

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{u_d} \neq 0$$

فنقول إن المستقيم والمستوي متقاطعان.

يتقاطع مستقيم ومستوي بنقطة واحدة، لإيجاد احداثيات نقطة التقاطع نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي فنحصل على قيمة t ، نعوضها في التمثيل فتكون إحداثيات نقطة التقاطع.

إذا كان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\overrightarrow{u_d}$ مرتبطين خطياً.

فنقول إن المستقيم والمستوي متعامدان.

مثال

تأمل النقطتين $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$ والمستوي $\mathcal{P}: 2x - y + z - 2 = 0$, تيقن أن (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة I يُطلب تعيين إحداثياتها.

الحل:

شعاع توجيه المستقيم $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$

شعاع ناظم المستوي $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = (2,-1,1)$

نلاحظ أن

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \cdot \vec{u} = -4 \neq 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\vec{u}$ غير متعامدين

وبالتالي المستقيم (AB) والمستوي $\mathcal{P}$ متقاطعين.

تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نقطة التقاطع I هي الثلاثية (x, y, z) حل الجملة الآتية:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$2(-3t+2) - (t+1) + (3t-2) - 2 = 0$$
$$\Rightarrow -6t + 4 - t - 1 + 3t - 2 - 2 = 0$$
$$\Rightarrow -4t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{4} \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = -\dfrac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{4}\right)$$

تدريب صفحة 87:

③ في الحالات الآتية، أثبت تقاطع المستقيم d مع المستوي $\mathcal{P}$ وعين إحداثيات نقطة التقاطع

① $d = (AB)$ حيث $B(1,2,-1), A(-1,2,3)$

و $\mathcal{P} : x + y + z = 1$

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم d

الموجه بالشعاع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$ ويمر بالنقطة A

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} \quad ; t \in R$$

ناظم المستوي $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,1)$ وبالتالي نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \cdot \vec{u} = 2 + 0 - 4 = -2 \neq 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\vec{u}$ غير متعامدين

وبالتالي المستقيم (AB) والمستوي $\mathcal{P}$ متقاطعين.

تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 2 \\ y = 2 \\ z = -4\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow I(2,2,-3)$$

② d يمر بالنقطة $A(2,-1,0)$ وموجهه الشعاع $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$

و $\mathcal{P} : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1$

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم d

الموجه بالشعاع $\vec{u} = (1,-2,0)$ ويمر بالنقطة A

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; t \in R$$

للسهولة نضرب معادلة المستوي $\mathcal{P}$ ب 6:

$$\mathcal{P} : 3x + 2y - z = 6$$

ناظم المستوي $\vec{n}_{\mathcal{P}}(3,2,-1)$ وبالتالي نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \cdot \vec{u} = 3 - 4 + 0 = -1 \neq 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\vec{u}$ غير متعامدين

وبالتالي المستقيم (AB) والمستوي $\mathcal{P}$ متقاطعين.

تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$3(t + 2) + 2(-2t - 1) - 0 = 6$$
$$3t + 6 - 4t - 2 = 6 \Rightarrow t = -2$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = -2 + 2 = 0 \\ y = 4 - 1 = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow I(0,3,0)$$

④ في الحالات الآتية، ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي $\mathcal{P}$

① $d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $\quad \mathcal{P}: x - y + z = 1$

$\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-1,1) \quad , \quad \vec{u}_d(2,1,-3)$

$$\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{u} = 2 - 1 - 3 = -2 \neq 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ و $\vec{u}$ غير متعامدين

وبالتالي المستقيم d والمستوي $\mathcal{P}$ متقاطعين.

تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$2t - 1 - t + 1 - 3t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 1 = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 1 - 3\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow I\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

② $d: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s + 1 \\ z = 8s - 3 \end{cases}$ $\quad \mathcal{P}: 2x + 3y - z = 0$

$\vec{n}_{\mathcal{P}}(2,3,-1) \quad , \quad \vec{u}_d(1,2,8)$

$$\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{u} = 2 + 6 - 8 = 0$$

وبالتالي إما المستقيم يوازي المستوي أو محتوى فيه

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

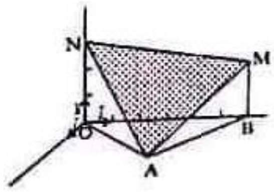
$$2s + 2 + 6s + 3 - 8s + 3 = 0 \Rightarrow 8 = 0$$ مستحيلة

وبالتالي المستقيم والمستوي متوازيان ولا يوجد بينهما نقاط مشتركة.

دورة 2021 الثانية

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), A(0,6,2)$



① اكتب معادلة المستوي (AMN) .

② اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد (AMN) .

③ أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري

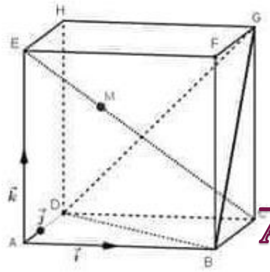
للقطعة المستقيمة $[BM]$.

الحل:

0937375251

دورة 2017 الأولى

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 2



نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

في المعلم

$\overrightarrow{AE}=2\vec{k},\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath},\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$

① اكتب معادلة المستوي (GBD) .

② اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (EC) .

③ جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD) .

④ جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

⑤ أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC) .

الحل:

تمرين الوحدة الموافقة

06 ص 67

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تأمل نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P} : 2x-3y+z-5=0$

أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ وعين إحداثيات نقطة التقاطع .

الحل:

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) الموجه بالشعاع

$\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ ويمر بالنقطة A

$$(AB):\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=4t-1 \\ z=5t \end{cases} \quad ; t\in R$$

شعاع توجيه المستقيم $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,4,5)$

شعاع ناظم المستوي $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=(2,-3,1)$

نلاحظ أن

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\cdot\vec{u}=-6-12+5=-13\neq 0$$

فالشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ غير متعامدين

وبالتالي المستقيم (AB) والمستوي $\mathcal{P}$ متقاطعين .

تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$2(-3t+2)-3(4t-1)+5t-5=0$$
$$\Rightarrow -6t+4-12t+3+5t-5=0$$
$$-13t=-2 \Rightarrow t=\frac{2}{13}$$

$$\begin{cases} x=-3\left(\frac{2}{13}\right)+2 \\ y=4\left(\frac{2}{13}\right)-1 \\ z=5\left(\frac{2}{13}\right) \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$$

الوضع النسبي لثلاث مستويات:

ليكن لدينا ثلاث مستويات $\mathcal{P}$ و Q و $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{P}: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ Q: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ \mathcal{R}: a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

المستويات متوازية:

النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

جملة المعادلات الثلاث مستحيلة الحل (لا توجد نقاط مشتركة)

المستويات منطبقة:

النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

جملة المعادلات الثلاث لها عدد غير منتهي من الحلول .

المستويات متقاطعة:

إما بنقطة وحيدة:

النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

يوجد لجملة المعادلات حل وحيد $I(x,y,z)$

أو بفصل مشترك (مستقيم)

النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

يوجد لجملة المعادلات عدد غير منتهي من الحلول .

ملاحظة:

في حالة ثلاث مستويات اثنان منها متوازيان تكون الجملة مستحيلة الحل

أي لا يوجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة معاً .

ليس الفرق بين الناجحين والفاشلين هو عدم الوقوع في الأخطاء، ولكن الفرق يكمن في المقدرة على إدارة ما بعد الوقوع في الأخطاء

0937375251

طريق حل جملة ثلاث معادلات

طريقة الحذف بالتعويض:

نحسب قيمة أحد المجاهيل من إحدى المعادلات ونعوضه في المعادلتين الباقيتين فنحصل على معادلتين بمجهولين نحلها حلاً مشتركاً

ونميز الحالات الآتية:

- الجملة مستحيلة الحل: عندها تكون المستويات متوازية .
- الجملة لها عدد غير منتهي من الحلول: عندها تكون المستويات متقاطعة بفصل مشترك (مستقيم)
- الجملة لها حل وحيد: عندها تكون المستويات متقاطعة بنقطة وحيدة .

طريقة غاوس:

ليكن لدينا جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & L_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & L_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & L_3 \end{cases}$$

يجب أن يكون العنصر الرائد a_1 يساوي ± 1 (يمكن التبديل بين المعادلات)

نحذف x من المعادلتين L_2 و L_3 وذلك باستخدام التحويلات

$$\frac{a_2}{a_1}L_1+L_2 \quad \text{و} \quad \frac{a_3}{a_1}L_1+L_3$$

فنحصل على الجملة

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & L_1 \\ +b'_2y+c'_2z=d'_2 & L'_2 \\ +b'_3y+c'_3z=d'_3 & L'_3 \end{cases}$$

نحذف y من المعادلة L'_3 وذلك باستخدام التحويل

$$\frac{b'_3}{b'_2}L'_2+L'_3$$

فنحصل على الجملة

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & L_1 \\ +b'_2y+c'_2z=d'_2 & L'_2 \\ +c''_3z=d''_3 & L''_3 \end{cases}$$

ونميز الحالات الآتية من المعادلة (L''_3)

- إذا كانت $z=$ عدد فيكون للجملة حل وحيد .
- إذا حذفت z وكان $l_1=l_2$ للجملة عدد غير منتهي من الحلول .
- إذا حذفت z وكان $l_1\neq l_2$ تكون الجملة مستحيلة الحل .

مثال

عين تقاطع المستويات

$$\begin{cases} -x+2y+3z-5=0 & L_1 \\ 3x-y-4z+5=0 & L_2 \\ 2x+3y-2z+2=0 & L_3 \end{cases}$$

الحل:

نجري التحويلات

$$3L_1+L_2 \quad \text{و} \quad 2L_1+L_3$$

$$\begin{cases} -x+2y+3z-5=0 & L_1 \\ 5y+5z-10=0 & L'_2 \\ 7y+4z-8=0 & L'_3 \end{cases}$$

نجري التحويل

$$-\frac{7}{5}L'_2+L'_3$$

$$\begin{cases} -x+2y+3z-5=0 & L_1 \\ 5y+5z-10=0 & L'_2 \\ -3z+6=0 & L''_3 \end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد

$$-3z+6=0 \Rightarrow z=2$$

وبالتالي للجملة حل وحيد والمستويات تتقاطع في نقطة وحيدة .

