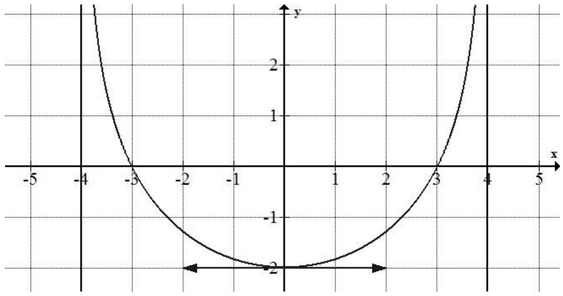
الرياضيات

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠١٧
(الفرع العلمي – الدورة الأولى)

الاسم :
الرقم :
الدرجة العظمى: ستمئة
المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نتأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$ والمطلوب :



١- احسب $\lim_{x\to+4^-} f(x)$, $\lim_{x\to-4^+} f(x)$
واستنتج معادلة كل مقارب للخط C .
٢- احسب $f'(0)$, $f(0)$.
٣- جد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

الحل :

١) $\lim_{x\to+4^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-4^+} f(x) = \infty$
$x = 4$ مقارب شاقولي و $x = -4$ مقارب شاقولي
٢) $f'(0) = 0$, $f(0) = -2$
٣) حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي: $S = \{-3\,, 3\}$

السؤال الثاني : حل المعادلة $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في R

الحل :

$$9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$$

$(3^x)^2 + 3(3^x) - 4 = 0$ نفرض أن $3^x = t$

$t^2 + 3t - 4 = 0$ ويكون الحل إما ($t = -4$ مرفوض) أو ($t = 1$ مقبول)

وبالتالي $3^x = 1$ أي أن $x = 0$

السؤال الثالث :

١- اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$.
٢- تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: x - y + z + 3 = 0$ يمس الكرة S .

الحل :

١- معادلة الكرة: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
٢- نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي $h = \frac{|(0)-(0)+(0)+3|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}} = \sqrt{3} = R$ اذن المستوي يمس الكرة .

السؤال الرابع : في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة .

١- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟
٢- بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية ؟

الحل :

١- $\binom{8}{5} = \frac{8!}{(5!)(3!)} = \frac{8\times7\times6\times5!}{(5!)(3\times2\times1)} = 56$ طريقة

٢- $\binom{3}{3}\binom{5}{2} = 1 \times \frac{5!}{(2!)(3!)} = 10$ طرق

ثانياً – حل التمارين الأربعة التالية : (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n - 2 \end{cases}$

و لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $v_n = u_n + 3$ والمطلوب :

١- أثبت أن $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية , وأوجد أساسها .

٢- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

٣- ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$.

الحل :

١- $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(u_{n+1}+3)}{v_n} = \frac{\frac{1}{3}u_n-2+3}{v_n} = \frac{\frac{1}{3}(u_n+3)}{v_n} = \frac{\frac{1}{3}v_n}{v_n} = \frac{1}{3}$ والمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

٢- $v_0 = u_0 + 3 = 4$ بالتالي $v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$ أما عبارة u_n فهي : $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

٣- مجموع $(n+1)$ حدا متعاقباً من متتالية هندسية حدها الأول 4 : $S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ وبالتالي :

$$S_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$, بما أن $-1 < q = \frac{1}{3} < 1 \Longleftarrow$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 6(1-0) = 6$$

التمرين الثاني : ليكن العددان العقديان $z_2 = 1 + i$, $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, والمطلوب :

١- اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد $\frac{z_1}{z_2}$, z_2 , z_1 .

٢- اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$, واستنتج $Cos\frac{\pi}{12}$.

z_1 : $r = \sqrt{1+3} = 2$ $\begin{cases} Cos\,\theta = \frac{1}{2} \\ Sin\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ $z_1 = 2(Cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3})$	z_2 : $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\begin{cases} Cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Sin\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ $z_2 = \sqrt{2}(Cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})$	$\frac{z_1}{z_2}$: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(Cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(Cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4})}$ $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(Cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(Cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$ بالتالي:

$$\sqrt{2}Cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow Cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow Cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

التمرين الثالث: نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية , بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$. نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار .

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X , واكتب جدول قانونه الاحتمالي , واحسب توقعه الرياضي وتباينه .

الحل :

التجربة برنولية و X متحول عشوائي حداني $\beta\left(3,\frac{1}{3}\right)$: $p=\frac{1}{3}$, $n=3$ أي $q=\frac{2}{3}$ $I=\{0,1,2,3\}$

$$p(x=k)=\binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k}$$

$$p(x=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$p(x=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$$

$$p(x=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{27}$$

$$p(x=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$$

r	0	1	2	3
$P(X=r)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$E(X)=np=3(\tfrac{1}{3})=1$$

$$V(X)=npq=\frac{2}{3}$$

التمرين الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ والمطلوب :

١- احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

٢- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.
وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

الحل :

$$1)\ x>0:\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)=\infty$$

$$x<0:\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)=-\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}-1\right)=0$$

أي Δ مقارب لـ C بجوار $+\infty$

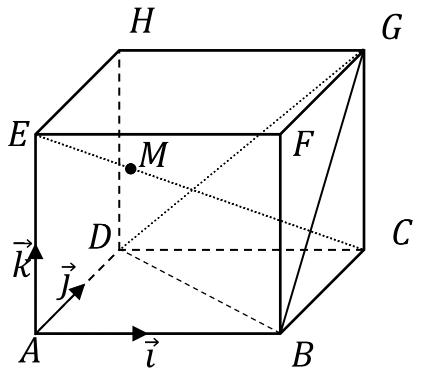
$$f(x)-y_\Delta=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$$

(لأن $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1 \Leftarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\geq x$)

وبالتالي C تحت Δ

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> :$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2



نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

في المعلم: $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}\quad,\quad\overrightarrow{AD}=2\vec{j}\quad,\quad\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$

١) اكتب معادلة للمستوي (GBD) .
٢) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)
٣) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم(EC) مع المستوي (GBD) .
٤) جد إحداثيات النقطة M التي تحقق: $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.
٥) أثبت تعامد المستقيمين (EC) و (HM).

الحل :

١) $G(2,2,2)\ ,\ B(2,0,0)\ ,\ D(0,2,0)$ معادلة المستوي (GBD) من الشكل $ax+by+cz+d=0$

$$D\in(GBD)\Longrightarrow a(0)+b(2)+c(0)+d=0\xrightarrow{\text{نفرض}\ d=-2}2b-2=0\Longrightarrow b=1$$

$$B\in(GBD)\Longrightarrow a(2)+b(0)+c(0)-2=0\Longrightarrow 2a-2=0\Longrightarrow a=1$$

$$G\in(GBD)\Longrightarrow a(2)+b(2)+c(2)-2=0\Longrightarrow 2+2+2c-2=0\Longrightarrow c=-1$$

معادلة المستوي (GBD) : $(GBD):\quad x+y-z-2=0$

٢) $C(2,2,0)\ ,\ E(0,0,2) \Longleftarrow \overrightarrow{EC}(2,2,-2) \Longleftarrow$ $(EC):\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases},t\in R$

٣) نعوض جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم (EC) في معادلة المستوي (GBD) :

$(2t)+(2t)-(2-2t)-2=0\Longrightarrow 6t=4\Longrightarrow t=\frac{2}{3}$ للمعادلة حل وحيد والمستقيم يقطع المستوي بنقطة لإيجادها نعوض قيمة t في جملة المعادلات الوسيطية :

$x=\frac{4}{3}\ ,\ y=\frac{4}{3}\ ,\ z=\frac{2}{3}$ بالتالي احداثيات نقطة التقاطع: $\left(\frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)$.

٤) $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ بالتعويض $(x,y,z-2) = \frac{1}{3}(2,2,-2) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

٥) $H(0,2,2)$, $M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ ولدينا $\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$

$$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{EC} = \left(\frac{2}{3}\right)(2) + \left(-\frac{4}{3}\right)(2) + \left(-\frac{2}{3}\right)(-2) = \frac{4-8+4}{3} = 0 \Longrightarrow$$

فالشعاعين متعامدان وبالتالي المستقيمان متعامدان .

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

١) احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي .

٢) ادرس تغيرات التابع f , ونظم جدولاً بها , ثم دل على القيمة الحدية محلياً .

٣) جد معادلة للمماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x = 1$.

٤) ارسم كل مقارب وجدته , وارسم المماس Δ , ثم ارسم C .

٥) احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x = e$.

الحل:

١) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}.\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ نستنتج:

$x = 0$ مقارب شاقولي لمنحن التابع $\qquad$ $y = 0$ مقارب أفقي لمنحن التابع بجوار ∞ .

٢) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x.\ln x}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \Longrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Longrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e} = \frac{1}{2e}$$

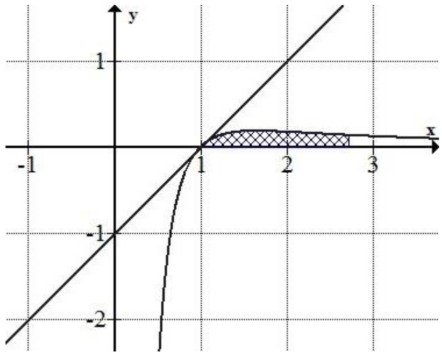
$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ قيمة محلية كبرى

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

٣) معادلة المماس

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \Delta: y = 1(x-1) + 0 \Longrightarrow \Delta: y = x - 1$$

٤) الرسم:



٥) نقطة تقاطع المنحني مع محور الفواصل $(1,0)$ والمساحة عندئذ :

$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ ونطبق عليه التكامل بالتجزئة .

$u = lnx$	$v' = \frac{1}{x^2}$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = \frac{-1}{x}$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} lnx\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$S = \left[-\frac{1}{x} lnx\right]_1^e - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

قال الإمام الشافعي :

وما أكثر الإخوان حين تعدّهم ولكنهم في النائبات قليل

لا خير في ودّ امرئ متلون إذا الريح مالت مالَ حيثُ تميلُ

انتهت الأسئلة

الرياضيات　　　امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠١٧　　　الاسم :

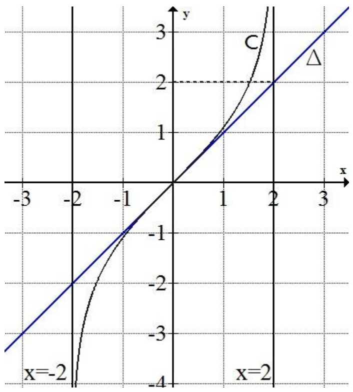
(الفرع العلمي – الدورة الثانية)　　　الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نتأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2,2[$ والمطلوب :



١- احسب $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$

٢- احسب $f'(0)$, $f(0)$.

٣- هل التابع فردي أم زوجي .

٤- اكتب معادلة المماس Δ .

الحل :

١) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$

٢) $f(0) = 0$, $f'(0) = m_\Delta = 1$ (Δ منصف الربع الأول)

٣) التابع فردي خطه البياني متناظر حول o .

$\Delta: y = x$　　　$\Delta: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

السؤال الثاني : اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d' :

$$d:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases} ,t \in R \quad و \quad d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s-3 \\ z = -s+1 \end{cases} ,s \in R$$

وهل المستقيمين d و d' يقعان في مستوٍ واحد ؟ علل إجابتك .

الحل:

شعاعي توجيه المستقيمين $\vec{u}(1,-3,-3)$　　　$\overrightarrow{u'}(1,-3,-1)$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن $\frac{1}{1} \neq -\frac{1}{-3}$ فالمستقيمين غير متوازيين لنبحث عن وجود نقطة تقاطع

في حال التقاطع يتحقق

$$x = t+1 = s$$
$$y = -3t+2 = -3s-3$$
$$z = -3t+3 = -s+1$$

بتعويض قيمة S من المعادلة الأولى في المعادلة الثالثة مثلاً لنجد

$-3t+3 = -(t+1)+1 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow s = \frac{5}{2}$ نتحقق بالتعويض في المعادلة الثانية

$$-3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -3\left(\frac{5}{2}\right) - 3 \Rightarrow -\frac{5}{2} \neq -\frac{21}{2}$$

والجملة مستحيلة الحل والمستقيمين متخالفين غير واقعين في مستو واحد

السؤال الثالث :

حل المعادلة التفاضلية الآتية : $2y' + 3y = 0$ والخط C للحل يمر بالنقطة $A(ln4,1)$.

الحل :

$$2y' + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{3}{2}y \Rightarrow \quad y = ke^{-\frac{3}{2}x} \quad \Rightarrow$$

$$1 = ke^{-\frac{3}{2}(ln4)} \Rightarrow k = e^{\frac{3}{2}(ln4)} \Rightarrow k = e^{ln8} = 8$$

$$y = 8e^{-\frac{3}{2}x}$$

السؤال الرابع : نتأمل في المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $B(1,-2,1)$ و $A(2,0,1)$ والمطلوب :

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

الحل :

المستوي يمر من $I\left(\frac{3}{2}\ ,-1\ ,1\right)$ منتصف $[AB]$ وناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}(-1\ ,-2\ ,0)$ فمعادلة المستوي المحوري

$$-1\left(x-\frac{3}{2}\right) - 2(y+1) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \quad x + 2y + \frac{1}{2} = 0$$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

١- أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

٢- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

الحل :

١- $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} < 0(\text{لأن}: \sqrt{x+1} > \sqrt{x})$

التابع متناقص تماماً فالمتتالية متناقصة تماماً

٢- $u_{n=}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

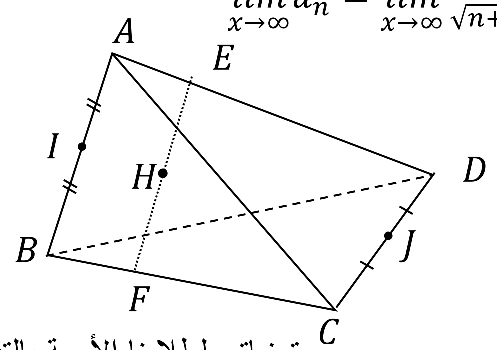
$$\sqrt{n+1} \geq 1 \quad , \quad \sqrt{n} \geq 0 \quad \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \in]0,1] \quad \Rightarrow 0 < u_n \leq 1$$

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة . $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

التمرين الثاني : $ABCD$ رباعي وجوه و α عدد حقيقي .

I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$.

$E\ ,\ F$ نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{AE} = a\ \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = a\ \overrightarrow{BC}$



أخيراً H منتصف $[EF]$.

أثبت أن $I\ ,\ J\ ,\ H$ تقع على استقامة واحدة .

الحل:

H منتصف $[EF]$ إذن H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(E;1)$ و $(F;1)$

من العلاقة $\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AD}$ تكون E مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D;a)$ و $(A;1-a)$

من العلاقة $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}$ نجد :

$$\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{BF}=a\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}\right)\ \Rightarrow$$

$$-\overrightarrow{FB}=-a\overrightarrow{FB}+a\overrightarrow{FC}\Rightarrow\ \overrightarrow{FB(1-a)}+a\overrightarrow{FC}=\vec{O}$$

فتكون F مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C;a)$ و $(B;1-a)$

أو بمقارنة $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}$ مع الصيغة $\left(\overrightarrow{GB}=\frac{a}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}\right)$

تكون F مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C;a)$ و $(B;1-a)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون إذن H مركز الأبعاد المتناسبة لـ :

$(D;a)$ و $(A;1-a)$ $(C;a)$ و $(B;1-a)$

J منتصف $[CD]$ إذن J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D;a)$ و $(C;a)$

I منتصف $[AB]$ إذن I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A;1-a)$ و $(B;1-a)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I;2-2a)$ و $(J;2)$

وبالتالي النقاط I و J و H على استقامة واحدة .

<u>التمرين الثالث</u> : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z=-1+i$ والمطلوب :

١) أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً .

٢) جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

واكتبه بالشكل الأسي .

الحل :

-١ $z^8=(-1+i)^8=((-1+i)^2)^4=(-2i)^4=16\ \in R$

-٢ $z'-a=e^{\frac{\pi}{4}i}(z-a)\Rightarrow z'-(1+i)=(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(-1+i-(1+i))$

$$z'-(1+i)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(-2)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

$$z'=1-\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})$$

$$z'=1-\sqrt{2}+i\left(1-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)(-1-i)$$

$$-1-i:\begin{cases} r=\sqrt{2} \\ Cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} \\ -1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} \end{cases}$$

$$z'=(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} \quad \Longrightarrow \quad z'=(2-\sqrt{2})e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

التمرين الرابع : ليكنC الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-3\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$ والمطلوب :

١) اكتب التابع بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$.

٢) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

٣) احسب : $\int_0^2 f(x)dx$.

الحل :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}=\frac{x^2+3x-x-3+1}{x+3}=\frac{x(x+3)-(x+3)+1}{x+3}=x-1+\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(y=x-1)\big)=\lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{1}{x+3}-x+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0$$

إذن المستقيم $y=x-1$ مقارب للمنحني C بجوار $+\infty$.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+3}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+ln\,(x+3)\right]_0^2=$$

$$=[2-2+ln(5)]-[ln(3)]=ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x+x(lnx)^2$

وليكن $g(x)=(ln(x)+1)^2$ والمطلوب :

١) أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.

