مراجعة

مبادئ الإحصاء

المستوى الأول – تخصص المحاسبة

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية

- إعداد وتنسيق -

صادق سعيد

- المصادر-

تفريغ اللقاءات الحية للأخت سارة الناصر ١٤٣٥ هـ - ١٤٣٦ هـ

أسئلة د. سلطان محمد عبد الحميد بمنتدى المناقشة

كتاب الإحصاء الوصفي والاستدلالي لـ (د. أحمد عودة + أ. منصور القاضي)

" تم التحديث في رجب ١٤٣٦هـ"

تعاريف ومفاهيم إحصائية

* تعريف الإحصاء .

لغة : مشتق من "أحصى" .

اصطلاحاً : علم يهتم بعملية جمع وتنظيم وعرض البيانات ثم تحليل وتفسير النتائج .

* فروع علم الإحصاء .

١. الإحصاء الوصفي .

هو جمع البيانات وتنظيمها وعرضها .

٢. الإحصاء التحليلي .

هو تحليل البيانات وتفسيرها .

* مراحل العملية الإحصائية .

١. جمع البيانات .

٢. تبويب البيانات .

٣. العرض البياني للبيانات (أو عرض البيانات) .

٤. تحليل البيانات .

* أنواع (أقسام) البيانات الإحصائية .

١. البيانات الوصفية .

أ) البيانات الوصفية الاسمية .

هي أوصاف لا يمكن ترتيبها، مثل (المواليد ذكور وإناث + أسماء الطلاب أو المناطق + الجنسيات + الألوان + الحالة الاجتماعية) .

ب) البيانات الوصفية الترتيبية .

هي أوصاف يمكن ترتيبها، مثل (تقديرات الطلاب ممتاز ثم جيد ثم ضعيف + المستوى التعليمي ابتدائي ثم متوسط ثم ثانوي) .

٢. البيانات الكمية .

أ) البيانات الكمية المتقطعة أو المنفصلة .

هي أعداد لا تقبل قيم عشرية مثل (عدد أفراد الأسرة + عدد الغرف بالمنزل + عدد المساجد أو السيارات) فلا يمكن أن نقول عددها ٤,٥ !

ب) البيانات الكمية المتصلة أو المستمرة .

هي أعداد تقبل القيم العشرية، أو تكون موجودة داخل نطاق مثل (أعمار عمال المصنع من ٢٠ إلى ٣٥+ الحرارة + الوزن + الرواتب) .

* مصادر البيانات .

١. المصادر التاريخية .

هي البيانات التي تجمعها المؤسسات الحكومية أو الأهلية، مثل (الميزانيات + التعداد السكاني + إحصائيات المواليد والوفيات) .

٢. المصادر الميدانية .

هي البيانات التي يجمعها الباحث بنفسه، مثل (معرفة آراء الطلاب عن المقررات و الأساتذة ومواعيد المحاضرات + الاستبيانات) .

* أساليب البحث الميداني (أو أساليب جمع البيانات) .

١. الحصر الشامل : أن البحث يشمل المجتمع بالكامل .

مزاياه (يوفر معلومات دقيقة عن جميع الأفراد+ نتائجه نهائية وتعبر عن المجتمع ولا تحتاج تعديل) .

عيوبه (طول وقت الدراسة + يتطلب جهود كبيرة + تكلفته كبيرة + لا يصلح عندما لا يكون المجتمع محدود) .

٢. العينات : أن البحث يشمل جزء أو عينة مِن المجتمع .

مزاياها (توفير الوقت والجهد + يناسب المجتمعات غير المحدودة كالسمك + يناسب الحالات التي يترتب فيها الإتلاف كدراسة الدم) .

عيوبها (عدم دقة النتائج + قد لا تكون النتائج نهائية + العينات لا تصلح في المجتمعات المحدودة) .

أنواع العرض الجدولي للبيانات (أو أنواع الجداول)

١. العرض الجدولي للبيانات الوصفية .

٢. العرض الجدولي للبيانات الكمية المتقطعة .

٣. العرض الجدولي للبيانات الكمية المتصلة .

* العرض الجدولي للبيانات الوصفية .

مثال (١) : أعرض البيان أدناه (الخاص بالحالة الاجتماعية لـ ٢٥ موظف) في صورة جدولية ثم استخرج التكرار النسبي .

متزوج، متزوج، مطلق، أرمل، أرمل، أعزب، أعزب، مطلق، متزوج، متزوج، متزوج، أعزب، متزوج، أعزب، أرمل، أعزب، متزوج، متزوج، أعزب، مطلق، متزوج، أعزب، أعزب، أرمل، متزوج .

الحل :

أولاً: نعرض البيانات في صورة جدولية :

الحالة الاجتماعية	التكرار f
متزوج	10
أعزب	8
مطلق	3
أرمل	4
-	مجموع التكرارات $\sum f = 25$

ثانياً: نستخرج التكرار النسبي للجدول السابق باستخدام القانون التالي : التكرار النسبي = $\frac{f\ \text{التكرار}}{\sum f\ \text{مجموع التكرارات}} \times 100$

الحالة الاجتماعية	التكرار f	التكرار النسبي
متزوج	10	40%
أعزب	8	32%
مطلق	3	12%
أرمل	4	16%
-	مجموع التكرارات $\sum f = 25$	مجموع التكرار النسبي = 100% (يجب أن يكون الإجمالي ١٠٠)

* العرض الجدولي للبيانات الكمية المتقطعة .

مثال (١) : أعرض البيان أدناه (الخاص بعدد السيارات التي تملكها ٢٠ أسرة) في صورة جدولية ثم استخرج التكرار النسبي .

٤، ٣، ٢، ١، ٢، ٢، ٥، ٣، ٢، ٤، ٣، ٢، ٣، ١، ٣، ٥، ٣، ٤، ١، ٣ .

الحل :

أولاً: نعرض البيانات في صورة جدولية :

عدد السيارات	التكرار f
1	3
2	5
3	7
4	3
5	2
-	مجموع التكرارات $\sum f = 20$

ثانياً: نستخرج التكرار النسبي للجدول السابق باستخدام القانون التالي : التكرار النسبي = $\frac{f \text{ التكرار}}{\sum f \text{ مجموع التكرارات}} \times 100$

التكرار النسبي	التكرار f	عدد السيارات
15%	3	1
25%	5	2
35%	7	3
15%	3	4
10%	2	5
مجموع التكرار النسبي = 100%	مجموع التكرارات $\sum f = 20$	-

* العرض الجدولي للبيانات الكمية المتصلة .

مثال (١) : أعرض البيان أدناه (الخاص بأوزان ٢٥ طالب) في صورة جدولية (بحيث أول فئة على الصورة (- 50) وآخر فئة على الصورة (100 - 90) وطول الفئة (10)) ثم استخرج التكرار النسبي والتكرار المئوي .

٦٠، ٦٣,٥، ٥٠، ٧٧,١، ٧٩، ٨٣، ٩٢، ٦٤، ٥٥، ٦٨,٢، ٨٨,٣، ٦٧، ٨١، ٦٦,٣، ٧٥، ٧٧، ٨٦، ٧١,٦، ٨٩، ٧٦,٣، ٧٢، ٧٩، ٧٨، ٧٧، ٧٤ .

الحل :

أولاً: نعرض البيانات في صورة جدولية ونأخذ في الاعتبار أول فئة وآخر فئة وطول الفئة :

الفئات	العلامات	التكرار f
50 - تُكتَب في الأساس هكذا : 60-50 ولكن الصيغة أعلاه مختصرة . وتُقرأ : من ٥٠ وحتى أقل من ٦٠ لأن طول الفترة ١٠ حسب السؤال	// أي يوجد وزنين ضمن هذه الفئة حسب السؤال	2
60 -	///// /	6
70 -	///// ///// /	11
80 -	/////	5
90 – 100	/	1
-	-	مجموع التكرارات $\sum f = 25$

ثانياً: نستخرج التكرار النسبي للجدول السابق باستخدام القانون التالي : التكرار النسبي = $\frac{f \text{ التكرار}}{\sum f \text{ مجموع التكرارات}} \times 100$

الفئات	العلامات	التكرار f	التكرار النسبي
50 -	//	2	8%
60 -	///// /	6	24%
70 -	///// ///// /	11	44%
80 -	/////	5	20%
90 - 100	/	1	4%
-	-	مجموع التكرارات $\sum f = 25$	مجموع التكرار النسبي = 100%

ثالثاً: نستخرج التكرار المئوي باستخدام القانون التالي : التكرار المئوي = $\frac{f \text{ التكرار}}{\sum f \text{ مجموع التكرارات}}$

الفئات	العلامات	التكرار f	التكرار النسبي	التكرار المئوي
50 -	//	2	8%	0.08
60 -	///// /	6	24%	0.24
70 -	///// ///// /	11	44%	0.44
80 -	/////	5	20%	0.2
90 - 100	/	1	4%	0.04
-	-	مجموع التكرارات $\sum f = 25$	مجموع التكرار النسبي = 100%	مجموع التكرار المئوي = 1

أنواع العرض البياني للبيانات أو للجدول التكراري

١. المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

٢. المضلع التكراري .