إيجاد إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض $z=2$ في المعادلة L'_2

$$\Rightarrow 5y+10-10=0 \Rightarrow y=0$$

نعوض $z=2$ و $y=0$ في L_1

$$\Rightarrow -x+0+6-5=0 \Rightarrow x=1$$

نقطة التقاطع

$$I(1,0,2)$$

تدريب صفحة 90:

نُعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في كل من الحالات الآتية نعطي معادلات ثلاثة مستويات، حل الجملة الخطية الموافقة وبين إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك أو لا تشترك بأي نقطة:

$$① \begin{cases} \mathcal{P}_1: & 5x+y+z=-5 \\ \mathcal{P}_2: & 2x+13y-7z=-1 \\ \mathcal{P}_3: & x-y+z=1 \end{cases}$$

نبدل بين المعادلة الأولى والثالثة

$$S\begin{cases} x-y+z=1 & (L_1) \\ 2x+13y-7z=-1 & (L_2) \\ 5x+y+z=-5 & (L_3) \end{cases}$$

نجري التحويلات $-2L_1+L_2 \quad \& \quad -5L_1+L_3$

$$S\begin{cases} x-y+z=1 & (L_1) \\ 15y-9z=-3 & (L'_2) \\ 6y-4z=-10 & (L'_3) \end{cases}$$

نجري التحويل $-\frac{6}{15}L'_2+L'_3$

$$S\begin{cases} x-y+z=1 & (L_1) \\ 15y-9z=-3 & (L_2) \\ \frac{-6}{15}z=\frac{-132}{15} & (L''_3) \end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد

$$-\frac{6}{15}Z=-\frac{132}{15} \Rightarrow Z=\frac{132}{6}=22 \Rightarrow Z=22$$

وبالتالي للجملة حل وحيد والمستويات تتقاطع في نقطة وحيدة.

إيجاد إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض $z=22$ في المعادلة L'_2

$$15y-9(22)=-3 \Rightarrow 15y=195 \Rightarrow y=13$$

نعوض $z=22$ و $y=13$ في L_1

$$x-13+22=1 \Rightarrow (x=-8)$$

نقطة التقاطع $I(-8,13,22)$

$$② \begin{cases} \mathcal{P}_1: & x-2y-3z=3 \\ \mathcal{P}_2: & 2x-y-4z=7 \\ \mathcal{P}_3: & 3x-3y-5z=8 \end{cases}$$

$$S\begin{cases} x-2y-3z=3 & (L_1) \\ 2x-y-4z=7 & (L_2) \\ 3x-3y-5z=8 & (L_3) \end{cases}$$

نجري التحويلات $-2L_1+L_2 \quad \& \quad -3L_1+L_3$

$$S\begin{cases} bx-2y-3z=3 & (L_1) \\ 3y+2z=1 & (L'_2) \\ 3y+4z=-1 & (L'_3) \end{cases}$$

نجري التحويل $-\frac{6}{15}L'_2+L'_3$

$$S\begin{cases} x-2y-3z=3 & (L_1) \\ 3y+2z=1 & (L'_2) \\ 2z=-2 & (L''_3) \end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد $Z=-1$

وبالتالي للجملة حل وحيد والمستويات تتقاطع في نقطة وحيدة.

إيجاد إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض $z=-1$ في المعادلة L'_2

$$3y-2=1 \Rightarrow y=1$$

نعوض $z=-1$ و $y=1$ في L_1

$$x=2$$

نقطة التقاطع

$$I(2,L,6-1)$$

$$③ \begin{cases} \mathcal{P}_1: & 2x-y+3z=0 \\ \mathcal{P}_2: & x+2y+z=0 \\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+5z=0 \end{cases}$$

نبدل بين المعادلة الأولى الثانية

$$S\begin{cases} x+2y+z=0 & \cdots(L_1) \\ 2x-y+3z=0 & \cdots(L_2) \\ 3x-4y+5z=0 & \ldots(L_3) \end{cases}$$

نجري التحويلات $-2L_1+L_2 \quad \& \quad -3L_1+L_3$

0937375251

$$S\begin{cases} x+2y+z=0 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L'_2)\\ -10y+2z=0 & (L'_3)\end{cases}$$

نجري التحويل $-2L'_2+L'_3$

$$S\begin{cases} x+2y+z=0 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L'_2)\\ 0=0 & (L''_3)\end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد أن للجملة عدد غير منتهي من الحلول وبالتالي

المستويات تتقاطع بفصل مشترك (مستقيم) .

إيجاد التمثيل الوسيطي الفصل المشترك:

من المعادلة L'_2 نجد

$$Z=5y$$

نعوض في L_1

$$x+2y+5y=0 \Rightarrow x=-7y$$

نفرض $y=t$

$$d\begin{cases} x=-7t\\ y=t & ;t\in R\\ z=5t\end{cases}$$

④
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1: & 2x-y+3z=2\\ \mathcal{P}_2: & x+2y+z=1\\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+5z=3\end{cases}$$

نبدل بين المعادلة الأولى الثانية

$$S\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1)\\ 2x-y+3z=2 & (L_2)\\ 3x-4y+5z=3 & (L_3)\end{cases}$$

نجري التحويلات $-2L_1+L_2$ & $-3L_1+L_3$

$$S\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L'_2)\\ -10y+2z=0 & (L'_3)\end{cases}$$

نجري التحويل $-2L'_2+L'_3$

$$S\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L'_2)\\ 0=0 & (L''_3)\end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد أن للجملة عدد غير منتهي من الحلول وبالتالي

المستويات تتقاطع بفصل مشترك (مستقيم) .

إيجاد التمثيل الوسيطي الفصل المشترك:

من المعادلة L'_2 نجد

$$Z=5y$$

نعوض في L_1

$$x+2y+5y=1 \Rightarrow x=-7y+1$$

نفرض $y=t$

$$d\begin{cases} x=-7t+1\\ y=t & ;t\in R\\ z=5t\end{cases}$$

⑤
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1: & 2x-y+3z=2\\ \mathcal{P}_2: & x+2y+z=1\\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+5z=1\end{cases}$$

نبدل بين المعادلة الأولى الثانية

$$S\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1)\\ 2x-y+3z=2 & (L_2)\\ 3x-4y+5z=1 & (L_3)\end{cases}$$

نجري التحويلات $-2L_1+L_2$ & $-3L_1+L_3$

$$S\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L'_2)\\ -10y+2z=1 & (L'_3)\end{cases}$$

نجري التحويل $-2L'_2+L'_3$

$$S\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L'_2)\\ 0=1 & (L''_3)\end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد أن $1\neq 0$ وهذا تناقض

وبالتالي الجملة مستحيلة الحل فالمستويات متوازية .

⑥
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1: & x+y+z=1\\ \mathcal{P}_2: & x-2y+z=1\\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+3z=-1\end{cases}$$

$$S\begin{cases} x+y+z=1 & (L_1)\\ x-2y+z=1 & (L_2)\\ 3x-4y+3z=-1 & (L_3)\end{cases}$$

نجري التحويلات $-L_1+L_2$ & $-3L_1+L_3$

$$S\begin{cases} x+y+z=1 & (L_1)\\ -3y+0=0 & (L_2)\\ -7y+0=-4 & (L_3)\end{cases}$$

نلاحظ من المعادلتين (L_2) و (L_3) تناقض وبالتالي الجملة مستحيلة الحل .

المسقط القائم لنقطة على مستوٍ

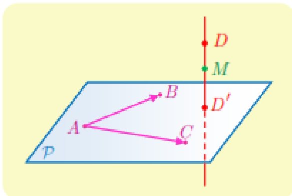
نغير صيغة السؤال من أيجاد مسقط قائم لنقطة إلى إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوٍ.

- نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من النقطة المطلوبة والذي يقبل ناظم المستوي شعاع توجيه له.
- نعوض في معادلة المستوي فنحصل على قيمة الوسيط t
- نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي فنحصل على نقطة التقاطع.

تمرينات الوحدة الموافقة

08 ص 67

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و $C(1,5,5)$ يُطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC).



الحل:

أولاً: نوجد معادلة المستوي (ABC)

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)\\ \overrightarrow{AC}(0,3,5)\end{matrix}\right\}\left(\frac{-2}{3}\neq\frac{1}{5}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي النقاط A و B و C تشكل مستوٍ.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -a-2b+c=0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 3b+5c=0 \quad \dots ②$$

نفرض $c=3$

$$\begin{cases}-a-2b+3=0 & \dots ①\\ 3b+15=0 & \dots ②\end{cases}$$

$$\overset{②\text{ من}}{\Longrightarrow} 3b+15=0\Rightarrow b=-5 \xrightarrow{①\text{ نعوض في}} a=13$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(13,-5,3)$

$$\Rightarrow (ABC):13x-5y+3z+d=0$$
$$B\in(ABC)\Rightarrow 0-0+3+d=0\Rightarrow d=-3$$
$$\Rightarrow (ABC):13x-5y+3z-3=0$$

ثانياً: نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم DD'

بما أن المستقيم DD' عمودي على المستوي فإن

$$\vec{n}_{ABC}=\vec{u}_{DD'}$$

DD' المستقيم الموجه بالشعاع $\vec{u}_{DD'}$ والمار بالنقطة D

$$d:\begin{cases}x=13t-11\\ y=-5t+9\\ z=3t-4\end{cases}\quad ;t\in\mathbb{R}$$

تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$169t-143+25t-45+9t-12-3=0$$
$$\Rightarrow 203t=203\Rightarrow t=1$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=13(1)-11=2\\ y=-5(1)+9=4\\ z=3(1)-4=-1\end{cases}\Rightarrow D'(2,4,-1)$$

17 ص 70

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$D(3,3,-3),\ C(1,-1,1),\ B(4,-2,3),\ A(2,4,3)$

① أثبت أن النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة.

② عين إحداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC).

الحل:

①

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(2,-6,0)\\ \overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)\end{matrix}\right\}\left(\frac{2}{-1}\neq\frac{-6}{-5}\neq\frac{0}{-2}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوٍ.

0937375251

②

أولاً: نوجد معادلة المستوي (ABC)

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow 2a-6b=0=0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -a-5b-2c=0 \quad \dots ②$$

نفرض $b=1$

$$\begin{cases} 2a-6=0 & \dots ① \\ -a-2c-5=0 & \dots ② \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{من } ①} 2a-6=0 \Rightarrow a=3 \xRightarrow{\text{نعوض في } ②} c=-4$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(3,1,-4)$

$$\Rightarrow (ABC): 3x+y-4z+d=0$$
$$A\in(ABC) \Rightarrow 6+4-12+d=0 \Rightarrow d=2$$
$$\Rightarrow (ABC): 3x+y-4z+2=0$$

ثانياً: نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم DD'

بما أن المستقيم DD' عمودي على المستوي فإن

$$\vec{n}_{ABC}=\vec{u}_{DD'}$$

المستقيم DD' الموجه بالشعاع $\vec{u}_{DD'}$ والمار بالنقطة D

$$d:\begin{cases} x=3t+3 \\ y=t+3 \\ z=-4t-3 \end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$$

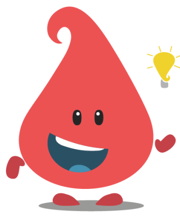
تعيين إحداثيات نقطة التقاطع:

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

$$9t+9+t+3+16t+12+2=0$$
$$\Rightarrow 26t=-26 \Rightarrow t=-1$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=3(-1)+3=0 \\ y=1(-1)+3=2 \\ z=-4(-1)-3=1 \end{cases} \Rightarrow D'(0,2,1)$$

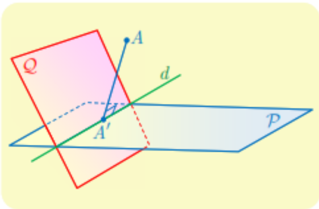


⑧ المسقط القائم لنقطة على مستقيم ⑧

بُعد نقطة عن مستقيم

الحالة العامة:

إذا كان المستقيم هو الفصل المشترك لمستقيمين غير متعامدين



- نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم d
- نفرض $A'(x,y,z)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d
- وبالتالي النقطة A' تحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم d.
- نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ بدلالة t.
- نعلم أن $d\perp AA'$ وبالتالي $\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_d=0$.
- نحصل على معادلة بالمجهول t، نحسب قيمة t ثم نعوضها في $\overrightarrow{AA'}$.
- نوجد طويلة $\overrightarrow{AA'}$ والتي تمثل بُعد النقطة عن المستقيم.

