القســم العملــي

المسألة الأولى:

ليكن لدينا المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فيه النقاط:

$$A(-1,1,1), B(1,0,0), C(0,-1,1)$$

$$D(0,1,2), E(2,2,1), F(4,-2,-3)$$

$$L(3,1,-3), I(-1,5,-3), P(1,1,\sqrt{2})$$

$$R(-1,-1-\sqrt{2}), Q(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$$

1) جد M منتصف EF
2) جد N نظيرة M بالنسبة لـ D
3) جد إحداثيات K نظيرة N بالنسبة للمبدأ
4) هل A إلى المستوى المحوري للقطعة المستقيمة $[NK]$
5) جد على محور التراتيب إحداثيات V متساوية البعد عن E, D
6) جد إحداثيات H تحقق $\overrightarrow{NH} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MH}$
7) جد إحداثيات T كي يكون $ATMN$ متوازي أضلاع
8) عين λ حتى يكون الشعاعين مرتبطان خطياً $\vec{u}(-1,1,\lambda-2), \vec{v}(-2,2,-2)$
9) عين t التي تجعل الشعاعين متعامدان $\overrightarrow{w_1}(-1,1,\lambda-2), \overrightarrow{w_2}(-2,2,-2)$
10) بين أن المثلث AIL متساوي الأضلاع واحسب مساحته
11) بين أن (PQR) قائم ومتساوي الساقين

الأفكار

1) منتصف قطعة مستقيمة
2) نظير نقطة إلى نقطة والمبدأ
3) انتماء نقطة إلى مستوي محوري
4) نقطة متساوية البعد عن نقطتين
5) احداثيات نقطة من علاقة شعاعية
6) احداثيات نقطة من رؤوس متوازي أضلاع
7) مستطيلات
8) ارتباط خطي لشعاعين
9) تعامد شعاعين
10) تبيان نوع المثلث + حساب المساحة

الحل:

1)

$$M\left[\frac{2+4}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{1-3}{2}\right]$$

$$\boxed{M[3,0,-1]}$$

2) نرسم للمساعدة في الحل

المطلوبة اخر نقطة $N(x,y,z)$

$$(*)\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DN} \rightarrow \begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases}x=-3\\y=2\\z=5\end{cases} \rightarrow \boxed{N(-3,2,5)}}$$

3) $(*)$ تناظر بالنسبة إلى المبدأ $o(0,0,0)$ نفس الإحداثيات عكس الإشارات

$$\boxed{N(-3,2,5) \xrightarrow{\text{نظيرة}} K(3,-2,-5)}$$

4) حتى تكون A من المستوي المحوري يجب أن يتحقق:

$$[NA] = [KA]$$

$$[NA] = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

$$[KA] = \sqrt{16+9+36} = \sqrt{61}$$

$$NA \neq KA$$

إذاً A لا تنتمي إلى المستوى المحوري لـ القطعة $[NK]$

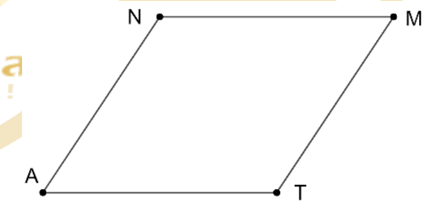
أ. معتز شحادة

0935948741

5) V تقع على محور التراتيب أي محور $[oy]$
إذاً نفرض $v(0,y,0)$ متساوية البعد تعني:
$[VE]=[VD]$
$\sqrt{4+(y-2)^2+1}=\sqrt{0+(y-1)^2+4}$
نربع ثم نفك الأقواس
$5+(y-2)^2=(y-1)^2+4$
$-4Y+4=-2y \to y=2$
$\boxed{V(0,2,0)}$

6) نفرض $H(x,y,z)$ نعوض في العلاقة
$\overrightarrow{NH}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MH}$
$\begin{pmatrix}x+3\\y-2\\z-5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}x-3\\y-0\\z+1\end{bmatrix}$
$x+3=4-x+3 \longrightarrow x=2$
$y-2=-2-y \longrightarrow y=0$
$z-5=-2-z-1 \longrightarrow z=1$
$\boxed{H(2,0,1)}$

7) للسهولة في الحل نرسم متوازي الأضلاع



نضع نقطة مطلوبة أخر نقطة في المساواة
$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AT} \to \begin{bmatrix}6\\-2\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{bmatrix}$
$x=5, y=-1, z=-5$
$\boxed{T(5,-1,-5)}$

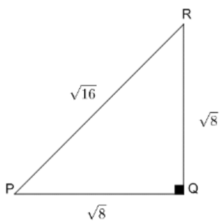
8) بما أن الشعاعين مرتبطان خطياً فإن:
$\forall x\in\mathbb{R} \to \vec{u}=\alpha\vec{v}$

$\begin{bmatrix}-1\\1\\\lambda-2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2\\2\\-2\end{bmatrix}$
$-1=(\alpha)(-2)$
$\to \quad 1=(\alpha)(2)$
$\lambda-2=-2\alpha$
$\alpha=\frac{1}{2} \to \lambda-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)$
$\boxed{\lambda=1}$

9) شعاعين متعامدان جداؤهما = 0 أي
$\vec{w}_1.\vec{w}_2=0$
$(-1)(-2)+(1)(2)+(\lambda-2)(-2)=0$
$\boxed{2+2-2\lambda+4=0 \to \boxed{\lambda=4}}$

10) نحسب أطوال الأضلاع:
$AI=AL=LI=4\sqrt{2}$
إذاً متساوي الأضلاع تعطى مساحته بالعلاقة
$\boxed{S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{2}\right)^2=8\sqrt{3}}$

11) نحسب طول الأضلاع
$[PQ]=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2}=\sqrt{8}$
$[RQ]=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2}=\sqrt{8}$
$[RP]=\sqrt{4+4+8}=\sqrt{16}$
نطبق عكس فيثاغورس نجد
$[PQ]^2+[RQ]^2=[RP]^2$
$8+8=16$
$16=16$
$\boxed{\text{إذاً مثلث قائم في } Q \text{ ومتساوي الساقين}}$



المسألة الثانية:

ليكن لدينا المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فيه النقاط

$$A(-3,2,+1), B(-5,4,-1), C(1,-3,3)$$

$$D(-5,3,-3), E(+1,5,-1)$$

1) أثبت أن A,B,C ثلاث نقاط تعين مستوي

2) أوجد b,a التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

ثم استنتج أن D تنتمي إلى المستوي (ABC)

3) أثبت أن الأشعة الثلاث $\overrightarrow{AD},\vec{u},\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً حيث $\vec{u}(6,-6,6)$

4) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) هي:

$$p: 3x+2y-z+6=0$$

5) احسب بعد النقطة E عن المستوي (ABC) ثم اكتب معادلة الكرة S مركزها E وتمس المستوي (ABC)

الأفكار

1) اثبات ان ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة
2) ارتباط خطي لثلاث أشعة
3) معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط
4) بعد نقطة عن مستوي
5) كرة تمس مستوي
6) مركز أبعاد متناسبة من علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة

الحل:

1)

$$\overrightarrow{AB}(-2,2,-2)$$
$$\overrightarrow{AC}(4,-5,2)$$
$$\overrightarrow{AD}(-2,1,-4)$$

ندرس ارتباط خطي لـ الشعاعين $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$

$$\frac{-2}{4}\neq\frac{2}{-5}$$

شعاعين غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط ليست على استقامة واحدة وتعيين مستوي

2)

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$$

$$-2a+4b=-2 \quad (1)$$
$$2a-5b=1 \quad (2)$$
$$-2a+2b=-4 \quad (3)$$

من (1) و (2) وبالجمع: $-b=-1$

نعوض في (1) $\boxed{b=1}$

$$-2+4=-2 \rightarrow \boxed{a=3}$$

نعوض في (3) للتحقق:

$$-2(3)+2(1)=-4$$
$$\boxed{-4=-4}$$

إذاً الأشعة الثلاث مرتبطة خطيا وتحقق

$$\boxed{\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$$

بما أن الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً إذاً النقاط الأربعة A,B,C,D تقع ضمن مستوي واحد هو المستوي (ABC) إذاً $D\in(ABC)$