٢) أثبت أن $f'(x)=g(x)$

٣) حل المعادلة $g(x)=0$.

٤) نظم جدول تغيرات .

٥) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

الحل:

-١ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(x+x(lnx)^2)=\lim_{x\to0}\left(x+x\left(ln(\sqrt{x})^2\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(x+\left(2\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2\right)=0+\left(2(0)\right)^2=0$$

-٢ $f'(x) = 1 + (lnx)^2 + 2x(lnx)\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= 1 + (lnx)^2 + 2(lnx) = (1 + lnx)^2 = g(x)$

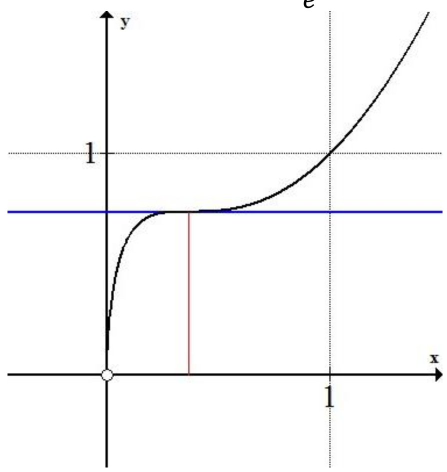
-٣ $g(x) = 0 \Rightarrow (ln(x) + 1)^2 = 0 \Rightarrow ln(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow ln(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e}$

-٤ $f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	∞

-٥ من جدول التغيرات نجد المماس أفقي معادلته $y = \frac{2}{e}$



المسألة الثانية : يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم صنعت الورشة A منها 600 وصنعت البقية الورشة B , هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال .

نسحب عشوائياً قلماً من الطلب . نرمز بالرمز A إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة A) وبالرمز B إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة B) وبالرمز D إلى الحدث (القلم غير صالح للاستعمال) .

١) أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .

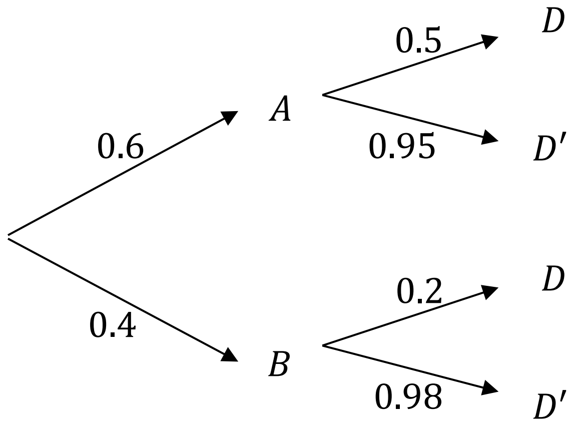
٢) احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال .

٣) إذا كان القلم صالحاً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A .

٤) نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً . وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال , احسب $p(X = 0)$.

الحل :

-١



-٢ القلم صلح للاستعمال يعني D'

$$p(D') = (0.6)(0.95) + (0.4)(0.98) = 0.57 + 0.392 = 0.962$$

-٣ $$p(A|D') = \frac{p(A\cap D')}{p(D')} = \frac{(0.6)(0.95)}{0.962} = \frac{0.57}{0.962} \approx 0.6$$

عدد الأقلام الكلية 600 قلم وعدد الأقلام الغير صالحة $600 \times 0.05 = 30$

-٤

قلم 570 D'

$$p(X=0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{30\times 29}{600\times 599} \approx 0.0024$$

انتهت الدورة الثانية ٢٠١٧

سلام على الدنيا إذا لم يكن بها صديق صدوق صادق الوعد منصفا

الرياضيات

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠١٨

(الفرع العلمي – الدورة الأولى)

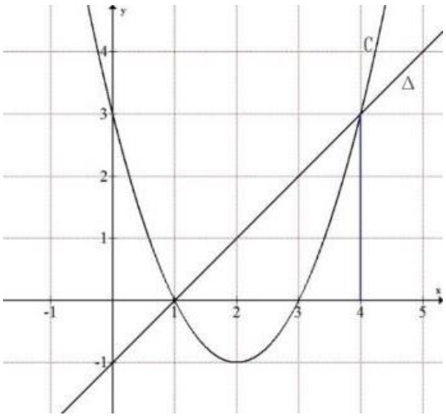
الاسم :

الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (٤٠ درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : نتأمل الشكل المرسوم جانباً , وليكن C الخط البياني للتابع f

المعرف على R والمطلوب :

١- دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

٢- جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

٣- ما حلول المعادلة $f(x) = y_{\Delta}$.

٤- اكتب معادلة المستقيم Δ .

الحل :

١) $f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى

٢) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

٣) حلول المعادلة $f(x) = y_{\Delta}$: $S = \{1\ ,4\ \}$

$$m_{\Delta} = \frac{3+0}{4-1} = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 1$$

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي P الذي معادلته :

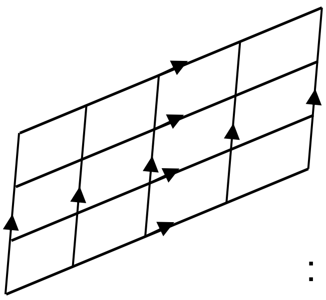
$P: x + 2y + z - 1 = 0$ والمطلوب :

احسب بعد A عن المستوي P , ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

$$h = \frac{|(1)+2(-2)+(0)-1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = \frac{8}{3}$$

السؤال الثالث :



في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية ,

تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب : احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة .

الحل :

متوازي الأضلاع يتشكل من زوج من المستقيمات الأفقية مع زوج مع المستقيمات الشاقولية :

$$\binom{4}{2}\binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

السؤال الرابع : ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{1}{3+cosx}$

١- أثبت محدودية f .

٢- استنتج $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3+cosx}$

الحل :

$-1 \le Cosx \le 1 \xRightarrow{\text{نضيف } 3} 2 \le 3 + Cosx \le 4 \xRightarrow{\text{نقلب}} \frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+Cosx} \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \ge f(x) \ge \frac{1}{4}$ فالدالة محدودة

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+Cosx} \ge \frac{1}{4} \xRightarrow{\text{نضرب بـ } x^2} \frac{x^2}{2} \ge \frac{x^2}{3+Cosx} \ge \frac{x^2}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4} = \infty \xRightarrow{\text{حسب الاحاطة}} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3+cosx} = \infty$$

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة التالية</u> : (٦٠ درجة لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط $A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ M$

التي تُمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a = -1 - i\ ,\ b = 1 - i\ ,\ c = 2i\ ,\ m = -1 + i$

والمطلوب :

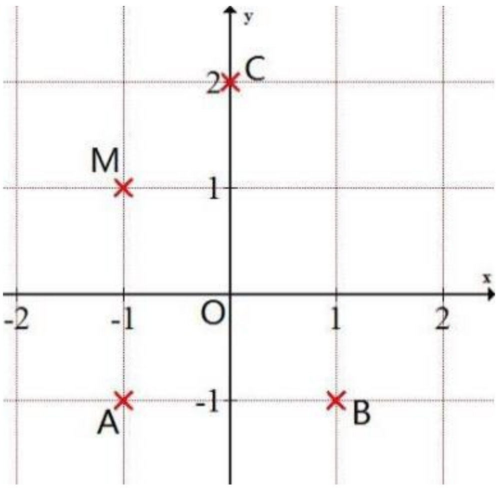
١) مثّل العدد الأعداد $a = -1 - i\ ,\ b = 1 - i\ ,\ c = 2i\ ,\ m = -1 + i$ في المستوي .

٢) احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

٣) أثبت أن النقاط $M\ ,\ O\ ,\ B$ تقع على استقامة واحدة .

٤) احسب $arg\frac{c-d}{m}$, واستنتج أن (OM) و (DC) متعامدان .

الحل :



١- الرسم

٢- $d = e^{\frac{\pi}{2}i}c \Rightarrow d = i(2i) = -2$

٣- $\frac{m-o}{b-0} = \frac{-1+i}{1-i} = -\frac{1-i}{1-i} = -1 \in R$

فالنقاط على استقامة واحدة

٤- $\frac{c-d}{m} = \frac{2i+2}{-1+i} = \frac{2(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -2i$

بالتالي $arg\frac{c-d}{m} = -\frac{\pi}{2}$ وبالتالي (OM) و (DC) متعامدان .

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المتتاليتان $(U_n)_{n\ge1}$ و $(V_n)_{n\ge1}$ المعرفتان وفق : $\begin{cases} u_n = 5 - \frac{1}{n} \\ v_n = 5 + \frac{1}{n^2} \end{cases}$ والمطلوب :

١- أثبت أن $(U_n)_{n\ge1}$ متزايدة .

٢- أثبت أن $(V_n)_{n\ge1}$ متناقصة .

٣- هل المتتاليتان $(U_n)_{n\ge1}$, $(V_n)_{n\ge1}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك

الحل :

١- $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \xleftarrow{D_f=]0,\infty[} f(x) = 5 - \frac{1}{x} \quad : \quad u_n = 5 - \frac{1}{n}$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً .

$f'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0 \xleftarrow{D_g=]0,\infty[} g(x) = 5 + \frac{1}{x^2} \quad : \quad v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$ فالمتتالية v_n متناقصة تماماً .

٢- $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{1}{n} - 5 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$

فالمتتاليتين متجاورتان .

التمرين الثالث: ليكن X متحول عشـــوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية . الجدول غير المكتمل المجاور هو القـانون الاحتمـالي للمتحول X الممثـل لثلاث نجـاحـات , فـإذا علمـت أن احتمـال النجـاح يســـاوي $\frac{2}{3}$ و $p(X=1) = \frac{6}{27}$ و $p(X=0) = \frac{1}{27}$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{\dots}{\dots}$

١) جد $p(X=2)$, $p(X=3)$.
٢) ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X ؟
٣) ما تباين المتحول X ؟

الحل :

$$p = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$p(x=k) = \binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k}$$

$$p(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{3-2} = \frac{12}{27}$$

$$p(x=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{3-3} = \frac{8}{27}$$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

$$E(X) = np = 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \quad , \quad V(X) = npq = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

التمرين الرابع : ليكن $J = \int_0^{ln2} \frac{e^x}{e^x+2}dx \quad , \quad I = \int_0^{ln2} \frac{2}{e^x+2}dx$ والمطلوب :

١- احسب J .
٢- احسب $I + J$ ثم استنتج I .

الحل :

$$J = \int_0^{ln2} \frac{e^x}{e^x+2}dx = [ln(e^x+2)]_0^{ln2} = [ln(2+2)] - [ln(1+2)] = ln4 - ln3 = ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$I + J = \int_0^{ln2} \left(\frac{e^x}{e^x+2} + \frac{2}{e^x+2}\right) dx = \int_0^{ln2} \left(\frac{e^x+2}{e^x+2}\right) dx = \int_0^{ln2} dx = [x]_0^{ln2} = ln2$$

$$I = (I+J) - J = ln2 - ln\left(\frac{4}{3}\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = ln(e^{-x} + 1)$

١) جد نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة .

٢) أثبت أن $f(x) = -x + ln\,(e^x + 1)$.

٣) أثبت أن المستقيم $\Delta: y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

٤) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

٥) ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C .

الحل:

١- $\lim_{x\to+\infty} (ln(e^{-x} + 1)) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} (ln(e^{-x} + 1)) = \infty$ اذن $y = 0$ مقارب افقي لـ c بجوار $+\infty$

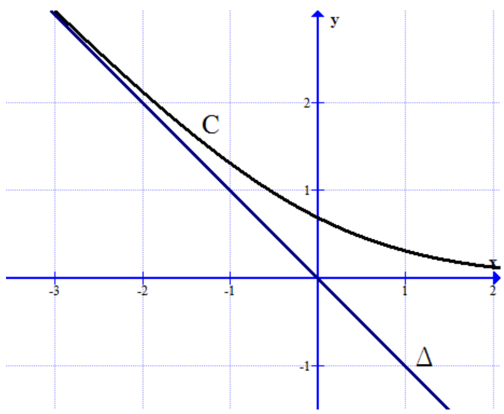
٢- $f(x) = ln(e^{-x} + 1) = ln\big(e^{-x}(1 + e^x)\big) =$

$= ln(e^{-x}) + ln(1 + e^x) = -x + ln(1 + e^x)$

$f(x) = -x + ln\,(e^x + 1)$

٣- $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty} (-x + ln(e^x + 1) + x)$

$= \lim_{x\to-\infty} (ln(e^x + 1)) = 0$



إذن المستقيم $\Delta: y = -x$ مقارب مائل لمنحن التابع بجوار $-\infty$.

٤- $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} < 0$ والتابع متناقص تماماً .

x	$-\infty$			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘		0

<u>المسألة الثانية</u> : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط $A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(4,0,0)$ والمطلوب :

١) أثبت أن النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة .

٢) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تُعطَى بالعلاقة : $x + 3y - 3z - 4 = 0$.

٣) ليكن المستويان P , Q, معادلتيهما : $P:\ x + 2y - z - 4 = 0$, $Q:\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي $d:\begin{cases} x = t-2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ,t \in R$

٤) ما هي نقطة تقاطع المستويات $(ABC)\ ,\ Q\ ,\ P$.

٥) احسب بعد A عن المستقيم d.

الحل :

١- $\overrightarrow{AB}(0,1,1)\ ,\ \overrightarrow{AC}(3,-1,0): -\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ الشعاعان غير مرتبطين خطياً والنقاط ليست على استقامة واحدة

٢- بفرض $\vec{n}(,b,c)$ ناظماً على المستوي (ABC) عندئذ

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 & \Rightarrow 3a - b = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 & \Rightarrow b + c = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{نفرض } b=3} \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}(1,3,-3)$$

معادلة المستوي (ABC) : $(x-1) + 3(y-1) - 3(z-0) = 0$ بالإصلاح

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

٣- $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$: $\overrightarrow{n_1}(1,2,-1)$, $\overrightarrow{n_1}(2,3,-2)$ الشعاعان غير مرتبطان خطياً فالمستويين متقاطعان .

لإيجاد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك نفرض أن $z = t$ عندئذ بالتعويض في معادلتي المستويين :

$$\begin{matrix} x + 2y = t + 4 \\ 2x + 3y = 2t + 5 \end{matrix} \overset{\times 2}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x + 4y = 2t + 8 \\ 2x + 3y = 2t + 5 \end{cases} \xRightarrow{\text{بالطرح}} y = 3 \Rightarrow x = t - 2$$

$$d:\begin{cases} x = t-2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

٤- لإيجاد نقطة التقاطع نعوض جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي (ABC) لنجد :

$$t - 2 + 3(3) - 3(t) - 4 = 0 \Rightarrow -2t = -3 \Rightarrow \ t = \frac{3}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2})$$

٥- بعد A عن كل نقطة M من المستقيم d :

$$des(A,M) = \sqrt{(1-t+2)^2 + (1-3)^2 + (0-t)^2}$$

$$des(A,M) = \sqrt{(3-t)^2 + (-2)^2 + t^2} = \sqrt{9 - 6t + t^2 + 4 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 6t + 13}$$

$$= \sqrt{2\left(t^2 - 3t + \frac{13}{2}\right)} = \sqrt{2\left(t^2 - 3t + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{26}{4}\right)} = \sqrt{2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}}$$

ويكون هذا البعد أصغر ما يمكن عندما $t = \frac{3}{2}$ وعندئذ بعد A عن المستقيم d $des(A,d) = \sqrt{\frac{17}{2}}$

ومن فاته التعليم وقت شبابه ... فكبر عليه أربعا لوفاته

الرياضيات

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠١٨

(الفرع العلمي – الدورة الثانية)

الاسم :

الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على R والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	∞

١- جد $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع f .

٣- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

٤- دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

الحل:

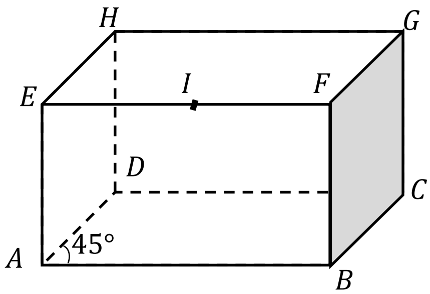
١- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

٢- $y=2$ مقارب أفقي لـ C بجوار $-\infty$.

٣- عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ حلان .

٤- $f(2)=-1$ قيمة حدية صغرى

السؤال الثانية:



$ABCDEFGH$ متوازي سطوح , فيه $BC=GC=1$ و $AB=2$.

وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي 45° والنقطة I منتصف $[EF]$ والمطلوب :

١- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

٢- عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة:

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

الحل :

١- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=(2)(1)(Cos45^\circ)=\sqrt{2}$

٢- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AI}$ وبالتالي : $M=I$

السؤال الثالث :في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال , كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة .

الحل :

$$\binom{3}{1}\binom{5}{2}=3\times 10=30$$

السؤال الرابع : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ وفيها $u_0=1$ والمطلوب :

احسب u_3 ثم احسب المجموع $S=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$.