تمرينات الوحدة الموافقة

05 ص 66

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان

$$\begin{cases} \mathcal{P}: 2x-y+z-4=0 \\ \mathcal{Q}: x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$. واحسب بُعد النقطة A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك.

الحل:

$$\left.\begin{matrix} \vec{n_Q}(1,1,2) \\ \vec{n_{\mathcal{P}}}(2,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{2}{1}\right)$$

الشعاعان $\vec{n_{\mathcal{P}}},\vec{n_Q}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويين متقاطعين بفصل مشترك (مستقيم) وليكن d

نوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 & ① \\ x + y + 2z - 5 = 0 & ② \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد

$$3x = 9 - 3z \Rightarrow x = 3 - z$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض في } ②} 3 - z + y + 2z - 5 = 0$$

$$\Rightarrow y = 2 - z$$

نفرض $z = t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

$$d : \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \quad ; t \in R \\ z = t \end{cases}$$

نفرض $A'(x, y, z)$ المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d:

وبالتالي النقطة A' تحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

$$A'(-t + 3, -t + 2, t)$$

نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AA'}$:

$$\overrightarrow{AA'}(-t, -t + 3, t - 2)$$

بما أن $AA' \perp d$ فإن $\overrightarrow{AA'} . \overrightarrow{u_d} = 0$:

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow t + t - 3 + t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

نعوض في $\overrightarrow{AA'}$:

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\left(\frac{-5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

نوجد طويلة $\overrightarrow{AA'}$ والتي تمثل بعد النقطة عن المستقيم:

$$\| \overrightarrow{AA'} \| = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

12 ص 69

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويان

$$\begin{cases} \mathcal{P} : x - y + z = 0 \\ \mathcal{Q} : 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

احسب بُعد النقطة A عن المستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_Q}(1,1,2) \\ \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}, \overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي المستويين متقاطعين بفصل مشترك (مستقيم) وليكن d

نوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & ① \\ 3x + z - 1 = 0 & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{من المعادلة } ②} z = -3x + 1 \xrightarrow{\text{نعوض في } ①} x - y - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = -2x + 1$$

نفرض $x = t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 1 \quad ; t \in R \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

نفرض $A'(x, y, z)$ المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d:

وبالتالي النقطة A' تحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

$$A'(t, -2t + 1, -3t + 1)$$

$$\overrightarrow{AA'}(t - 2, -2t - 1, -3t + 2)$$

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow t - 2 + 4t + 2 + 9t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 14t = 6 \Rightarrow t = \frac{3}{7}$$

نعوض في $\overrightarrow{AA'}$:

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\left(\frac{-11}{7}, \frac{-13}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

نوجد طويلة $\overrightarrow{AA'}$ والتي تمثل بعد النقطة عن المستقيم:

$$\| \overrightarrow{AA'} \| = \sqrt{\frac{121}{49} + \frac{169}{49} + \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{315}{49}} = \sqrt{\frac{45}{7}}$$

0937375251

الحالة الخاصة:

إذا كان المستقيم هو الفصل المشترك لمستقيمين متعامدين

- نحسب بُعد النقطة عن المستوي الأول وليكن l_1.
- نحسب بُعد النقطة عن المستوي الثاني وليكن l_2.
- يكون بُعد النقطة عن الفصل المشترك حسب فيثاغورث

$$l = \sqrt{l_1 + l_2}$$

تمرين الوحدة الموافقة

13 ص 69

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويان

$$\begin{cases} \mathcal{P}: x + y - 2z - 1 = 0 \\ \mathcal{Q}: x + y + z = 0 \end{cases}$$

① أثبت أن المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان.

② احسب بُعد A عن كُلٍ من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

③ استنتج بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل:

①

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,-2), \vec{n}_{Q}(1,1,1)$$
$$\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_{Q} = 1 + 1 - 2 = 0$$

وبالتالي المستويين متعامدين.

②

$$l_1 = dist(A, \mathcal{P}) = \frac{|1(2) + 1(1) - 2(2) - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$l_2 = dist(A, Q) = \frac{|1(2) + 1(1) + 1(2)|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

③

$$dist(A, d) = \sqrt{(dist(A, \mathcal{P}))^2 + (dist(A, Q))^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{9}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$$

دورة 2019 الثانية

تأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين

$B(-1, 2, 1)$ و $A(2, 1, -2)$

والمستوي $P: 3x - y - 3z - 8 = 0$

① أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

② اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)

ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

الحل:

دورة 2018 الأولى

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$C(4,0,0), B(1,2,1), A(1,1,0)$

① أثبت أن النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

② أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تُعطى بالعلاقة

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

③ ليكن المستويان P و Q معادلتهما:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in R$$

④ ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC)

⑤ احسب بُعد النقطة A عن المستقيم d.

الحل:

دورة 2019 الثانية

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$

والمستويات $\begin{cases} P: 2x-y+2z-2=0 \\ Q: x+y+z-1=0 \\ R: x-z-1=0 \end{cases}$

① أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك Δ.

اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

② تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

③ أثبت أن المستويات P و Q و R تتقاطع بنقطة I، عين إحداثياتها.

④ استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

الحل:

دورة 2022 الأولى

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$

والمستويان $\begin{cases} P: x-y+2z-1=0 \\ Q: 2x+y+z+1=0 \end{cases}$ والمطلوب:

① أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك d.

② اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

③ اكتب معادلة للمستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P و Q

④ جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R.

⑤ احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.

⑥ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

الحل:

تمرينات الوحدة الموافقة

10 ص 97

تأمل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O})$، ليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

① احسب إحداثيات G، وتحقق أنّ (OG) عمودي على (ABC).

نُعرف النقاط $C'(0,0,3), B'(0,2,0), A'(2,0,0)$

② اكتب معادلة للمستوي $(A'B'C')$.

③ أثبت أنّ $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وجد عدد k بحيث

$$\begin{cases} x = 1-k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$$

④ احسب إحداثيات النقطة K المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(A'B'C')$.

⑤ احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(A'B'C')$.

⑥ أثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL).

⑦ عين تقاطع المستويين $(A'B'C'),(ABC)$.

الحل:

①

بما أنّ $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ فتكون إحداثيات G

$$G\left(\frac{1+0+0}{3},\frac{0+1+0}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

حتى يكون (OG) عمودي على المستوي (ABC) يجب أن يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه:

$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{AB}(-1,1,0),\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot(0)+\left(\frac{1}{3}\right)(1)=0$$

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot(1)+\left(\frac{1}{3}\right)(0)=0$$

ومنه (OG) عمودي على المستوي (ABC).

②

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{A'B'}(-2,2,0)\\ \overrightarrow{A'C'}(-2,0,3)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{3}\right)$$

الشعاعان $\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

وبالتالي النقاط A' و B' و C' تشكل مستوٍ.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'B'}=0\Rightarrow -2a+2b=0 \qquad \ldots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'C'}=0\Rightarrow -2a+3c=0 \qquad \ldots ②$$

بفرض $c=2$

$$\begin{cases}-2a+2b=0 & \ldots ①\\ -2a+6=0 & \ldots ②\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{من } ②} a=3 \xRightarrow{\text{نعوض في } ①} b=3$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(3,3,2)$

$$\Rightarrow (A'B'C'): 3x+3y+2z+d=0$$
$$A'\in(A'B'C')\Rightarrow 6+0+0+d=0\Rightarrow d=-6$$
$$\Rightarrow (A'B'C'): 3x+3y+2z-6=0$$

③

$\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ شعاع موجهاً للمستقيم (AC) الذي يمر بالنقطة $A(1,0,0)$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{cases}x-1=-k\\ y-0=0\\ z-0=k\end{cases};k\in R\Rightarrow\begin{cases}x=1-k\\ y=0\\ z=k\end{cases};k\in R$$

④

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) في معادلة المستوي $(A'B'C')$

$$1-k+0+\frac{2}{3}k-2=0\Rightarrow k=-3$$

نعوض قيمة k في (AC)

$$\begin{cases}x=1-(-3)\\ y=0\\ z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=0\\ z=-3\end{cases};k(4,0,-3)$$

⑤

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC)

ونختار النقطة B $\vec{u} = \overrightarrow{BC}(0,-1,1)$

$$(BC):\begin{cases} x = 0 \\ y = -t+1 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in R$$

إيجاد إحداثيات النقطة L

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC) في معادلة المستوي $(A'B'C')$

$$0 - t + 1 + \frac{2}{3}t - 2 = 0 \Rightarrow t = -3$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 1 = 4 \Rightarrow L(0,4,-3) \\ z = -3 \end{cases}$$

⑥

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0), \overrightarrow{A'B'}(-2,2,0), \overrightarrow{KL}(-4,4,0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{KL} = 4\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{A'B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (KL) \setminus\setminus (AB) \\ (KL) \setminus\setminus (A'B') \end{matrix}$$

وبالتالي المستقيمات $(AB), (A'B'), (KL)$ متوازية.

⑦

$$\begin{matrix} k \in (AC) \subset (A'B'C') \\ L \in (BC) \subset (A'B'C') \\ (KL) \subset (A'B'C') \end{matrix} \qquad \begin{matrix} k \in (AC) \subset (ABC) \\ L \in (BC) \subset (ABC) \\ (KL) \subset (ABC) \end{matrix}$$

وبالتالي المستويان (ABC) و $(A'B'C')$ يتقاطعان

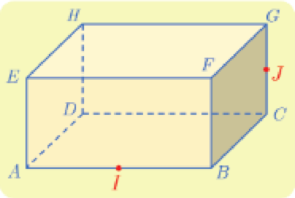
بالفصل المشترك (KL).

ن 11 ص 98

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$

و $BC = GC = 1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$

و J هي منتصف $[CG]$



نتأمل المعلم $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

① احسب المسافتين DJ و IJ.