3) أولاً ندرس ارتباط خطي للشعاعين $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ نلاحظ

$$\frac{-2}{6}=\frac{2}{-6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{2}$$

شعاعين مرتبطان خطياً

بما أن الشعاعين $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ عندئذ أياً كان الشعاع الثالث AD فإن الأشعة مرتبطة خطياً

4) نعوض النقاط C,B,A في المعادلة المعطاة

$$(ABC): 3x+2y-z+6=0$$
$$\rightarrow 3(-3)+2(2)-(1)+6=0$$
$$-9+4-1+6=0 \rightarrow 0=0$$
$$A\in(ABC)$$
$$\rightarrow 3(-5)+2(4)-(-1)+6=0$$
$$-15+8+1+6=0 \rightarrow 0=0$$
$$B\in(ABC)$$

$$\to 3(1)+2(-3)-(3)+6=0$$
$$3-6-3+6=0 \to 0=0$$
$$C \in (ABC)$$

إذاً معادلة المستوي تحقق النقاط

$$\boxed{(ABC): 3x+2y-z+6=0}$$

5)

$$d[E:(ABC)] = \frac{|3(1)+2(5)-(-1)+6|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

S : كرة

مركز $E(1,5,-1)$

نصف قطر $r = d[E:(ABC)]$

بما أن الكرة تمس المستوي إذاً نصف قطر الكرة يساوي بعد مركز الكرة عن المستوي

$$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$
$$\boxed{S: (x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2 = \frac{400}{14}}$$

6) طلب إضافي
أثبت أن D م.أ.م للنقاط C, B, A بأثقال يطلب تعيينها

من العلاقة $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ نجد أن $(D,1)$ م.أ.م لـ

$$\boxed{(B,3),(C,1),(A,1-3-1)=(A,-3)}$$

المسألة الثالثة:

(جداء سلمي + مركز أبعاد متناسبة)

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه (4) فيه

I منتصف AB

L منصف DC

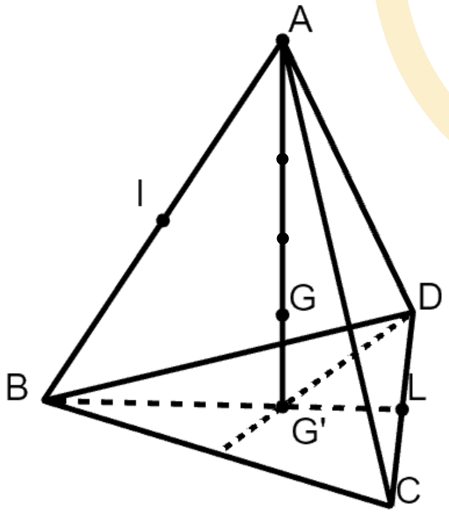
G' م.ث.م BDC

G تحقق أن $AG = \frac{3}{4}AG'$

1) أثبت أن AB يعامد DC
أثبت أن AB يعامد IL

2) أثبت أن G م.أ.م لـ D, C, B, A بأثقال يطلب تعيينها

3) أثبت أن النقاط L, I, G تقع على استقامة واحدة



الأفكار
1) جداء سلمي واثبات تعامد مستقيمان
2) تعيين مركز أبعاد متناسبة لرباعي وجوه
3) اثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة

الحل:

1) نحسب الجداء

$$\vec{AB}.\vec{DC} = \vec{AB}[\vec{DA} + \vec{AC}]$$
$$= \vec{AB}.\vec{DA} + \vec{AB}.\vec{AC}$$
$$= -\vec{AB}.\vec{AD} + \vec{AB}.\vec{AC}$$
$$= -\|\vec{AB}\|.\|\vec{AD}\|Cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -4.4.\frac{1}{2} + 4.4.\frac{1}{2} = 0$$

إذاً

$$(AB) \perp (DC)$$

إثبات تعامد (IL) مع (AB)

$$\vec{AB}.\vec{IL} = \vec{AB}[\vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CL}]$$
$$= \vec{AB}.\vec{IB} + \vec{AB}.\vec{BC} + \vec{AB}.\vec{CL}$$
$$a.\frac{a}{2}.Cos(0) - a.a\,Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$+0 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

حيث أن (AB) يعامد (CL) لأن (AB) يعامد (DC) من الطلب السابق

2) نعلم أن G' م.ث.م BCD إذاً G' م.أ.م لـ بنقاط تحمل أثقال متساوية C, B, D

$(G', 3)$ م.أ.م لـ $(B, 1), (D, 1), (C, 1)$ (1)

ملاحظة: فرضاً من العلاقة الإنشائية

$$AG = \frac{3}{4}AG'$$

نجد أن $(G, 4)$ م.أ.م لـ $(A, 1), (G', 3)$ (2)

من (1) و (2) نجد أن $(G, 4)$ م.أ.م لـ $(B, 1), (A, 1), (C, 1), (D, 1)$
إذا نستنتج أن G هو مركز ثقل رباعي الوجوه

3)

1. بما أن I منتصف AB إذاً $(I, 2)$ م.أ.م لـ $(B, 1), (A, 1)$
2. بما أن L منتصف DC إذاً $(L, 2)$ م.أ.م لـ $(C, 1), (D, 1)$
3. نعلم برهاناً أن G م.أ.م لـ D, C, B, A

من (1) و (2) و (3) وحسب الخاصة التجميعية يكون G م.أ.م لـ L, I إذاً النقاط تقع على استقامة واحدة

المسألة الرابعة:

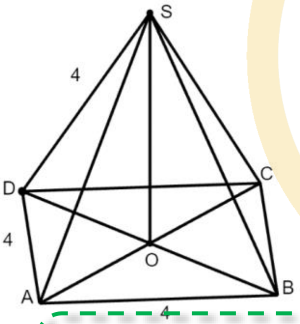
(مهم جداً) (جداء سلمي)

ليكن $SABCD$ هرم قاعدته مربع و O مركز المربع هو مرتسم S القائم على المربع $ABCD$ وطول حرفه a

1) احسب الجداءات التالية

1. $\vec{DS}.\vec{SA}$
2. $\vec{SA}.\vec{SC}$
3. $\vec{SA}.\vec{AC}$

(2



الأفكار:
1) حساب جداء سلمي دون معلم
2) الاسقاط القائم في الجداء السلمي

الحل:

1. الجداء $\vec{DS}.\vec{SA}$

$$\vec{DS}.\vec{SA} = -\vec{SD}.\vec{SA}$$
$$= -\|\vec{SD}\|.\|\vec{SA}\|Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -4.4\frac{1}{2} = -8$$

2. $\vec{SA}.\vec{SC}$

طريقة أولى شعاعية

$$\vec{SA}.\vec{SC} = [\vec{SB} + \vec{BA}][\vec{SB} + \vec{BC}]$$

$$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$
$$=\|\overrightarrow{SB}\|^2-\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$
$$=16-4.4.Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-4.4.Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+0$$
$$=16-8-8+0=0$$

ونستنتج أن SC, SA متعامدان إذاً المثلث ASC قائم

.3 $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

طريقة إسقاط قائم

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$$
$$=-\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{AO}\|\|\overrightarrow{AC}\|Cos(0)$$
$$=-(2.\sqrt{2})(4\sqrt{2})(1)=-16$$

حساب طول $[AC]$ من المثلث القائم ABC وحسب فيثاغورس نجد:

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$$
$$(AC)^2=16+16=32$$
$$AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\rightarrow \boxed{AO=2\sqrt{2}}$$

المسألة الخامسة:

ليكن لدينا المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فيه

$$A(-2,-1,1), B(2,-3,-1)$$
$$x^2+y^2+z^2-8x-4y+4z+18=0 \cdots (*)$$
$$p: 6x-3y-3z+5=0$$

1) أثبت أن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو
$$Q: 2x-y-z-2=0$$
2) أثبت أن المعادلة $(*)$ تمثل معادلة كرة حدد مركزها ونصف قطرها
3) أثبت أن الكرة تمس المستوي Q
4) أثبت أن المستوي P, Q متوازيان ثم استنتج البعد بينهما

الأفكار
1) معادلة مستوي محوري
2) رد معادلة إلى معادلة كرة
3) كرة تمس مستوي
4) اثبات توازي مستويان