الحل :

$$q = 2 \quad \text{و} \quad u_0 = 1 \quad \Rightarrow u_n = 2^n$$

$$u_3 = 2^3 = 8 : \text{وبالتالي} \quad u_n = 2^n$$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 8\left(\frac{1-2^5}{1-2}\right) = 248$$

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة الآتية</u> : (٦٠ درجة لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : ليكن f التابع المعرف على المجال $]2,\infty[$ وفق : $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

١- ادرس تغيرات f على المجال $]2,\infty[$ ونظم جدولاً بها .
٢- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً .
٣- اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3 .

الحل:

١- $\lim_{x\to 2}\left(x - 4 + \sqrt{x-2}\right) = -2 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(x - 4 + \sqrt{x-2}\right) = \infty$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$$

x	2	∞
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-2 ↗	∞

٢- $f(]2,\infty[) =]-2,\infty[\ni 0$ و $f'(x) > 0$ على $]2,\infty[$ فالمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في I

٣- $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f'(3) = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x-3) + 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

<u>التمرين الثاني</u> : صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء و (5) كرات حمراء , نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً , نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك والمطلوب :

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي .

الحل : $I = \{5, 3, 0\}$

$$p(x=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$$p(x=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84}$$

$$p(x=0) = 1 - \left(\frac{10}{84} + \frac{40}{84}\right) = \frac{34}{84}$$

r	0	3	5
$P(X=r)$	$\frac{34}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

$$E(X) = \frac{0+120+50}{84} = \frac{170}{84} = \frac{85}{42}$$

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - 1$ والمطلوب :

١- جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \le 0$

٢- احسب : $\int_0^{ln2} f(x)dx$

الحل :

١- $f(x) \le 0 \Rightarrow e^x - 1 \le 0 \Rightarrow e^x \le 1 \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow x \in]\infty, 0]$

٢- $\int_0^{ln2} f(x)dx = \int_0^{ln2} (e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^{ln2} = 2 - ln2 - 1 = 1 - ln2$

التمرين الرابع : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقطتين A , B اللتين

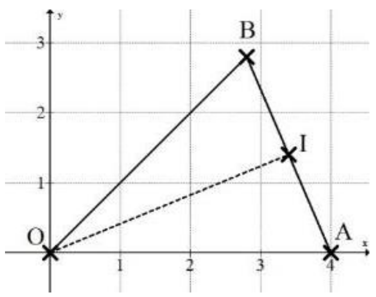
يمثلهما على الترتيب العددان العقديان: $z_A = 4$, $z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ولتكن I منتصف $[AB]$. والمطلوب :

١) مثّل النقطتين A , B في معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ واكتب z_B بالشكل الأسي .

٢) بين طبيعة المثلث OAB , وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$.

٣) اكتب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $Sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

الحل :



١- $z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i : \begin{cases} r = \sqrt{8+8} = 4 \\ Cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ Sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$z_B = 4e^{\frac{\pi}{4}}$$

٢- نلاحظ $|z_A| = 4$, $|z_B| = 4$ إذن $OA = OB$ فالمثلث OAB متساوي الساقين .(OI) و متوسط متعلق بالرأس فيه إذن (OI) منصف بالتالي :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{8}$$

٣- $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$$|z_I| = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2 + 2} = \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$z_I = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \ e^{\frac{\pi}{8}i}$$

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{2}} \, Sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \ \Rightarrow Sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8+4\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$, $D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$ والمطلوب :

١) جد $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$.

٢) أثبت أن النقاط C , D , E ليست واقعة على استقامة واحدة .

٣) أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE) .
٤) اكتب معادلة المستوي (CDE) .
٥) احسب بعد B عن المستوي (CDE).
٦) اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE) .

الحل :

١- $\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$, $\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$, $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$

٢- الشعاعان $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$, $\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$ فيهما $\frac{-1}{4} \neq \frac{-3}{-4}$ فهما غير مرتبطين خطياً والنقاط C , D , E ليست على استقامة واحدة .

٣- $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-1)(-4) + (-1)(4) + (-4)(0) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = (-1)(-3) + (-1)(-1) + (-4)(1) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE} \end{cases}$

(AB) يعامد المستوي (CDE)

٤- $\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$ ناظم على المستوي (CDE) فمعادلة المستوي :

معادلة المستوي (CDE) : $-1(x-4) - 1(y-0) - 4(z-0) = 0$ بالإصلاح

$$x + y + 4z - 4 = 0$$

٥- $des\big(B,(CDE)\big) = \frac{|(1)+(0)+4(-1)-4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}$

٦- نصف قطر الكرة هو $R = des\big(B,(CDE)\big) = \frac{7}{3\sqrt{2}}$

ومعادلة الكرة : $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$

<u>المسألة الثانية</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,\infty[$ وفق : $f(x) = x^2 - lnx$ والمطلوب :

١) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .
٢) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٣) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.
٤) في معلم متجانس ارسم المماس T و الخط البياني C .
٥) احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$, $x = e$
٦) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n = n^2 - ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

الحل:

١- $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - lnx) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - lnx) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x - \frac{lnx}{x}\right) = \infty$

٢- $x = 0$ مقارب شاقولي $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

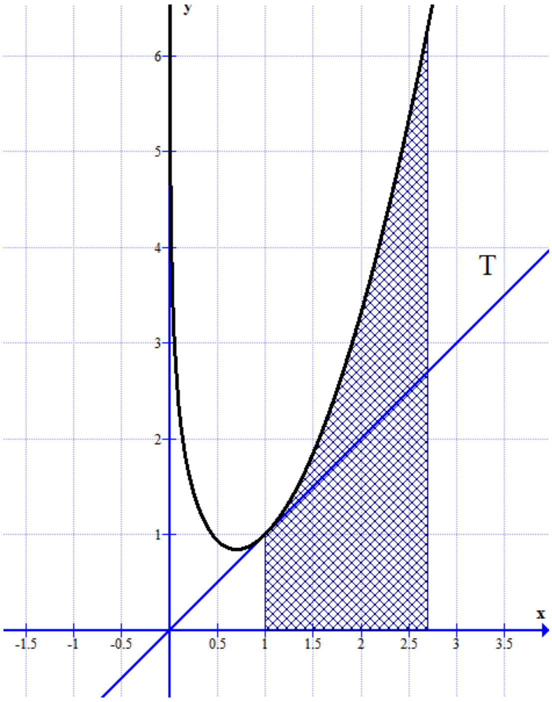
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin D \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}ln(2) \end{cases}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		∞
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ ∞	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln(2)$	$\nearrow$	∞

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln(2)$ قيمة حدية صغرى

٣- معادلة المماس : $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=1 \end{cases} \Rightarrow T: y=1(x-1)+1 \Rightarrow T: y=x$

٤- الرسم :



٥- مساحة السطح :

$$S=\int_1^e (x^2-lnx)dx=\int_1^e x^2dx-\int_1^e lnxdx$$

$u=lnx$	$v'=1$
$u'=\frac{1}{x}$	$v=x$

$$S=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\left([xlnx]_1^e-\int_1^e 1dx\right)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\left([xlnx]_1^e-[x]_1^e\right)=$$

$$S=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}-(e-e+1)=\frac{e^3-4}{3}$$

٦- المتتالية تصريحية تابعها الموافق متزايد تماماً على المجال $]1,\infty[$ فالمتتالية متزايدة تماماً .

انتهت الأسئلة

الرياضيات | امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠١٩ | الاسم :
(الفرع العلمي – الدورة الأولى) | الرقم :
الدرجة العظمى: ستمئة
المدة : ثلاث ساعات

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على R خطه البياني C :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

١- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C .

٣- دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

٤- احسب $f(\,]-1,2[\,)$.

الحل :

١- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$

٢- $y = 3$ مقارب أفقي لـ C بجوار ∞ .

٣- $f(-1) = -2$ قيمة حدية صغرى

٤- $f(]-1,2[) =]-2,4[$

السؤال الثاني : عين الحد المستقل عن x في منشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$.

الحل :

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad \Rightarrow T_r = \binom{6}{r} x^{6-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{6}{r}(x^{6-r})(x^{-2r}) = \binom{6}{r}(x^{6-3r})$$

$$6 - 3r = 0 \;\Rightarrow r = 2 \begin{cases} r = 2 \le n = 6 \\ r = 2 \in N \end{cases} \Rightarrow$$

الحد المستقل عن x هو $T_r = \binom{6}{2} = 15$

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^* وفق : $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$ والمطلوب :

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta:\ y = x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$, ثم ادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم Δ .

الحل:
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + 3 - \frac{1}{x^2} - x - 3\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \Delta \text{ تحت } C$$

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ والمطلوب

١) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.

٢) أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان .

إعداد الأستاذ خليل الكيلاني مع تمنياتي لطلابنا الأحبة بالتفوق

الحل :

١- التمثيل الوسيطي للمستقيم d : $t \in R$,
$$d:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

٢- شعاعي توجيه المستقيمين : $\vec{u}(2,2,1)\ ,\ \overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ نحسب جداؤهما السلمي :
$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = (2)(-1) + (2)(1) + (1)(0) = 0 \Longrightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \Longrightarrow d \perp (AB)$$

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة الآتية</u> : (٦٠ درجة لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ والمطلوب :

١) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

٢) أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$, ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وبين أنها متقاربة .

الحل :

١- $S_{n+1} - S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$

والمتتالية متزايدة تماماً .

٢- S_n مجموع $n+1$ حداً من متتالية هندسية حدها الأول $a = 1$ وأساسها $q = \frac{1}{3}$.
$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$
$-\frac{1}{3^n} < 0 \Longrightarrow 3 - \frac{1}{3^n} < 3 \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{3}{2} \Longrightarrow S_n < \frac{3}{2}$ إذن $\frac{3}{2}$ راجح على المتتالية .

المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

<u>التمرين الثاني</u> : يحتوي صندوق على خمس كرات , ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام 0 , 1 , 2 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 0 , 1 , نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق .

١- الحدث A : الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته , احسب $p(A)$.

٢- نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .
عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X , واكتب جدول قانونه الاحتمالي , ثم احسب توقعه الرياضي .

الحل :

١- $p(A) = \frac{p_3^2 + p_2^2}{p_5^2} = \frac{3\times2+2\times1}{5\times4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

٢- $I = \{0\ ,1\ ,2\ ,3\}$
$$\begin{cases} p(X=0) = \dfrac{p_2^2}{p_5^2} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} \quad , \quad p(X=1) = \dfrac{p_2^1 \times p_2^1 \times 2}{p_5^2} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{4}{10} \\ p(X=2) = \dfrac{p_2^2 + p_2^1 . p_1^1 \times 2}{p_5^2} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} \quad , \quad p(X=3) = \dfrac{p_2^1 . p_1^1 \times 2}{p_5^2} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{2}{10} \end{cases}$$

r	0	1	2	3
$P(X=r)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(X)=\frac{0+4+6+6}{10}=\frac{16}{10}=1.6$$

التمرين الثالث: ليكن التابع f المعرف على المجال $I=]e^{-1},\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$ والمطلوب :

١) جد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق الشرط : إذا كانت $x>A$, كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$.

٢) احسب $\lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big)$.

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+lnx}{1+lnx}=\lim_{x\to\infty}\frac{lnx\left(\frac{2}{lnx}+1\right)}{lnx\left(\frac{1}{lnx}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{lnx}+1}{\frac{1}{lnx}+1}=1$$

$$f(x)\in]0.9,1.1[\Longrightarrow |f(x)-1|<0.1\Longrightarrow \left|\frac{2+lnx}{1+lnx}-1\right|<0.1$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{2+lnx-1-lnx}{1+lnx}\right|<0.1\Longrightarrow \left|\frac{1}{1+lnx}\right|<0.1\Longrightarrow |1+lnx|>10$$

بما أن $x\in]e^{-1},\infty[$ إذن $1+lnx>0$ بالتالي :

$$1+lnx>10\Longrightarrow lnx>9\Longrightarrow x>e^9$$

نختار $A=e^9$

$$\lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{t\to 1} f(t)=\lim_{t\to 1}\frac{2+lnt}{1+lnt}=2$$

التمرين الرابع : لتكن النقطتان A , B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية $z_A=-1+i$, $z_B=-3i$,

وليكن : $p(z)=z^2+(1+2i)z+3+3i$. والمطلوب :

١) أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $p(z)=0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة .

٢) جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

٣) اكتب z_A بالشكل الأسّي .

الحل:

١- $p(z_A) = {z_A}^2 + (1+2i)z_A + 3 + 3i = (-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i =$

$$p(z_A) = -2i + (-1 + i - 2i - 2) + 3 + 3i = 0$$

إذن z_A حلاً للمعادلة $p(z) = 0$.

بالاستفادة من قانون مجموع جذري المعادلة :

$z_A + z' = -\frac{b}{a} = -(1+2i) = -1-2i$ حيث z' هو الجذر الآخر

$$z_2 = -1 - 2i + 1 - i = -3i = z_B$$

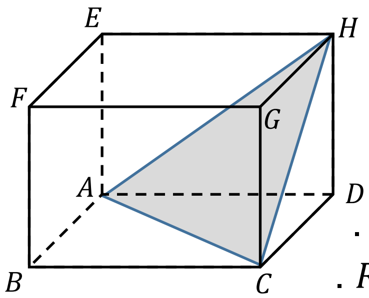
٢- $z' - z_B = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A - z_B)$ بالتعويض نجد $z' + 3i = i(-1 + i + 3i)$

$$z' = -i - 4 - 3i = -4 - 4i$$

٣- $z_A = -1 + i : \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ Cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z_A = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : نتأمل في معلم متجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :



١) اكتب في هذا المعلم احداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D .

٢) اكتب معادلة للمستوي (ACH) .

٣) أثبت أن المستوي p الذي معادلته $p: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH) .

٤) بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F , I , D على استقامة واحدة .

٥) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$. وبيّن أن المستوي (ACH) يمس الكرة S .

الحل:

١- $A(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $H(0,1,1)$, $F(1,0,1)$, $D(0,1,0)$

٢- معادلة المستوي من الشكل $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} A(0,0,0) \in (ACH) \Rightarrow d = 0 \\ C(1,1,0) \in (ACH) \Rightarrow a + b = 0 \\ H(0,1,1) \in (ACH) \Rightarrow b + c = 0 \end{cases}$$

بفرض أن $b = -1$ إذن $a = 1$ و $c = 1$.

$$(ACH): \ x - y + z = 0$$

٣- نوجد ناظمي المستويين : $\overrightarrow{n_2}(-2,2,-2)$, $\overrightarrow{n_1}(1,-1,1)$ نلاحظ أن $\overrightarrow{n_2} = -2\overrightarrow{n_1}$ فالشعاعين مرتبطان خطياً والمستويين متوازيان .

٤- لنوجد احداثيات I مركز ثقل المثلث ACH : $I\left(\frac{0+1+0}{3}, \frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}\right)$ إذن $I\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

الشعاعين $\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{IF}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ مرتبطان خطياً لأن $\overrightarrow{IF} = -2\,\overrightarrow{ID}$ والنقاط على استقامة واحدة .

٥- $S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$

بعد مركز الكرة عن المستوي $dist(\Omega, (ACH)) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} = R$ فالمستوي يمس الكرة .

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

١) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته .
٢) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٣) جد معادلة للمماس T للخط البياني C عند النقطة $(0\,,2)$, وادرس الوضع النسبي لـ C و T .
٤) في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T و الخط البياني C .
٥) ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$, استنتج الخط البياني C' للتابع g .

الحل:

١- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{1+e^x} = 0$ إذن $y = 0$ مقارب أفقي لـ C_f بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{1+e^x} = 4$ إذن $y = 4$ مقارب أفقي لـ C_f بجوار $-\infty$

٢- $f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$ والتابع متناقص تماماً .

x	$-\infty$			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	4	$\searrow$		0

٣- $f'(0) = \frac{-4e^0}{(1+e^0)^2} = -\frac{4}{4} = -1$ معادلة المماس :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$T: y = -x + 2$$

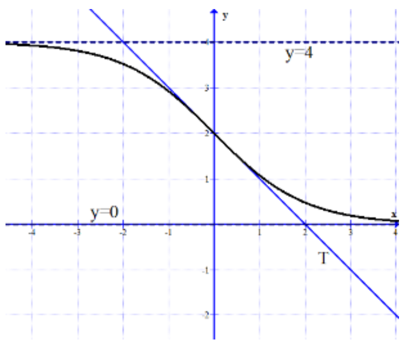
الوضع النسبي :

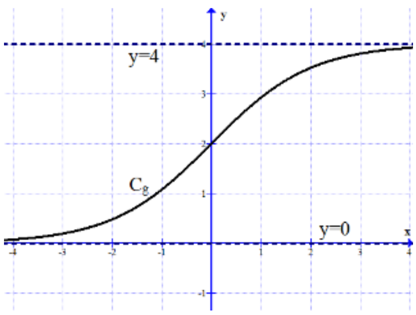
$$h(x) = f(x) - y_T = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$$

$$h'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} + 1 = \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} \geq 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
الوضع النسبي	T تحت C			T فوق C	

٤- الرسم :





٥- $f(-x)=\frac{4}{1+e^{-x}}=\frac{4}{e^{-x}(e^{x}+1)}=\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)}=g(x)$ إذن C_g نظير C_f حول (oy)

يا بني إنه من يرحم يُرحم، ومن يصمت يسلم، ومن يقل الخير يغنم، ومن يقل الباطل يأثم، ومن لا يملك لسانه يندم (لقمان الحكيم)

انتهت الأسئلة

الرياضيات امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠١٩ الاسم :

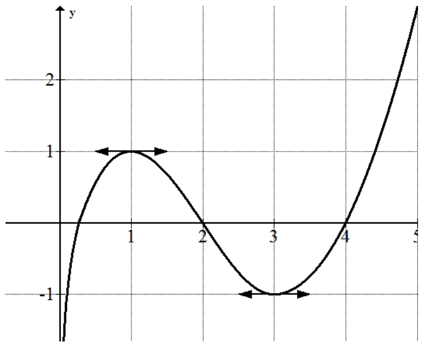
(الفرع العلمي – الدورة الثانية) الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : في الشكل المرسوم جانباً , ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,\infty[$ والمطلوب :



١- جد $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

٢- دل على القيم الحدّية مبيناً نوعها .