② أثبت أن المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان. واحسب $\cos \widehat{IJD}$.

③ أعطِ معادلة للمستوي (DIJ).

④ احسب بُعد H عن المستوي (DIJ).

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

⑥ أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على (HDI).

⑦ احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI).

⑧ جد بُعد النقطة J عن المستوي (HDI).

الحل:

①

نوجد إحداثيات النقاط D, I, J

$$J\left(2,1,\frac{1}{2}\right) \quad , \quad D(0,1,0) \quad , \quad I(1,0,0)$$

$$\overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right) \qquad \overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$

$$IJ = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$DJ = \sqrt{4+0+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

②

$$\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DI} = -1 + 1 + 0 = 0$$

وبالتالي $(DI), (IJ)$ متعامدان.

$$\overrightarrow{JI}\left(-1,-1,\frac{-1}{2}\right) \quad , \quad \overrightarrow{JD}\left(-2,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JD} = \parallel \overrightarrow{JI} \parallel \cdot \parallel \overrightarrow{JD} \parallel \cdot \cos(\widehat{IJD})$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{IJD}) = \frac{\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JD}}{\parallel \overrightarrow{JI} \parallel \cdot \parallel \overrightarrow{JD} \parallel}$$

$$\cos(\widehat{IJD}) = \frac{2+0+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3\sqrt{17}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

③

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (DIJ)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{ID} = 0 \Rightarrow -a+b=0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{JI} = 0 \Rightarrow -a-b-\frac{1}{2}c=0 \quad \dots ②$$

بفرض $b=1$

$$\begin{cases} -a+1=0 & \dots ① \\ -a-1-\frac{1}{2}c=0 & \dots ② \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{من } ①} a=1 \xRightarrow{\text{نعوض في } ②} c=-4$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(1,1,-4)$

$$\Rightarrow (DIJ): x+y-4z+d=0$$
$$D\in(DIJ) \Rightarrow 0+1+0+d=0 \Rightarrow d=-1$$
$$\Rightarrow (DIJ): x+y-4z-1=0$$

④

$$H(0,1,1)$$

$$dist\,(H,(DIJ)) = \frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

⑤

$$v_{(HDIJ)} = \frac{1}{3}\cdot S\cdot h$$

S مساحة القاعدة (DIJ) (وهي مثلث قائم)

$$S_{(DIJ)} = \frac{[IJ]\times[ID]}{2} = \frac{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

h ارتفاع رباعي الوجوه (بعد H عن المستوي (DIJ))

$$v_{(HDIJ)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

⑥

أولاً نوجد معادلة المستوي (HDI)

$$\overrightarrow{HD}(0,0,-1), \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

الشعاعان $\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{ID}$ غير مرتبطان خطياً

وبالتالي النقاط H و D و I تشكل مستو.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HDI)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{HD} = 0 \Rightarrow -c=0 \quad \dots ①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{ID} = 0 \Rightarrow -a+b=0 \quad \dots ②$$

بفرض $b=1$

$$\begin{cases} -c=0 & \dots ① \\ -a+1=0 & \dots ② \end{cases}$$
$$\Rightarrow c=0 \Rightarrow a=1$$

ومنه ناظم المستوي $\vec{n}(1,1,0)$

$$\Rightarrow (HDI): x+y+d=0$$
$$D\in(HDI) \Rightarrow 0+1+d=0 \Rightarrow d=-1$$
$$\Rightarrow (HDI): x+y-1=0$$

بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (HDI) فإن

ناظم المستوي هو شعاع توجيه للمستقيم d

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}=\vec{n}(1,1,0)$ ومار بالنقطة $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

$$d: \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \quad ; t\in R \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

⑦

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي (HDI)

$$t+2+t+1-1=0 \Rightarrow t=-1$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم d فنجد

$$J'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

⑧

$$dist\,(J,(HDI)) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (HDI) ويقطعه في النقطة J'

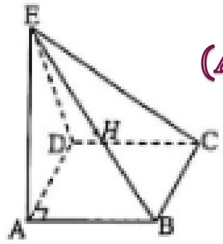
فإن $dist\,(H,(DIJ)) = JJ'$

$$= \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

دورة 2020 الأولى

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E، قاعدته مربع طول ضلعه 3

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$



نختار المعلم $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$

① عين إحداثيات A, B, C, D, E.

② جد معادلة المستوي (EBC).

③ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

④ استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC).

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$.

الحل:

0937375251

معادلة الأسطوانة في الفراغ

محورها $(o,\vec{i})$ مركزي قاعدتيها $A(x_1,0,0), A'(x_2,0,0)$ ونصف قطر قاعدتها r.

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$

محورها $(o,\vec{j})$ مركزي قاعدتيها $A(0,y_1,0), A'(0,y_2,0)$ ونصف قطر قاعدتها r.

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y_1 \le y \le y_2 \end{cases}$$

محورها $(o,\vec{k})$ مركزي قاعدتيها $A(0,0,z_1), A'(0,0,z_2)$ ونصف قطر قاعدتها r.

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_1 \le z \le z_2 \end{cases}$$

مثال

اكتب معادلة الأسطوانة في الحالات الآتية:

① محورها $(o,\vec{i})$ مركزي قاعدتيها $A(3,0,0), A'(6,0,0)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$.

$$\begin{cases} y^2+z^2=6 \\ 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

② محورها $(o,\vec{j})$ مركزي قاعدتيها $A(0,2,0), A'(0,7,0)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$.

$$\begin{cases} x^2+z^2=6 \\ 2 \le y \le 7 \end{cases}$$

③ محورها $(o,\vec{k})$ مركزي قاعدتيها $A(0,0,0), A'(0,0,5)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ 0 \le z \le 5 \end{cases}$$

معادلة المخروط في الفراغ

رأسه O ومحوره $(o,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(a,0,0)$ ونصف قطرها r

$$\begin{cases} y^2+z^2-\dfrac{r^2}{a^2}x^2=0 \\ 0 \le x \le a \end{cases}$$

رأسه O ومحوره $(o,\vec{j})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,a,0)$ ونصف قطرها r

$$\begin{cases} x^2+z^2-\dfrac{r^2}{a^2}y^2=0 \\ 0 \le y \le a \end{cases}$$

رأسه O ومحوره $(o,\vec{k})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,0,a)$ ونصف قطرها r

$$\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{r^2}{a^2}z^2=0 \\ 0 \le z \le a \end{cases}$$

مثال

اكتب معادلة المخروط في الحالات الآتية:

① رأسه O ومحوره $(o,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(5,0,0)$ ونصف قطرها 3.

$$\begin{cases} y^2+z^2-\dfrac{9}{25}x^2=0 \\ 0 \le x \le 5 \end{cases}$$

② رأسه O ومحوره $(o,\vec{j})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,4,0)$ ونصف قطرها 3.

$$\begin{cases} x^2+z^2-\dfrac{9}{16}y^2=0 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

③ رأسه O ومحوره $(o,\vec{k})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,0,3)$ ونصف قطرها 2.

$$\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{4}{9}z^2=0 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

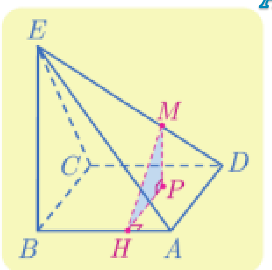
تمرينات الوحدة الشاردة

08 ص 39

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $AB = 4, EB = 4\sqrt{2}$

M نقطة من القطعة $[ED]$ تُحقق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$ ولتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB)

احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.



الحل:

نختار المعلم $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عندئذٍ تكون إحداثيات النقاط

$$A(4,0,0) \quad E(0,0,4\sqrt{2}) \quad B(0,0,0)$$
$$D(4,4,0) \quad C(0,4,0)$$

نفرض $M(x,y,z)$ ولدينا $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

$$3\begin{bmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x-12 \\ 3y-12 \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 3x-12=-4 \\ 3y-12=-4 \\ 3z=4\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=\frac{8}{3} \\ z=\frac{8}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{matrix}\right\} M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

بما أن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ فإن:

$$P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$$

بما أن H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (BA) فإن:

$$H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$$

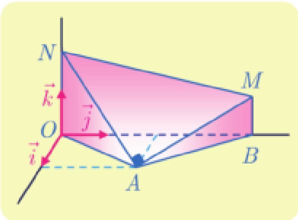
وبالتالي

$$MH = \sqrt{0+\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \sqrt{\frac{16\times 6}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

20 ص 42

n و m عددان حقيقيان موجبان يُحققان $0 < m < n$ نتأمل النقاط $N(0,0,n), M(0,6,m), B(0,6,0), A(\sqrt{3},3,0)$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن n و m ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.

الحل:



المثلث MAN قائم في A حيث

$$\overrightarrow{MN}(0,-6,n-m) \Rightarrow MN^2 = 36+(m-n)^2$$
$$\overrightarrow{AM}(-\sqrt{3},3,m) \Rightarrow AM^2 = m^2+12$$
$$\overrightarrow{AN}(-\sqrt{3},-3,n) \Rightarrow AN^2 = n^2+12$$

حسب فيثاغورث في المثلث القائم

$$MN^2 = AM^2 + AN^2$$
$$0+36+(n-m)^2 = 3+9+m^2+3+9+n^2$$
$$36+n^2-2nm+m^2-24-m^2-n^2 = 0$$
$$-2n\cdot m = -12 \Rightarrow n\cdot m = 6 \quad \dots ①$$

القاعدة شبه منحرف قائم

$$S_{OBMN} = \left(\frac{MB+NO}{2}\right)BO$$
$$\overrightarrow{MB}(0,0,-m) \Rightarrow MB = m$$
$$\overrightarrow{NO}(0,0,-n) \Rightarrow NO = n$$
$$\overrightarrow{BO}(0,-6,0) \Rightarrow BO = 6$$
$$\Rightarrow S_{OBMN} = \left(\frac{m+n}{2}\right)(6) = 3(m+n)$$

ارتفاع المجسم هو بعد النقطة A عن $OBMN$:

$$h = AA' = \sqrt{3} \qquad ; A'(0,3,0)$$
$$V_{AOBMN} = \frac{1}{3}\cdot S_{OBMN}\cdot h$$
$$\Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot 3(m+n)\cdot\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 5 = m+n \quad \dots ②$$

بالحل المشترك للمعادلتين ① و ②

$$\left.\begin{matrix} m.n = 6 \\ m+n = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n = 3 \ \& \ m = 2$$

0937375251

25 ص 72

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط

$D(0,0,-3), C(3,-3,-1), B(2,2,2), A(4,0,-3)$

① أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$.

② أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$.

③ أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$.

④ علل لماذا إذا تقاطعت المستويات $\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1$ في نقطة واحدة Ω

كانت Ω مركزاً لكرة تمر بالنقاط D,C,B,A.