الحل:

1)

معادلة المستوي المحوري

I منتصف AB: $I(0,-2,0)$

ناظم: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(4,-2,-2)$

$$(4)(0)+(-2)(-2)+(-2)(0)+d=0$$
$$d=-4$$
$$Q: 4x-2y-2z-4=0$$
$$Q: 2x-y-z-2=0$$

2) بالإتمام إلى مربع كامل نرد المعادلة لكرة

$$x^2+y^2+z^2-8x-4y+4z+18=0$$
$$x^2-8x+16-16+y^2-4y+4-4+z^2+4z+4-4+18=0$$
$$(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6=k>0$$

إذاً المعادلة السابقة تمثل كرة مركزها $C(4,2,-2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{6}$

3) حتى تكون الكرة تمس المستوي يجب أن يكون r نصف قطر الكرة يساوي بعد مركز الكرة عن المستوي Q

نحسب البعد

$$d[Q:C]=\frac{|2(4)-(2)-(-4)-2|}{\sqrt{4+1+1}}$$

إذاً $r=d[Q:C]=\sqrt{6}$

إذاً الكرة S تمس المستوي Q

4)

$$P: 6x - 3y - 3z + 5 = 0$$
$$Q: 2x - y - z - 2 = 0$$
$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{n_P}(6,-3,-3) \\ \vec{u}_Q(2,-1,-1) \end{matrix}\right\} \frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{5}{-2}$$

إذاً المستويان متوازيان
لحساب البعد بين المستويان
نأخذ نقطة من المستوي الأول Q ولتكن
$I(0,-2,0)$
نحسب بعد I عن المستوي الثاني P

$$d[P:I] = \frac{|6(0) - 3(-2) - 3(0) + 5|}{\sqrt{36+9+9}} = \boxed{\frac{11}{\sqrt{54}}}$$

المسألة السادسة:

في معلم متجانس لدينا النقطة $A(1,1,2)$ ، والمستويان: Q, P

$$P: x - y + 2Z - 1 = 0$$
$$Q: 2x + y + Z + 1 = 0$$

1) أثبت المستويين: Q, P متقاطعين بفصل مشترك d
2) اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d
3) اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين Q, P
4) جد احداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R
5) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم d
6) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس المستوي P

أفكار المسألة:

1) فصل مشترك لمستويان متقاطعان
2) معادلة مستوي يعامد مستقيم ومار من نقطة
3) وضع مستقيم مع مستوي ثم إيجاد نقطة تقاطع
4) حساب بعد نقطة عن مستقيم
5) كرة تمس مستوي

الحل:

1)

$$\overrightarrow{n_P}(1,-1,2), \vec{n}_Q(2,1,1)$$

نلاحظ أن: $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}\right)$ المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً Q, P

بالتالي المستويين متقاطعين بفصل مشترك d

2) لدينا:

$$x - y + 2Z - 1 = 0 \quad (1)$$
$$2x + y + Z + 1 = 0 \quad (2)$$

بالجمع نجد:

$$3x + 3z = 0 \rightarrow \boxed{x = -z}$$

بالتعويض في (2) نجد:

$$-2z + y + z + 1 = 0 \rightarrow \boxed{y = -1 + z}$$

لنضع: $z = t$ عندئذ

$$\boxed{d\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + t : t \in R \\ z = t \end{cases}}$$

3) بما أن
المستوي R يعامد كلا من المستويان P و Q اذا R يعامد فصلهما المشترك d

R

$\vec{u} = \vec{n}(-1,1,1)$ $A(1,1,2)$

$$R: ax + by + cz + d = 0$$

$-1+1+2+d=0 \Rightarrow d=-2$

$R: -x+y+z-2=0$

ملاحظة:

اذا كان المستوي يعامد المستقيم إذا موجه المستقيم هو ناظم المستوي

4) لنعوض معادلات المستقيم d في المستوي R

$-(-t)+t-1+t-2=0 \Rightarrow \boxed{t=1}$

بالتعويض في d نجد:

$\boxed{B(-1,0,1)}$

5) بما أن B نقطة تقاطع d مع R

وبما أن $d \perp R$

فإن: $dist(A,d)=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

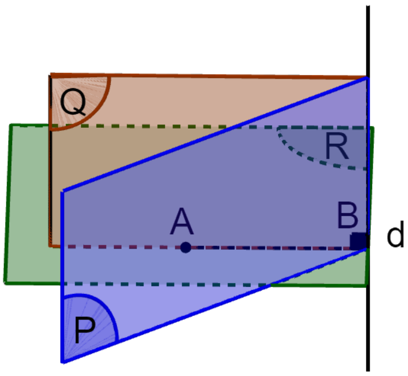
6) إن نصف قطر الكرة R هو بعد النقطة A عن المستوي P وبالتالي

$$R = dist(A,P) = \frac{|1-1+4-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ومنه معادلة الكرة:

$$S: (x-x_A)^2+(y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = R^2$$

$$\boxed{S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = \frac{3}{2}}$$



المسألة السابعة:

ضمن المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى إحداثيات النقاط:

$A(5,0,6), E(-1,-2,2)$

$F(4,-2,8), O(0,0,0)$

والمطلوب:

1) أعط تمثيل وسطي لـ Δ_1 مار من A و E

أعط تمثيل وسطي لـ Δ_2 مار من F و O

2) أثبت أن Δ_1 و Δ_2 متقاطعين في نقطة J أوجد إحداثياتها

3) اكتب معادلة المستو Q ناتج تقاطع المستقيمان: Δ_1 و Δ_2

4) أثبت أن d عمود على المستوي Q في نقطة J ذاتها:

$$d\begin{cases} x=-6t-4 \\ y=8t+7 \quad ; t\in R \\ z=5t+9 \end{cases}$$

5) اكتب معادلة كرة تمس المستوي Q ومركزها $w(1,2,-1)$

6) أثبت أن المستويان: Q و R متقاطعان في d_1 فصل مشترك اكتب تمثيل وسطي لـ d_1

$R: 2x-y+z-4=0$

أفكار المسألة:

1) تمثيل وسيطي لمستقيم من نقطتين
2) أثبت أن Δ_2 , Δ_2 متقاطعين إيجاد نقطة تقاطع
3) معادلة مستوي في تقاطع مستقيمان
4) إثبات تعامد مستقيم مع مستوي
5) وضع مستقيم مع مستوي
6) فصل مشترك لمستويان

الحل:

1)

مستقيم Δ_1

نقطة $A(5,0,6)$ موجه $\overrightarrow{AE}(-6,-2,-4)$

$$\Delta_1\begin{cases}x=-6t+5\\ y=-2t\\ z=-4t+6\end{cases};t\in R$$

مستقيم Δ_1

نقطة $F(4,-2,8)$ موجه $\overrightarrow{FO}(-4,2,-8)$

$$\boxed{\Delta_2\begin{cases}x=-4t+4\\ y=2t-2\\ z=-8t+8\end{cases};t\in R}$$

2) ندرس ارتباط خطي للموجهات

$$\left.\frac{-6}{-4}\neq\frac{-2}{2}\right\}\to\overrightarrow{FO},\overrightarrow{AE}$$

غير مرتبطان خطياً أما (تخالف أو تقاطع)

نحل جملة المعادلتين لـ Δ_1 و Δ_2 حلاً مشتركاً:

$$-6t+5=-4S+4\quad(1)$$
$$-2t=2S-2\quad(2)$$
$$-4t+6=-8S+8\quad(3)$$

من (2) و (3) وبالجمع (نضرب (2) بـ -2)

$$+4t=-4S+4\quad(1)$$
$$+\quad -4t+6=-8S+8\quad(2)$$

$$6=-12S+12$$
$$\Rightarrow\boxed{S=\frac{1}{2}}$$

نعوض في (2) نجد:

$$-2t=1-2=-1\Rightarrow\boxed{t=\frac{1}{2}}$$

نعوض $S=\frac{1}{2}$ و $t=\frac{1}{2}$ في المعادلة (1)

$$-6\left(\frac{1}{2}\right)+5=-4\left(\frac{1}{2}\right)+4$$

$2=2$ محققة

إذاً قاطع Δ_1 لـ Δ_2 في نقطة J ولإيجاد إحداثياتها

نعوض $t=\frac{1}{2}$ في Δ_1

$$x=-6\left(\frac{1}{2}\right)+5=2$$
$$y=-2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$
$$z=-4\left(\frac{1}{2}\right)+6=4$$