٣- جد حلول المتراجحة : $f'(x) \le 0$.

٤- جد $f([1,3])$.

الحل :

١) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

٢) $f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى $f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى .

٣) حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$ هو $x \in [1,3]$

٤) $f([1,3]) = [-1,1]$

السؤال الثاني : عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة : $\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$.

الحل :

شرط الحل : $\begin{cases} 2n \le 15 \\ n+3 \le 15 \end{cases} \Longrightarrow n \le 7$

الحلول مقبولة $\begin{cases} \text{إما } 2n = n+3 \Longrightarrow n = 3 \\ \text{أو } 2n + n + 3 = 15 \Longrightarrow n = 4 \end{cases}$

السؤال الثالث : ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\,Sin\,x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$ والمطلوب :

١- جد نهاية التابع f عند الصفر .

٢- عين قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر .

الحل :

١- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,Sin\,x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(Sin\,x)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\,(Sin\,x)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{Sin\,x}{x}(\sqrt{x^2+1}+1) = (1)(2) = 2$$

حتى يكون f مستمراً عند الصفر يجب تحقق $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ وهذا يعني أن $m = 2$.

السؤال الرابع :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان: $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$ والمستوي: $P: 3x-y-3z-8=0$

١) أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P .

٢) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) , ثم عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P .

الحل :

١- $\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) و $\vec{n}(3,-1,-3)$ شعاع ناظم على المستوي P يحققان $\vec{n}=-\overrightarrow{AB}$ فالشعاعين مرتبطان خطياً والمستقيم يعامد المستوي .

٢- $(AB):\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-2+3t \end{cases} : t\in R$, بما أن المستقيم يعامد المستوي فلإيجاد A' نعوض جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) في معادلة المستوي: $3(2-3t)-(1+t)-3(-2+3t)-8=0$

بالإصلاح نجد : $19t=3$ وحلها : $t=\frac{3}{19}$ والإحداثيات $A'\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},-\frac{29}{19}\right)$.

ثانياً – حل التمارين الأربعة التالية : (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,\infty[$ وفق : $f(x)=ax+b-\frac{lnx}{x}$ والمطلوب :

١- عين العددين الحقيقين a و b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته : $d: y=3x$

٢- من أجل $a=4 , b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y=4x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$. ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

الحل :

١) $A(1,0)\in C \Longrightarrow 0=a+b$

$f'(x)=a-\frac{1-lnx}{x^2}$ ولدينا $f'(1)=m_d=3$ بالتعويض: $3=a-1$ بالتالي: $a=4$ و $b=-4$

$f(x)=4x-4-\frac{lnx}{x}$

٢) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x-4-\frac{lnx}{x}-4x+4\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{lnx}{x}\right)=0$

أي Δ مقارب لـ C بجوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{lnx}{x}$$

ينعدم المقدار عند $(x=1)$ والمقام موجب تماماً

x	0	1	∞
$-lnx$	‖ $+$ $+$	0	$-$ $-$
الوضع النسبي	‖ C فوق Δ		C تحت Δ

التمرين الثاني : نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط $A\,,B\,,C$ التي تمثلها الأعداد العقدية : $a=6-i\quad,\quad b=-6+3i\quad,\quad c=-18+7i$ بالترتيب . والمطلوب :

١) احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$, واستنتج أن النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة .
٢) بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ . أحسب θ .
٣) جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً .

الحل :

١- $\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}=\frac{-12+4i}{-24+8i}=\frac{-12+4i}{2(-12+4i)}=\frac{1}{2}$ الجواب حقيقي وبالتالي النقاط على استقامة واحدة .

٢- $d=e^{\theta i}a\implies 1+6i=e^{\theta i}(6-i)\implies e^{\theta i}=\frac{1+6i}{6-i}\implies e^{\theta i}=\frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)}=\frac{37i}{37}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

٣- بما أن $\widehat{AOD}=\frac{\pi}{2}$ و $OA=OD$ فيكون الرباعي مربع اذا كان $z_{\overrightarrow{OA}}=z_{\overrightarrow{DN}}$

$$a=n-d\implies n=a+d=6-i+1+6i=7+5i$$

التمرين الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب :

١- ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.
٢- أثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq0}$.
٣- احسب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$

الحل :

١) باستخدام التابع الموافق $D=[0,\infty[$, $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ نشتق : $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}>0$ التابع متزايد تماماً وبالتالي المتتالية متزايدة تماماً .

٢) $u_n-2=\frac{2n-1}{n+1}-2=\frac{-3}{n+1}<0\implies u_n<2$ ويكون 2 راجح على المتتالية u_n .

٣) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$.

$$u_n\in]1.9,2.1[\implies |u_n-2|<0.1\implies\left|\frac{-3}{n+1}\right|<0.1\implies\frac{n+1}{3}>10\implies n+1>30$$

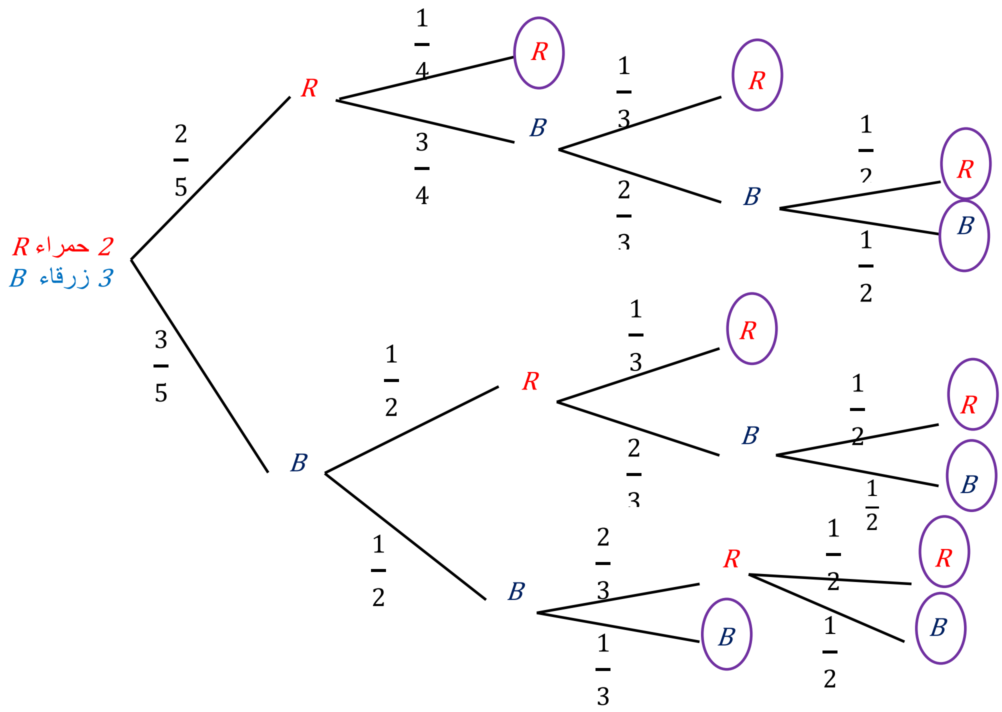
$$\implies n>29 \quad \text{نختار} \quad n_0=29$$

التمرين الرابع صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء , نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة .

عين مجموعة القيم التي يأخذها X , واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X , واحسب توقعه الرياضي .

الحل :



$$I = \{2,3,4\}$$

$$p(X = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$p(X = 3) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{10}$$

$$p(X = 4) = 1 - \big(p(X = 2) + p(X + 3)\big) = \frac{6}{10}$$

r	2	3	4
$P(X = r)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$E(X) = \frac{2 + 9 + 24}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$$

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> :

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات :

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

والمطلوب :

١) أثبت أن المستويين Q , P متقاطعان بفصل مشترك Δ , اكتب تمثيلاً وسيطياً له .

٢) تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A .

٣) أثبت أن المستويات R , Q , P تتقاطع بنقطة I يُطلب تعيين احداثياتها .

٤) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ .

الحل :

١) $\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$, $\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)$ شعاعين ناظمين على كل من المستويين Q , P
الشعاعين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعان بفصل مشترك Δ :

نفرض $z = t$ بالتعويض في معادلتيهما نجد : $\begin{matrix} 2x - y = 2 - 2t \\ x + y = 1 - t \end{matrix}$ بالجمع :

$$3x = 3 - 3t \Longrightarrow x = 1 - t \quad \Longrightarrow y = 0$$

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

٢) شعاع توجيه المستقيم Δ : $\vec{u}(-1,0,1)$ وشعاع ناظم المستوي R هو $\overrightarrow{n_R}(1,0,-1)$ مرتبطان خطياً بالتالي :
$\Delta \perp R$. نعوض احداثيات النقطة A بمعادلة المستوي R : $1 - 0 - 1 = 0$ محققة إذن $A \in R$

٣) نعوض جملة المعادلات الوسيطية بمعادلة المستوي R : $1 - t - t - 1 = 0$ وحلها : $t = 0$ لإيجاد I
نعوض قيمة t في جملة المعادلات الوسيطية : $I(1,0,0)$.

٤) بما أن المستقيم Δ يعامد المستوي R و $A \in R$ فبعد A عن Δ هو

$$AI = \sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = 2$$

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ والمطلوب :

١) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي .
٢) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٣) في معلم متجانس ارسم الخط C .
٤) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.
٥) استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق : $g(x) = 2xe^x$
٦) أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$.

الحل:

١) $y = 0$: مقارب أفقي في جوار ∞ $\Longleftarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = 0$

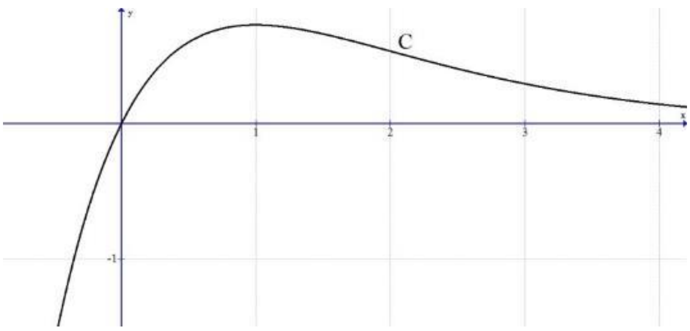
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} 2xe^{-x} = -\infty$$

٢) $$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 2x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow f(1) = \frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{2}{e}$ قيمة حدية كبرى .



٣) الرسم :

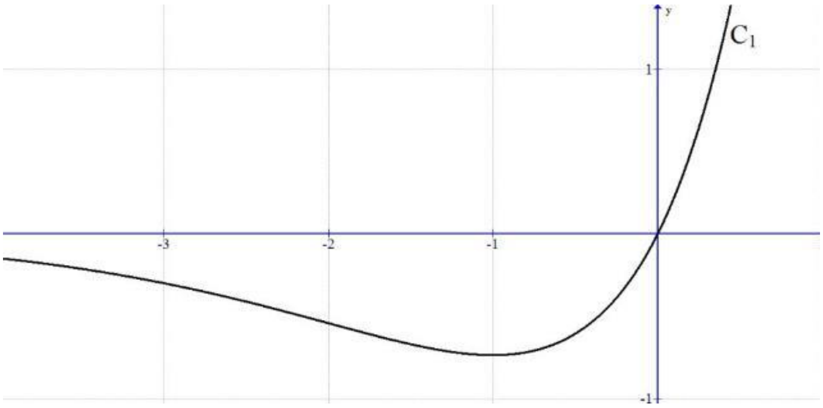
٤) $S = \int_0^1 2xe^{-x}dx$

$u = 2x$	$v' = e^{-x}$
$u' = 2$	$v = -e^{-x}$

$$S = [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx$$
$$S = [-2xe^{-x}]_0^1 + [-2e^{-x}]_0^1$$
$$S = -\frac{2}{e} + -\frac{2}{e} + 2 = \frac{2e-4}{e}$$

٥) $f(-x) = \frac{-2x}{e^{-x}} = -2xe^{x} = -g(x) \implies g(x) = -f(-x)$

C_1 نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات :



٦) نعوض كل من $f'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$ و $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ بالمعادلة التفاضلية :

$\frac{2-2x}{e^x} + \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$ محققة إذن $f(x)$ حلاً لها .

لا شك بوجود طرق كثيرة غير التي استخدمناها في الحل وعلى الطالب تقوية نفسه وتغيير طرق الحل ان أمكن .

مع تمنياتي لكم بالتفوق

إذا كنت في الصلاة فاحفظ قلبك ، وإن كنت على الطعام فاحفظ حلقك ، وإن كنت في بيت الغير فاحفظ بصرك ، وإن كنت بين الناس فاحفظ لسانك (لقمان الحكيم)

انتهت الأسئلة

الرياضيات امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠٢٠ الاسم :

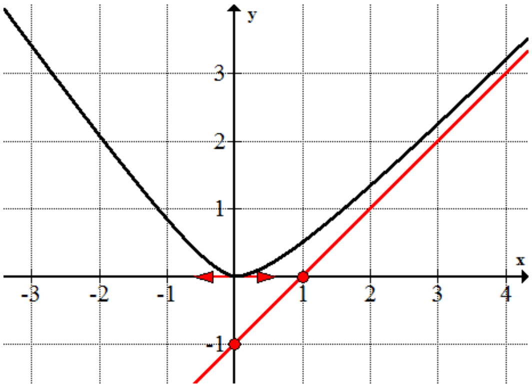
(الفرع العلمي – الدورة الأولى) الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :



نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

١- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة المستقيم Δ .

٣- جد $f(0)$, $f'(0)$.

٤- جد حلول المتراجحة : $f'(x) < 0$.

الحل:

١- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

٢- المستقيم Δ يوازي منصف الربع الأول ويمر من النقطة $(0,-1)$ فمعادلته $y = x - 1$.

٣- $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

٤- حلول المتراجحة : $f'(x) < 0$ هو $x \in]-\infty, 0[$.

السؤال الثاني: نتأمل المستويين $p_1 : 2x - y + z + 1 = 0$, $p_2 : x + y - z = 0$ والمطلوب:

١- تيقن أن المستويين متعامدان.

٢- اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

الحل:

١- نوجد ناظمي المستويين : $\overrightarrow{n_2}(1,1,-1)$, $\overrightarrow{n_1}(2,-1,1)$ إذن $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 2 - 1 - 1 = 0$
فالشعاعين متعامدين وبالتالي المستويان متعامدان .

٢- نفرض أحد المتغيرات وليكن $z = t$ بالتالي : $\begin{cases} 2x - y = -t - 1 \\ x + y = t \end{cases}$ بالحل المشترك نجد

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك هو : $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases}$

السؤال الثالث: يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند ادخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم: $5\ ,\ 4\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 1\ .\ 0$

١- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل.

٢- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى.

الحل:

١- عدد الرمازات $6^3 = 216$.

٢- عدد الرمازات $P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

السؤال الرابع: أثبت أن: $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > -1$.

الحل:

نشكل التابع $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = ln(x+1) - \sqrt{x+1}$ ولنبرهن أن $f(x) < 0$.

التابع اشتقاقي على $]-1, +\infty[$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)} = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = ln4 - 2 \approx -0.6 < 0$$

x	-1			3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$\nearrow$	$ln4-2$	$\searrow$	$\searrow$

من الجدول نجد أن

$f(x) < 0$ إذن $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$.

السؤال الخامس: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = x - E(x)$. **المطلوب:**

١- اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$.

٢- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} x & : x \in [0,1[\\ x-1 & : x \in [1,2[\end{cases}$$

$$x - 1 < E(x) \le x \quad \Rightarrow -x + 1 > -E(x) \ge -x \quad \Rightarrow 1 > x - E(x) \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{x-E(x)}{x^2} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > \frac{f(x)}{x^2} \ge 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \xRightarrow{\text{حسب الحصر}} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

<u>ثانياً: حل ثلاثة فقط من التمارين الأربعة الآتية:</u> (٨٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \ge 0$. **والمطلوب:**

١- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, \infty[$.