⑤ بحل جملة من ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل أثبت أن المستويات

$\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1$ تتقاطع في نقطة واحدة Ω.

⑥ احسب نصف قطر الكرة S المارة بالنقاط D,C,B,A.

⑦ اكتب معادلة الكرة S المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

①

M_1 منتصف $[AB]$ إحداثياتها $M_1\left(3,1,-\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}=\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$$

$$-2(x-3)+2(y-1)+5\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\mathcal{P}_1 : -2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$$

②

M_2 منتصف $[BC]$ إحداثياتها $M_2\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_2}}=\overrightarrow{BC}(1,-5,-3)$$

$$1\left(x-\frac{5}{2}\right)-5\left(y+\frac{1}{2}\right)-3\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\mathcal{P}_2 : x-5y-3z-\frac{7}{2}=0$$

③

M_3 منتصف $[AB]$ إحداثياتها $M_3\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_3}}=\overrightarrow{CD}(-3,3,-2)$$

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y+\frac{3}{2}\right)-2(z+2)=0$$

$$\mathcal{P}_3 : -3x+3y-2z+5=0$$

④

إذا تقاطعت المستويات $\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1$ في نقطة Ω فهي تُحقق

$$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$$

إذاً Ω مركز الكرة المارة بالنقاط D,C,B,A.

⑤

$$\begin{cases} x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1\\ -2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0 & L_2\\ -3x+3y-2z+5=0 & L_3\end{cases}$$

نجري التحويلات

$2L_1+L_2$ و $3L_1+L_3$

$$\begin{cases} x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1\\ -8y-z-\frac{1}{2}=0 & L'_2\\ -12y-11z-\frac{11}{2}=0 & L'_3\end{cases}$$

نجري التحويل

$-\frac{12}{8}L'_2+L'_3$

$$\begin{cases} x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1\\ -8y-z-\frac{1}{2}=0 & L'_2\\ -\frac{19}{2}z-\frac{19}{4}=0 & L''_3\end{cases}$$

من المعادلة L''_3 نجد

$$-\frac{19}{2}z-\frac{19}{4}=0\Rightarrow-\frac{19}{2}z=\frac{19}{4}\Rightarrow z=-\frac{1}{2}$$

وبالتالي للجملة حل وحيد والمستويات تتقاطع في نقطة وحيدة.

إيجاد إحداثيات نقطة التقاطع

نعوض $z=-\frac{1}{2}$ في المعادلة L'_2

$$\Rightarrow -8y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y=0$$

نعوض $z=-\frac{1}{2}$ و $y=0$ في L_1

$$\Rightarrow x-5(0)-3(-\frac{1}{2})-\frac{7}{2}=0 \Rightarrow x=2$$

نقطة التقاطع

$$\Omega\left(2,0,-\frac{1}{2}\right)$$

6

$$R=\Omega D$$

$$R=\sqrt{4+0+\left(-3+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}$$

7

$$S:(x-2)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{41}{4}$$

0937375251

مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

أولاً: مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

مبرهنة الوجود:

ليكن لدينا النقطتان المثقلتان $(A,\alpha),(B,\beta)$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

عندئذٍ توجد نقطة وحيدة G تُحقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$.

أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

نستفيد من هذه المبرهنة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط.

علاقة الإنشاء:

لإنشاء مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ نُطبق

$$\begin{cases}\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}\end{cases}$$

خواص مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

- إذا كان $\alpha+\beta=0$ عندئذٍ مركز الأبعاد غير موجود.
- إذا كان $\alpha=\beta$ عندئذٍ مركز الأبعاد G هو منتصف $[AB]$.
- المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-t),(B,t)$ عندما $t\in\mathcal{R}$.

يكفي إثبات أن إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين.

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة G:

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\\ z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\end{cases}$$

مثال (1):

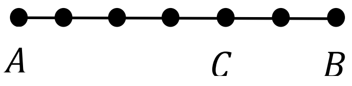
عين α و β حتى تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ المحققة للعلاقة الآتية:

$$2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{GB}-3[\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}]=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

ومنه $(A,3),(B,-1)$ حيث $\beta=-1,\alpha=3$

مثال (2):

عين في كل من الحالات الآتية عددين α و β يحققان الشرط المعطى:



① A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\beta),(C,\gamma)$

طريقة (1)

من الشكل نجد

$$\overrightarrow{BA}=\frac{6}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{1}\overrightarrow{BC}$$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء

$$\overrightarrow{BA}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

نجد:

$$\gamma=3\quad\&\quad\beta=-2$$

طريقة (2)

$$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{6}\overrightarrow{AB}\Rightarrow 6\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}\Rightarrow 3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

وبالتالي

$$\gamma=3\quad\&\quad\beta=-2$$

② C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$

$$\overrightarrow{CB}=\frac{-2}{4}\overrightarrow{CA}\Rightarrow 4\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}\Rightarrow 2\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}$$
$$2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

وبالتالي

$$\alpha=1\quad\&\quad\beta=2$$

ثانياً: مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

مبرهنة الوجود:

ليكن لدينا النقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة G تُحقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

- أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

علاقة الإنشاء:

لإنشاء مركز الأبعاد G للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

خواص مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

- إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ عندئذٍ مركز الأبعاد G للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ هو مركز ثقل المثلث ABC.
- يفيد في إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.
- إن انتماء G إلى المستوي المعرف بشعاعي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ والمحدد بالعلاقة $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ يكافئ وجود عددين y,x بحيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y),(B,x)(C,y)$
- الخاصة التجميعية:

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,\gamma),(B,\beta),(A,\alpha)$

وكان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\beta),(A,\alpha)$

عندئذٍ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(H,\alpha+\beta)$

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة G

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\ z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$$

مثال (1):

عين α و β و γ حتى تكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ المحققة للعلاقة الآتية:

① $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

طريقة (1)

$$(A,1-2-1),(B,2),(C,1)$$
$$(A,-2),(B,2),(C,1)$$

طريقة (2)

$$\overrightarrow{AM}=2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$
$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}++\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow -2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}++\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وبالتالي M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$$(A,-2),(B,2),(C,1)$$

② $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

$$(A,2),(C,-1),(B,1-2+1)$$
$$(A,2),(C,-1),(B,0)$$

مثال (2):

أنشئ مركز الأبعاد المتناسبة G للنقاط $(A,1),(B,2),(C,4)$

ننشئ H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,4),(B,2)$

حيث $(2+4\neq 0)$ فيكون $\overrightarrow{BH}=\frac{4}{6}\overrightarrow{BC}$

ننشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(H,6)$

حيث $(6+1\neq 0)$ فيكون $\overrightarrow{AG}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AH}$

حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(B,2),(C,4),(A,1)$$

0937375251

ثالثاً: مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط:

ليكن لدينا النقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$ حيث $(\alpha=\beta=\gamma=\delta\neq 0)$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة G تُحقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

- أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$$

خواص مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط:

- إذا كان $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$ عندئذٍ مركز الأبعاد G للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$ هو مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.
- يفيد في إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.
- الخاصة التجميعية:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$$

H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

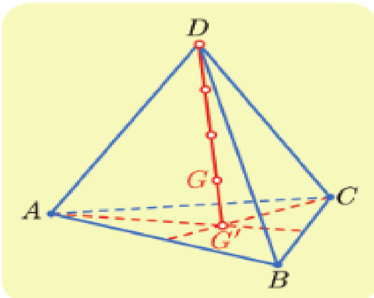
عندئذٍ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,\delta),(H,\alpha+\beta+\gamma)$

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة G:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\end{cases}$$

مثال (1):

$ABCD$ رباعي وجوه، أوجد G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$



الحل:

ليكن G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,1),(B,1),(C,1)$

ومنه G' مركز ثقل المثلث ABC (مركز ثقل المثلث ABC)

حسب الخاصة التجميعية:

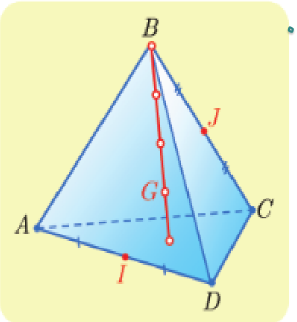
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G',3),(D,1)$ وبالتالي

$$\overrightarrow{G'G}=\frac{1}{4}\overrightarrow{G'D}$$

ونسمي G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ وهي تقع على القطعة المستقيمة $[G'D]$.

مثال (2):

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G. I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$ أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة.



الحل:

بما أن I منتصف $[AD]$ فهي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

$(A,1),(D,1)$

بما أن J منتصف $[BC]$ فهي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

$(B,1),(C,1)$

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

حسب الخاصة التجميعية:

فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(1,2),(1,2)$

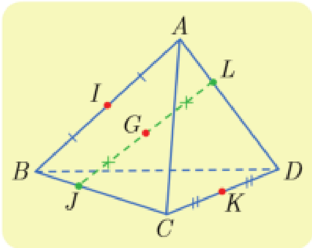
وبالتالي النقاط I,J,G تقع على استقامة واحدة.

مثال (3):

$ABCD$ رباعي وجوه، k و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$

و J و L نقطتان معرفتان بالعلاقتين

$$\begin{cases} \overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \end{cases}$$



وأخيراً G هي منتصف $[JL]$

أثبت أن النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لدينا $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ وبالتالي

L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(D,1)$ ومنه $(L,3)$

لدينا $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ وبالتالي

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1),(B,2)$ ومنه $(J,3)$

بما أن G منتصف $[JL]$ فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

$(J,3),(L,3)$

حسب الخاصة التجميعية:

G مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(D,1),(C,1),(B,2),(A,2)$

بما أن I منتصف $[AB]$ فإن I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

$(B,2),(A,2)$

بما أن K منتصف $[CD]$ فإن K مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

$(D,1),(C,1)$

حسب الخاصة التجميعية:

تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4),(K,2)$

وبالتالي النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة.

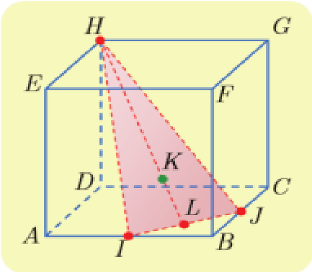
مثال (4):

$ABCDEFGH$ مكعب I و J منتصفا الحرفين

$[AB]$ و $[BC]$

و K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,1),(B,2),(A,1)$

$(H,1)$. أثبت وقوع النقاط H,K,J,I في مستوٍ واحد.