$\boxed{J(2.-1,4)\ \text{نقطة التقاطع}}$

3) معادلة المستوِ Q مار من Δ_1 و Δ_2 إذاً Q مستو

نفرض $c=1$

أشعة توجيه Δ_2 , Δ_2 المتقاطعان هما أشعة توجيه للمستوي Q اذاً

$\overrightarrow{AE}(-6,-2,-4)$

$\overrightarrow{FO}(-4,+2,-8)$

نفرض الناظم:

$$\vec{n}(a,b,c)$$
$$a=(16)-(-8)=24$$
$$b=(48)-(16)=32$$
$$c=(-12)-(8)=-20$$
$$\vec{n}(24,-32,-20)\div 4$$
$$\vec{n}(6,-8,-5)$$

مستويQ

$\vec{n}(6,-8,-5)$ $\quad J(2,-1,4)$

$$Q:6x-8y-5z=0$$

4) حتى يكون d يعامد المستو Q يجب أن يكون موجه d مرتبط خطياً مع ناظم Q

$\overrightarrow{n_Q}(6,-8,-5),\overrightarrow{U_d}(-6,8,5)$

إذاً $U_d=-\vec{n}$ مرتبطان خطياً

إذاً d عمود على Q لإيجاد نقطة تقاطع d مع Q نعوض معادلات d في Q:

$$Q: 6(-6t-4)-8(8t+7)-5(5t+9)=0$$

$$36t-24-64t-56-25t-45=0$$

$$125t+125=0 \Rightarrow \boxed{t=-1}$$

إذاً d قاطع لـ Q لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=-1$ في معادلات d

$$d\begin{cases} x=-6(-1)-4=+2 \\ y=8(-1)+7=-1 \quad ; t\in R \\ z=5(-1)+9=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J(2,-1,4)$$

إذاً d قاطع لـ Q في J

5) معادلة كرة تمس مستوٍ يكون بعد المستو عن مركز الكرة يساوي نصف قطرها:

$$d[Q;\omega]=\frac{|-6(1)+8(2)+5(-1)|}{\sqrt{(6)^2+(8)^2+(5)^2}}$$

$$=\frac{|-6+16-5|}{\sqrt{36+64+25}}=\frac{5}{5\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}$$

كرة معادلة

مركز $\omega(1,2,-1)$ نصف قطر $r=d=\frac{1}{\sqrt5}$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\frac{1}{5}}$$

6) ندرس ارتباط خطي لنواظم Q و R

$$\overrightarrow{n_Q}(-6,8,5),\overrightarrow{n_R}(2,-1,1)$$

$$\left.\frac{-6}{2}\neq\frac{8}{-1}\right\}\rightarrow \overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_R}$$

غير مرتبطان خطياً إذاً:

إذاً Q و R متقاطعان، نوجد معادلات الفصل المشترك:

$$\begin{cases} -6x+8y+5z=0 \\ 2x-y+z-4=0 \quad \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -6x+8y+5z=0 \\ 6x-3y+3z-12=0 \\ \hline 5y+8z-12=0 \end{array} \quad +$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{8}{5}z+\frac{12}{5}}$$

نعوض في (2) نجد:

$$2x-\left(-\frac{8}{5}z+\frac{12}{5}\right)+z-4=0$$

$$2x+\frac{8}{5}z-\frac{12}{5}+z-4=0$$

$$2x=-\frac{13}{5}z+\frac{-32}{5}$$

$$x=-\frac{13}{10}z-\frac{16}{5}$$

نفرض z يساوي t

$$d\begin{cases} x=-\frac{13}{10}t-\frac{16}{5} \\ y=-\frac{8}{5}t+\frac{12}{5} \quad ; t\in R \\ z=t \end{cases}$$

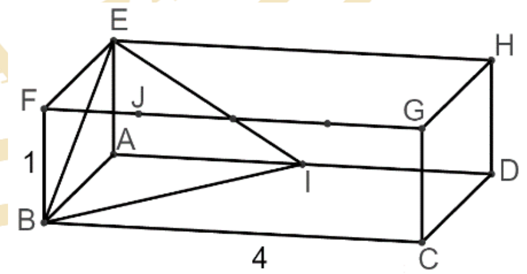
المسألة الثامنة:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$AE=1, AD=4, AB=2$

ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق: $\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ والمطلوب:

1) ضمن معلم متجانس، جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات I و J
2) أثبت أن معادلة المستو EIB هي: $(EBI): x+y+2z-2=0$
3) بين نوع المثلث (EBI) ثم احسب مساحته
4) احسب بعد G عن المستو (EBI) واستنتج حجم رباعي الوجوه $G-EBI$
5) اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودي على المستو EBI
6) أوجد J' المسقط القائم للنقطة J على المستو EBI
7) إذا كان G م.أ.م للنقاط الثلاث المثقلة: $(E,2),(I,1),(B,4)\quad(*)$
عين إحداثيات G م.أ.م لـ B و I و E ، ماذا تمثل المجموعة $(*)$ مجموعة النقاط M التي تحقق:
$\|2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MB}\|=\|7\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}\|$



أفكار المسألة:

1) احداثيات نقاط ضمن متوازي
2) معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط
3) نوع ومساحة مثلث متساوي الأضلاع
4) حساب بعد نقطة عن مستوي وحجم لرباعي وجوه
5) تمثيل وسيطي لمستقيم مار من نقطة معلومة ويعامد مستوي
6) مسقط قائم لنقطة على مستوي
7) مركز أبعاد متناسبة لثلاث نقاط وتعيين مجموعة نقاط في المستوي

الحل:

1) نفرض المعلم المتجانس

$$\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$$

وتكون النقاط:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(2,0,0)$	$F(2,0,1)$
$D(0,4,0)$	$H(0,4,1)$
$C(2,4,0)$	$G(2,4,1)$
$I(0,2,0)$	$J(2,1,1)$

2) إيجاد معادلة المستو(EBI)

نحسب

$\overrightarrow{EB}(2,0,-1)$

$\overrightarrow{EI}(0,2,-1)$

بفرض الناظم

$\vec{n}(a,b,c)$

$\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EB}=0 \mid 2a-c=0$

$\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EI}=0 \mid 2a-c=0$

بفرض $c=1$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}\,,b=\frac{1}{2}$

(EBI)

نقطة $I(0,2,0)$

ناظم $\vec{n}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$\vec{n}(1,1,2)$

$1(x-0)+1(y-2)+2(z-0)=0$

$\boxed{:x+y+2z-2=0}$

3) نوع المثلث (EBI) نحسب أطوال الأضلاع:

$$[EB]=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$[EI]=\sqrt{(0)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$[IB]=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2+(0)^2}$$
$$=\sqrt{8}$$

مثلث متساوي الساقين $[EI]=[EB]$

نفرض $[EN]$ ارتفاع فهو متوسط إذاً N تقع في منتصف $[IB]$

$$[EN]$$
$$=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{3}$$

$$S=\frac{\text{ارتفاع } EN \times \text{ قاعدة } [BI]}{2}$$

$$\boxed{EIB=\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}}$$

4) احسب بعد G عن المستو (EBI):

$$d[EIB;G]=\frac{|(2)+(4)+2(1)-2|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

حساب حجم رباعي الوجوه

$$V=\frac{1}{3}S_{EIB}\times h=d$$

h: الارتفاع هو بعد G عن المستو EIB يشكل ارتفاع رباعي الوجوه

$$\boxed{V=\frac{1}{3}[\sqrt{6}]\times\sqrt{6}=4}$$

5)

d الارتفاع هو بعد G عن المستو EIB إذاً EIB يصلح أن يوجه d $\vec{u}=\vec{n}$

d مستقيم

نقطة $J(2,1,1)$

ناظم
$$\vec{u}=\vec{n}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$
$$\vec{n}(1,1,2)$$

$$\boxed{d\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\ ;t\in R\\ z=2t+1\end{cases}}$$