٣. المنحنى التكراري .

٤. المنحنى المتجمع الصاعد والهابط .

* المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

مثال (١) : أعرض الجدول التكراري أدناه في صورة المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

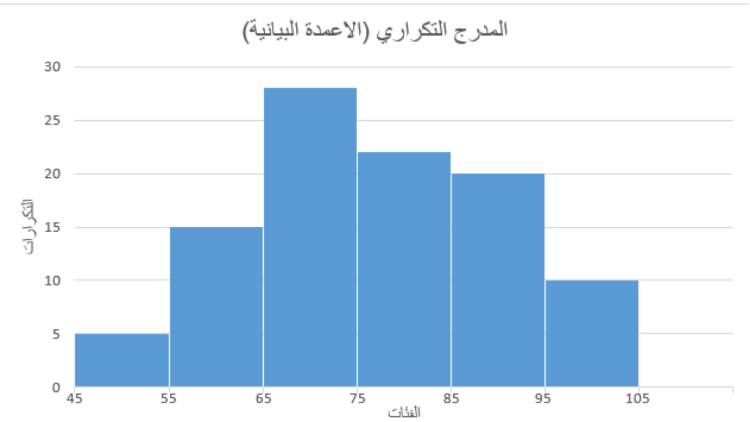
الفئات	التكرار f
45 -	5
55 -	15
65 -	28
75 -	22
85 -	20
95 - 105	10
-	مجموع التكرارات $\sum f = 100$

الحل :

أولاً : نضع الفئات على المحور الأفقي .

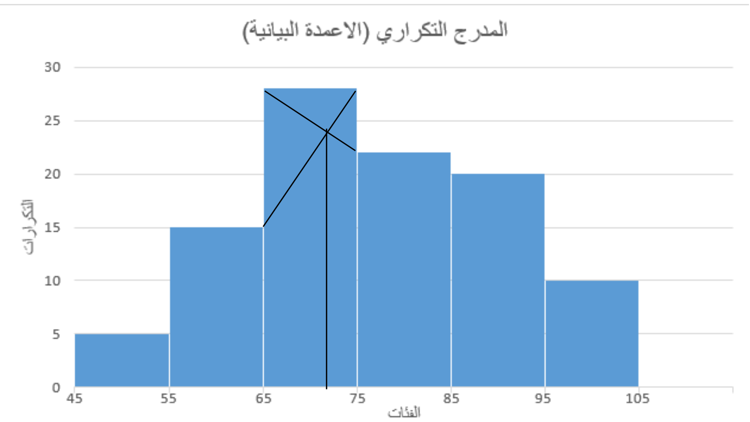
ثانياً : نضع التكرارات على المحور الرأسي .

ثالثاً : نستبدل كل تكرار بمستطيل رأسي يرتفع حسب قيمته العددية .



ملاحظة :

يُستخدم المدرج التكراري في تقدير أحد المتوسطات (وهو المنوال)، حيث يتم تمثيل المنوال بيانياً بإضافة بسيطة (الإضافة هي توصيل قطري أكبر قمة في المدرج، ثم نمد خط عمودي من نقطة تقاطع القطرين إلى المحور السيني، فتكون نقطة الالتقاء بالمحور السيني هي المنوال (والمنوال في هذا المثال يساوي ٧١ أو ٧٢) .



* المضلع التكراري .

ينشأ المضلع التكراري مِن المدرج التكراري .

مثال (١) : أعرض الجدول التكراري أدناه في صورة المضلع التكراري .

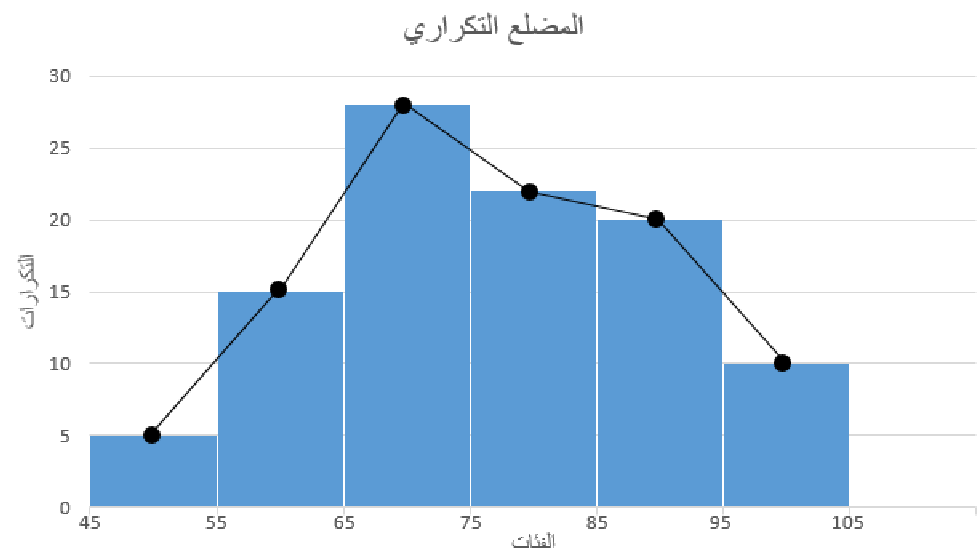
التكرار f	الفئات
5	45 -
15	55 -
28	65 -
22	75 -
20	85 -
10	95 - 105
مجموع التكرارات $\sum f = 100$	-

الحل :

أولاً : نرسم المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

ثانياً : نقوم بتنصيف قمم أعمدة المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

ثالثاً : نقوم بتوصيل منتصفات قمم المدرج التكراري بخطوط محددة مستقيمة (أي بالمسطرة) .



* المنحنى التكراري .

ينشأ المنحنى التكراري مِن المدرج التكراري .

مثال (١) : أعرض الجدول التكراري أدناه في صورة المنحنى التكراري .

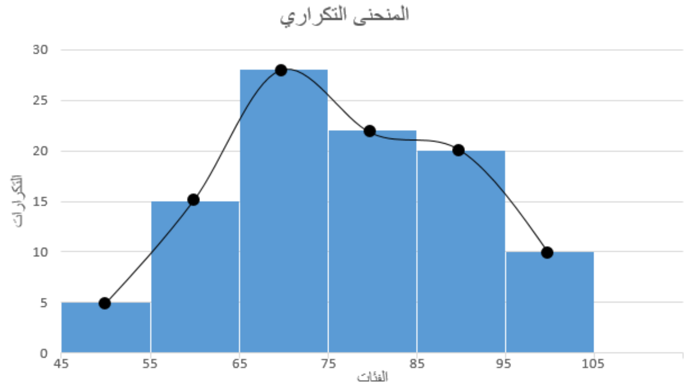
التكرار f	الفئات
5	45 -
15	55 -
28	65 -
22	75 -
20	85 -
10	95 - 105
مجموع التكرارات $\sum f = 100$	-

الحل :

<u>أولاً :</u> نرسم المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

<u>ثانياً :</u> نقوم بتنصيف قمم أعمدة المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

<u>ثالثاً :</u> نقوم بتوصيل منتصفات قمم المدرج التكراري بواسطة اليد .



* المنحنى المتجمع الصاعد .

مثال (١) : أعرض الجدول التكراري أدناه في صورة المنحنى المتجمع الصاعد .

التكرار f	الفئات
5	45 -
15	55 -
28	65 -
22	75 -
20	85 -
10	95 - 105
مجموع التكرارات $\sum f = 100$	-

الحل :

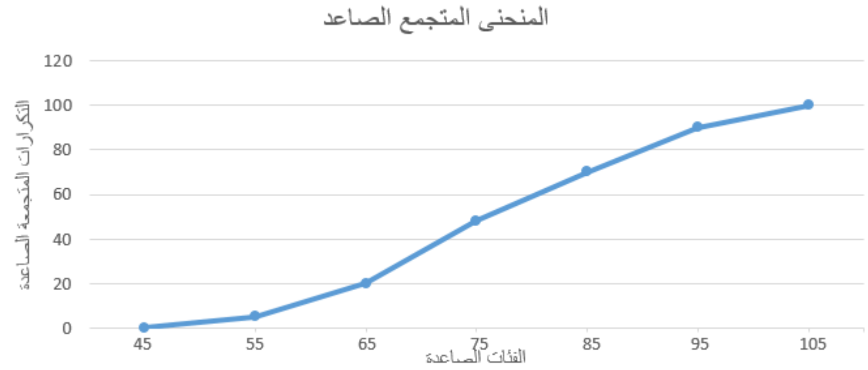
<u>أولاً :</u> نستخرج الجدول المتجمع الصاعد من الجدول التكراري .