الحل:

لدينا I منتصف $[AB]$ وبالتالي

I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$

لدينا J منتصف $[BC]$ وبالتالي

J مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(B,1)$

بما أن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

أي أن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,1)$ و $(B,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

حسب الخاصة التجميعية:

K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

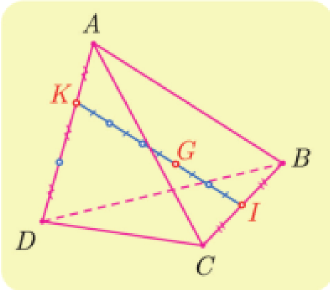
$(I,2)$ و $(J,2)$ و $(H,1)$

وبالتالي النقاط H,K,J,I تقع في مستوٍ واحد.

0937375251

تدرب صفحة 31

① بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور عين الأعداد الأربعة a و b و c و d ليتحقق ما يأتي:



① K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,d),(A,a)$

من الشكل نجد:

$$\left.\begin{array}{l}2\overrightarrow{KA}+1\overrightarrow{KD}=\vec{0}\\ a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}=\vec{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2\\ d=1\end{array}\right\}\Rightarrow(K,3)$$

② I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,c),(B,b)$

من الشكل نجد:

$$\left\{\begin{array}{l}1\overrightarrow{IB}+1\overrightarrow{IC}=\vec{0}\\ b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=1\\ c=1\end{array}\right\}\Rightarrow(I,2)$$

③ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d)

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2),(I,3)$

نضرب المثقلات ب 6 فيكون

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(C,9),(B,9),(D,4),(A,8)$

② عين مركز ثقل المثلث ABC في حالة

$C(6,3,-5),B(-2,1,0),A(-4,-1,2)$

الحل:

$$\left\{\begin{array}{l}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=0\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=1\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow G(0,1,-1)$$

③ لدينا ثلاث نقاط في الفراغ A و B و C.

① أثبت وجود نقطة وحيدة M تُحقق $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

من العلاقة نلاحظ أن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(C,-1),(B,1),(A,1)$

وبالتالي M هي نقطة وحيدة.

② ما القول عن M عندما تكون A و B و C على استقامة واحدة.

من العلاقة السابقة:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{MA}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$$

وبالتالي النقاط A,M,C,B تقع على استقامة واحدة.

③ ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما لا تقع A و B و C على استقامة واحدة.

بما أن $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$ والنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فإن الرباعي $ACBM$ متوازي أضلاع.

④ ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1 لتكن I,J,K,L النقاط المعرفة بالعلاقات

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}\end{array}\right.$$

① أثبت أن $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ واستنتج أن النقاط الأربع I,J,K,L تقع في مستوٍ واحد.

② ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$.

الحل:

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=k\overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CK}=-k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CD}=k(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=k\overrightarrow{BD}$$

وبالتالي $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ أي أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$

فالشعاعان مرتبطان خطياً ومنه النقاط I,J,K,L تقع في مستوٍ واحد.

بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ فالرباعي $IJKL$ متوازي أضلاع.

تدرب صفحة 80

① النقطتان A و B نقطتان مختلفتان.

في الحالات الآتية عين t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

① M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(A,-2)$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-1}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -1\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow t = -1$$

② M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3),(A,2)$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{5}$$

② أعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β).

① $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

$$\left.\begin{array}{l}\beta = 2\\ \alpha+\beta = 7\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\beta = 2\\ \alpha = 5\end{array}$$

② $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta = -1\\ \alpha+\beta = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\beta = -1\\ \alpha = 3\end{array}$$

③ $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta = -3\\ \alpha+\beta = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\beta = -3\\ \alpha = 4\end{array}$$

③ في الشكل الآتي التدرجات متساوية. عبر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.

①

A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(B,\beta)$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

وبالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-3),(B,5)$

B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(A,\alpha)$

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{-3}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

وبالتالي B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,3),(A,2)$

C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\beta),(A,\alpha)$

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

وبالتالي C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,-5),(A,2)$

②

A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(B,\beta)$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{2}{-4} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

وبالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1),(B,2)$

B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(A,\alpha)$

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{2}{6} \Rightarrow 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

وبالتالي B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-1),(A,3)$

C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\beta),(A,\alpha)$

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{4}{6} \Rightarrow 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

وبالتالي C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,-2),(A,3)$

④ تأمل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جد عددين x و y بحيث

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

① M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1),(B,1),(C,1)$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

② M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3),(B,1),(C,2)$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$x = \frac{1}{6} \quad , \quad y = \frac{1}{3}$$

⑤ تأمل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي جد الأعداد α,β,γ

لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

① $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$
$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$$
$$0\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$0\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$(A,0),(B,2),(C,-1)$$

② $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC})$$
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}$$
$$-\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$(A,1),(B,1),(C,-1)$$

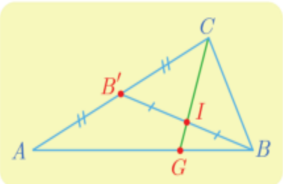
③ $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CM} = 3(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}) + 2(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB})$$
$$\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{MB}$$
$$4\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$(A,3),(B,2),(C,-4)$$

④ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\left(A,\frac{1}{2}\right),(B,1),\left(C,\frac{1}{2}\right)$$

⑥ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α,β,γ



تكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

الحل:

B' منتصف $[AC]$ وبالتالي

B' مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,1),(C,1)$ ومنه $(B',2)$

I منتصف $[BB']$ وبالتالي

I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(B,2),(B',2)$ ومنه $(I,4)$

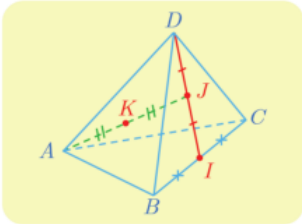
وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1)$

بما أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AB) فإن G

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(B,2)$ عندئذٍ

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\ \overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = 2$$

⑦ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D, \delta), (C, \gamma), (B, \beta), (A, \alpha)$



الحل:

I منتصف $[BC]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, 1), (B, 1)$ ومنه $(I, 2)$.

J منتصف $[DI]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2), (D, 2)$ ومنه $(J, 4)$.

K منتصف $[AJ]$ وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J, 4), (A, 4)$ ومنه $(K, 8)$.

حسب الخاصة التجميعية:

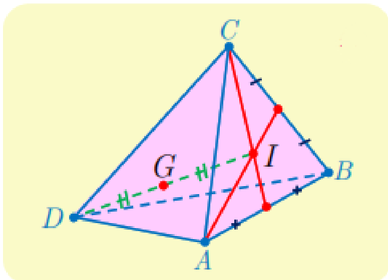
K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D, 2), (C, 1), (B, 1), (A, 4)$

⑧ $ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

① G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D, 3)$ و $(C, 1)$ و $(B, 1)$ و $(A, 1)$



لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C, 1), (B, 1), (A, 1)$

وهي مركز ثقل المثلث ABC ومنه $(I, 3)$

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D, 3), (I, 3)$

وهو منتصف $[DI]$

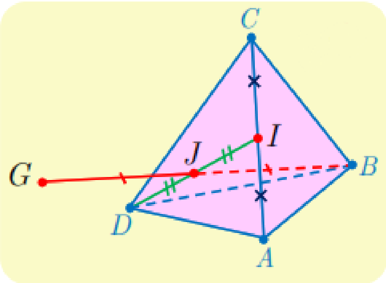
حسب الخاصة التجميعية:

يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D, 3), (C, 1), (B, 1), (A, 1)$

② G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D, -2)$ و $(C, -1)$ و $(B, 2)$ و $(A, -1)$



لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, -1), (A, -1)$

وهي منتصف $[AC]$ ومنه $(I, -2)$

لتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, -2), (D, -2)$

وهي منتصف $[DI]$ ومنه $(J, -4)$

لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J, -4), (B, 2)$

ومنه $(G, -2)$

حسب الخاصة التجميعية:

يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

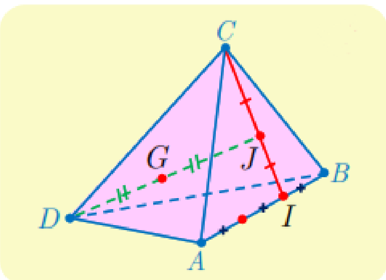
$(D, -2), (C, -1), (B, 2), (A, -1)$

ويحقق

$$\overrightarrow{BG} = \frac{-4}{-2}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BJ}$$

③ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

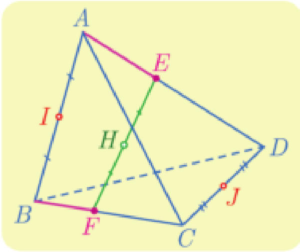
$(D, 6)$ و $(C, 3)$ و $(B, 2)$ و $(A, 1)$



تمرينات الوحدة الموافقة

09 ص 40

$ABCD$ رباعي وجوه و a عدد حقيقي I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ و E و F تُحققان $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$



أثبت أن I, J, H تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لدينا $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ وبالتالي F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, a), (B, 1-a)$ وتكون $(F, 1)$.

لدينا $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$ وبالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D, a), (A, 1-a)$ وتكون $(E, 1)$.

بما أن H منتصف $[EF]$ فإن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F, 1), (E, 1)$

حسب الخاصة التجميعية:

H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C, a), (D, a), (B, 1-a), (A, 1-a)$

I منتصف $[AB]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, 1-a), (A, 1-a)$ ومنه $(I, 2-2a)$.

J منتصف $[CD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D, a), (C, a)$ ومنه $(J, 2a)$.

بما أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط D, C, B, A

حسب الخاصة التجميعية: فإن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2-2a), (J, 2a)$

ومنه النقاط J, I, H تقع على استقامة واحدة.

21 ص 43

تأمل رباعي وجوه $ABCD$، ونقطتين E و F معرفتين وفق $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D, 2), (C, 1)$ و $(B, 3), (A, 1)$ يقع على $[EF]$. ثم عين النقطة G على $[EF]$.

الحل:

لدينا $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ وبالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, 1), (B, 3)$ وتكون $(E, 4)$.

لدينا $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ وبالتالي F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D, 2), (A, 1)$ وتكون $(F, 3)$.

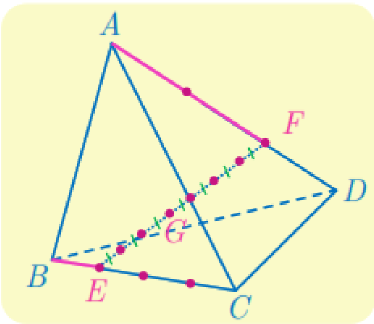
بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D, 2), (C, 1), (B, 3), (A, 1)$

حسب الخاصة التجميعية:

فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F, 3), (E, 4)$

فهي إذاً تقع على القطعة المستقيمة $[EF]$

$$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$



25 ص 44

تأمل مكعباً $ABCDEFGH$ والنقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب، والنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(E,1),(G,1),(B,1),(A,1)$

① أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$، وعين موضعها على هذه القطعة.

② أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$، وعين موضعها على هذه القطعة.