٢- أثبت بالتدريج أن $2 \le u_{n+1} \le u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

٣- استنتج أن المتتالية متقاربة , واحسب نهايتها .

الحل:

الطلب ١

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

$$f'(x)=0 \implies \frac{x^2-4}{2x^2}=0 \implies x^2-4=0 \implies x=2 \implies f(x)=2$$

x	2			$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب ٢ :

نرمز للقضية $(2 \le u_{n+1} \le u_n)$ بالرمز $E(n)$

لنبرهن أن القضية $E(0)$ صحيحة أي: $2 \le u_1 = \frac{13}{6} \le u_0 = 3$ وهي محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة أي نفرض $2 \le u_{n+1} \le u_n$

لنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

من الفرض $2 \le u_{n+1} \le u_n$ بالاستفادة من كون التابع متزايد تماما على $[2,\infty[$ نجد

$$f(2) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n) \implies 2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

وبالتالي القضية صحيحة

طلب٣ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها حل المعادلة $f(x)=x$

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x \implies \begin{cases} x=2 \text{ مقبول} \\ x=-2 \text{ مرفوض} \end{cases} \implies \lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

التمرين الثاني:

نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$:

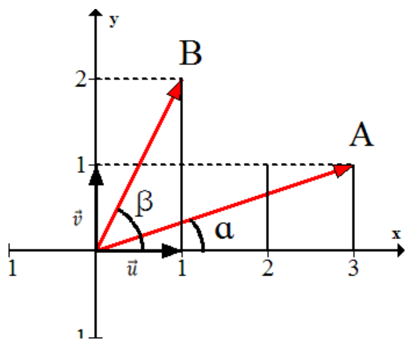
بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OB})$.

المطلوب:

١) اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين z_A و z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B.

٢) اكتب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي , ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$.

الحل:



$$z_A = 3+i \quad , \quad z_B = 1+2i$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1+2i}{3+i}=\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{5+5i}{10}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

$$|z_A|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10} \quad , \quad arg(z_A)=\alpha \implies z_A=\sqrt{10}\,e^{\alpha i}$$

$$|z_B|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5} \quad , \quad arg(z_B)=\beta \implies z_B=\sqrt{5}\,e^{\beta i}$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{5}\,e^{\beta i}}{\sqrt{10}\,e^{\alpha i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(\beta-\alpha)i}$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \quad , \quad r=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ,\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \frac{z_B}{z_A}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$$

التمرين الثالث:

f التابع المعرف على R وفق: $f(0)=0$ و $f(x)=x^2 \sin\frac{1}{x}$ في حالة $x\neq 0$. والمطلوب:

١- أثبت أن f اشتقاقي عند $x=0$.
٢- احسب $f'(x)$ على R^* .
٣- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}=?$$

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \implies f(x)=\begin{cases}-x\ge x\sin\frac{1}{x}\ge x, & x<0\\ -x\le x\sin\frac{1}{x}\le x, & x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} x=\lim_{x\to 0}(-x)=0 \xRightarrow{\text{حسب الحصر}} \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

إذن f اشتقاقي عند الصفر

$$f'(x)=2x\, Sin\left(\frac{1}{x}\right)-Cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty} x\left(\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}\right)=(+\infty)(1)=\infty$$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0)\ ,\ B(4,3,-3)\ ,\ C(-1,1,2)\ ,\ D(0,0,1)$. المطلوب:

١) أثبت أنّ $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً .
٢) أثبت أنّ الأشعة: $\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً .
٣) استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث أنّ α و β و γ أعداد حقيقة يطلب تعيينها.

الحل:

$\frac{-2}{3}\neq\frac{1}{3}$ $\overrightarrow{AB}(3,3,-3)\ ,\ \overrightarrow{AC}(-2,1,2)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطيا .

$$\overrightarrow{AD}(-1,0,1)\ ,\ \overrightarrow{AB}(3,3,-3)\ ,\ \overrightarrow{AC}(-2,1,2)$$

تكون الأشعة مرتبطة خطياً إذا وُجد $b\in R$ و a يحققان $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$

$$(-1,0,1)=a(3,3,-3)+b(-2,1,2)$$

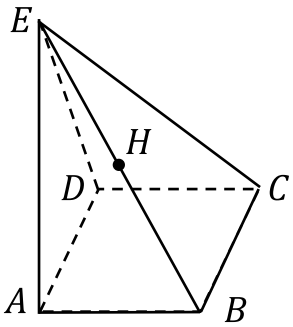
$$(-1,0,1)=(3a,3a,-3a)+(-2b,b,2b)=(3a-2b,3a+b,-3a+2b)$$

$$\begin{cases}3a-2b=-1\\ 3a+b=0\\ -3a+2b=1\end{cases} \xRightarrow{\text{من المعادلتين 1 و 2}} \begin{cases}a=-\frac{1}{9}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}$$
و التحقق من 3 والأشعة مرتبطة خطياً

بتعويض b و a $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ فتكون D م.أ.م لـ $\left(D,1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)\right)$ $\left(C,\frac{1}{3}\right)$ $\left(B,-\frac{1}{9}\right)$

بالإصلاح $\left(D,\frac{7}{9}\right)$ $\left(C,\frac{1}{3}\right)$ $\left(B,-\frac{1}{9}\right)$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)



المسألة الأولى: $(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E , قاعدته مربع طول ضلعه 3 ,

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $AE=3$.

نختار المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١) عين إحداثيات A , B , C , D , E

٢) جد معادلة المستوي (EBC).

٣) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

٤) استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC) .

٥) احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$.

الحل:

-١ $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(3,3,0)$, $D(0,3,0)$, $E(0,0,3)$

-٢ معادلة المستوي (EBC) من الشكل $ax+by+cz+d=0$

$$E\in(EBC)\Longrightarrow 3c+d=0$$

$$B\in(EBC)\Longrightarrow 3a+d=0$$

$$C\in(EBC)\Longrightarrow 3a+3b+d=0$$

نفرض ان $D=-3$ عندئذ نجد $a=1$ و $b=0$, $c=1$

ومعادلة المستوي تصبح : $(EBC)\colon\ x+z-3=0$

-٣ المستقيم يعامد المستوي إذن ناظم المستوي موجه للمستقيم :

$$\vec{n}(1,0,1)\ ,\ A(0,0,0)\Longrightarrow\begin{cases}x=t\\ y=0\quad t\in R\\ z=t\end{cases}$$

-٤ H منتصف $[EB]$ إذن $H(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$ النقطة تنتمي للمستوي (EBC) , بما أن المستقيم في الطلب السابق يعامد المستوي (EBD) ويمر من A فنقاطعه مع المستوي (EBC)

$(t)+(t)-3=0\Longrightarrow t=\frac{3}{2}\xRightarrow{\text{نقطة التقاطع}}(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$ وهي نفسها النقطة H .

-٥ $v=\frac{1}{3}S_{ABC}.AE=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 3\times 3\right)(3)=\frac{9}{2}$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$ وفق: $f(x)=ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب :

١) أثبت أن f تابع فردي .

٢) ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0,2[$.

٣) اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$, واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

٤) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .

٥) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=ln(2-x)-ln\,(x+2)$ على المجال $]-2,2[$.

الحل:

١- مجموعة التعريف متناظرة حول الصفر فالشرط الأول محقق .

$f(-x)=ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)=-ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)=-f(x)$ فالتابع فردي وخطه البياني متناظر حول O

٢- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{\frac{2-x+x+2}{(2-x)^2}}{\frac{x+2}{2-x}}=\frac{4}{(2-x)(x+2)}>0$$

x	0			2
$f'(x)$		$+$	$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

٣- $f'(0)=1 \quad , \quad f(0)=0$

$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Longrightarrow y=x$

بالتالي : $f(a+h)\approx f(a)+f'(a).h$

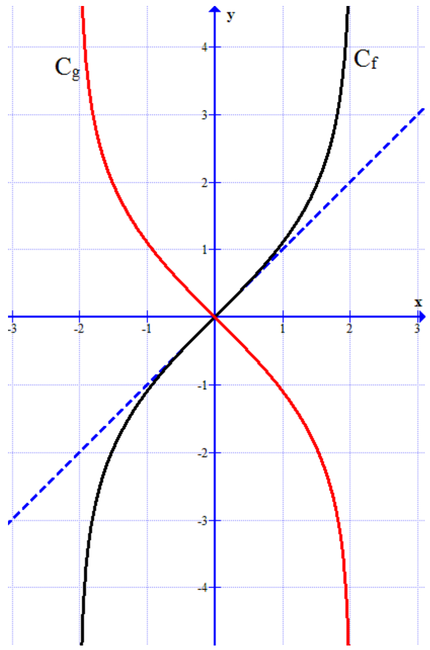
$f(0.1)\approx f(0)+f'(0)\times 0.1\Longrightarrow f(0.1)\approx 0.1$

٤- $g(x)=ln(2-x)-ln(x+2)$

$g(x)=ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)=f(-x)$

إذن $C_f \quad , \quad C_g$ متناظران حول (oy)

٥- الرسم:



انتهت الأسئلة

الرياضيات امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠٢٠ الاسم :

(الفرع العلمي – الدورة الثانية) الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ خطه البياني C . والمطلوب :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

١- جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢- دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها .

٣- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

٤- جد حلول المتراجحة : $f'(x) > 0$.

الحل:

١- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

٢- $f(0) = 2$ قيمة حدية صغرى , $f(4) = 6$ قيمة حدية كبرى

٣- عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]4, +\infty[$

٤- حلول المتراجحة : $f'(x) > 0$ هو $x \in]0,4[$.

السؤال الثاني :

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1 , 2 , 3 , 4 ,5 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة.

والمطلوب : ١- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب.

٣- كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي .

الحل:

١) عدد النتائج الممكنة : $5^2 = 25$

٢) يكون المجموع فردي إذا كان رقم إحدى الكرتين فردي والأخرى زوجي : $3 \times 2 \times 2 = 12$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. **المطلوب :**

١) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$.

٢) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

الحل:

١) $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \sqrt{x^2+1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ إذن Δ مقارب لـ C بجوار $+\infty$

٢) الوضع النسبي : (بما أن $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$) يكون $f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x > 0$
ويكون C فوق Δ .

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $2x + y - 3z + 2 = 0$ والنقطة $A(1,1,-2)$. **المطلوب:**

١) أثبت أن النقطة A لا تنتمي للمستوي P .
٢) اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P .

الحل:

١) $2(1) + (1) - 3(-2) + 2 = 11 \neq 0$ النقطة A لا تقع في المستوي .
٢) $2(x-1) + (y-1) - 3(z+2) = 0 \Longrightarrow Q: 2x + y - 3z - 9 = 0$

السؤال الخامس: نتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x) = x - sinx$

١-احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ٢- أثبت أن التابع f متزايد

الحل:

١) $-1 \leq -\sin x \leq 1 \Longrightarrow x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1) = \infty \xRightarrow{\text{حسب مبرهنة المقارنة}} \lim_{x\to+\infty} (x - \sin x) = \infty$$

٢) $f'(x) = 1 - Cosx \geq 0$ وهو ينعدم فقط عند $x = 0$ فالتابع متزايد تماما على $[0,+\infty[$

ثانياً: حل ثلاثة فقط من التمارين الأربعة الآتية: (٨٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$. **المطلوب:**

١- بين أن $|w| = 1$, ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي.
٢- ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z - \bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي .

الحل:

١) $|1+i| = \sqrt{2} \Longrightarrow |w| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|}\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1) = 1$

$w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{(e^{\pi i})\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$

٢) $|w| = 1 \Longrightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

يكون Z حقيقي إذا كان $\bar{Z} = Z$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{z} - z\bar{w}}{1-\bar{w}} = \frac{\bar{z} - z\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}} = \frac{\frac{\bar{z}w - z}{w}}{\frac{w-1}{w}} = \frac{\bar{z}w - z}{w-1} = \frac{z - \bar{z}w}{1-w} = Z \Longrightarrow Z \text{ حقيقي}$$

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. **المطلوب:**

١- عين التابع المشتق f' للتابع f .
٢- نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $J =]1,+\infty[$ وفق $g(x) = f(\sqrt{x})$, أثبت أن g اشتقاقي على J,

ثم احسب $g'(x)$ على J

الحل:

١) $f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}=\frac{-5}{(x-1)^2}$

٢) f اشتقاقي على كل من $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$ والتابع $x\to\sqrt{x}$ اشتقاقي على J

و $\forall x\in J \Rightarrow \sqrt{x}\in]1,+\infty[$ اذن g اشتقاقي على J .

$$g'(x)=f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'=\frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

التمرين الثالث:

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق: $d:\begin{cases}x=t+2\\y=2t+1\\z=-t\end{cases}\quad t\in R$ و $d':\begin{cases}x=2s-1\\y=s-2\\z=3s-2\end{cases}\ ,s\in R$

والمطلوب: ١) أثبت أن d و d' متقاطعان , ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.

٢) جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d و d' .

الحل:

١) $\vec{u}_{d'}(2,1,3)$, $\vec{u}_d(1,2,-1)$ غير مرتبطا خطيا فالمستقيمين غير متوازيين لأن $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{2}$

في حال التقاطع يكون $\begin{cases}x=t+2=2s-1\\y=2t+1=s-2\\z=-t=3s-2\end{cases}$

من المعادلة الأخيرة نجد $t=-3s+2$ نعوض في الأولى نجد

$$(-3s+2)+2=2s-1\Rightarrow s=1\Rightarrow t=-1$$

نتحقق بالتعويض في المعادلة الثانية $2(-1)+1=(1)\ -2 \Longleftarrow -1=-1$ محققة فالمستقيمين متقاطعان

في نقطة لإيجادها نعوض قيمة t أو s في التمثيل الوسيطي لنجد $I(1,-1,1)$

٢) نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً للمستوي المطلوب P عندئذ

$$\vec{n}.\vec{u}_d=0\quad,\quad\vec{n}.\vec{u}_{d'}=0\Rightarrow a+2b-c=0\quad,\quad 2a+b+3c=0$$

بالحل المشترك مع اختيار $c=3$ نجد $\begin{cases}2a+4b=6\\2a+b=-9\end{cases}$ بالطرح $b=5$, $a=-7$ فالناظم $\vec{n}(-7,5,3)$

وبالتالي معادلة المستوي $-7(x-1)+5(y+1)+3(z-1)=0$

بالإصلاح $-7x+5y+3z+9=0$

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}$. **والمطلوب :**

١) أثبت أن $n\leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$.

٢) استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

٣) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

الحل:

١) نرمز للقضية $(n \le 2^n \quad , n \ge 1)$ بالرمز $E(n)$

$n = 1 \implies 1 \le 2^2 = 2$ محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة : $n \le 2^n$

لنبرهن أن القضية $E(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $n+1 \le 2^{n+1}$

لدينا من الفرض $n \le 2^n$ نجمع للطرفين 1 :

$n+1 \le 2^n + 1 \le 2^n + 2^n = 2(2^n) = 2^{n+1}$ فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي تكون القضية صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \ge 1$.

٢) بما أن $n \le 2^n$

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n} \le \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \frac{2^3}{e^3} + \cdots + \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{2}{e}\right) + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

وهو مجموع n حداً متعاقباً من متتالية هندسية حدها الأول $\left(\frac{2}{e}\right)$ وأساسها $\left(\frac{2}{e}\right)$ فمجموعها :

$$u_n \le \left(\frac{2}{e}\right) + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{e}\right)^n = \left(\frac{2}{e}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}\right) = \frac{2}{e-2}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \le \frac{2}{e-2}$$

أذن $\frac{2}{e-2}$ راجح على المتتالية .

٣) $$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}\right) = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

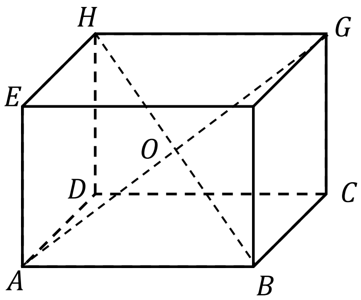
فالمتتالية متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 ,

O نقطة تقاطع القطرين $[HB]$ و $[AG]$.

نختار المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب :



١) جد احداثيات النقاط A , B , G , H , O .

٢) أعط معادلة للمستوي (GOB).

٣) احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $Cos\,\widehat{GOB}$.

٤) اكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم (DC) .

٥) اثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB) .