التكرار المتجمع الصاعد هذا العمود يبدأ بصفر وينتهي بالمجموع الكلي للتكرارات $\sum f$	الحدود العليا للفئات نستبدل علامة (-) بكلمة (أقل من) من عمود الفئات	التكرار f	الفئات
0	أقل من 45	-	-
5 وهذا الرقم ناتج عن جمع التكرار المتجمع الصاعد السابق (0) مع التكرار الحالي (5)	أقل من 55	5	45 -
20 وهذا الرقم ناتج عن جمع التكرار المتجمع الصاعد السابق (5) مع التكرار الحالي (15)	أقل من 65	15	55 -
48 وهذا الرقم ناتج عن جمع التكرار المتجمع الصاعد السابق (20) مع التكرار الحالي (28)	أقل من 75	28	65 -
70 وهذا الرقم ناتج عن جمع التكرار المتجمع الصاعد السابق (48) مع التكرار الحالي (22)	أقل من 85	22	75 -
90 وهذا الرقم ناتج عن جمع التكرار المتجمع الصاعد السابق (70) مع التكرار الحالي (20)	أقل من 95	20	85 -
100 وهذا الرقم ناتج عن جمع التكرار المتجمع الصاعد السابق (90) مع التكرار الحالي (10)	أقل من 105	10	95 - 105
-	-	مجموع التكرارات $\sum f = 100$	-

ثانياً: نضع الفئات الصاعدة على المحور الأفقي .

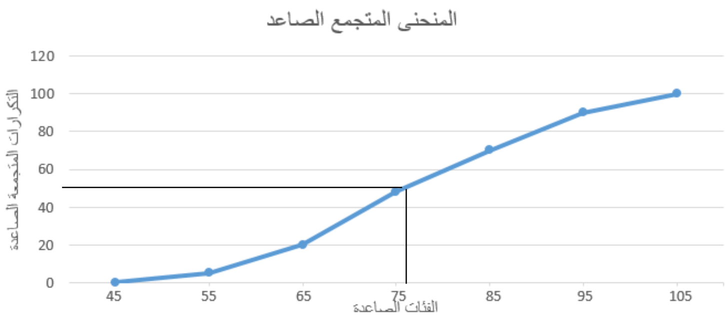
ثالثاً: نضع التكرارات المتجمعة الصاعدة على المحور الرأسي .

رابعاً: نضع نقطة عند مكان تقاطع كل فئة صاعدة مع تكرارها الصاعد، ثم نصل النقاط باليد لنحصل على المنحنى المتجمع الصاعد .



 # ملاحظة :

يُستخدم المنحنى المتجمع الصاعد في إيجاد الوسيط بيانياً، حيث نوجد أولاً ترتيب الوسيط $50 = \frac{100}{2} = \frac{\sum f}{2} = Q_2$، ثم نقوم برسم خط أفقي من المحور العمودي من النقطة (50)حتى نصل إلى المنحنى المتجمع الصاعد ثم نرسم من نقطة التقاطع خطاً عمودياً حتى نصل إلى المحور الأفقي، فتكون نقطة الالتقاء بالمحور الأفقي هي قيمة الوسيط (وقيمة الوسيط في هذا المثال يساوي ٧٦ تقريباً) .



تقدير قيمة الزاوية المقابلة للتكرار

* قانون إيجاد الزاوية الدائرية لتكرار معين .

$$\text{الزاوية الدائرية للتكرار المطلوب} = \frac{\text{التكرار المطلوب}}{\sum f \text{ إجمالي التكرارات}} \times 360$$

* أمثلة .

مثال (١) أوجد قيمة الزاوية المقابلة للتكرار 20 من الجدول التكراري التالي :

العدد (التكرار f)	الوزن (الفئات)
5	60-
15	65-
25	70-
20	75-
10	80-85
$\sum f = 75$	-

الحل :

$$\text{الزاوية الدائرية للتكرار المطلوب} = \frac{\text{التكرار المطلوب}}{\sum f \text{ إجمالي التكرارات}} \times 360 = \frac{20}{75} \times 360 = 96°$$

مثال (٢) أحسب الزاوية الدائرية المقابلة للتكرار 12 من الدرجات المبينة في الجدول أدناه لعينة من الطلاب في مبادئ الإحصاء .

التكرار المتجمع الصاعد هذا العمود يبدأ بصفر وينتهي بالمجموع الكلي للتكرارات $\sum f$	الحدود العليا للفئات	عدد الطلاب (التكرار f)	الدرجات (الفئات)
0	أقل من 25	-	-
		5	25 -
		12	35 -
		15	45 -
		10	55 -
		5	65 -
50	أقل من 85	3	75 - 85
-	-	مجموع التكرارات $\sum f = 50$	-

الحل :

$$\text{الزاوية الدائرية للتكرار المطلوب} = \frac{\text{التكرار المطلوب}}{\sum f \text{ إجمالي التكرارات}} \times 360 = \frac{12}{50} \times 360 = 86.4°$$

أنواع المتوسطات

١. الوسط الحسابي $(\bar{X})$.

يتم حسابه بطريقتين :

أ) بيانات مفردة (أي الأرقام العشوائية) .

ب) بيانات مبوبة (أي الأرقام التي لها جدول تكراري) .

٢. الوسيط (Q_2) .

يتم حسابه بطريقتين :

أ) بيانات مفردة (أي الأرقام العشوائية) .

ب) بيانات مبوبة (أي الأرقام التي لها جدول تكراري) .

٣. المنوال (M) .

يتم حسابه بطريقتين :

أ) بيانات مفردة (أي الأرقام العشوائية) .

ب) بيانات مبوبة (أي الأرقام التي لها جدول تكراري) .

٤. الوسط الهندسي (G) .

٥. الوسط التوافقي (H) .

الوسط الحسابي $\bar{X}$

* تعريف الوسط الحسابي .

هو القيمة التي لو حَلَّت محل جميع القيم لَمَا تغير مجموعها .

* قوانين الوسط الحسابي .

أ) قانون الوسط الحسابي للبيانات المفردة (العشوائية الغير مبوبة)

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ أي أنّ $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$

ب) خطوات إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة (بدون فئات وبفئات) .

١. في حال كان هناك جدول تكراري ولكن لا يحوي فئات فإننا نتوجه مباشرة للخطوة (٣) أدناه، ومثال (٣) يوضح هذه الخطوة .

٢. في حال كان هناك جدو تكراري وكان يحوي فئات فإننا نوجد مراكز الفئات X بالقانون التالي : مركز الفئة X = $\frac{\text{بداية الفئة+نهاية الفئة}}{2}$

٣. نوجد قيمة Xf بالقانون التالي : $Xf = X.f$

٤. نوجد الوسط الحسابي بالقانون التالي :

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ $\Leftarrow$ $\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f}$

* خصائص الوسط الحسابي .

١. الوسط الحسابي يحسب فقط البيانات الكمية .

٢. الوسط الحسابي له طريقة واحدة لحسابه وهي حسابياً باستخدام القانون فقط (أي لا يمكن حسابه بيانياً بالرسم كالوسيط والمنوال) .

٣. الوسط الحسابي $\bar{X}$ يكون دائماً أصغر مِن أكبر قيم X وأكبر مِن أصغر قيم X (أي أنه رقم وسط بين أكبر وأصغر قيم X) .

٤. الوسط الحسابي يتأثر بالعمليات الحسابية الأربعة (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة) .

٥. الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة (الأرقام الكبيرة جداً) لأن الوسط الحسابي يتم عند إيجاده جمع القيم .

* أمثلة .

مثال (١) أوجد الوسط الحسابي للأعمار التالية $(17, 21, 14, 12)$.