6) حساب إحداثيات J' مسقط القائم للنقطة J على المستو EBI

نعوض في معادلات d في المستوي EBI

$$(EIB): x+y+2z-2=0$$
$$t+z+t+1+4t+2-2=0$$
$$6t+3=0$$
$$t=-\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة t في معادلات d فيكون

$$d\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}\\ y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\\ z=2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0\end{cases}$$

ومنه

$$\boxed{J'\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)}$$

7) نعلم أن:

$$2\overrightarrow{ME}+1\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MB}=(2+1+4)\overrightarrow{MG}$$
$$=7\overrightarrow{MG}$$

وحسب مبرهنة الاختزال

$$\|2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MB}\|=\|7[\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}]\|$$
$$\|7\overrightarrow{MG}\|=7\|\overrightarrow{BA}\|$$
$$\Rightarrow\|7\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{2}$$

علماً أن:

$$[BA]=\sqrt{(0-2)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}$$
$$=\sqrt{2}$$
$$\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=\sqrt{2}}$$

المجموعة تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها
$r=2$

تعيين إحداثيات G

$$G\left[\frac{\alpha x_I+\beta x_B+\gamma x_E}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_I+\beta y_B+\gamma y_E}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha z_I+\beta z_B+\gamma z_E}{\alpha+\beta+\gamma}\right]$$

$$G\left[\frac{1(0)+4(2)+2(0)}{7},\frac{1(2)+4(0)+2(0)}{7},\frac{1(0)+4(0)+2(10)}{7}\right]$$

$$\boxed{G\left(\frac{8}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right)}$$

المسألة التاسعة:

في معلم متجانس ليكن لدينا النقاط
$A(2,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$ $D(2,1,0)$
ونعرف أن G مركز ثقل المثلث ABC
ونعرف ان G' مركز أبعاد متناسبة لـ :
$(A,2)$, $(B,2)$, $(D,-1)$

1) عين مجموعة النقاط M من الفراغ والتي تحقق
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

2) عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:
$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\|$$

3) حدد احداثيات G'

4) عين مجموعة النقاط M من الفراغ والتي تحقق
$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|$$

الحل: 1)

نفرض $M(x,y,z)$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
$$\overrightarrow{MA}(2-x,-y,-z)$$
$$\overrightarrow{MB}(-x,1-y,-z)$$
$$\rightarrow (2-x)(-x)+(1-y)(-y)+(-z)(-z)=0$$
$$-2x+x^2-y+y^2+z^2=0$$
$$x^2-2x+1-1+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2=0$$
$$(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2=\frac{5}{4}$$:؟

معادلة كرة مركزها $\Omega(1,\frac{1}{2},0)$
نصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$

2)
نعلم أن G مركز ثقل المثلث ABC إذا G مركز أبعاد متناسبة لنقاط تحمل أثقالاً متساوية
$(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$
حسب مبرهنة الاختزال:
$$\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MG}}\ *$$
ونعلم أن G' مركز أبعاد متناسبة لـ النقاط
$(A,2)$, $(B,2)$, $(D,-1)$
حسب مبرهنة الاختزال نجد:
$$\boxed{2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG'}}\ **$$
من العلاقة:
$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\|$$
نعوض * و ** في العلاقة نجد:
$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MG'}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MG'}\|$$
اذاً M تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

3)
لحساب احداثيات G'
$G'(x,y,z)$
نعوض في القانون
$$x=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_D}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(2)+2(0)-(2)}{3}=\frac{2}{3}$$
$$y=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_D}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(0)+2(1)-(1)}{3}=\frac{1}{3}$$
$$z=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_D}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{3(0)+2(0)-(0)}{3}=0$$
$$G'(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$$

4)
$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|$$
$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MG'}\|$$
$$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{G'C}\|$$
$$G'C=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+(1)}=\sqrt{\frac{14}{9}}$$

$$\|\overrightarrow{MG}\| = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

اذا مجموعة النقاط M من الفراغ تمثل كرة مركزها G نصف قطرها $r = \frac{\sqrt{14}}{3}$

المسألة العاشرة:

❖ في معلم متجانس نتأمل النقطة $A(2,1,1)$ والمستويات:

$$P: x + 2y - z + 3 = 0$$
$$Q: -x + y + z + 1 = 0$$
$$R: x + z - 3 = 0$$

ولتكن لدينا مجموعة النقاط M من الفراغ تعطى بالمعالة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z - 3 = 0$$

1) أثبت أن المستويان P و Q متعامدان
2) احسب بعد النقطة A عن كل من المستويان P و Q
3) استنتج بعد A عن الفصل المشترك d للمستويان
4) تأكد أن المستوي R يعامد P و Q ومار من A
5) أثبت أن مجموعة النقاط M من الفراغ تمثل معادلة كرة مركزها A حدد نصف قطرها
6) تأكد أن S تقطع المستوي P في دائرة C حدد نصف قطر دائرة المقطع
7) أثبت أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة A'

الحل:

1) إذا كان المستويان متعامدان تكون النواظم متعامدة

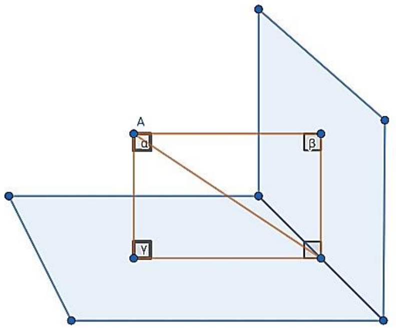
$$\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = (1)(-1) + (2)(1) + (-1)(1) = 0$$

$P \perp Q$ مستويان متعامدان

2) $$d[A:P] = \frac{|2+2-1+3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$d[A:Q] = \frac{|-2+1+1+1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3)



لحساب بعد A عن المستقيم d

نستفيد من المثلث القائم ABC حيث البعد هو طول $[AB]$:

$$AC = \sqrt{6}\ ,\ BC = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$[AC]^2 + [BC]^2 = [AB]^2$$

$$6 + \frac{1}{3} = [AB]^2 \rightarrow \boxed{AB = \sqrt{\frac{19}{2}}}$$

4) طريقة 1:

(معادلة مستوي مار من نقطة يعامد مستويان)

تصبح أشعة التوجيه هو نواظم P و Q

موجه أول $R \perp P \rightarrow \overrightarrow{n_P} = \vec{u}$

موجه ثاني $R \perp Q \rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \vec{v}$

نفرض الناظم: $\vec{n}(a,b,c)$ $\quad \vec{u}(1,2,-1)$ $\quad \vec{v}(-1,1,1)$

$$a = (2) - (-1) = 3$$
$$b = (1) - (1) = 0$$
$$c = (1) - (-2) = 3$$

$$\vec{n}(3,0,3) \downarrow \vec{n}(1,0,1)$$

مستوي R

$$\vec{n}(1,0,1)$$
$$A(2,1,1)$$

$$2 + 0 + 1 + d = 0 \rightarrow \boxed{d = -3}$$

$$R: x + z - 3 = 0$$

طريقة 2:

نعوض A في معادلة المستوي R

$$2 + 1 - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$A \in \mathbb{R}$ تنتمي إلى المستوي

من المعادلة: $\overrightarrow{n_R}(1,0,1)$

$$\overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_Q} = (1)(1)+(2)(0)+(1)(-1)=0$$
$$\overrightarrow{n_R}\cdot\vec{n} = (1)(-1)+(1)(0)+(1)(1)=0$$

اذاً R مستوي مار من A ويعامد كلاً من المستويان P و Q

5) $x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z-3=0$

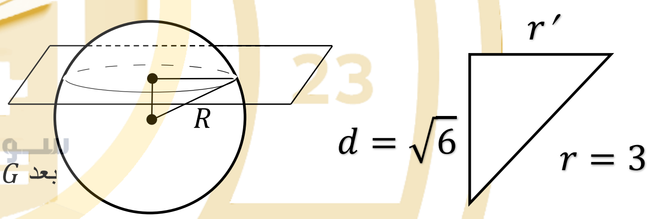
نتمم إلى مربع كامل نجد:

$$x^2-4x+4-4+y^2-2y+1-1+z^2-2z+1-1-3=0$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-9=0$$