③ استنتج أن I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد وعين طبيعة الرباعي $ILJK$

الحل:

①

I منتصف $[AE]$, وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(E,1),(A,1)$$

J منتصف $[BG]$, وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(G,1),(B,1)$$

وبما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(E,1),(G,1),(B,1),(A,1)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن:

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(1,2),(1,2)$ إذاً $M\in[IJ]$

وبما أن I و J لهما نفس التثقيل فإن M منتصف $[IJ]$.

②

k منتصف $[EG]$, وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(G,1),(E,1)$$

L منتصف $[AB]$, وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(B,1),(A,1)$$

وبما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(E,1),(G,1),(B,1),(A,1)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن:

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(k,2),(L,2)$ إذاً $M\in[kL]$

وبما أن K و L لهما نفس التثقيل فإن M منتصف $[kL]$.

③

إن النقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين $(IJ),(kL)$ فإن المستقيمين يعينان مستوٍ. فالنقاط L,k,J,I تقع في مستوٍ واحد.

والشكل الرباعي $ILJK$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

01 ص 4

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن α عدداً حقيقياً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$

وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

① تحقق أن E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,\alpha),(A,1-\alpha)$ وكذلك F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\alpha),(B,1-\alpha)$.

② أثبت أن النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (D,α) و (C,α) و $(B,1-\alpha)$ و $(A,1-\alpha)$

③ استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

الحل:

①

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\alpha(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})$$
$$\Rightarrow-\overrightarrow{EA}=\alpha\overrightarrow{AE}+\alpha\overrightarrow{ED}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{EA}-\alpha\overrightarrow{EA}+\alpha\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow(1-\alpha)\overrightarrow{EA}+\alpha\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$

وبالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

$$\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BF}=\alpha(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})$$
$$\Rightarrow-\overrightarrow{FB}=\alpha\overrightarrow{BF}+\alpha\overrightarrow{FC}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{FB}-\alpha\overrightarrow{FB}+\alpha\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow(1-\alpha)\overrightarrow{FB}+\alpha\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$

وبالتالي F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

②

بما أن H منتصف $[EF]$ وبالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(F,1),(E,1)$$

مما سبق لدينا

E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

حسب الخاصة التجميعية:

يكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$$

③

لدينا H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$$

I منتصف $[AB]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$$

J منتصف $[CD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(D,\alpha),(C,\alpha)$$

حسب الخاصة التجميعية

يكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(J,2\alpha),(I,2-2\alpha)$

ومنه النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

02 ص 4 ω

$ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أن النقاط D,C,B,M تقع في مستوٍ واحد ثم وضع النقطة M.

① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1),(C,1),(B,1)$

وبالتالي النقاط D,C,B,M تقع في مستوٍ واحد .

وتكون M مركز ثقل المثلث BCD .

② $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB}+2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD})=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$$
$$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1),(C,1),(B,1)$

وبالتالي النقاط D,C,B,M تقع في مستوٍ واحد .

وتكون M في منتصف المتوسط المرسوم من الرأس D في المثلث BCD .

03 ص 4 ω

نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نُعطى النقطتين $.B(4,3,-3),A(1,0,0)$

① أثبت أن مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\alpha),(A,1-\alpha)$ عندما تتحول α في $\mathbb{R}$ هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $.\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

② أثبت أن مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(O,y),(B,x),(A,1-x-y)$ عندما تتحول x و y في $\mathbb{R}$ هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه

الحل:

①

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\alpha),(A,1-\alpha)$

أياً كانت $M(x,y,z)$ من الفراغ فإن: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\alpha+1\\y=3\alpha\\z=-3\alpha\end{cases};\alpha\in R$$

المعادلات تمثل جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة A

والموجه بالشعاع $\overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

ولكن $\overrightarrow{AB}=3(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$

أي أنه هو نفسه المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

2

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(0,y),(B,x),(A,1-x-y)$

وبالتالي حسب علاقة الإنشاء $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AO}$

المعادلة السابقة تمثل معادلة المستوي المار بالنقطة O والموجه بالشعاعين

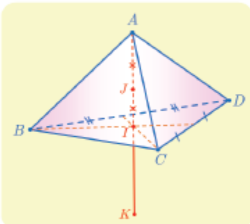
$\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AB}$ ونلاحظ أن $\overrightarrow{AB}=3(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ و $\overrightarrow{AO}=-(\vec{i})$

وبالتالي المستوي السابق هو نفسه المستوي المار بالنقطة O ويقبل

$\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه.

04 ص 94

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه، وليكن I مركز ثقل المثلث BCD و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I عبر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.



الحل:

بما أن I مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D,1),(C,1),(B,1)$ وعندها يكون $(I,3)$

بما أن J منتصف $[AI]$ فإن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(A,3),(I,3)$$

حسب الخاصة التجميعية:

يكون J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(D,1),(C,1),(B,1),(A,3)$$

K نظيرة A بالنسبة لـ I وبالتالي

$$\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KI}=\vec{0} \Leftarrow \overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{KI}$$

بما أن $(I,3)$ نضرب طرفي العلاقة بـ $\frac{-3}{2}$ ومنه

$$\frac{-3}{2}\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KI}=\vec{0}$$

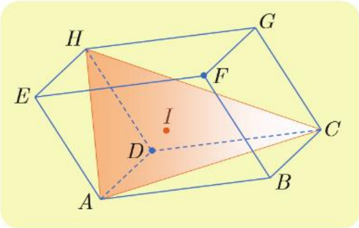
وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,3),\left(A,\frac{-3}{2}\right)$

حسب الخاصة التجميعية يكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(D,1),(C,1),(B,1),\left(A,\frac{-3}{2}\right)$$

05 ص 95

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، وليكن I مركز ثقل المثلث AHC. أثبت أن النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة.



عيّن موقع I على $[DF]$.

الحل:

بما أن I مركز ثقل المثلث AHC فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,1),(H,1),(C,1)$$

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

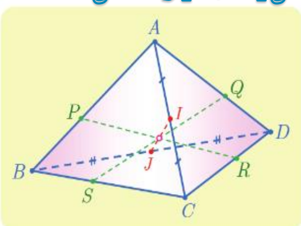
$$3\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DF}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DI}$$

شعاع نتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DF}$ مرتبطان خطياً وبالتالي النقاط I,D,F تقع على استقامة واحدة.

06 ص 95

تأمل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$ ولتكن النقاط التي تحقق S,R,Q,P



$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.

الحل:

لدينا $\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$ وبالتالي R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,1-x),(D,x)$ ويكون $(R,1)$

لدينا $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ وبالتالي P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A,1-x),(B,x)$ ويكون $(P,1)$

بما أن النقاط $(D,x),(C,1-x),(B,x),(A,1-x)$

مجموع تثقيلاتها غير معدوم فإنه يوجد لها مركز أبعاد وحيد وليكن G

حسب الخاصة التجميعية

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1),(R,1)$ وهي منتصف $[PR]$

لدينا $\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$ وبالتالي S مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,1-x),(B,x)$ ويكون $(S,1)$

لدينا $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$ وبالتالي Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A,1-x),(D,x)$ ويكون $(Q,1)$

بما أن النقاط $(D,x),(C,1-x),(B,x),(A,1-x)$

مجموع تثقيلاتها غير معدوم فإنه يوجد نقطة لها مركز أبعاد وحيد وليكن G

حسب الخاصة التجميعية

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(S,1),(Q,1)$ وهي منتصف $[QS]$

لدينا I منتصف $[AC]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A,1-x),(C,1-x)$ ويكون $(I,2-2x)$

لدينا J منتصف $[BD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(D,x),(B,x)$ ويكون $(J,2x)$

بما أن النقاط $(D,x),(C,1-x),(B,x),(A,1-x)$

مجموع تثقيلاتها غير معدوم فإنه يوجد نقطة لها مركز أبعاد وحيد وليكن G

حسب الخاصة التجميعية

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(1,2x),(1,2-2x)$

وبالتالي نستنتج أن المستقيمات $[PR],[QS],[JI]$ تتقاطع في نقطة واحدة هي G.

07 ص 6 ω

تأمل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

وأخيراً I هي منتصف $[AD]$ و J هي منتصف $[BC]$

نعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D,2),(C,1),(B,1),(A,2)$

① أثبت أن النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

② أثبت أن النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

③ استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

الحل:

①

بما أن I منتصف $[AD]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(D,2),(A,2)$ ويكون $(I,4)$.

بما أن J منتصف $[BC]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,1),(B,1)$ ويكون $(J,2)$.

وبما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(D,2),(C,1),(B,1),(A,2)$

حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(I,4),(J,2)$ وبالتالي النقاط تقع على استقامة واحدة.

②

لدينا $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A,2),(B,1)$ ويكون $(K,3)$

لدينا $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ وبالتالي L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,1),(D,2)$ ويكون $(L,3)$

حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(L,3),(K,3)$ وبالتالي النقاط تقع على استقامة واحدة.

③

مما سبق نجد أن المستقيمان $[IJ],[LK]$ يتقاطعان في نقطة واحدة G فهما يعينان مستوٍ وحيد.

ومنه النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

مجموعات النقاط في الفراغ

- $\| \overrightarrow{MA} \| = B$ تُمثل كرة مركزها A ونصف قطرها k.
- $\| \overrightarrow{MA} \| = \| \overrightarrow{BA} \|$ تُمثل كرة مركزها A ونصف قطرها AB
- $\| \overrightarrow{MA} \| = \| \overrightarrow{MB} \|$ تُمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ تُمثل كرة مركزها منتصف $[AB]$ وقطرها AB
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ تُمثل مستوٍ مار من A ويقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظم له.