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{17 + 21 + 14 + 12}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

مثال (٢) إذا كان الوسط الحسابي $\bar{X} = 10$ و مجموع القيم $\sum X = 220$ ، أوجد عدد القيم n .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} \quad \Rightarrow \quad 10 = \frac{220}{n} \quad \Rightarrow \quad 10n = 220 \quad \Rightarrow \quad n = 22$$

مثال (٣) أوجد الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي :

عدد العمال وهو التكرار f	العمر X
4	20
6	25
7	30
3	35
$\sum f = 20$	-

الحل :

أولاً: نوجد قيمة Xf بالقانون التالي : $Xf = X.f$ ، مثلاً القيمة الأولى $Xf = X.f = 20 \times 4 = 80$

Xf	عدد العمال وهو التكرار f	العمر X
80	4	20
150	6	25
210	7	30
105	3	35
$\sum Xf = 545$	$\sum f = 20$	-

ثانياً: نوجد الوسط الحسابي بالقانون كما يلي :

$$\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{545}{20} = 27.25$$

مثال (٤) أوجد الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي :

التكرار f	الفئات
5	45-
15	55-
28	65-
22	75-
20	85-
10	95-105
$\sum f = 100$	-

الحل :

أولاً: نوجد مراكز الفئات X بالقانون التالي : مركز الفئة $X = \frac{\text{بداية الفئة+نهاية الفئة}}{2}$ ، مثلاً القيمة الأولى $X = \frac{45+55}{2} = \frac{100}{2} = 50$

ثانياً: نوجد قيمة Xf بالقانون التالي : $Xf = X.f$ ، مثلاً القيمة الأولى $Xf = X.f = 50 \times 5 = 250$

Xf	مركز الفئة X	التكرار f	الفئات
250	50	5	45-
900	60	15	55-
1960	70	28	65-
1760	80	22	75-
1800	90	20	85-
1000	100	10	95-105
$\sum Xf = 7670$	-	$\sum f = 100$	-

ثالثاً: نوجد الوسط الحسابي بالقانون كما يلي :

$$\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{7670}{100} = 76.7$$

مثال (٥) إذا كان الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في الإحصاء هو (70 درجة)، فأوجد الوسط الحسابي بعد إضافة (5 درجات) لكل طالب، ثم أوجد الوسط الحسابي بعد طرح (3 درجات) من كل طالب، ثم أوجد الوسط الحسابي بعد ضرب درجات كل طالب في (2)، ثم أوجد الوسط الحسابي بعد قسمة درجات كل طالب على (10) .

الحل :

أولاً : بعد إضافة (5 درجات) لكل طالب : $\bar{X} = 70 + 5 = 75$

ثانياً : بعد طرح (3 درجات) من كل طالب : $\bar{X} = 70 - 3 = 67$

ثالثاً : بعد ضرب درجات كل طالب في (2) : $\bar{X} = 70 \times 2 = 140$

رابعاً : بعد قسمة درجات كل طالب على (10) : $\bar{X} = 70 \div 10 = 7$

الوسيط Q_2

* تعريف الوسيط .

هو القيمة التي تقع في منتصف المجموعة بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً .

* قوانين الوسيط .

أ) خطوات إيجاد الوسيط للبيانات المفردة (العشوائية الغير مبوبة) .

١. نرتب القيم تصاعدياً أو تنازلياً .

٢. نحدد إلى الرقم الذي يقع في المنتصف :

فإذا كان رقماً واحداً فقط، فهو سيكون الوسيط .

إذا كانا رقمين فإننا نجمعها ونقسمها على 2 فيكون الناتج هو الوسيط .

ب) خطوات إيجاد الوسيط للبيانات المبوبة (بدون فئات وبفئات) **حسابياً** .

١. نوجد الجدول المتجمع الصاعد .

٢. نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2}$

٣. نحدد f_1 وهو التكرار المتجمع الذي يسبق ترتيب الوسيط، ونحدد f_2 وهو التكرار المتجمع الذي يلي ترتيب الوسيط، ونحدد A وهو الحد الأعلى للفئة التي تسبق ترتيب الوسيط وفي نفس الوقت هو الحد الأدنى للفئة التي تلي ترتيب الوسيط، ونحدد L وهو طول الفئة .

ملاحظة هامة جداً : إذا كان ترتيب الوسيط هو أحد التكرارات المتجمعة الصاعدة، فإن قيمة الوسيط هي نفس قيمة الحد الأعلى للفئة التي أمامه .

٤. نوجد قيمة الوسيط بالقانون التالي :

$$Q_2 = A + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L$$

ج) خطوات إيجاد الوسيط للبيانات المبوبة (بدون فئات وبفئات) **بيانياً** .

١. نوجد الجدول المتجمع الصاعد .

٢. نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2}$

٣. نرسم المنحنى المتجمع الصاعد .

٤. نرسم خط أفقي من المحور العمودي من النقطة التي حددنا أنها ترتيب الوسيط حتى نصل إلى المنحنى المتجمع الصاعد ثم نرسم من نقطة التقاطع خطاً عمودياً حتى نصل إلى المحور الأفقي، فتكون نقطة الالتقاء بالمحور الأفقي هي قيمة الوسيط .

* خصائص الوسيط .

١. الوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة (الأرقام الكبيرة جداً كالمثال الأول أدناه) لأن الوسيط يتم عند إيجاده استخراج للقيمة الوسطى فقط .

٢. يمكن إيجاد الوسيط بطريقتين : حسابياً وبيانياً .

* أمثلة .

مثال (١) أوجد الوسيط للبيانات التالية $(15, 11, 9, 107, 4)$.

الحل :

أولاً : نرتب القيم تصاعدياً $(4, 9, 11, 15, 107)$.

ثانياً : يقع في المنتصف رقم واحد فقط وهو (11)، وبالتالي فإن : الوسيط = 11

مثال (٢) أوجد الوسيط للدرجات ة $(26, 32, 15, 20, 7, 23, 12, 11)$.

الحل :

أولاً : نرتب القيم تصاعدياً $(7, 11, 12, 15, 20, 23, 26, 32)$.

ثانياً : يقع في المنتصف رقمين وهما $(15, 20)$، وبالتالي فإن : الوسيط = $\frac{15+20}{2} = 17.5$

مثال (٣) أوجد قيمة الوسيط حسابياً وبيانياً للدرجات المبينة في الجدول أدناه لعينة من الطلاب في مبادئ الإحصاء .

الدرجات (الفئات)	عدد الطلاب (التكرار f)	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد هذا العمود يبدأ بصفر وينتهي بالمجموع الكلي للتكرارات $\sum f$
-	-	أقل من 25	0
25 -	5		
35 -	12		
45 -	15		
55 -	10		
65 -	5		
75 - 85	3	أقل من 85	50
-	مجموع التكرارات $\sum f = 50$	-	-

الحل :

أولاً : نكمل الجدول المتجمع الصاعد .

الدرجات (الفئات)	عدد الطلاب (التكرار f)	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد هذا العمود يبدأ بصفر وينتهي بالمجموع الكلي للتكرارات $\sum f$
-	-	أقل من 25	0
25 -	5	أقل من 35	5
35 -	12	أقل من 45	17
45 -	15	أقل من 55	32
55 -	10	أقل من 65	42
65 -	5	أقل من 75	47
75 - 85	3	أقل من 85	50
-	مجموع التكرارات $\sum f = 50$	-	-

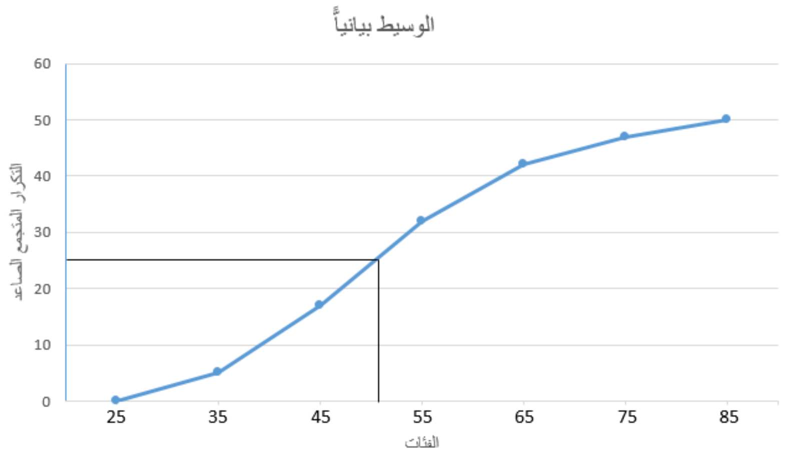
ثانياً : نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{50}{2} = 25$

ثالثاً : نوجد قيمة الوسيط كما يلي :

$$Q_2 = A + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L = 45 + \frac{\frac{50}{2} - 17}{32 - 17} \times 10 = 50.3$$

رابعاً : نرسم المنحنى المتجمع الصاعد ونرسم فيه قيمة الوسيط (الطريقة : نرسم خط أفقي من المحور العمودي من النقطة التي حددنا أنها ترتيب الوسيط حتى نصل إلى المنحنى المتجمع الصاعد ثم نرسم من نقطة التقاطع خطاً عمودياً حتى نصل إلى المحور الأفقي، فتكون نقطة الالتقاء بالمحور الأفقي هي قيمة الوسيط)

.



المنوال M

* تعريف المنوال .

هو القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً أو ظهوراً في البيانات .

* قوانين المنوال.

أ) خطوات إيجاد المنوال للبيانات المفردة (العشوائية الغير مبوبة) .

نحدد أكثر رقم تكرر في البيانات ثم نلاحظ إذا ..

كان رقماً واحداً فقط تكرر أكثر من غيره، فهو سيكون المنوال .

كانا رقمين أو أكثر تكرروا بالتساوي أكثر من غيرهم فإن هذه الأرقام هي المنوال .