٦) جد الأعداد الحقيقية α , β , γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) , (B,β) , (C,γ)

الحل:

١) $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $G(2,2,2)$, $H(0,2,2)$, $O(1,1,1)$

٢) $\overrightarrow{BG}(0,2,2)$, $\overrightarrow{BO}(-1,1,1)$ نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (GOB) عندئذ :

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BO} \implies \vec{n}.\overrightarrow{BO} = 0 \implies -a+b+c = 0$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BG} \implies \vec{n}.\overrightarrow{BG} = 0 \implies 2b+2c = 0 \implies b+c = 0$

نختار $c = 1$ نجد $a = 0$, $b = -1$. والناظم : $\vec{n}(0,-1,1)$ نأخذ النقطة $B(2,0,0)$

معادلة المستوي $0(x-2) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0$ بالإصلاح $(GOB): -y + z = 0$

٣) $\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OG}(1,1,1)$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = (1)(1) + (1)(-1) + (1)(-1) = -1$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{OB}\|\ Cos\ \widehat{GOB} =$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = \sqrt{1+1+1}.\sqrt{1+1+1}Cos\ \widehat{GOB} = 3Cos\ \widehat{GOB}$$

$$3Cos\ \widehat{GOB} = -1 \quad \Longrightarrow Cos\ \widehat{GOB} = -\frac{1}{3}$$

٤) $\overrightarrow{DC}(2,0,0)$ شعاع موجه للمستقيم (DC) والمستقيم يمر من النقطة $C(2,2,0)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم : $(DC): \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \ t \in R$

٥) شعاع توجيه المستقيم هو $\overrightarrow{DC}(2,0,0)$ وناظم المستوي $\vec{n}(0,-1,1)$ جداؤهما السلمي $\vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0$
إذن (DC) يوازي المستوي (GOB) .

٦) $\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = \vec{O}$

$$\alpha(0,-2,0) + \beta(2,-2,0) + \gamma(2,0,0) = \vec{O}$$

$$(2\beta + 2\gamma, -2\alpha - 2\beta, 0) = \vec{O}$$

$\begin{matrix} 2\beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \end{matrix}$ نختار $\beta = -1$ نجد $\gamma = 1$ و $\alpha = 1$

أوبالانتباه لخواص المربع يمكن الحل بأسلوب اسرع $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ نستنتج $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{O}$
فتكون D م.أ.م لـ $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب :

١) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي..
٢) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٣) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.
٤) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .
٥) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$.

الحل:

١) مقارب أفقي لـ C بجوار ∞ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow y = 0$

مقارب شاقولي لـ C $\quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) = -\infty \quad \Longrightarrow x = 0$

٢) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$ إشارة المشتق مماثلة لإشارة $(-\ln x)$ الذي ينعدم عند 1 وسالب تماما على المجال $]1,+\infty[$ وموجب تماما على المجال $]0,1[$

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	+	0	−	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	↗	1	↘	↘	0

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى .

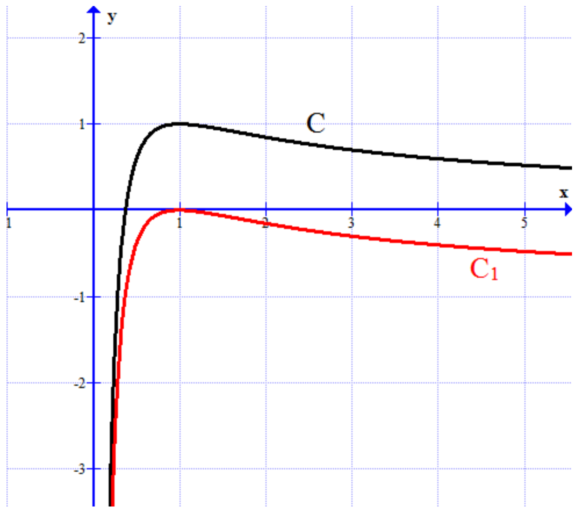
٣) على المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$ التابع المشتق : $f'(x) > 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2\,ln\frac{1}{2} = 2 - 2\,ln\,2 \approx 0.6 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + 3\,ln\frac{1}{3} = 3 - 3\,ln\,3 \approx -0.3 < 0$$

$f\left(\frac{1}{2}\right).f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.

٤)



٥) $g(x) = \frac{1-x+lnx}{x} = \frac{1+lnx}{x} - 1 = f(x) - 1$ ينتج الخط البياني C_1 من الخط البياني C بانسحاب شعاعه : $\vec{u} = -\vec{j}$ والرسم في الشكل السابق .

انتهت الأسئلة

الرياضيات امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠٢١ الاسم :

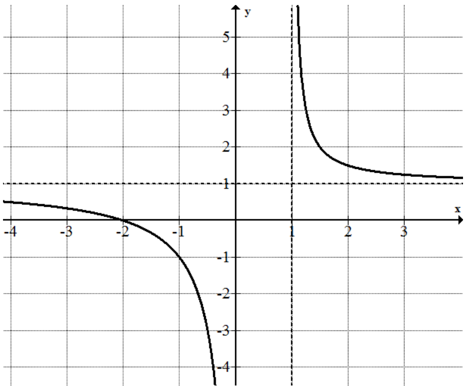
(الفرع العلمي – الدورة الأولى) الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :



نتأمل الخط البياني C للتابع f المعرف على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

والمطلوب:

١- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

٢- اكتب معادلة كل مقارب أفقي ومعادلة كل مقارب شاقولي لـ C .

٣- جد حلول المتراجحة : $f'(x)<0$.

٤- جد حل المعادلة : $f(x)=0$.

الحل:

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$

٢) $x=1$ مقارب شاقولي $x=0$, مقارب شاقولي , $y=1$ مقارب افقي لـC بجوار $\mp\infty$

٣) حلول المتراجحة : $f'(x)<0$ هو $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

٤) حل المعادلة : $f(x)=0$ هو $x=-2$

السؤال الثاني: جد قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في منشور $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$.

الحل:

الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين هو $T_r=\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r$

$$T_r=\binom{12}{r}(x)^{12-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r=\binom{12}{r}(x)^{12-r}(x^{-2r})=\binom{12}{r}(x)^{12-3r}$$

من أجل الحد الثابت نضع $12-3r=0\Longrightarrow r=4$ ويكون الحد الثابت $T_4=\binom{12}{4}=495$

السؤال الثالث: احسب العدد: $I=\int_0^3(2-|2-x|)dx$

الحل:

$$I=\int_0^3(2-|2-x|)dx=\int_0^2(2-2+x)dx+\int_2^3(2+2-x)dx=\int_0^2(x)dx+\int_2^3(4-x)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3=2-0+\frac{15}{2}-6=\frac{7}{2}$$

السؤال الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, النقاط الآتية: $A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,0,5), D(6,2,5)$

١) أثبت أن $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

٢) عين العددين الحقيقيين α , β بحيث $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن النقاط D , C , B , A تقع في مستو واحد .

الحل:

١) $\overrightarrow{AC}(3,0,4)$, $\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$ نلاحظ أن $\frac{3}{-1} \neq \frac{0}{-2}$ فالشعاعين غير مرتبطان خطيا

٢) $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (4,2,4) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,0,4) \Longrightarrow$

$(4,2,4) = (-\alpha + 3\beta, -2\alpha, 4\beta) \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta = 4 \\ -2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = -1 \\ 4\beta = 4 \quad \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$ بالتعويض في المعادلة الأولى للتحقق

$-(-1) + 3(1) = 4$ محققة $4 = 4$ وبالتالي النقاط A , B , C , D تقع في مستو واحد

السؤال الخامس:

ليكن f هو التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{a\,x^2 + b\,x + 1}{x-1}$. **المطلوب:**

عين العددين الحقيقيين a , b لتكون $f(-1) = 0$ قيمة حدية للتابع f

الحل:

$$f(-1) = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{a-b+1}{-1-1} \Longrightarrow a - b + 1 = 0$$

التابع اشتقاقي على كل من المجالين $]1, \infty[$ و $]-\infty, 1[$

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x-1) - (1)(a\,x^2 + b\,x + 1)}{x-1}$$

$f(-1) = 0$ قيمة حدية اذن $f'(-1) = 0$

$$\frac{(-2a + b)(-1-1) - (1)(a - b + 1)}{-1-1} = 0 \Longrightarrow 3a - b - 1 = 0$$

بطرح المعادلتين نجد $a = 1$ وتكون $b = 2$ نعوض بالتابع $f(x) = \frac{x^2 + 2\,x + 1}{x-1}$

السؤال السادس:

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود و ووجهان ملونان بالأحمر , نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي.

نعرف متحولا عشوائياً X يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها, **المطلوب:**

١) اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X = 0)$.

٢) احسب التوقع الرياضي للمتحول X وتباينه .

الحل:

التجربة برنولية $I = \{0,1,2,3,4,5\}$

١) $P(X = k) = \binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k} \xrightarrow{p=\frac{2}{3}\ ,\ q=\frac{1}{3}} P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

٢) $E(X) = np = (5)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$, $V(X) = npq = (5)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{9}$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (٧٠درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – ٦٠ درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول : لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

و لنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق : $v_n = u_n + 6$

المطلوب:

١) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية , عين أساسها واحسب v_0 , ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .

٢) لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق $w_n = ln\,(v_n)$, أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية واحسب w_0 , ثم احسب المجموع $s = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$

الحل:

١) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+6}{u_n+6} = \frac{\frac{1}{2}u_n-3+6}{u_n+6} = \frac{\frac{1}{2}u_n+3}{u_n+6} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+6}{u_n+6}\right) = \frac{1}{2}$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$ بالتالي : $v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

٢) $w_{n+1} - w_n = l\,n(v_{n+1}) - l\,n(v_n) = l\,n\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = l\,n\left(\frac{1}{2}\right) =$ ثابت

فهي حسابية أساسها $ln\left(\frac{1}{2}\right)$. $w_0 = l\,n(v_0) = ln8 = 3ln2$

$w_n = ln(8) + ln\left(\frac{1}{2}\right).n$

$$w_5 = ln(8) + ln\left(\frac{1}{2}\right).(5) = 3ln2 - 5ln2 = -2ln2$$

$$s = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \frac{6}{2}(3ln2 - 2ln2) = 3ln2$$

التمرين الثاني:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية $a = 8$, $b = -4 + 4i$, $c = -4i$ على الترتيب. **والمطلوب:**

١) احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

٢) جد العدد العقدي d الممثل للمقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

٣) جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً .

الحل:

١) $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8+4i} = \frac{i(8+4i)}{8+4i} = i$ نستنتج أن : $b - c = i(a - c)$

فالمثلث ABC متساوي الساقين وقائم في C

٢) $d = e^{\frac{\pi}{4}}a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(8) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

٣) بما أن المثلث ABC قائم من جهة ومتساوي الساقين من جهة فيكون الرباعي $ACBE$ مربعاً إذا كان $Z_{\overrightarrow{AE}} = Z_{\overrightarrow{CB}}$ بالتالي : $e - a = b - c$

$$e - 8 = -4 + 4i + 4i \Longrightarrow e = 4 + 8i$$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x - 4 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

١) أثبت أن f تابع متزايد تماماً على I , واستنتج $f(I)$.

٢) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.
٣) ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d .

الحل:

١) التابع اشتقاقي على I :

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$ والتابع متزايد تماماً على I

$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ إذن $f(]0,\infty[) = R$

٢) $\lim_{x\to\infty}(f(x) - y_d) = \lim_{x\to\infty}\left(ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = ln1 = 0$ إذن d مقارب لـ C بجوار $+\infty$

٣) $f(x) - y_d = ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$ لأن البسط والمقام قيم موجبة تماما والبسط اصغر تماما من المقام والمنحني تحت المقارب .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, النقاط الآتية: $A(-1,2,3), B(2,1,1), C(-3,4,-1), D(3,1,1)$. **والمطلوب**

١) جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان .
٢) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة للمستوي (ABC)
٣) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمود على المستوي (ABC).
٤) احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D - ABC$.
٥) بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) , (CG) متوازيان .

الحل:

١) $\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$
جداؤهما السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = (3)(-2) + (-1)(2) + (-2)(-4) = 0$
نستنتج أن : $(AB) \perp (AC)$

٢) $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = (2)(3) + (4)(-1) + (1)(-2) = 0$
$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = (2)(-2) + (4)(2) + (1)(-4) = 0$ إذن $\vec{n}$ ناظم على المستوي
فمعادلة المستوي (ABC) هي : $2(x-2) + 4(y-1) + (z-1) = 0$ بالإصلاح
$(ABC):\ 2x + 4y + z - 9 = 0$.

٣) ناظم المستوي موجها للمستقيم $\vec{n}(2,4,1)$ والمستقيم يمر من $D(3,1,1)$ فتمثيله الوسيطي :

$$d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 4t \quad , t \in R \\ 1 + t \end{cases}$$

٤) بعد D عن المستوي (ABC) : $dist\big(D,(ABC)\big) = \frac{|2(3)+4(1)+(1)-9|}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$
المثلث ABC قائم في A من الطلب الأول

$AB = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \quad , \quad AC = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$

حجم الهرم $D - ABC$: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\left(\frac{AB.AC}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{14}.\sqrt{24}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right) = \frac{4}{3}$

٥) لنوجد احداثيات G : $G\left(\frac{1(-1)-1(2)+2(-3)}{1-1+2} , \frac{1(2)-1(1)+2(4)}{1-1+2}, \frac{1(3)-1(1)+2(-1)}{1-1+2}\right)$

$$G\left(\frac{-9}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$$

و $\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$ $\overrightarrow{CG}\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$ نلاحظ أن $\frac{2}{1}- = \frac{1}{\frac{1}{2}}- = \frac{3}{-\frac{3}{2}} \Leftarrow -2 = -2 = -2$

فالشعاعين مرتبطان خطيا فالمستقيمين متوازيان .

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ **والمطلوب :**

١) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي .

٢) أثبت أن $f'(x) = (1-x^2)\, e^{-x}$.

٣) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية مبيناً نوعها .

٤) ارسم C في معلم متجانس .

٥) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق : $g(x) = (x-1)^2 e^x$.

٦) جد مجموعة تعريف التابع $h(x) = ln(f(x))$: .

الحل:

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$y = 0$ مقارب افقي لـ C بجوار $+\infty$.

٢) $f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - e^x(x+1)^2}{e^{2x}} = \frac{2(x+1)-(x+1)^2}{e^x} = (-x^2-2x-1+2x+2)e^{-x}$

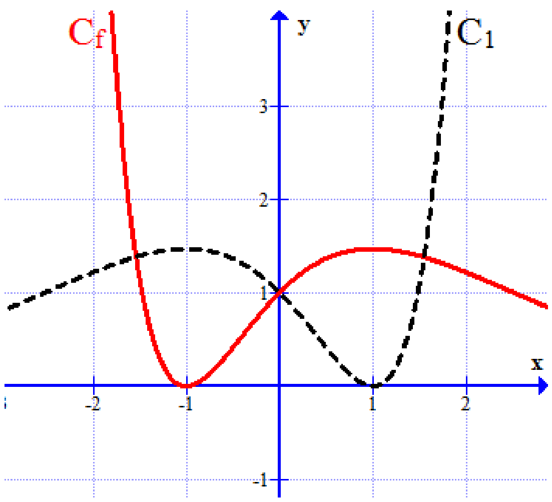
$$f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$$

٣) $f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x^2)\, e^{-x} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{4}{e} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$f(-1) = 0$ قيمة حدية صغرى , $f(+1) = \frac{4}{e}$ قيمة حدية كبرى

٤)



٥) $f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{e^{-x}} = (x-1)^2 e^x = g(x)$ إذن C_1 نظير C_f حول (oy) .
٦) $h(x) = ln(f(x))$ يكون معرف عندما $f(x)$ معرف و $f(x) > 0$ من جدول التغيرات نجد أن
$D_h = R\backslash\{-1\}$

- انتهت الأسئلة -

الرياضيات امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠٢١ الاسم :

(الفرع العلمي – الدورة الثانية) الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : عين قيمة n التي تحقق المعادلة $P_{n+3}^{3} = 16\binom{n+2}{2}$.

الحل:

$$(n+3)(n+2)(n+1) = \frac{16(n+2)(n+1)}{2}$$

$$n+3 = 8 \Longrightarrow n = 5$$

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $p: 2x + y - 2z - 4 = 0$

١) احسب بعد A عن المستوي P .

٢) اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

الحل:

١) $h = \frac{|2(2)+1-2(2)-4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{3} = 1$

٢) $R = h \implies S: (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$

السؤال الثالث: احسب التكامل الآتي: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ sinx\ dx$

التكامل يتم بالتجزئة :

$v' = Sinx$	$u = x$
$v = -Cosx$	$u' = 1$

$$I = [-x\ Cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cosx\ dx == [-x\ Cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} + [Sin\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

السؤال الرابع: نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ خطه البياني C . والمطلوب :

١- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to0} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي.

٢- ما عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$.

٣- دل على القيمة المحلية وبين نوعها .

٤- جد مجموعة حلول المتراجحة: $f'(x) > 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

الحل:

١) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$

$y = 0$ مقارب أفقي لمنحني التابع بجوار $+\infty$ و $x = 0$ مقارب شاقولي لـ C

٢) المعادلة : $f(x) = 0$ لها حل وحيد .

٣) $f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة محلية كبرى .

٤) حلول المتراجحة: $f'(x) > 0$ هو $x \in]0,1[$

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق $f(x)=\frac{2\,x^2+cos^2\,x}{x}$. **المطلوب :**

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

الحل:

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{2\,x^2+cos^2\,x}{x}-2x=\frac{cos^2\,x}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \text{ ولدينا } 1\geq cos^2\,x\geq 0 \xRightarrow{(0>x)} \frac{1}{x}\leq\frac{cos^2\,x}{x}\leq 0$$

حسب مبرهنة المقارنة نجد $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{cos^2\,x}{x}\right)=0$ بالتالي Δ مقارب لـ C بجوار $-\infty$.