6) حتى تكون S قاطعة لـ المستوي P يجب أن يكون

$$d[A:P]<r$$
$$\sqrt{6}<3 \qquad d=\sqrt{6}$$
$$r=3$$

اذاً بعد مركز الكرة من المستوي p أصغر من نصف قطر الكرة إذاً p قاطع لـ S



حسب مبرهنة فيثاغورث نجد:

$$d^2+r'=r^2$$
$$\to r^2{}'=r^2-d^2=9-6$$

$r'=\sqrt{3}$ نصف قطر دائرة المقطع

7) نحل جملة معادلات حلاً مشتركاً

① $x+2y-z+3=0$

② $-x+y+z+1=0$

③ $x+z-3=0$

من ③ نجد: $\boxed{x=-z+3}$ *

نعوض * في ②

$+z-3+y+z+1=0 \to** \boxed{y=-2z+2}$

نعوض * و ** في المعادلة ①

$-z+3-4z+4-z+3=0$

$$-6z+10=0 \to z=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

نعوض في * و** نجد:

$$y=-2\left(\frac{5}{2}\right)+2=-\frac{4}{3}$$
$$x=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3}$$
$$A'(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3})$$

المسائل الإضافية للتمرين و التدرب

المسألة الأولى:

نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$B(4,-2,3)$, $C(1,-1,1)$, $D(3,3,-3)$,

$A(2,4,3)$

1) أثبت أن النقاط A , B , C ليست واقعة على استقامة واحدة.

2) عين إحداثيات المسقط القائم $\grave{D}$ للنقطة D على المستوي (ABC) .

3) لتكن النقطة $F(0,6,2)$ أوجد a و b التي تحقق

$$\overrightarrow{AF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

ثم استنتج أن النقاط A,B,C,F تقع في مستوٍ واحد

4) أوجد المعادلة الديكارتية التي تمثلها مجموعة النقاط M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ثم أثبت أنها تمثل معادلة كرة قطرها AB

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{-5} \neq \frac{0}{-2}\right)$

فالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

فالنقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة.

2) بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً على (ABC)

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Longrightarrow 2a - 6b = 0 \quad \dots(1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow -a - 5b - 2c = 0 \quad \dots(2)$$

نفرض $b = 1$ نعوض في (1) : $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

نعوض في (2) : $-3 - 5 - 2c = 0 \Rightarrow c = -4$

$$\vec{n}(3,1,-4)$$

$$(ABC): 3(x-1) + 1(y+1) - 4(z-1) = 0$$

$$(ABC): 3x + y - 4z + 2 = 0$$

ليكن d المستقيم المار من D والعمودي على (ABC)

$$\vec{u}_d = \vec{n}$$

$$d: \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = t + 3 \\ z = -4t - 3 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية لـ d في P

$$9t + 9 + t + 3 + 16t + 12 + 2 = 0$$

$$26t + 26 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$D'(0,2,1)$$

3) $\overrightarrow{AF} = a\ \overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ -6a - 5b \\ 0 - 2b \end{pmatrix}$$

$$2a - b = -2 \quad (1)$$

$$-6a - 5b = 2 \quad (2)$$

$$-2b = -1 \quad (3)$$

من (3) $\boxed{b = \frac{1}{2}}$ نعوض في (1) : $2a - \frac{1}{2} = -2$

$$2a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{4}}$$

نتحقق في (2) : $-6\left(-\frac{3}{4}\right) - 5\left(\frac{1}{2}\right) \overset{?}{=} 2$

$2 = 2$ محققة

إذاً $\overrightarrow{AF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ومنه حسب مبرهنة (4) الأشعة $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

ومنه A, B, C, F تقع في مستوٍ واحد

4) بفرض $M(x,y,z)$ نعوض في العلاقة

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 - x \\ 4 - y \\ 3 - z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 - x \\ -2 - y \\ 3 - z \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-x)(4-x) + (4-y)(-2-y) + (3-z)^2 = 0$$

$$8 - 2x - 4x + x^2 - 8 - 4y + 2y + y^2 + (z-3)^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + (z-3)^2 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9} - 9 + \underbrace{y^2 - 2y + 1} - 1 + (z-3)^2 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$$

المعادلة تمثل كرة مركزها $(3,1,3)$ و نصف قطرها $\sqrt{10}$

نلاحظ أن: $AB = \sqrt{4 + 36 + 0} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 2R$

منتصف AB هو $I = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{4-2}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (3,1,3)$

إذاً الكرة السابقة قطرها AB

المسألة الثانية: (100 درجة)

في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا
النقطة: $A(6,1,1)$
والمستويان: $P_1: x-2y=5$
$P_2: y+z=4$

1) اثبت ان المستويين متقاطعين
2) جد تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك لهما d
3) اكتب معادلة المستوي Q المار من النقطة A ويعامد الفصل المشترك d
4) اوجد إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستوي Q مع الفصل المشترك d
5) احسب بعد A عن الفصل المشترك d

الحل:

(1
$\vec{n}_1(1,-2,0), \vec{n}_2(0,1,1)$
غير مرتبطان خطياً ومنه P_1 , P_2 متقاطعان

(2
من ①: $x=2y+5$
من ②: $z=-y+4$
➢ بفرض $y=t$:

$$d:\begin{cases} x=2t+5 \\ y=t \\ z=-t+4 \end{cases} ; t\in R$$

(3 Q يعامد d $\Leftarrow$ $\vec{n}_Q=\vec{u}_d(2,1,-1)$
مار من $A(6,1,1)$
$Q: 2(x-6)+(y-1)-(z-1)=0$
$$\boxed{Q: 2x+y-z-12=0}$$

(4 B تقاطع Q مع d :
➢ نعوض معادلات d في Q :
$4t+10+t+t-4-12=0$
$6t=6 \Rightarrow t=1$

➢ نعوض في d :

$$\left.\begin{aligned} x&=2+5=7 \\ y&=1 \\ z&=-1+4=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(7,1,3)$$

5) إن بعد A عن d هو نفسه بعد A عن B
ومنه البعد المطلوب:

$$\boxed{AB=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}}$$

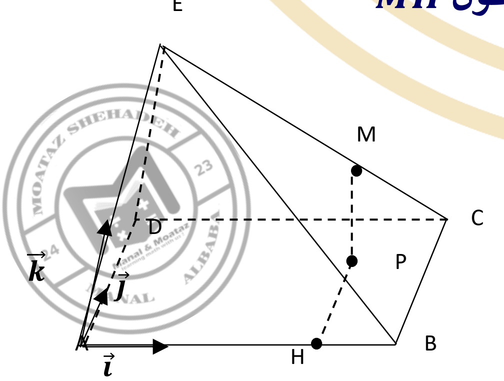
المسألة الثالثة: (100 درجة)

$EABCD$ هرم قاعدته مربع ورأسه E, $[EA]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ في معلم متجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$ والمطلوب:

1) W جد إحداثيات النقاط A,B,C,D,E
2) جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث EDB
3) احسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}$ ماذا نستنتج ؟
4) جد معادلة المستوي (EGD)
5) اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)
6) بفرض M نقطة تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$ و لتكن P مسقط M على $(ABCD)$ و لتكن H مسقط P على (AB) احسب طول MH

الحل:

❶



$A(0,0,0), B(3,0,0), D(0,3,0)$

$E(0,0,3), C(3,3,0)$

❷ $G(1\,,1\,,1)$

$\boxed{\overrightarrow{AG}(1\,,1\,,1), \overrightarrow{GD}(-1\,,2\,,-1), \overrightarrow{ED}(0\,,3\,,-3)}$

❸

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD} = -1+2-1=0$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED} = 0+3-3=0$

ومنه (AG) يعامد (GD) و (ED)

وبالتالي (AG) يعامد المستوي (EGD) .

❹

$D(0\,,3\,,0)$,$\vec{n} = \overrightarrow{AG}(1\,,1\,,1)$

$(x-0)+(y-3)+(z-0)=0$

$\boxed{(EGD)\ :\ x+y+z-3=0}$

❺

$\overrightarrow{EC}(3\,,3,-3)$

$$\boxed{d:\begin{cases} x=3t+3 \\ y=3t+3 \quad ;t\in R \\ z=-3t \end{cases}}$$

❻ بفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$$

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow M(2,2,1)$$

P مسقط M على $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ و منه $P(2,2,0)$

H مسقط M على $(A;\vec{\imath})$ و منه $H(2,0,0)$

$\boxed{HM=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}}$

المسألة الرابعة: (100 درجة)

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 2 فيه I,J,K منتصفات $[AD],[CD],[DH]$ بالترتيب و M نقطة تقاطع $[DF]$ مع (IJK) والمطلوب:

1) باختيار المعلم $\left(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$ احسب إحداثيات I,J,K.