لم يكن في البيانات أي رقم مكرر، فهذا يعني أن البيانات لا يوجد فيها منوال .

ب) خطوات إيجاد المنوال للبيانات المبوبة (بدون فئات) .

نحدد أكبر تكرار في البيانات ثم نلاحظ إذا ..

كان رقماً واحداً فقط تكرر أكثر من غيره، فإن الرقم المقابل له سيكون المنوال .

كانا رقمين أو أكثر تكرروا بالتساوي أكثر من غيرهم فإن الأرقام المقابلة لها هي المنوال .

ب) خطوات إيجاد المنوال للبيانات المبوبة (بفئات) **حسابياً** .

١. نحدد f_1 وهو التكرار الذي يسبق أكبر تكرار، ونحدد f_2 وهو التكرار الذي يلي أكبر تكرار ، ونحدد A وهو الحد الأدنى للفئة التي أمام أكبر تكرار، ونحدد L وهو طول الفئة .

٢. نوجد المنوال بالقانون التالي :

$$M = A + \frac{\mathrm{F}_2}{\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2} \times L$$

ج) خطوات إيجاد المنوال للبيانات المبوبة (بفئات) **بيانياً** .

١. نرسم المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

٢. نقوم بتوصيل قطري أكبر قمة في المدرج، ثم نمد خط عمودي من نقطة تقاطع القطرين إلى المحور السيني، فتكون نقطة الالتقاء بالمحور السيني هي المنوال .

* خصائص المنوال .

١. قد يكون للبيانات منوال أو منوالين أو أكثر، وقد لا يكون لها أي منوال .

٢. قد يكون للبيانات أكثر من منوال، بينما الوسط الحسابي واحد والوسيط أيضاً واحد لا يتكرران مهما زادت القيم .

* أمثلة .

مثال (١) أوجد المنوال للبيانات التالية $(7, 7, 2, 9, 14, 9, 7)$.

الحل :

$M = 7$ (لأن هذا الرقم هو أكثر رقم تكرر)

مثال (٢) أوجد المنوال للبيانات التالية $(7, 11, 1, 5, 14, 4)$.

الحل :

لا يوجد منوال لعدم وجود رقم متكرر (لا نقول صفر لأن الصفر عدد وقد يتكرر ويصبح منوالاً) .

مثال (٣) أوجد المنوال للبيانات التالية $(7, 6, 4, 7, 6, 6, 9, 7)$.

الحل :

$M_1 = 6 \quad , \quad M_2 = 7$ (لدينا منوالين لأن الرقمين تكررا ثلاثة مرات بالتساوي) .

مثال (٤) أوجد المنوال للجدول التكراري التالي :

عدد العمال وهو التكرار f	العمر X
4	20
6	25
7	30
3	35
$\sum f = 20$	-

الحل :

$M = 30$ (لأنه أمام أكبر رقم تكرر) .

مثال (٥) أوجد المنوال من الجدول التكراري التالي :

عدد الطلاب (التكرار f)	الدرجات (الفئات)
2	25-
5	35-
7	45-
5	55-
4	65-
2	75-85
$\sum f = 25$	-

الحل :

نوجد المنوال بالقانون كما يلي :

$$M = 45 + \frac{5}{5+5} \times 10 = 50$$

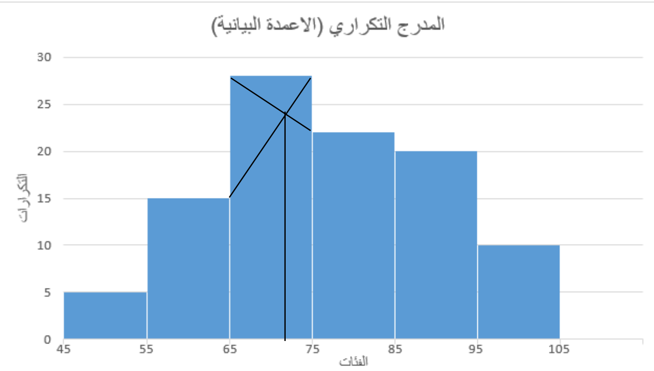
مثال (٦) أوجد قيمة المنوال بيانياً للبيانات المبينة في الجدول أدناه .

التكرار f	الفئات
5	45 -
15	55 -
28	65 -
22	75 -
20	85 -
10	95 - 105
مجموع التكرارات $\sum f = 100$	-

الحل :

<u>أولاً :</u> نرسم المدرج التكراري (الأعمدة البيانية) .

<u>ثانياً :</u> نرسم المنوال (الطريقة : نقوم بتوصيل قطري أكبر قمة في المدرج، ثم نمد خط عمودي من نقطة تقاطع القطرين إلى المحور السيني، فتكون نقطة الالتقاء بالمحور السيني هي المنوال) .



الوسط الهندسي G

* تعريف الوسط الهندسي .

هو الجذر النوني لحاصل ضرب القيم .

* قانون الوسط الهندسي .

$$G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 \dots X_n}$$

* خصائص الوسط الهندسي .

١. يجب أن تكون جميع قيم X موجبة .

٢. لا يمكن أن تكون إحدى قيم X صفر .

* أمثلة .

مثال (١) أوجد الوسط الهندسي للبيانات التالية $(9, 7, 4)$.

الحل :

$$G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 \dots X_n} = \sqrt[3]{9 \times 7 \times 4} = 6.316$$

مثال (٢) أوجد الوسط الهندسي للبيانات التالية $(8, 2, 9, 6, 3)$.

الحل :

$$G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 \dots X_n} = \sqrt[5]{8 \times 2 \times 9 \times 6 \times 3} = 4.816$$

الوسط التوافقي H

* تعريف الوسط التوافقي .

هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم .

* قانون الوسط التوافقي .

$$H = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots + \frac{1}{X_n}}$$

* أمثلة .

مثال (١) أوجد الوسط التوافقي للبيانات التالية $(4, 7, 9)$.

الحل :

$$H = \frac{3}{\frac{1}{9} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4}} = 5.95$$

مثال (٢) أوجد الوسط الهندسي والتوافقي للبيانات التالية $(7, 2, 5, 3)$.

الحل :

$$G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 \ldots X_n} = \sqrt[4]{3 \times 5 \times 2 \times 7} = 3.8$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots + \frac{1}{X_n}} = \frac{4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}} = 3.4$$

مثال (٣) أوجد الوسط الحسابي والهندسي والتوافقي للبيانات التالية $(8, 4, 2)$.

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{2 + 4 + 8}{3} = 4.67$$

$$G = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 \ldots X_n} = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} = 4$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots + \frac{1}{X_n}} = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 3.4$$

الجدول المتماثل

* ميزة الجدول المتماثل .

عندما يكون التوزيع متماثل (في الجداول المتماثلة كالمثال أدناه) فإن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال جميعها تساوي مركز الفئة المقابلة لأكبر تكرار .

* أمثلة .

مثال (١) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال وقيمة الزاوية الدائرية المقابلة للتكرار 26 من الجدول التكراري التالي :

العدد (التكرار f)	فئات الوزن
5	60-
12	64-
20	68-
26	72-
20	67-
12	80-
5	84-88
$\sum f = 100$	-

الحل :

أولاً: بما أن الجدول متماثل فإن أكبر تكرار هو 26 ، ومركز الفئة المقابلة له نوجده بالقانون كما يلي :

مركز الفئة $X = \frac{\text{بداية الفئة} + \text{نهاية الفئة}}{2} = \frac{76+72}{2} = 74$

ثانياً: بما أن مركز الفئة المقابلة لأكبر تكرار هو (74) فإن الوسط الحسابي (74) والوسيط (74) والمنوال (74) .

ثالثاً: نوجد الزاوية الدائرية المقابلة لأكبر تكرار بتقسيم التكرار المطلوب على إجمالي التكرارات، ثم ضرب الناتج في 360 كما يلي :

$$\left(\frac{26}{100}\right) \times 360 = 93.6°$$

مقاييس التشتت (أو الانتشار)

* تعريف مقاييس التشتت .

هي مقاييس تقيس مدى تقارب أو تباعد القيم عن بعضها، فإذا كانت القيم قريبة من بعضها نقول قيم غير متشتتة وإذا كانت القيم متباعدة نقول قيم متشتتة.

* أنواع مقاييس التشتت .

١. المدى (وهو الأسهل لكنه غير دقيق) .

٢. الانحراف المتوسط (وهو وسط بين الاثنين الآخَرَين) .

٣. التباين (وهو أكثر دقة ولكنه أصعب وأكثر تعقيد) .

المدى D

* تعريف المدى .

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة (أي ناتج الطرح بين القيمة الأصغر والقيمة الأصغر) .

* قانون المدى .

أ) في حالة البيانات غير المبوبة أو المبوبة التي لا تحوي فئات .

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة $\Leftarrow$ $D = M - m$

ب) في حالة البيانات المبوبة التي تحوي فئات .

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى $\Leftarrow$ $D = M - m$

* أمثلة .

مثال (١) أوجد المدى للقراءات التالية (8, 12, 6, 2, 11) .

الحل :

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة $\Leftarrow$ $D = M - m = 12 - 2 = 10$

مثال (٢) أوجد المدى من الجدول التالي :

عدد العمال (التكرار f)	العمر
4	20
9	25
12	30
7	35

الحل :

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

$$D = M - m = 35 - 20 = 15$$

مثال (٣) أوجد المدى من الجدول التالي :

عدد العمال (التكرار f)	فئات العمر
4	20-
15	30-
12	40-
5	50-60

الحل :

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى

$$D = M - m = 60 - 20 = 40$$

الانحراف المتوسط MD

* تعريف الانحراف المتوسط .

هو الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة للقيم عن وسطها الحسابي .

* قوانين الانحراف المتوسط .

أ) خطوات إيجاد الانحراف المتوسط للبيانات غير المبوبة أو المبوبة التي لا تحوي فئات .

١. نوجد الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$.

٢. نوجد الانحرافات المطلقة للقيم (بطرح الوسط الحسابي من القيم $|X - \bar{X}|$) .

٣. نوجد قيمة الانحراف المتوسط بالقانون التالي :

الانحراف المتوسط = $\frac{\text{مجموع الانحرافات المطلقة للقيم}}{\text{عدد القيم}}$ $\Leftarrow$ $MD = \frac{\sum|X-\bar{X}|}{n}$

ب) خطوات إيجاد الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة التي تحوي فئات .

١. نوجد مراكز الفئات X حيث : مركز الفئة X = $\frac{\text{بداية الفئة+نهاية الفئة}}{2}$

٢. نوجد قيمة Xf حيث : $Xf = X.f$.

٣. نوجد الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f}$.

٤. نوجد الانحرافات المطلقة للقيم (بطرح الوسط الحسابي من مراكز الفئات $|X - \bar{X}|$) .

٥. نوجد قيمة $f|X - \bar{X}|$.

٦. نوجد قيمة الانحراف المتوسط بالقانون التالي :

الانحراف المتوسط = $\frac{\text{مجموع القيم المطلقة للفرق بين مركز الفئة والمتوسط الحسابي}}{\text{عدد القيم}}$ $\Leftarrow$ $MD = \frac{\sum f|X-\bar{X}|}{\sum f}$

* أمثلة .

مثال (١) أوجد الانحراف المتوسط للقراءات التالية (5, 3, 6, 7, 4) .

الحل :

<u>أولاً :</u> نوجد الوسط الحسابي .

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{5+3+6+7+4}{5} = 5$$

<u>ثانياً :</u> نوجد الانحرافات المطلقة للقيم في جدول .

X	$\|X - \bar{X}\|$
5	$\|5-5\| = 0$
3	$\|3-5\| = 2$
6	$\|6-5\| = 1$
7	$\|7-5\| = 2$
4	$\|4-5\| = 1$
-------	$\sum\|X-\bar{X}\| = 6$

<u>ثالثاً :</u> نوجد قيمة الانحراف المتوسط كما يلي :

$$MD = \frac{\sum|X-\bar{X}|}{n} = \frac{6}{5} = 1.2$$

مثال (٢) أكمل الجدول أدناه ثم أوجد قيمة الانحراف المتوسط :

الوزن	عدد الطلاب f
40-	3
50-	4
60-	3
70-	8
80-	4
90-100-	2
-------	$\sum f = 24$

الحل :

أولاً: نوجد مراكز الفئات X حيث : مركز الفئة $X = \frac{\text{بداية الفئة+نهاية الفئة}}{2}$ ، فمثلاً مركز الفئة الأولى $= \frac{40+50}{2} = 45$

ثانياً: نوجد قيمة Xf حيث : $Xf = X.f$ ، فمثلاً Xf الفئة الأولى $= X.f = 45 \times 3 = 135$

ثالثاً: نوجد الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\sum \text{Xf}}{\sum \text{f}} = \frac{1680}{24} = 70$

رابعاً: نوجد الانحرافات المطلقة للقيم (بطرح الوسط الحسابي من مراكز الفئات $|X - \bar{X}|$)، فمثلاً في الفئة الأولى : $|X - \bar{X}| = |70 - 45| = 25$

خامساً: نوجد قيمة $f|X - \bar{X}|$ ، فمثلاً في الفئة الأولى: $f|X - \bar{X}| = 3 \times 25 = 75$

الوزن	عدد الطلاب f	X	Xf	$\lvert X - \bar{X}\rvert$	$f\lvert X - \bar{X}\rvert$
40-	3	45	135	25	75
50-	4	55	220	15	60
60-	3	65	195	5	15
70-	8	75	600	5	40
80-	4	85	340	15	60
90-100-	2	95	190	25	50
-------	$\sum f = 24$	-------	$\sum Xf = 1680$	-------	$\sum f\lvert X - \bar{X}\rvert = 300$

سادساً: نوجد قيمة الانحراف المتوسط بالقانون التالي :

$$MD = \frac{\sum f|X - \bar{X}|}{\sum f} = \frac{300}{24} = 12.5$$

التباين S^2 والانحراف المعياري S

* تعريف التباين .

هو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

* تعريف الانحراف المعياري .

هو الجذر التربيعي للتباين .

* خصائص التباين والانحراف المعياري .

١. نتائج التباين والانحراف المعياري دائماً موجبة (مثل جميع مقاييس التشتت عدا الوسط الحسابي) .

٢. لا يتأثر التباين والانحراف المعياري بالجمع والطرح، لكنه يتأثر بالضرب والقسمة (بعكس الوسط الحسابي الذي يتأثر بالعمليات الأربعة) .

٣. قيمة التباين دائماً مربعة .

* قوانين التباين والانحراف المعياري .

أ) خطوات إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة أو المبوبة التي لا تحوي فئات .

<u>أولاً:</u> نوجد الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$.

<u>ثانياً:</u> نوجد انحرافات القيم (بطرح القيم من الوسط الحسابي $(X - \bar{X})$) ، ثم نربعها $(X - \bar{X})^2$.

<u>ثالثاً:</u> نوجد قيمة التباين بالقانون التالي :

$$S^2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n}$$

<u>رابعاً:</u> نوجد قيمة الانحراف المعياري بالقانون التالي :

$$S = \sqrt{S^2}$$

ب) خطوات إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة التي تحوي فئات .

<u>أولاً:</u> نوجد مراكز الفئات X حيث : مركز الفئة $X = \frac{\text{بداية الفئة+نهاية الفئة}}{2}$

<u>ثانياً:</u> نوجد قيمة Xf حيث : $Xf = X.f$.

<u>ثالثاً:</u> نوجد الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f}$.

<u>رابعاً:</u> نوجد انحرافات القيم (بطرح القيم من الوسط الحسابي $(X - \bar{X})$) ، ثم نربعها $(X - \bar{X})^2$.

<u>خامساً:</u> نوجد قيمة $f(X - \bar{X})^2$.

<u>سادساً:</u> نوجد قيمة التباين بالقانون التالي :

$$S^2 = \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{\sum f}$$

<u>سابعاً:</u> نوجد قيمة الانحراف المعياري بالقانون التالي :

$$S = \sqrt{S^2}$$

* أمثلة .

مثال (١) أوجد التباين والانحراف المعياري للدرجات التالية (12, 16, 10, 8, 14) .

الحل :

<u>أولاً:</u> نوجد الوسط الحسابي .

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{12 + 16 + 10 + 8 + 14}{5} = 12$$

<u>ثانياً:</u> نوجد انحرافات القيم (بطرح القيم من الوسط الحسابي $(X - \bar{X})$) ، ثم نربعها $(X - \bar{X})^2$ في جدول .

X	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$
12	0	0
16	4	16
10	-2	4
8	-4	16
14	2	4
-	-	$\sum(X-\bar{X})^2 = 40$

ثالثاً: نوجد قيمة التباين بالقانون التالي :

$$S^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

رابعاً: نوجد قيمة الانحراف المعياري بالقانون التالي :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{8} = 2.8$$

مثال (٢) أكمل الجدول أدناه ثم أوجد قيمة الانحراف المتوسط :

فئات الأجر	عدد العمال f
65-	**5**
75-	**10**
85-	**20**
95-	**10**
115-115	**5**
-------	$\sum f = 50$

الحل :

أولاً: نوجد مراكز الفئات X حيث : مركز الفئة $X = \frac{\text{بداية الفئة+نهاية الفئة}}{2}$ ، فمثلاً مركز الفئة الأولى $= \frac{65+75}{2} = 70$

ثانياً: نوجد قيمة Xf حيث : $Xf = X.f$.