الوضع النسبي: $\frac{cos^2\,x}{x}\leq 0$ إذن C تحت Δ .

السؤال السادس:

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء , عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء .

المطلوب:

١) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة ما احتمال أن تكون بيضاء اللون .

٢) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة , نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة . اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي .

الحل:

١) نرمز للحدث الدال على سحب كرة بيضاء بالرمز A نفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$ وعدد الكرات الكلية $4n$: $p(A)=\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}$

٢) $I=\{0,1,2,3\}$

$p(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$, $p(X=1)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 3=\frac{27}{64}$,

$p(X=2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1\times 3=\frac{9}{64}$, $p(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

التجربة برنولية يمكن اتباع طريقة ثانية .

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (٧٠درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – ٦٠ درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_0=\frac{5}{2}$, $u_{n+1}=(u_n-2)^2+2$. **المطلوب:**

١) أثبت بالتدريج أن المتتالية $2\leq u_n\leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n .

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

٣) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim_{n\to\infty} u_n$

الحل:

١) نرمز للقضية $(2\leq u_n\leq 3)$ بالرمز $E(n)$.

لنبرهن أن القضية $E(0)$ صحيحة : $2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$ محققة
نفرض أن $E(n)$ صحيحة : $2 \leq u_n \leq 3$
لنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة أي : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$.
من الفرض :

$$2 \leq u_n \leq 3 \xRightarrow{\text{نطرح } 2} 0 \leq u_n - 2 \leq 1 \xRightarrow{\text{نربع الأطراف}} 0 \leq (u_n-2)^2 \leq 1 \overset{+2}{\Rightarrow} 2 \leq (u_n-2)^2 + 2 \leq 3$$

$\Rightarrow 2 < u_{n+1} < 3$ فالقضية صحيحة .

٢) $u_{n+1} - u_n = (u_n-2)^2 + 2 - u_n = (u_n-2)^2 - (u_n-2) = (u_n-2)((u_n-2)-1)$

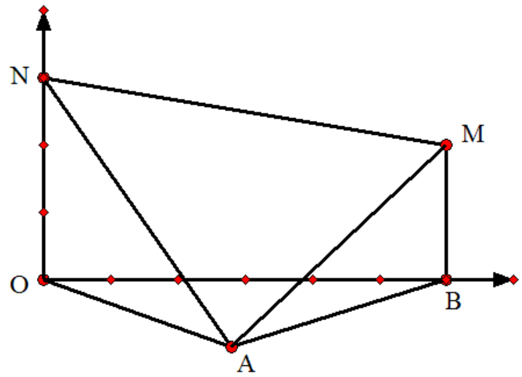
$u_{n+1} - u_n = (u_n-2)(u_n-3)$ من الطلب السابق $2 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow \begin{cases}(u_n-2) \geq 0 \\ (u_n-3) \leq 0\end{cases}$ بالتالي:

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ والمتتالية متناقصة .

٣) المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها حل المعادلة $x = f(x)$

$$x = (x-2)^2 + 2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 2$$



التمرين الثاني: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط:
$M(0,6,2), N(0,0,3), B(0,6,0), A(1,3,0)$. **والمطلوب**

١) اكتب معادلة للمستوي(AMN) .
٢) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN) .
٣) أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

الحل:

١) معادلة المستوي (AMN) من الشكل : $(AMN): ax + by + cz + d = 0$

$A(1,3,0) \in (AMN) \Rightarrow a + 3b + d = 0$

$N(0,0,3) \in (AMN) \Rightarrow 3c + d = 0$

$M(0,6,2) \in (AMN) \Rightarrow 6b + 2c + d = 0$ نختار $c = 6$

$a = 15$, $b = 1$, $d = -18$ بالتالي معادلة المستوي : $(AMN): 15x + y + 6z - 18 = 0$

٢) ناظم المستوي موجه للمستقيم : $\vec{n}(15,1,6)$: والمستوي يمر من $O(0,0,0)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 15t \\ y = t \\ z = 6t \end{cases} , t \in R$$

المستوي المحوري يمر من $I(0,6,1)$ منتصف $[BM]$ والشعاع $\overrightarrow{BM}(0,0,2)$ ناظماً على المستوي :

$0(x-0) + 0(y-6) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow z - 1 = 0$.

التمرين الثالث:

ليكن التابع f المعرف على R . وفق : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$. **المطلوب:**

أولاً: احسب قيمة كل من a , b إذا علمت أن $f(-1) = e$ قيمة حدية للتابع.

ثانياً لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = \lambda\, e^{-x}$. عين قيمة λ إذا علمت أن $f(x) = (x+2)e^{-x}$ حلاً لها .

الحل:

أولاً) $f(-1) = e$ قيمة حدية $-a + b = 1 \Longleftarrow e = (-a+b)e^{+1}$

التابع اشتقاقي على R :$f'(-1) = 0$

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (a - ax - b)e^{-x}$$

$$\Rightarrow 0 = 2a - b$$

بالحل المشترك للمعادلتين نجد : $b = 2 \quad , \quad a = 1$

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

ثانياً) $f(x) = (x+2)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (-1-x)e^{-x}$

نعوض في المعادلة التفاضلية: $(-1-x)e^{-x} + (x+2)e^{-x} = \lambda\, e^{-x}$ نقسم على e^{-x}

$-1 - x + x + 2 = \lambda$ بالتالي $1 = \lambda$ بالتالي : $y' + y = e^{-x}$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z) = z^3 - 2(a + i\sqrt{3})z^2 - 4(a - i\sqrt{3})z + 8$ حيث $a \in R$

المطلوب:

١) احسب العدد a لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة $p(z) = 0$.

٢) بفرض $a = 1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (z-2)Q(z)$.
ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$.

ثانياً : لتكن A و B و C نقاط في المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب :

$a = 2 \quad , \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad c = -1 + i\sqrt{3}$ والمطلوب:

a) أثبت أن : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC .

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل , عين a' , b' , c' التي تمثلها نقاط المستوي $A' \;,\; B' \;,\; C'$ على الترتيب .

الحل:

أولاً:

$z = 2$ حلاً للمعادلة $p(z) = 0$ إذا $p(2) = 0$

$$P(2) = 0 = 8 - 2(a + i\sqrt{3})(4) - 4(a - i\sqrt{3})(2) + 8$$

$$8 - 8a - 8\sqrt{3}i - 8a + 8\sqrt{3}i + 8 = 0$$

$$16 - 16a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$P(z) = z^3 - 2(1 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8$$

$$P(z) = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$$

$z - 2$	$z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4$
	$z^3 - 2(1+i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8$
	$\mp z^3 \pm 2z^2$
	$-2\sqrt{3}iz^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8$
	$\pm 2\sqrt{3}iz^2 \mp 4\sqrt{3}iz$
	$-4z + 8$
	$\pm 4z \mp 8$
	0

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 \\ z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0 \end{cases}$$

$z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$

$\Delta = \left(-2\sqrt{3}i\right)^2 - 4(1)(-4) = -12 + 16 = 4$

$\begin{cases} z_1 = \frac{2\sqrt{3}i+2}{2} = \sqrt{3}i + 1 \\ z_2 = \frac{2\sqrt{3}i-2}{2} = \sqrt{3}i - 1 \end{cases}$ فمجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هو : $S = \{2 \ , \ \sqrt{3}i + 1 \ , \ \sqrt{3}i - 1\}$

ثانياً:

$a = 2 \ , \ b = 1 + i\sqrt{3} \ , \ c = -1 + i\sqrt{3}$ والمطلوب:

a) $\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad , \quad cos\theta = -\frac{1}{2} \quad , sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \frac{|a-b|}{|c-b|} = \frac{AB}{CB} = \left|e^{\frac{2\pi}{3}i}\right| = 1 \Rightarrow AB = CB$ والمثلث ABC متساوي الساقين .

b) $a' = \overline{a} = 2 \quad , \quad b' = \overline{b} = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad c' = \overline{c} = -1 - i\sqrt{3}$

المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = e^{-x}(1 + lnx)$ والتابع g المعرف على I وفق : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - lnx$ **والمطلوب :**

١) ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها
٢) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$. حلاً وحيداً α, ثم تحقق أن $\alpha = 1$.
٣) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .
٤) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
٥) مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٦) في معلم متجانس ارسم الخط C_f .

الحل:

١) $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - lnx$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1 - lnx\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x} - 1 - lnx\right) = +\infty$ $x = 0$ مقارب شاقولي

$g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	$-$	$-$
$g(x)$	‖ ∞ ↘	0 ↘	$-\infty$

٢) $g'(x) < 0$ على I

$0 \in R = g(I)$

فللمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α في I

$g(1) = \frac{1}{1} - 1 - ln1 = 1 - 1 = 0$ إذن $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

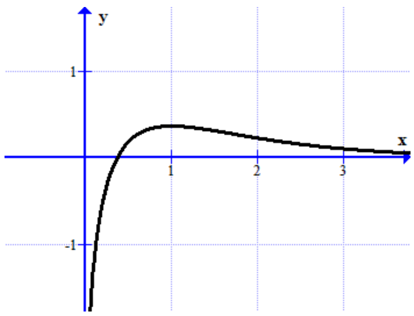
٣) $\lim_{x\to0^+}\left(e^{-x}(1 + lnx)\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1+lnx) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\frac{lnx}{x}.\frac{x}{e^x}\right) = 0+(0)(0) = 0$$

٤) $f'(x) = -e^{-x}(1+lnx)+\frac{1}{x}e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1-lnx\right) = \frac{\frac{1}{x}-1-lnx}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$

٥) إشارة التابع المشتق $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. نستفيد من الجدول السابق :

$x=0$ مقارب شاقولي لـ C_f $\quad$ $y=0$ مقارب افقي لـ C_f بجوار $+\infty$



x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

٦) نقط مساعدة : $\left(1,\frac{1}{e}\right)$, $\left(\frac{1}{e},0\right)$.

- انتهت الأسئلة -

الرياضيات　　امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠٢٢　　الاسم :

(الفرع العلمي – الدورة الأولى)　　الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathcal{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C . **المطلوب :**

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0 \nearrow +2$	

١- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C .

٣- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

٤- ما هي حلول المتراجحة : $f'(x) < 0$.

الحل:

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

٢) $y = 2$ مقارب أفقي لـ C في جوار $+\infty$　　$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C

٣) للمعادلة $f(x) = 0$ حلان مختلفان

٤) حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ هو $x \in]-\infty, 1[\cup]1,2[$

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط $C(0,0,1), B(0,1,0), A(2,0,0)$. **المطلوب:**

١) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. واستنتج $cos(\widehat{BAC})$

٢) إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC , عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة :

$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

الحل:

١) $\overrightarrow{AB}(-2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2)(-2) + (1)(0) + (0)(1) = 4$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{5}.\sqrt{5}.cos(\widehat{BAC}) = 4 \quad \Longrightarrow \quad Cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{5}$$

٢) G مركز ثقل المثلث ABC إذن $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{O}$

حسب المبرهنة : $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$

$\|\overrightarrow{MG}\| = \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\| \Longrightarrow MG = \frac{1}{6}AB$　　$AB = \sqrt{5}$　و　$G\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　مجموعة النقط هي

كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{6}$

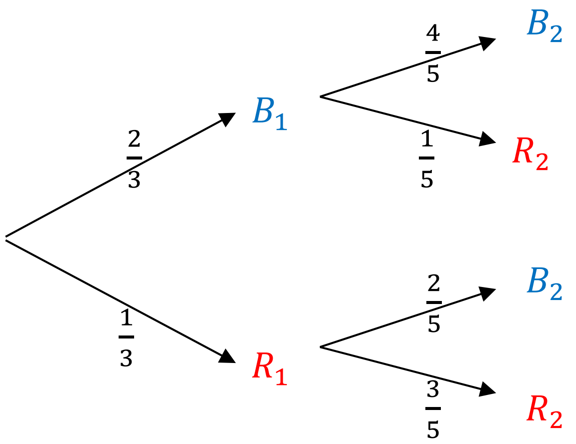
السؤال الثالث: صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة , نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق , ثم نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق , ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق .

الحدث R_1 الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون , الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون.

المطلوب: ١- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة واحسب احتمال الحدث R_2 .

٢- إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء ؟

الحل:



١-

$$P(R_2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{5} + \frac{1}{3}.\frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

٢-

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{3}.\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

السؤال الرابع: ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]\mathbf{0}, +\infty[$ وفق : $f(x) = x + 1 + \frac{sinx}{\sqrt{x}}$.

المطلوب : أثبت أن المستقيم الذي معادلته $d: y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$.

الحل:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - y_d) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(x + 1 + \frac{sinx}{\sqrt{x}}\right) - (x+1)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{\sqrt{x}}$$

$$-1 \leq Sin\,x \leq 1 \xRightarrow{\text{نقسم على}(\sqrt{x}>0)} -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{sinx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right) = 0 \xRightarrow{\text{حسب مبرهنة المقارنة}} \lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{\sqrt{x}} = 0$$

نستنتج أن d مقارب مائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$.

السؤال الخامس : نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الست الآتية بأحد العددين $+1$ أو -1 . **المطلوب:**

١- بكم طريقة يمكن أن نملأ الخانات الستة .

٢- بفرض X متحول عشوائي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الستة بعد ملئها، عيّن مجموعة قيم X .

٣- بكم طريقة يمكن ملء الخانات الستة ليكون مجموع الأعداد يساوي الصفر .

الحل:

١) يمكن أن نملأ الخانات الستة بـ $(2)^6 = 64$ طريقة

٢) $I = \{0\,, 2\,, -2\,, 4, -4\,, 6\,, -6\}$

٣) ليكون مجموع الأعداد يساوي الصفر $\binom{6}{3} = 20$

السؤال السادس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$: **والمطلوب:**

عين العددين b و a ليمر الخط البياني للتابع بالنقطة $(0,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0) = 4$.

الحل:

$$f(0) = 3 \Longrightarrow f(0) = b = 3$$

$$f'(x) = a - \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$f'(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad 4 = a - b \quad \Longrightarrow \quad a = 7$$

$$f(x) = 7x + \frac{3}{x+1}$$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (٧٠درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – ٦٠ درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق: $u_0 = \frac{5}{2} \quad , \quad u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$. **المطلوب:**

١) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n .

٢) أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$

٣) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

٤) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها .

الحل:

١) $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 = u_n^2 - 4u_n + 4 + 2 = (u_n - 2)^2 + 2$

نرمز للقضية $(2 \leq u_n \leq 3)$ بالرمز $E(n)$

لنبرهن أن $E(0)$ صحيحة

$3 \geq \frac{5}{2} = u_0 \geq 2$ محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة . أي $2 \leq u_n \leq 3$

لنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة أي $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

من الفرض لدينا : $2 \leq u_n \leq 3$

$$2 \leq u_n \leq 3 \xRightarrow{\text{نطرح 2}} 0 \leq u_n - 2 \leq 1 \xRightarrow{\text{نربع الأطراف}} 0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1 \xRightarrow{+2}$$

$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3 \quad \Longrightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة . إذن $2 \leq u_n \leq 3$

٢) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 5u_n + 6 \ = (u_n - 3)(u_n - 2) =$

٣) من الطلب الأول برهنا أن $2 \leq u_n \leq 3$ بالتالي $u_n - 3 \leq 0$ و $0 \leq u_n - 2$

إذن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2) \leq 0$ فالمتتالية متناقصة .

٤) المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة وتكون نهايتها حل المعادلة $x = f(x)$ حيث

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

$$x^2 - 4x + 6 = x \;\Longrightarrow\; x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

التمرين الثاني: ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$. **المطلوب:**

١- أثبت أن f مستمر عند الصفر .

٢- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسّر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً .

٣- بين أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته .

٤- اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$.

الحل:

١) f مستمر عند الصفر $\Longleftarrow$ $f(0)=0$, $\lim\limits_{n\to 0} f(x)=\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)=0$

٢) $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)=0$ $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=$ التابع اشتقاقي عند الصفر $f'(0)=0$ فيوجد مماس أفقي لـ C عند الصفر .

٣) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)=1$

$y=1$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$

٤) $f'(1)=1$, عندما $x>0$: $f'(x)=\frac{x-\ln x-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$, $f(1)=1$

معادلة المماس : $y=x$ $\Longleftarrow$ $y=1(x-1)+1$

$f(1.1)\approx f(1)+f'(1).(0.1)\approx 1.1$

التمرين الثالث : جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $\omega=-3+4i$, ثم حل في C المعادلة :

$$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$$

الحل: نفرض أن الجر التربيعي لـ $\omega=-3+4i$ هو $z=x+yi$ عندئذ :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=\sqrt{9+16}=5 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \quad , \quad y=2 \Rightarrow z=1+2i \\ x=-1 \quad , \quad y=-2 \Rightarrow z=-1-2i \end{cases}$$

حل المعادلة : $z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$

$\Delta=4(1+i)^2-4(1)\left(i+\frac{3}{4}\right)=8i-4i-3=-3+4i$ وجذر Δ من الطلب السابق

$$\begin{cases} \sqrt{\Delta}=1+2i \\ \sqrt{\Delta}=-1-2i \end{cases}$$

حلول المعادلة :
$$\begin{cases} z_1=\frac{-2(1+i)+1+2i}{2}=-\frac{1}{2} \\ z_1=\frac{-2(1+i)-1-2i}{2}=-\frac{3}{2}-2i \end{cases}$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقطة $A(1,1,2)$, والمستويان Q و P: $P:x-y+2z-1=0$, $Q:2x+y+z+1=0$ **والمطلوب:**

١) أثبت أن المستويين Q و p متقاطعان بفصل مشترك d .
٢) اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d .
٣) اكتب معادلة للمستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين Q و P .
٤) جد احداثيات النقطة B . الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R .
٥) احسب بعد النقطة A عن المستقيم d .
٦) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q .