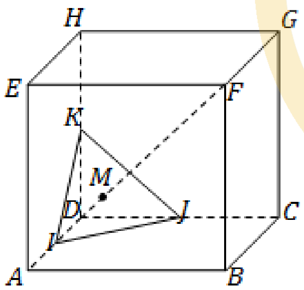
2) أثبت أن (DF) يعامد (IJK) ثم أكتب معادلة المستوي (IJK)

3) أوجد إحداثيات M.

4) أتكون M نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث IJK؟

5) أثبت أن M مركز ثقل المثلث IJK وماذا تستنتج؟

6) احسب حجم رباعي الوجوه $DIJK$



الحل:

(1

$\boxed{I(1,0,0), J(0,1,0), K(0,0,1)}$

(2

$F(2,2,2), D(0,0,0)$

$\overrightarrow{DF}(2,2,2)\ , \overrightarrow{IJ}(-1,1,0), \overrightarrow{IK}(-1,0,1)$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IJ} = -2+2+0=0$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IK} = -2+0+2=0$

إذاً (DF) يعامد (IJK)

$\overrightarrow{DF}$ ناظم على المستوي (IJK):

$2(x-1)+2(y-0)+2(z-0)=0$

ومنه

$$\boxed{(IJK): x+y+z-1=0}$$

3) المعادلات الوسيطية لـ (DF):

$$(DF):\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=2t\end{cases}\quad ; t\in\mathbb{R}$$

نعوض في (IJK):

$$2t+2t+2t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{6}$$

نعوض في (DF):

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$$

4)

$$\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{IJ}(-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=0$$

ومنه $(IJ)\perp(KM)$

$$\overrightarrow{JM}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}=0$$

ومنه $(JM)\perp(IK)$ وبالتالي M نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث IJK.

5) مركز ثقل IJK:

$$\left(\frac{1+0+0}{3},\frac{0+1+0}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

إذاً M مركز ثقل المثلث IJK وبما أنها نقطة تلاقي الارتفاعات أيضاً فالمثلث IJK متساوي الأضلاع

6) القاعدة IJK مثلث متساوي الأضلاع مساحتها

$$s=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(بحيث $a=\|\overrightarrow{IK}\|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$)

ويكون ارتفاع الهرم هو:

$$h=dist\,(D,IJK)=\frac{\|0+0+0-1\|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Rightarrow V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}}$$

المسألة الخامسة: (100 درجة) هام

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,-2,3)$ و $B(4,-3,-1)$ و $C\left(0,-\frac{1}{2},-3\right)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x-y+3z-4=0$ والمطلوب:

1) تحقق أن المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$. ثم أعط معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B

2) أكتب معادلة للكرة التي مركزها النقطة B وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

3) أعط تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[AB)$.

4) ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن إحداثيات النقطة G هي $(-1,0,-1)$.

5) بين أن M مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق المساواة:

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=12$$

تمثل كرة S عين مركزها واحسب نصف قطرها. ثم أثبت أن المستوي $\mathcal{P}$ يقطع الكرة S. عين نصف قطر الدائرة المقطع.

الحل:

1) $\vec{n}_{\mathcal{P}}(2,-1,3)$ و $\overrightarrow{AB}(2,-1,-4)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{2}{2}\neq\frac{3}{-4}\right)$ فالمستقيم (AB) لايعامد المستوي $\mathcal{P}$

إيجاد معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$ فيكون $\vec{n}\perp\vec{n}_{\mathcal{P}}$ ومنه $\vec{n}.\vec{n}_{\mathcal{P}}=0$ وبالتالي

$$2a-b+3c=0$$

و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ ومنه $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي

$$2a-b-4c=0$$

بفرض $\boxed{a=1}$ فيكون $-b+3c=-2$ و $-b-4c=-2$ بالطرح نجد $\boxed{c=0}$ نعوض نجد $\boxed{b=2}$ وبالتالي $\vec{n}(1,2,0)$ فمعادلة المستوي $\mathcal{Q}$ هي:

$$1(x-2)+2(y+2)+0(z-3)=0$$

$$\boxed{x+2y+2=0}$$

2)

$$R=dist(B,\mathcal{P})=\frac{|2(4)-(-3)+3(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

فمعادلة الكرة هي:

$$\boxed{(x-4)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=\frac{16}{14}}$$

3)

$$[AB]:\begin{cases}x=2t+2\\ y=-t-2\\ z=-4t+3\end{cases}\quad ;t\in[0,+\infty[$$

4)

$$x_G=\frac{x_A-x_B+2x_C}{2}=\frac{2-4+0}{2}=-1$$

$$y_G=\frac{y_A-y_B+2y_C}{2}=\frac{-2+3-1}{2}=0$$

$$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{2}=\frac{3+1-6}{2}=-1$$

ومنه $G(-1,0,-1)$

5) $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=12$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ فإن:

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$$

ومنه $\|2\overrightarrow{MG}\|=12$ أي $\|\overrightarrow{MG}\|=6$

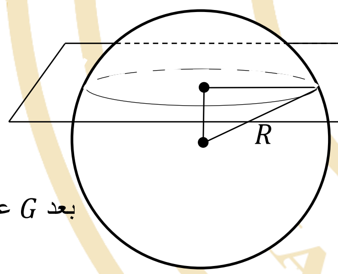
فمجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $G(-1,0,-1)$ ونصف قطرها 6

$$dist(G,\mathcal{P})=\frac{|2(-1)-(0)+3(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}}<R=6$$

فالمستوي $\mathcal{P}$ يقطع الكرة S.

بفرض r نصف قطر الدائرة المقطع فيكون:

$$\boxed{r^2=36-\frac{81}{14}=\frac{423}{14}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{423}{14}}}$$



المسألة السادسة: (100 درجة)

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $BC=GC=1, AB=2$ هي النقطة I منتصف AB و J هي منتصف $[CG]$ ، نتأمل المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

احسب المسافتين IJ, DJ

اثبت ان المستقيمين $(IJ),(ID)$ متعامدان و

1) احسب المسافتين IJ, DJ

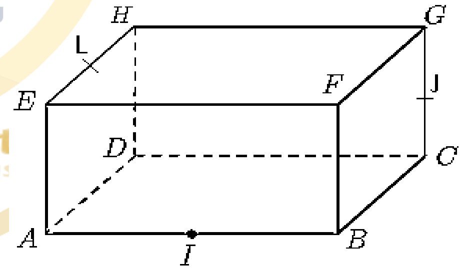
2) أثبت أن المستقيمين $(IJ),(DJ)$ متعامدان واحسب $\cos \widehat{IJD}$

3)
A. اعط معادلة للمستوي المنشأ على المستقيمين $(ID),(JI)$
B. احسب بعد H عن المستوي (DJI)

4) احسب حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$

5)
A. اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)
B. احسب إحداثيات النقطة J' مسقط النقطة J على المستوي (HDI)
C. احسب بعد J عن المستوي (HDI)

6) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$ ؟ (بحيث O مركز ثقل المثلث AEL و L منتصف EH)



الحل:

1) لدينا

$$H(0,1,1), I(1,0,0), J\left(2,1,\frac{1}{2}\right), D(0,1,0)$$

$$IJ=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$\boxed{DJ=\sqrt{4+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

2) $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{ID}=-1+1+0=0$$

$\Rightarrow$ متعامدان $(DI),(IJ)$

حساب $\cos\widehat{IJD}$

طريقة 1:	طريقة 2:
نلاحظ ان $(\widehat{IJD})=(\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JD})$ $\overrightarrow{JI}\left(-1,-1,-\frac{1}{2}\right) . \overrightarrow{JD}\left(-2,0,-\frac{1}{2}\right)$ $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JD}=\Vert\overrightarrow{JI}\Vert.\Vert\overrightarrow{JD}\Vert.\cos(\widehat{IJD})$ $2+0+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{17}}{2}.\cos(\widehat{IJD})$ $\Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{17}\cos(\widehat{IJD})$ $\Rightarrow \cos(\widehat{IJD})=\frac{3}{\sqrt{17}}$	من المثلث القائم DIJ: $\cos(\widehat{IJD})=\frac{IJ}{DJ}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$