ثالثاً: نوجد الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{4500}{50} = 90$.

رابعاً: نوجد انحرافات القيم (بطرح القيم من الوسط الحسابي $(X-\bar{X})$) ، ثم نربعها $(X-\bar{X})^2$.

خامساً: نوجد قيمة $f(X-\bar{X})^2$.

فئات الأجر	عدد العمال f	X	Xf	$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$	$f\|X-\bar{X}\|$
65-	**5**	70	350	-20	400	2000
75-	**10**	80	800	-10	100	1000
85-	**20**	90	1800	0	0	0
95-	**10**	100	1000	10	100	1000
115-115	**5**	110	550	20	400	2000
-------	$\sum f = 50$	-------	$\sum Xf = 4500$	-------	-------	$\sum f\|X-\bar{X}\| = 6000$

سادساً: نوجد قيمة التباين بالقانون التالي :

$$S^2 = \frac{\sum f(X-\bar{X})^2}{\sum f} = \frac{6000}{50} = 120$$

سابعاً: نوجد قيمة الانحراف المعياري بالقانون التالي :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{120} = 10.95$$

مثال (٣) إذا كان الانحراف المعياري S لدرجات الطلاب في مقرر الإحصاء هو (4 درجات)، أوجد الانحراف المعياري بعد إجراء العمليات التالية :

- إضافة 5 درجات لكل طالب .
- طرح 7 درجات من كل طالب .
- ضرب درجات كل طالب في 3 .
- قسمة درجات كل طالب على 2 .

الحل :

- بعد الإضافة أو الطرح لا يتغير الناتج ويبقى كما هو 4 درجات .
- بعد الضرب يتغير الناتج حيث : $4 \times 3 = 12$

بعد القسمة يتغير الناتج حيث : $4 \div 2 = 2$

مثال (٤) إذا كان التباين S^2 لدرجات الطلاب في مقرر الإحصاء هو (3 درجات)، أوجد التباين بعد إجراء العمليات التالية :

- إضافة 4 درجات لكل طالب .
- طرح 6 درجات من كل طالب .
- ضرب درجات كل طالب في 2 .
- قسمة درجات كل طالب على 4 .

الحل :

- بعد الإضافة أو الطرح لا يتغير الناتج ويبقى كما هو 3 درجات .
- بعد الضرب يتغير الناتج حيث : $2^2 \times 3 = 12$
- بعد القسمة يتغير الناتج حيث : $4^2 \div 3 = 5.33$

الدرجة المعيارية Z ومعامل الاختلاف CV

* الدرجة المعيارية .

هو طرح القيمة المُعطاة مِن الوسط الحسابي، ثم قسمة الناتج على الانحراف المعياري، ويُستخدم لاستبعاد أثر وحدات القياس .

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

* معامل الاختلاف .

هو قسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي، ثم ضرب الناتج في 100، ويُستخدم للمقارنة بين المجموعات .

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100$$

* أمثلة .

مثال (١) إذا كان متوسط درجة الطلاب في مقرر الإحصاء هو 70 درجة بانحراف معياري 10 درجات، وحصل أحد الطلاب على 90 درجة، أوجد الدرجة المعيارية (أو المتغير المعياري التي حصل عليها الطالب)، ثم أوجد معامل الاختلاف .

الحل :

<u>أولاً :</u> نوجد الدرجة المعيارية .

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} = \frac{90 - 70}{10} = 2$$

<u>ثانياً :</u> نوجد معامل الاختلاف .

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 = \frac{10}{70} \times 100 = 14.28\%$$

مثال (٢) أجري اختبار في مقرر الإحصاء على عينتين من الطلبة والطالبات، وحصلنا على النتائج التالية :

* في عينة الطلبة كان متوسط الدرجات 18 بانحراف معياري 4 .

* في عينة الطالبات كان متوسط الدرجات 16 بانحراف معياري 3 .

مستخدماً معامل الاختلاف حدد أي المجموعتين أكثر تشتت (أو أكثر تباعد أو أقل تجانس) في توزيع الدرجات ؟

الحل :

<u>أولاً :</u> نوجد معامل الاختلاف عند الطلبة .

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 = \frac{4}{18} \times 100 = 22.22\%$$

<u>ثانياً :</u> نوجد معامل الاختلاف عند الطالبات .

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 = \frac{3}{16} \times 100 = 18.75\%$$

<u>ثالثاً :</u> نلاحظ من النسبتين السابقتين أن مجموعة الطلبة أكثر تشتت (وفي حال كان المطلوب من هو الأقل تشتت، نقول هنا أن الطالبات أقل تشتت) .

الارتباط r

* تعريف الارتباط .

هو أسلوب إحصائي يُستخدَم في قياس العلاقة بين ظاهرتين (متغيرين)، ويُسمّى المتغير الأول أو الظاهرة الأولى X والمتغير الثاني أو الظاهرة الثانية Y .

* حدود الارتباط .

يقع الارتباط في خط الأعداد بين 1- و 1+ وتكون قيمته كسرية (عشرية) .

* أنواع الارتباط .

١. في حال القيمة الموجبة يُسمى (طردي موجب: أي أنه كلما زادت قيمة X تزيد قيمة Y وكلما نقصت قيمة X تنقص قيمة Y) .

٢. في حال القيمة السالبة يُسمى (عكسي سالب: أي أنه كلما زادت قيمة X تنقص قيمة Y وكلما نقصت قيمة X تزيد قيمة Y) .

حيث :

إذا كانت قيمة الارتباط بين	1+ و 0.7	0.7 و 0.4	0.4 و 0	0 و 0.4-	0.4- و 0.7-	0.7- و 1-
يكون نوع الارتباط	طردياً قوياً	طردياً متوسطاً	طردياً ضعيفاً	عكسياً ضعيفاً	عكسياً متوسطاً	عكسياً قوياً

* خصائص الارتباط .

لا يتأثر بالعمليات الحسابية الأربعة (الجمع والطرح والضرب والقسمة) .

* قانون الارتباط .

$$r = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

* أمثلة .

مثال (١) أوجد العلاقة الارتباطية بين درجات الإحصاء والإقتصاد، إذا كانت درجات عينة من الطلبة في مقرري الإحصاء X والاقتصاد Y كما يلي :

X=4, 6, 5, 7, 8

Y=6, 9, 8, 10, 7

الحل :

<u>أولاً:</u> نقوم بعمل جدول فيه المعطيات والقيم المطلوبة في قانون الارتباط كما يلي :

X	Y	X^2	Y^2	XY
4	6	16	36	24
6	9	36	81	54
5	8	25	64	40
7	10	49	100	70
8	7	64	49	56
$\sum X = 30$	$\sum Y = 40$	$\sum X^2 = 190$	$\sum Y^2 = 330$	$\sum XY = 244$

<u>ثانياً:</u> نوجد الارتباط .

$$r = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}} = \frac{5 \times 244 - 30 \times 40}{\sqrt{5 \times 190 - (30)^2}\sqrt{5 \times 330 - (40)^2}} = \frac{20}{50} = 0.4$$

<u>ثالثاً:</u> نوع الارتباط (طردي متوسط) .

مثال (٢) أوجد قيمة ونوع الارتباط في عينة من 5 مفردات حصلنا على المجاميع التالية : $\sum X = 20$ و $\sum Y = 15$ و $\sum X^2 = 84$ و $\sum Y^2 = 55$ و $\sum XY = 66$.

الحل :

أولاً : نوجد الارتباط .

$$r = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}} = \frac{5 \times 66 - 20 \times 15}{\sqrt{5 \times 84 - (20)^2}\sqrt{5 \times 55 - (15)^2}} = 0.948$$

ثانياً: نوع الارتباط (طردي قوي) .

مثال (٣) إذا كان معامل الارتباط بين درجات الإحصاء والمحاسبة هو 0.72 أوجد قيمة معامل الارتباط بعد إجراء العمليات الحسابية التالية :

- إضافة 3 درجات في كلا المقررين .
- إضافة 5 درجات من كلا المقررين .
- ضرب درجات كلا المقررين في 2 .
- قسمة درجات كلا المقررين على 4 .

الحل :

معامل الارتباط في كل الفقرات الأربعة يبقى 0.72 ولا يتغير .

الانحدار

* تعريف الانحدار .

هو أسلوب إحصائي يقيس العلاقة بين ظاهرتين (متغيرين) X و Y على شكل معادلة رياضية بحيث يمكن التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بمعرفة قيمة الآخر .

* الفرق بين الارتباط والانحدار .

١. أنهما مقاييس إحصائية لدراسة علاقة بين ظاهرتين .

٢. الارتباط يقيس درجة العلاقة بين ظاهرتين وتكون قيمته رقمية بين 1+ و 1- ، بينما الانحدار يقيس التنبؤ بمستوى التغير بين الظاهرتين وقيمته بشكل معادلة.

٣. المتغيرين X و Y في الارتباط مستقلان عن بعضهما، بينما المتغيرين X و Y في الانحدار يتأثران ببعضهما البعض عند تغير أحدهما .

٤. في الارتباط نوجد قيمة r بينما في الانحدار نوجد a و b على شكل معادلة .

* قوانين الانحدار .

معادلة الانحدار هي : $y = a + bx$ (حيث y هو المتغير التابع، x هو المتغير المستقل، a هو المقدار الثابت، b هو ميل خط الانحدار)

حيث :

$$b = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b \times \frac{\sum X}{n}$$

* أمثلة .

مثال (١) في عينة من 5 مفردات حصلنا على المجاميع التالية : $\sum X = 20$ و $\sum Y = 15$ و $\sum X^2 = 84$ و $\sum Y^2 = 55$ و $\sum XY = 66$:

أ) قدر قيمة b في معادلة خط الانحدار .

ب) قدر قيمة a في معادلة خط الانحدار .

ج) قدر قيمة y عندما تكون قيمة x=10 .

الحل :

<u>أولاً :</u> نقدر قيمة b .

$$b = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{5 \times 66 - 20 \times 15}{5 \times 84 - (20)^2} = 1.5$$

<u>ثانياً :</u> نقدر قيمة a .

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b \times \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} - 1.5 \times \frac{20}{5} = -3$$

<u>ثالثاً :</u> نقدر قيمة y عندما تكون قيمة x=10 .

$$y = a + bx = -3 + 1.5 \times 10 = 12$$

مثال (٢) فيما يلي بيان درجات أعمال السنة لعينة من 5 طلاب في مقرري الإحصاء x والاقتصاد y .

Y	X
7	1
5	2
3	3
4	4
2	5

أ) قدر قيمة b في معادلة خط الانحدار .

ب) قدر قيمة a في معادلة خط الانحدار .

ج) قدر معامل الارتباط بين درجات الإحصاء والاقتصاد .

الحل :

أولاً: نقوم بعمل جدول فيه المعطيات والقيم المطلوبة في قوانين الانحدار كما يلي :

X	Y	X^2	XY
1	7	1	7
2	5	4	10
3	3	9	9
4	4	16	16
5	2	25	10
$\sum X = 15$	$\sum Y = 21$	$\sum X^2 = 55$	$\sum XY = 52$

ثانياً: نقدر قيمة b .

$$b = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{5 \times 52 - 15 \times 21}{5 \times 55 - (15)^2} = -1.1$$

ثالثاً: نقدر قيمة a .

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b \times \frac{\sum X}{n} = \frac{21}{5} - 1.1 \times \frac{15}{5} = 7.5$$

رابعاً: نقدر معامل الارتباط بين درجات الإحصاء والاقتصاد، أن نكتب معادلة خط الانحدار .

$$y = 7.5 + (-1.1)x$$

السلاسل الزمنية

* تعريف السلاسل الزمنية .

هي عبارة عن مجموعة من الأرقام مرتبة بالزمن، مثل عدد المواليد في مدينة الرياض .

* قوانين السلاسل الزمنية .

هي نفس قوانين معادلة الانحدار، ونسميها هنا أيضاً معادلة خط الاتجاه العام، وهي : $y = a + bx$

حيث :

$$b = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b \times \frac{\sum X}{n}$$

* أمثلة .

مثال (١) فيما يلي بيان مبيعات إحدى السلع y في الفترة من 1431 إلى 1435 .

المبيعات Y	السنوات X
6	1431
8	1432
10	1433
14	1434
12	1435

أ) قدر قيمة b في معادلة خط الاتجاه العام .

ب) قدر قيمة a في معادلة خط الاتجاه العام .

ج) قدر قيمة x في عام 1438 .

الحل :

<u>أولاً</u>: نقوم بعمل جدول فيه المعطيات والقيم المطلوبة في قوانين الانحدار، ولكننا هنا نضيف X جديد ونضع فيها القيم من 1 تصاعدياً حتى آخر عام (مثلاً هنا 5 هي آخر عام) لصعوبة حساب تربيع السنوات كما يلي :

XY حيث يتم الضرب في X الجديد	X^2 حيث يتم تربيع X الجديد	العمود الجديد X	المبيعات Y	السنوات X
6	1	1	6	1431
16	4	2	8	1432
30	9	3	10	1433
56	16	4	14	1434
60	25	5	12	1435
$\sum XY = 168$	$\sum X^2 = 55$	$\sum X = 15$	$\sum Y = 50$	-------

<u>ثانياً</u>: نقدر قيمة b .

$$b = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{5 \times 168 - 15 \times 50}{5 \times 55 - (15)^2} = 1.8$$

<u>ثالثاً</u>: نقدر قيمة a .

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b \times \frac{\sum X}{n} = \frac{50}{5} 1.8 \times \frac{15}{5} = 4.6$$

<u>رابعاً</u>: نقدر معامل الارتباط بين درجات الإحصاء والاقتصاد، أن نكتب معادلة خط الانحدار .

$$y = 4.6 + 1.8x$$

ج) قدر قيمة x في عام 1438 ، حيث من الجدول وحسب الترتيب التصاعدي للعمود الجديد x نجد أنه سيكون x=8 .

مثال (٢) إذا كانت معادلة خط الاتجاه لإنتاج السلع في الفترة من 1428 إلى 1435 على الصورة التالية : y=12+2x .

فما هي قيمة الإنتاج المتوقع في عامي 1437 و 1440 ؟

الحل :

أولاً : نقدر قيمة x في 1437 ، حيث لو تخيلنا أن x الجديد في عام 1428 هو 1 فإننا سنجد أن x الجديد في 1437 سيكون x=10 وفي 1440 سيكون x=13 .

ثانياً : نقدر قيمة الإنتاج المتوقع في 1437 .

$$y = 12 + 2x = 12 + 2 \times 10 = 32$$

ثالثاً : نقدر قيمة الإنتاج المتوقع في 1440 .

$$y = 12 + 2x = 12 + 2 \times 13 = 38$$

مثال (٣) إذا كانت معادلة خط الانحدار (هي نفس معادلة خط الاتجاه العام أو معادلة السلاسل الزمنية) على الصورة التالية : y=6-2x .

فما هي قيمة y إذا كانت x=5 ؟

$$y = 6 - 2x = 6 - 2 \times 5 = -4$$

الأرقام القياسية

* تعريف الرقم القياسي .

هو رقم نسبي يقيس التغير في أسعار السلع بين فترتين زمنيتين، مثلاً إذا كان سعر الكيلو من الأرز في عام 1430 ريالين، ثم تغير سعره في عام 1435 إلى 5 ريال، كيف أقيس هذا التغير؟ هذا ما سنعرفه .

* أنواع وقوانين الأرقام القياسية .

١. الأرقام القياسية التجميعية البسيطة (أ.ق.ت.ب) .

قانون الرقم القياسي البسيط = $\frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$ (حيث P_0 هو سعر سنة الأساس، و P_1 هو سعر سنة المقارنة)

٢. الأرقام القياسية التجميعية المرجحة .

أ) رقم لاسبير: وهو الرقم القياسي التجميعي المرجح بالكميات النسبية لسنة الأساس .

قانون لاسبير = $\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$ (حيث P_0 هو سعر سنة الأساس، و P_1 هو سعر سنة المقارنة، و Q_0 هو كمية سنة الأساس)

ب) رقم باش : وهو الرقم القياسي التجميعي المرجح بالكميات النسبية لسنة المقارنة .

قانون باش = $\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100$ (حيث P_0 هو سعر سنة الأساس، و P_1 هو سعر سنة المقارنة، و Q_1 هو كمية سنة المقارنة)

مثال (١) الجدول التالي يبين أسعار وكميات عدة سلع بين عامي 1428 و 1418 .

السلعة	أسعار 1418	أسعار 1428	كميات 1418
أ	20	60	10
ب	30	50	15
ج	40	70	25
$\sum$	90	180	50

أ) أوجد الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار .

ب) أوجد رقم لاسبير (الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس) .

الحل :

أولاً : نوجد الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار .

قانون الرقم القياسي البسيط = $\frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100 = \frac{180}{90} \times 100 = 200\%$

ثانياً : نوجد القيم المطلوبة في قانون لاسبير وذلك في جدول .

السلعة	أسعار 1418 (P_0)	أسعار 1428 (P_1)	كميات 1418 (q_0)	Q_0	$P_0 Q_0$	$P_1 Q_0$
أ	20	60	10	0.2	4	12
ب	30	50	15	0.3	9	15
ج	40	70	25	0.5	20	35
$\sum$	90	180	50	1	33	62

قانون لاسبير = $\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100 = \frac{62}{33} \times 100 = 187.87\%$

والحمد لله ،،،