الحل:

١) $\vec{n}_P(1,-1,2)$ ، $\vec{n}_Q(2,1,1)$ $\Longrightarrow \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{1}$ فالشعاعين غير مرتبطان خطياً والمستويين متقاطعان بالمستقيم d .

٢) نفرض أن $z = t$ نعوض بالمعادلتين $\begin{matrix} x-y=-2t+1 \\ 2x+y=-t-1 \end{matrix}$ بالجمع $3x = -3t$ بالتالي : $x = -t$

وتكون $y = t - 1$ ويكون التمثيل الوسيطي لـ d $\quad d:\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + t \quad , t \in R \\ z = t \end{cases}$

٣) يعامد كلا المستويين إذن يعامد الفصل المشترك d فموجه المستقيم يكون ناظماً على المستوي $\vec{n}_R(-1,1,1)$

معادلة المستوي R : $-(x-1) + y - 1 + z - 2 = 0$ بالإصلاح $R: -x + y + z - 2 = 0$

٤) نعوض التمثيل الوسيطي لـ d في معادلة المستوي R : $-(-t) + (-1+t) + t - 2 = 0$

$t = 1 \quad \Longrightarrow \quad B(-1,0,1)$

٥) بعد A عن المستقيم d هو نفسه AB : $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}$

٦) نصف قطر الكرة هو بعد A عن المستوي Q : $r = dist(A,Q) = \frac{|2(1)+(1)+(2)+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{6}$

معادلة الكرة : $S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$: . **المطلوب :**

١) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .

٢) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ .

٣) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها , ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين في R أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1,0]$.

٤) ارسم Δ و C , ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب وC و Δ والمستقيم $x = 1$.

٥) استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف على R وفق $g: x \longmapsto -e^{2x} + 2x + 2$

الحل:

١) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-2x} + 2x - 2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-2x} + 2x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x}(1 + 2xe^{2x} - 2e^{2x}) = +\infty$

٢) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim\limits_{x \to \infty} (e^{-2x}) = 0$ إذن Δ مقارب مائل لـ C بجوار ∞

$f(x) - y_\Delta = e^{-2x} > 0$ إذن C فوق Δ

٣) $f'(x) = -2e^{-x} + 2 = 2(-e^{-2x} + 1)$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow -e^{-2x} + 1 = 0 \Longrightarrow e^{-2x} = 1 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

$\Longrightarrow f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

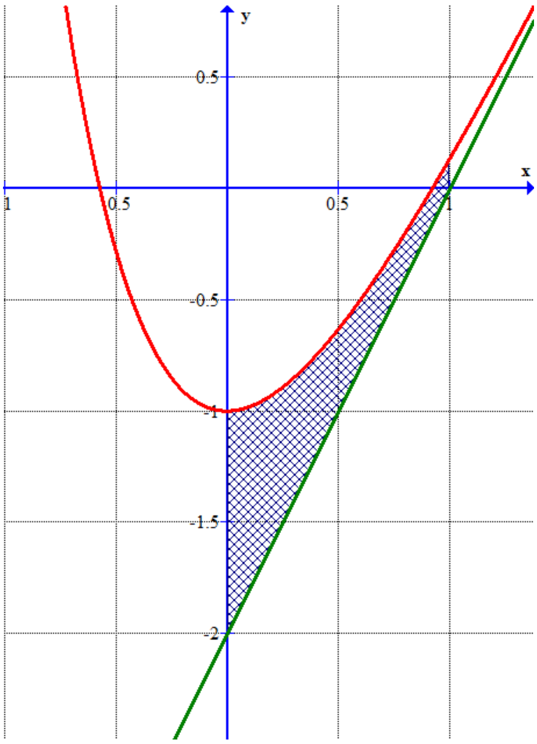
$f(]-\infty,0[) =]-\infty,-1[\ni 0$ و $f'(x) < 0$ على المجال $]-\infty,0[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$

$f(]0,+\infty[) =]-\infty,-1[\ni 0$ و $f'(x) > 0$ على المجال $]0,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$ فللمعادلة حلان مختلفان .

$$f(-1) = e^2 - 4 > 0 \quad , \quad f(0) = -1 < \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 \in]-1,0[$$

٤) الرسم:

المساحة المطلوبة :



$$S = \int_0^1 (f(x) - y_\Delta)\, dx = \int_0^1 (e^{-2x})\, dx$$

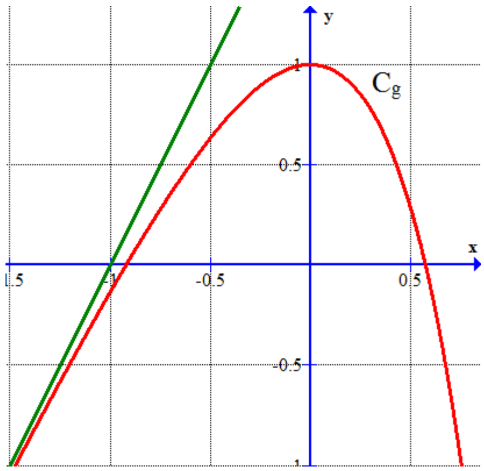
$$S = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-e^{-2}}{2}$$

٥) $g(x) = -e^{2x} + 2x + 2 =$

$$= -(e^{-2(-x)} + 2(-x) - 2)$$

$$= -f(-x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لـ O



- انتهت الأسئلة -

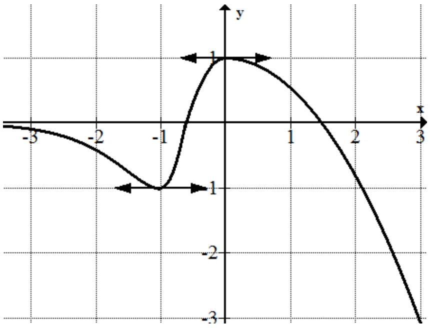
الرياضيات امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة ٢٠٢٢ الاسم :

(الفرع العلمي – الدورة الثانية) الرقم :

الدرجة العظمى: ستمئة

المدة : ثلاث ساعات

أولاً - أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (٤٠ درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: تأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ المطلوب:

١- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f .

٣- اكتب مجموعة حلول المتراجحة : $f'(x) > 0$.

٤- عين القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها .

الحل:

١) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

٢) معادلة المقارب الأفقي $y = 0$ بجوار $-\infty$

٣) حلول المتراجحة $f'(x) > 0$ هي $x \in]-1,0[$

٤) $f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى , $f(0) = 1$ قيمة حدية كبرى .

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$, $B(1,-1,1)$, **المطلوب:**

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA = MB$ وما طبيعة المجموعة S.

الحل:

$$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$$

$S: 2x - 4y + 4z - 1 = 0$ وتمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

السؤال الثالث: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x) = ln(2 + sin\,x)$. **المطلوب :**

١- احسب $g'(x)$ و $g'(0)$.

٢- استنتج $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln(2+sin\,x)-ln2}{x}$

الحل:

١) g اشتقاقي على R $\quad g'(x) = \frac{cos\,x}{2+sin\,x} \quad , \quad g'(0) = \frac{1}{2}$

٢) $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln(2+sin\,x)-ln2}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0) = \frac{1}{2}$

السؤال الرابع: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\begin{cases} ln(x) + ln(y) = ln\,(6) \\ ln(x+y) = ln\,(5) \end{cases}$$

الحل:

شرط الحل : $y > 0$, $x > 0$.

$\begin{cases} ln(xy) = ln\,(6) \\ ln(x+y) = ln\,(5) \end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases}$

وحلهما : إما $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ والحلان مقبولان .

السؤال الخامس: ليكن $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx$, $J = \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4}dx$ **والمطلوب:**

احسب I ثم $I + J$ واستنتج J .

الحل:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx = I = \int_0^1 \frac{4x^3}{4(1+x^4)}dx = \frac{1}{4}[ln(1+x^4)]_0^1 = \frac{1}{4}(ln2 - ln1) = \frac{ln2}{4}$$

$$I + J = J = \int_0^1 \frac{x^7+x^3}{1+x^4}dx = \int_0^1 \frac{x^3(x^4+1)}{1+x^4}dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$J = (I+J) - (I) = \frac{1}{4} - \frac{ln2}{4} = \frac{1-ln2}{4}$$

السؤال السادس: لتكن C دائرة مركزها O, رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة, لتكن $S = \{A_1\,, A_2\,, \dots\,, A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار . **والمطلوب :**

١- ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر s ؟
٢- ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر s ؟
٣- كم مستطيل رؤوسه من عناصر s ؟

الحل:

١) عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر s يساوي $220 = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = \binom{12}{3}$
٢) عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر s يساوي $495 = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = \binom{12}{4}$
٣) عدد الأقطار 6 , و كل قطرين يشكلان مستطيل وعدد المستطيلات يساوي $15 = \frac{6\times5}{2\times1} = \binom{6}{2}$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (٧٠درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – ٦٠ درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$, $(v_n)_{n\geq1}$:

$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$, $v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$. **المطلوب:**

١) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة و $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة .
٢) استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$, $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان .
٣) أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ ثم احسب $\lim_{n\to\infty} u_n$ واستنتج $\lim_{n\to\infty} v_n$.

الحل:

١) $u_{n+1}-u_n=\left(u_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{5^{n+1}}>0$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً

$$v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(u_n+\frac{1}{2^n}\right)=(u_{n+1}-u_n)+\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{1}{5^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-5^{n+1}}{2^{n+1}.5^{n+1}}<0$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

٢) الشرط الأول محقق من الطلب السابق بقي برهان الشرط الثاني

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n-u_n-\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$ لان $-1<q=\frac{1}{2}<+1$

فالمتتاليتين متجاورتين

٣) $u_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}$ مجموع n حدا متعاقباً من متتالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{5}$ وأساسها $\frac{1}{5}$ فمجموع حدودها هو $u_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}==\frac{1}{5}\left(\frac{\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{5}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}$ لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)=0$

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\left(u_n+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

أو نقول المتتاليتين متجاورتين فلهما نفس النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\frac{1}{4}$

التمرين الثاني: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

١- جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3=1$, واكتبه بالشكل الجبري .

٢- إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $\omega=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}$

a) أثبت أن $|\omega|=1$.

b) من أجل $\beta=1$, أثبت أن $\omega^{12}=1$

٣- عين مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق أن $|z-2+i|=5$

الحل:

١) نفرض أن $j=re^{\theta i}$ عندئذ $\left(re^{\theta i}\right)^3=1=e^{0i}\Longrightarrow r^3e^{3\theta i}=e^{0i}$

بالمطابقة نجد : $r^3=1\Longrightarrow r=1$

$$3\theta=0+2\pi k\Longrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi k\Longrightarrow\begin{cases}k=0\Longrightarrow\theta=0\Longrightarrow j=1\\ k=1\Longrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi\Longrightarrow j=e^{\frac{2}{3}\pi i}\\ k=2\Longrightarrow\theta=\frac{4}{3}\pi\Longrightarrow j=e^{\frac{4}{3}\pi i}\end{cases}$$

٢) $\omega=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}\Longrightarrow|\omega|^2=\left(\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}\right)\overline{\left(\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}\right)}$

$$|\omega|^2=\left(\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}\right)\left(\frac{\beta-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i\beta}\right)=\frac{\beta^2+3}{3+\beta^2}=1\Longrightarrow|\omega|=1$$

أو : $\omega=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}=\frac{i(-i\beta+\sqrt{3})}{\sqrt{3}-i\beta}=i\Longrightarrow|\omega|=1$

من أجل $\beta=1$ نكتب

$$\omega=i\Longrightarrow\omega^{12}=i^{12}=(i^4)^6=1^6=1$$

٣) $|z-2+i| \ =5 \ \Leftrightarrow |z-(2-i)| \ =5$
مجموعة نقط المستوي هي دائرة مركزها $\Omega(2,-1)$ ونصف قطرها $r=5$

التمرين الثالث:

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة , واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و (1) , نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة , ونعرف المتحولين العشوائيين Y و X كالآتي :

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة . Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين , **والمطلوب:**

١- اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي .
٢- اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي .
٣- اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) , أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتماليا ؟ ولماذا ؟

الحل:

نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي دون الإعادة عدد عناصر فضاء العينة إذا $P_3^2=6$

١) $X(\Omega)=I=\{1,2\}$

$p(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{2}{3}$

$p(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

x	1	2
$P(x=K)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

٢) $Y(\Omega)=J=\{1,2,3\}$

$p(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$

$p(Y=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$

$p(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$

y	1	2	3
$P(Y=K)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

٣) قانون الزوج

X \ Y	1	2	3	قانون X
1	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
2	$\frac{2}{6}$	0	0	$\frac{2}{6}$
قانون Y	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	

X و Y غير مستقلان احتمالياً لأن $p(X=1).P(Y=1)=\frac{2}{6}.\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\neq P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)=0$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, نتأمل النقاط: $A(2,-2,2)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,1)$, $D(0,0,1)$ **والمطلوب:**

١) تحقق أن النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة .

٢) أثبت أن : $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD) .

٣) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD)

٤) عين احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

٥) اكتب معادلة للكرة S التي تقبل $[AD]$ قطراً لها.

الحل:

١) $\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ وهما غير مرتبطان خطياً لأن $\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{-1}$ فالنقاط ليست على استقامة واحدة .

٢) نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (BCD) إذن

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{BD} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BD}=0 \Rightarrow -a-b+c=0\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow -b+c=0\end{cases} \text{إذن} \Rightarrow (\text{نضع } C=1) \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$$

$\vec{n}(0,1,1)$ ناظماً على المستوي (BCD) فمعادلة المستوي

$$0(x-1)+1(y-1)+1(z-0)=0 \Rightarrow (BCD): y+z-1=0$$

يمكن الحل بطرق أخرى .

٣) ناظم المستوي هو موجه للمستقيم :
$$\Delta:\begin{cases}x=2\\ y=-2+t \quad t\in R\\ z=2+t\end{cases}$$

٤) بما أن المستقيم يعامد المستوي فتكون K تقاطع Δ مع (BCD) :

$$-2+t+2+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow K(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$$

٥) الكرة S التي تقبل $[AD]$ قطراً لها فهي مجموعة نقط الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}=0$

$$\overrightarrow{MA}(2-x,-2-y,2-z) \quad ,\overrightarrow{MD}(-x,-y,1-z)$$
$$(2-x)(-x)+(-2-y)(-y)+(2-z)(1-z)=0$$
$$x^2-2x+1-1+y^2+2y+1-1+z^2-3z+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+2=0$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,1[$ وفق : $f(x)=e^x+ln(1-x)$. وليكن g التابع المعرف على R وفق: $g(x)=(1-x)e^x-1$ **والمطلوب :**

١- ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x)\leq 0$ مهما تكن $x\in R$.

٢- تحقق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

٣- اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

٤- في معلم متجانس ارسم المستقيم T , ثم ارسم C الخط البياني للتابع f .

الحل:

١) $g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$ الإشارة من إشارة $-x$

x	∞			0			$+\infty$
$g'(x)$		+	+	0	−	−	
$g(x)$			↗	0	↘		

من الجدول نجد أن $g(x) \leq 0$

٢) $f'(x) = e^x + \frac{-1}{1-x} = \frac{e^x(1-x)-1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$

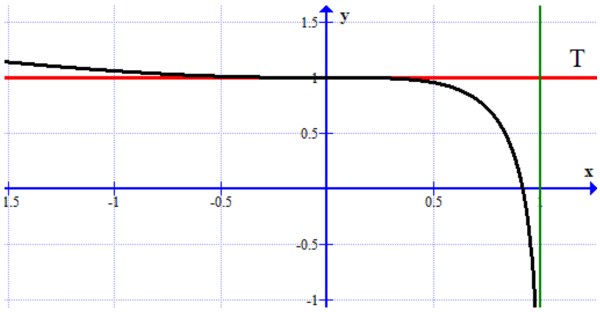
$\lim_{x \to 1^-}(e^x + ln(1-x)) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty}(e^x + ln(1-x)) = \infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C

$1 - x > 0$ و $g(x) < 0$ إذن $f'(x) < 0$

x	$-\infty$					1
$f'(x)$	−	−	−	−	−	‖
$f(x)$	∞	↘	↘	↘	$-\infty$	‖

٣) $T: y = 1 \quad f'(x) = 0 \quad , \quad f(0) = 1$



- انتهت الأسئلة -