3)
A. (معادلة المستوي المطلوب هي نفسها معادلة المستوي الذي يقبل $\overrightarrow{ID},\overrightarrow{JI}$ موجهين له)
نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (DIJ) بشرط c,b,a ليست جميعها اصفاراً

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{ID}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{JI}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=0\\ -a-b-\frac{1}{2}c=0\end{cases}$$

باختيار $b=1$ نجد ان: $a=1, c=-4$ ومنه

$$\vec{n}(1,1,-4)$$

$$(DIJ):1(x-0)+1(y-1)-4(z-0)=0$$

$$\boxed{(DIJ):x+y-4z-1=0}$$

B. $\boxed{dist(H,(DIJ))=\frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}}$

4) نلاحظ ان رباعي الوجوه $(HDIJ)$ رأسه H و قاعدته DIJ و يكون ارتفاعه : $h = dist(H,(DIJ)) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

مساحة القاعدة: (بعد ملاحظة ان المثلث DIJ قائم في I لأنه $(\overrightarrow{JI}\,.\overrightarrow{ID} = 0)$

$$S_{DIJ} = \frac{[IJ][ID]}{2} = \frac{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad : ID = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{3}.S_{DIJ}.h = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}}{4}.\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}}$$

5)

A. بما ان المستقيم d عمودي على المستوي (HDI) فإن ناظم المستوي هو شعاع توجيه المستقيم d

نوجد معادلة المستوي (HDI)

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HDI) بشرط a,b,c ليست جميعها اصفاراً

$$\overrightarrow{HD}(0,0,-1), \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\overrightarrow{HD} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{ID} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}-c = 0\\ -a+b = 0\end{array}$$

باختيار $b = 1$ نجد ان $c = 0, a = 1$ و منه $\vec{n}(1,1,0)$

معادلة المستوي (HDI)

$$1(x-0)+1(y-1)+0(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow (HDI):\quad x+y-1 = 0$$

عندئذٍ $\vec{u} = \vec{n}(1,1,0)$ والنقطة $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{d: \begin{cases} x = t+2\\ y = t+1\\ z = \frac{1}{2}\end{cases} ;t\in R}$$

B. J' هي نقطة تقاطع d مع (HDI) وبالتالي نعوض d في (HDI)

$$t+2+t+1-1 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\boxed{\begin{cases} x = -1+2 = 1\\ y = -1+1 = 0\\ z = \frac{1}{2}\end{cases} ;\quad J'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)}$$

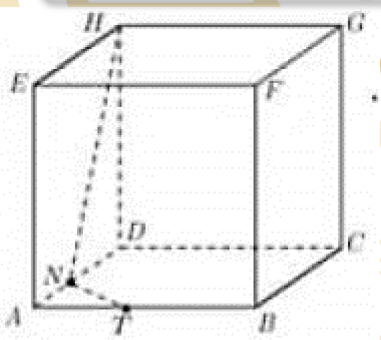
C.

$$\boxed{dist(J',(HDI)) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}}$$

6)

$3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FO}$	$3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$
$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$	$3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EO}$

المسألة السابعة:



لدينا مكعب $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 و T نقطة من $[AB]$ وتحقق $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و N نقطة من $[AD]$ وتحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

1) في المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط H,F,N,T

2) جد الشعاعين $\overrightarrow{NH}$ و $\overrightarrow{NT}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT)

3) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)

4) استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)؟

5) اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) و ما طبيعته؟

الحل:

1) $A(0,0,0), B(1,,0,0), C(1,1,0)$

$D(0,1,0)\ , E(0,0,1)\ , F(1,0,1)\ , G(1,1,1)$

$$\boxed{H(0,1,1), T\left(\frac{2}{5},0,0\right), N\left(0,\frac{2}{5},0\right)}$$

2) $\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right)$ و $\overrightarrow{NT}\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0\right)$ موجهين لـ (NTH)

نعوض $\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$ ناظم على المستوي

$\vec{n} \perp \overrightarrow{NT} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{NT} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b = 0}$ ①

$\vec{n} \perp \overrightarrow{NH} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{NH} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{5}b + c = 0}$ ②

نعوض $b = 5$ في ① $a = 5$

نعوض $b = 5$ في ② $c = -3$

$\vec{n}(5,5,-3)$

$5(x-0) + 5(y-1) - 3(z-1) = 0$

$$\boxed{(NTH): 5x + 5y - 3z - 2 = 0}$$

3) $\overrightarrow{EF}(1,0,0)$

$$\boxed{(EF):\begin{cases} x = t \\ y = 0 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$$

4) نعوض معادلات (EF) في (NHT)

$5t + 0 - 3 - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$

نعوض في (EF)

$$\boxed{\left.\begin{matrix} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{matrix}\right\} I(1,0,1)}$$

5) المستوي HNT يمر من F ⇐ مقطع المكعب هو $HNTF$

$\overrightarrow{HF}(1,-1,0)$

$\overrightarrow{NT}\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0\right)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{NT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{HF}$

فالشعاعين مرتبطين خطياً وغير متساويين ⇐الرباعي $HNTF$ شبه منحرف

المسألة الثامنة:

في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقط $A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$

1) أثبت أن معادلة المستوي المحوري P_1 للقطعة المستقيمة هي $4x - 4y - 10z - 13 = 0$

2) بافتراض أن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ و $[CD]$ هما على

الترتيب $P_2: 2x-10y-6z-7=0$ و

$P_3: 3x-3y+2z-5=0$

أثبت أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة E يطلب إيجاد إحداثياتها

3) استنتج معادلة للكرة التي تمر برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$

الحل:

1) بفرض M منتصف القطعة $[AB]$ فتكون إحداثياتها

$M\left(3,1,\frac{-1}{2}\right)$ والشعاع $\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$ ناظم على P_1

معادلة المستوى P_1 هي

$$-2(x-3)+2(y-1)+5\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\boxed{P_1: 4x-4y-10z-13=0}$$

2)

$$\begin{cases} 4x-4y-10z-13=0 & L_1 \\ 2x-10y-6z-7=0 & L_2 \\ 3x-3y+2z-5=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-10y-6z-7=0 & L_1 \\ 4x-4y-10z-13=0 & L_2 \\ 3x-3y+2z-5=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}L_1 \to L_1'$$

$$\begin{cases} x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1' \\ 4x-4y-10z-13=0 & L_2' \\ 3x-3y+2z-5=0 & L_3' \end{cases}$$

$$-4L_1'+L_2' \to L_2''$$
$$-3L_1'+L_3' \to L_3''$$

$$\begin{cases} x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1'' \\ 16y+2z+1=0 & L_2'' \\ 12y+11z+\frac{11}{2}=0 & L_3'' \end{cases}$$

$$-\frac{3}{4}L_2''+L_3'' \to L_3'''$$

$$\begin{cases} x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1''' \\ 16y+2z+1=0 & L_2''' \\ +\frac{19}{2}z+\frac{19}{2}=0 & L_3''' \end{cases}$$

من L_3''' نجد $\boxed{Z=-\frac{1}{2}}$

نعوض ب L_2''' نجد $\boxed{y=0}$

نعوض ب L_1''' $\boxed{x=2}$

المستويات تتقاطع في نقطة واحدة $E\left(2,0,-\frac{1}{2}\right)$

3) بما أن النقطة E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن $EA=EB \dots (1)$

وبما أن النقطة E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$ فإن $EA=EC \dots (2)$

وبما أن النقطة E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ فإن $EB=EC \dots (3)$

من (1) و (2) و (2) نجد أن النقطة E متساوية البعد عن النقاط A, B, C, D فهي مركز الكرة التي تمر بهذه النقاط

نصف قطر الكرة R حيث

$$R=EA=\sqrt{4+0+\left(-3+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}$$

معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ هي

$$\boxed{(x-2)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{41}{4}}$$