22 ص 4 σ

تأمل رباعي وجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق

$$\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD} \text{ و } \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$

① أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

② أثبت أنه أياً كانت النقطة M من الفراغ كان

$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ} \text{ و } \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

③ جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \| = \| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \|$$

الحل:

① لنفرض جدلاً أن I منطبقة على J أي أن $(I = J)$ وبالتالي

$$\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{ID} \text{ ، } \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$

بطرح العلاقتين نجد

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{ID}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{DB}$$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{CA}$ مرتبطان خطياً أي أن $[CA], [DB]$ حرفان متوازيان في رباعي الوجوه وهذه تناقض، ومنه I لا تنطبق على J

② لدينا $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ ومنه $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-2)$

أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

لدينا $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$ ومنه $\overrightarrow{JC} - 2\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,-2)$

أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

③

لتكن G مركز ثقل المثلث BCD فإنه أياً كانت النقطة M من الفراغ

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$
$$-\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = -3\overrightarrow{MG}$$

نعوض في العلاقة فنجد

$$\| 3\overrightarrow{MG} \| = \| 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG} \|$$
$$3 \| \overrightarrow{MG} \| = 3 \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} \|$$
$$\| \overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{GA} \|$$

ومنه مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

26 ص 71

تأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. وعدداً موجباً غير معدوم k

نعرف $\mathcal{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق الشرط $AM = k \cdot BM$

① حالة $k = 1$:

① لتكن I منتصف $[AB]$ أثبت أن

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \frac{MA^2 - MB^2}{2}$$

② استنتج أن $\mathcal{E}_1$ هي المستوي $\mathcal{P}$ المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

والعمودي على (AB) (المستوي المحوري للقطعة $[AB]$)

① حالة $k \neq 1$:

③ لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1), (B,k)$

ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1), (B,-k)$

أثبت أن

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{1-k^2}(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})$$
$$= \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1-k^2}$$

④ استنتج أن $\mathcal{E}_k$ هي الكرة $\mathcal{S}$ التي تقبل القطعة المستقيمة $[IJ]$ قطراً لها

الحل:

① بما أن I منتصف AB فإن $\overrightarrow{MI} = \left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}\right)$

$$L_1 = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI} = (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = L_2$$
$$= \frac{MA^2 - MB^2}{2} = L_3$$

②

$M \in \varepsilon_1$ يكافئ الشرط $MA = MB$ ومنه فإن $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI} = 0$

ومنه M تنتمي إلى المستوي المار بالنقطة I العمودي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$

فهو إذاً المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

③

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k) فإن:

$$\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MI}$$

نقسم الطرفين على $(1+k) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA} + k\cdot\overrightarrow{MB}}{1+k} = \overrightarrow{MI} \quad \dots ①$$

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$ فإن:

$$\overrightarrow{JA} - k\overrightarrow{JB} = \vec{0}$$

أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن:

$$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MJ}$$

نقسم الطرفين على $(1-k) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA} - k\cdot\overrightarrow{MB}}{1-k} = \overrightarrow{MJ} \quad \dots ②$$

بضرب العلاقتين ① و ② نجد:

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = \left[\frac{\overrightarrow{MA} + k\cdot\overrightarrow{MB}}{1+k}\right]\left[\frac{\overrightarrow{MA} - k\cdot\overrightarrow{MB}}{1-k}\right]$$
$$= \frac{MA^2 - k^2\cdot MB^2}{1-k^2} = L_2$$

④ لدينا $M \in \Sigma_k$ و $AM = k\cdot BM$ ومنه فإن $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$

وبالتالي M تنتمي إلى كرة قطرها $[IJ]$.

09 ص 97

تأمل ثلاث نقاط A, B, C من الفراغ وعدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$

نرمز إلى م.أ. G_k للنقاط (A, k^2+1) و $(B,k), (C,-k)$

① مثل النقاط A, B, C و I منتصف $[BC]$ وأنشئ G_1 و G_{-1} .

② أثبت أنه مهما كان العدد k من المجال $[-1,1]$ كان

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$$

ثم ادرس تغيرات التابع f المعرف على المجال $[-1,1]$ بالصيغة

$$f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$$

ثم استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحول k في المجال $[-1,1]$

③ عين المجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط M التي تحقق

$$\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$$

④ عين المجموعة $\mathcal{F}$ المكونة من النقاط M التي تحقق

$$\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$$

الحل:

①

G_k م.أ. للنقاط (A, k^2+1) و $(B,k), (C,-k)$

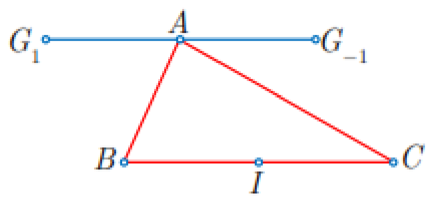
$$(k^2+1)\cdot\overrightarrow{G_kA} + k\cdot\overrightarrow{G_kB} - k\cdot\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$$

عندما $k = 1$

$$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{CB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IB}$$

عندما $k = -1$

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{G_{-1}B} - \overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{BC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$$



②

G_k إلى م.أ. للنقاط (A, k^2+1) و (B, k)، $(C, -k)$

$$(k^2+1)\cdot\overrightarrow{G_kA} + k\cdot\overrightarrow{G_kB} - k\cdot\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$$
$$(k^2+1)\cdot\overrightarrow{G_kA} + k\left(\overrightarrow{G_kB} - \overrightarrow{G_kC}\right) = \vec{0}$$
$$(k^2+1)\cdot\overrightarrow{G_kA} + k\cdot\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$
$$(1+k^2)\overrightarrow{G_kA} = -k\cdot\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{G_kA} = \frac{-k}{1+k^2}\cdot\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}\cdot\overrightarrow{BC}$$

دراسة تغيرات التابع f:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $[-1,1]$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(1) = \frac{-1}{2}$$
$$f'(x) = \frac{-1(1+x^2) - 2x(-x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{-1 - x^2 + 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$f(-1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(1) = \frac{-1}{2}$$

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

ومنه أياً كانت $x \in [-1,1]$ عندئذ $f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

من جدول التغيرات ومن العلاقة $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}\cdot\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن

النقاط G_k عندما $k \in [-1,1]$ تمثل القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$

المارة من النقطة A والموازية لـ $[BC]$.

③

G_1 مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ ، $(B,1)$ ، $(C,-1)$

G_{-1} مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ ، $(B,-1)$ ، $(C,1)$

$$\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$$
$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MG_{-1}}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_{-1}}\|$$

وبالتالي مجموعة النقاط $\mathcal{E}$ هي المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$

④

$$\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$$
$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$$
$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \|$$
$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \|$$
$$\|2MG_1\| = \| 2\overrightarrow{IA} \| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\| = \| \overrightarrow{IA} \|$$

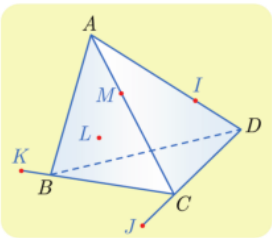
مجموعة النقاط $\mathcal{F}$ هي الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها $[IA]$

مقطع مجسم مستوٍ

24 ص 43

تأمل رباعي الوجوه $ABCD$

① M نقطة من الحرف $[AC]$. جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD)



② I نقطة من الحرف $[AD]$

و J نقطة من المستقيم (CD)

و K نقطة من المستقيم (BC). عين مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK)

③ L نقطة من المستوي (ABD). أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL)

الحل:

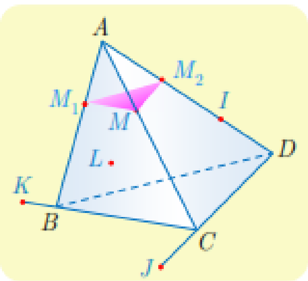
① المستوي المطلوب المار من النقطة M ويوازي (BCD)

يقطع المستوي (ABC) بفصل مشترك يوازي (BC) وليكن (M_1M)

يقطع المستوي (ADC) بفصل مشترك يوازي (CD) وليكن (MM_2)

يقطع المستوي (ABD) بفصل مشترك يوازي (BD) وليكن (M_1M_2)

وبالتالي مقطع رباعي الوجوه هو المستوي (MM_1M_2).



0937375251

②

$$(IJ) \in (ADC) \Leftarrow \begin{cases} I \in (AD) \\ J \in (DC) \end{cases}$$

وبالتالي (IJ) هو الفصل المشترك للمستوي ACD مع المستوي ACD

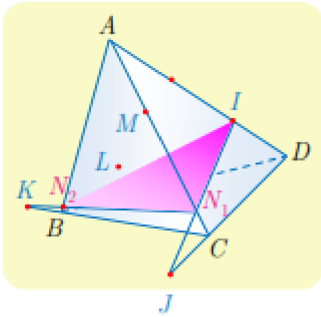
والمستقيم (IJ) يقطع AC في N_1

$$(kN_1) \in (ABC) \Leftarrow \begin{cases} k \in (BC) \\ N_1 \in (AC) \end{cases}$$

وبالتالي (kN_1) هو الفصل المشترك للمستوي ABC مع المستوي (IJk)

والمستقيم (kN_1) يقطع AB في N_2

وبالتالي مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ هو المستوي (IN_1N_2) .



③

لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD), (Jk) من المستوي (BCD)

$$S \in (LJk) \Leftarrow \begin{cases} (Jk) \subset (LJk) \\ S \in (Jk) \end{cases}$$

$$S \in (ABD) \Leftarrow \begin{cases} S \in (BD) \\ (BD) \subset (ABD) \end{cases}$$

ولدينا

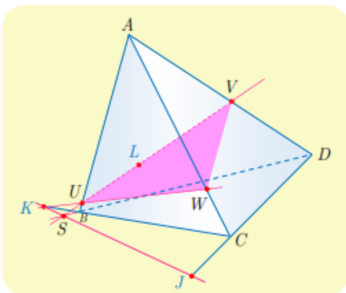
(SL) هو الفصل المشترك للمستويين $\Leftarrow \begin{cases} L \in (LJk) \\ L \in (ABD) \end{cases}$

$(ABD), (LJk)$

المستقيم (SL) يقطع $(AD), (AB)$ في نقطتين V, U على الترتيب

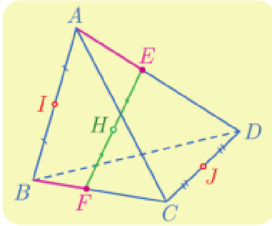
والمستقيم (kU) يقطع (AC) في W

وبالتالي المستوي المطلوب هو (VUW) .



دورة 2017 الأولى

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن α عدد حقيقي و I $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ والنقطتان F, E معرفتان بالعلاقتين



$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$

وأخيراً H هي منتصف $[EF]$ أثبت أن النقاط H, J, I تقع على استقامة واحدة.

الحل:

دورة 2020 الأولى

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط

$A(1,0,0), B(4,3,-3), C(-1,1,2), D(0,0,1)$

① أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

② أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

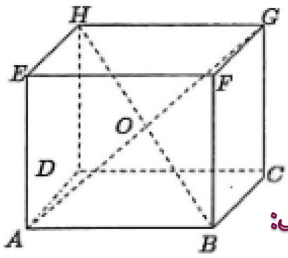
③ استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث α, β, γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

دورة 2020 الثانية

مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$



نختار المعلم المتجانس $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:

① جد إحداثيات النقاط O, H, G, B, A.

② أعطِ معادلة المستوي (GOB).

③ احسب $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

④ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

⑤ اثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

⑥ جد الأعداد الحقيقية γ, β, α حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,\gamma),(B,\beta),(A,\alpha)$.

الحل:

دورة 2022 الأولى

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$C(0,0,1), B(0,1,0), A(2,0,0)$

① احسب $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ واستنتج $\cos\widehat{BAC}$.

② إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC. عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق

$$\| 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$$

الحل:

0937375251

دورة 2021 الأولى

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تأمل النقاط

$D(3,1,1)$ ، $C(-3,4,-1)$ ، $B(2,1,1)$ ، $A(-1,2,3)$

① جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

② أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

③ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

④ احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

⑤ بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين $(CG),(AB)$ متوازيان.

الحل: