المتتاليات

تعريف المتتالية: هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية N او اية مجموعة جزئية غير منتهية منها من الشكل $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\dots\}$ نرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ ونسمي u_n حد المتتالية ذا الدليل n او الحد العام.

ملاحظة (1): للمتتالية عدد لا نهائي من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود.

ملاحظة (2): يقابل تعريف المتتالية $u : N \to R : n \to u_n$ تعريف التابع $f : D \to R : x \to f(x)$

ملاحظة (3): يجب التمييز بين المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وبين الحد العام u_n الذي هو عدد

طرق توليد متتالية

1. تعريف صريح للحد العام u_n :
أي يعطينا u_n بعلاقة بدلالة n تفيد في حسابه.
2. تعريف المتتالية بالتدريج:
أي يحسب الحد ذا الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته.

المتتاليات المطردة

بفرض $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية فإنه أياً كان $n \geq n_0$ نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ انها:

1. متتالية متزايدة تماماً $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$
2. متتالية متزايدة $\Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$
3. متتالية متناقصة تماماً $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$
4. متتالية متناقصة $\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$
5. متتالية ثابتة $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n$

ملاحظة: اي متتالية تحقق أحد الشروط السابقة نطلق عليها اسم متتالية مطردة، ويوجد متتاليات غير مطردة.

كيف ندرس إطراد متتالية

1. دراسة إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n > 0$ فالمتتالية متزايدة تماماً.	$u_{n+1} - u_n < 0$ فالمتتالية متناقصة تماماً.

2. مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد (1) بشرط حدود المتتالية موجبة تماما:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.

3. دراسة إطراد التابع f في حال كون المتتالية معرفة بالصيغة $u_n = f(n)$
نشتق التابع $f(x)$ ونميز ما يلي:
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة تماماً.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة تماماً.
4. إثبات التزايد والتناقص بالتدريج:

نهاية متتالية

النهاية حسب التعريف

① $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\iff |u_n - \ell| < \varepsilon$

② إذا كان $n > A$ فإن $u_n > M$

ملاحظات:

المتتالية متقاربة من $\ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

المتتالية تتباعد إلى $+\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

المتتالية تتباعد إلى $-\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

متتالية هندسية أساسها q

$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

$q < -1$ ليس للمتتالية نهاية

$q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$ المتتالية ثابتة

تقارب المتتاليات المطردة:

1) نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M من أجله يكون $u_n \leq M$ أيا كان $n \in N$ وتسمى M عنصر راجح

2) نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي m من أجله يكون $u_n \geq m$ أيا كان $n \in N$ وتسمى m عنصر قاصر

3) نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأدنى معا.

مبرهنات:

1) كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي إلى $+\infty$ (متباعدة)

2) كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى $-\infty$ (متباعدة)

3) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة.

4) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة

المتتاليات المتجاورة:

نقول أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$ أنهما متجاورتان إذا وفقط إذا تحقق:

1) إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - t_n) = 0$

ملاحظات:

① كل متتالية متقاربة و حدودها موجبة نهايتها عدد حقيقي موجب (أو معدوم)

② إذا كان لدينا متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و بفرض $u_n = f(n)$ فإن تزايد (أو تناقص) f يقتضي تزايد (أو تناقص) $(u_n)_{n\geq 0}$

③ إذا كان لدينا متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = f(u_n)$ فإن تزايد (أو تناقص) f لا يقتضي بالضرورة تزايد (أو تناقص) $(u_n)_{n\geq 0}$.

المتتاليات

إثبات صحة خاصة بالتدريج (الاستقراء الرياضي)

لبرهان صحة خاصة $E(n)$ متعلقة بعدد طبيعي n نتبع الخطوات الآتية:

1. نثبت صحة الخاصة من أجل أول قيمة لـ n
2. نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل أي عدد طبيعي n
3. نبرهن صحة الخاصة من أجل $n+1$

إعداد المدرس

خلدون سيروان

0932791896

المتتالية الحسابية

معيار المتتالية الحسابية:

$$u_{n+1} - u_n = r \left(\text{ثابت}\right)$$

الحد العام بدلالة n, u_0:

$$u_n = u_0 + nr$$

الحد العام بدلالة m, n:

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية:

$$S = \left(\text{عدد الحدود}\right)\left[\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right]$$

خاصة: بفرض a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$a = a$

$b = a + r$

$c = b + r = a + 2r$

المتتالية الهندسية

معيار المتتالية الهندسية:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \left(\text{ثابت}\right)$$

الحد العام بدلالة n, u_0:

$$u_n = u_0 . q^n$$

الحد العام بدلالة m, n:

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$

مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية:

$$S = \left(\text{الحد الأول}\right)\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

خاصة: بفرض a, b, c ثلاث حدود متعاقبة وموجبة من متتالية هندسية فإن:

$$b^2 = ac$$

$a = a$

$b = aq$

$c = bq = aq^2$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2}$

$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

النهايات

حالات عدم التعيين

$\frac{0}{0}$

2. التابع الكسري الحدودي:

البسط والمقام دوال صحيحة، نحلل البسط المقام ونختصر ثم نعوض.

3. التابع الكسري الجذري:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر فنحصل على مطابقة من الشكل

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

4. التابع المثلثي:

نحولها للشكل: $\leftarrow \frac{\sin\theta}{\theta}$

$\leftarrow \frac{\theta}{\sin\theta}$

5. التابع اللوغاريتمي:

نحولها للشكل $\leftarrow \frac{\ln(1+x)}{x}$

$\frac{\infty}{\infty}$

1. التابع الكسري الجذري:

نخرج x^2 عامل مناسب من تحت الجذر.

$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x & +\infty \\ -x & -\infty \end{cases}$

ملاحظة: إذا التمرين يحوي فقط $\sqrt{x}$ نخرج $\sqrt{x}$ او x او x^2 عامل مناسب من جميع الحدود

1. التابع اللوغاريتمي:

نخرج $\ln x$ أو x عامل مناسب فنحصل على $\frac{\ln x}{x}$ أو $\frac{x}{\ln x}$

تذكر ان : $\ln x < x$

$\infty - \infty$

1. التابع الجذري ± الصحيح:

نربع الحد الأعلى درجة خارج الجذر ونقارنه مع الحد الأعلى درجة داخل الجذر ونميز حالتين:

__اولاً:__ (متشابهان) نضرب بالمرافق ونقسم عليه.

__ثانياً:__ (غير متشابهان) نخرج عامل مناسب.

2. التابع اللوغاريتمي:

نخرج $\ln x$ او x أو نستخدم خواص اللوغاريتم

$\ln a + \ln b = \ln(a.b)$

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$r\ln a = \ln a^r$

$x = \ln e^x \quad : x \in R$

$0.\infty$

1. التابع اللوغاريتمي:

$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0^-$

2. يمكن رد هذه الحالة من عدم التعيين إلى إحدى الحالات السابقة وذلك حسب ورودها في التمرين.

مبرهنات المقارنة

__مبرهنة (1):__

$\underset{\ell}{\underset{\Downarrow}{g(x)}} \le \underset{\ell}{\underset{\Downarrow}{\underset{\Downarrow}{f(x)}}} \le \underset{\ell}{\underset{\Downarrow}{h(x)}}$

__مبرهنة (2):__

$|f(x) - \ell| \le g(x)$

إذا كانت $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

فإن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$

__مبرهنة (3):__

$\underset{+\infty}{\underset{\Downarrow}{\underset{\Downarrow}{f(x)}}} \ge \underset{+\infty}{\underset{\Downarrow}{g(x)}}$

$\underset{-\infty}{\underset{\Downarrow}{\underset{\Downarrow}{f(x)}}} \le \underset{-\infty}{\underset{\Downarrow}{g(x)}}$

__ملاحظة:__ حين نرى $\sin\infty$ او $\cos\infty$ نستخدم الإحاطة.

$-1 \le \begin{matrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix} \le +1$

$0 \le \begin{matrix} \sin^2\theta \\ \cos^2\theta \end{matrix} \le +1$

المقاربات

مستقيم مقارب يوازي $\acute{x}x$ (أفقي)

معادلته $\boxed{y = b}$

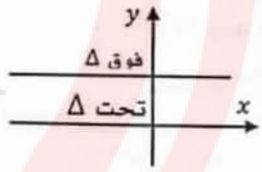
نحصل عليه من دراسة نهاية الدالة f عندما $x \to \pm\infty$

الوضع النسبي:

ندرس إشارة التركيب $f(x) - y_\Delta$

c فوق المقارب $f(x) - y_\Delta > 0 \Rightarrow$

c تحت المقارب $f(x) - y_\Delta < 0 \Rightarrow$



مستقيم مقارب يوازي $\acute{y}y$ (شاقولي)

معادلته $\boxed{x = a}$

نحصل عليه من دراسة نهاية الدالة f عندما $x \to a$

الوضع النسبي:

c يقع على يسار مقاربه

c يقع على يمين مقاربه

مقارب مائل (لا يوازي أحد المحورين)

معادلته $\boxed{\Delta: y = ax + b}$

معادلته معلومة (معطاة)

<u>السؤال:</u> اثبت ان $\Delta: y = ax + b$ مقارب لـ C

لكي نثبت ان Δ مقارب مائل يجب ان نتحقق:

يطلب إيجاد معادلته

<u>السؤال:</u> اثبت ان التابع f يقبل مقارب مائل.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

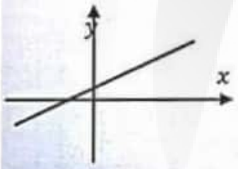
$\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل لـ C

الوضع النسبي:

ندرس إشارة التركيب $f(x) - y_\Delta$

c فوق Δ $\quad f(x) - y_\Delta > 0$

c تحت Δ $\quad f(x) - y_\Delta < 0$



ملاحظات لمدرسا المادة حسان البيطار وخلدون سيروان:

1. كل مقارب معادلته تحوي مجهولين y, x هو مقارب مائل.
2. كل مقارب معادلته $\boxed{y = \cdots\cdots}$ لمعرفة الوضع النسبي نحتاج دراسة إشارة التركيب $f(x) - y_\Delta$.
3. المقارب الذي معادلته $\boxed{x = \cdots\cdots}$ لا يحتاج دراسة الوضع النسبي يكفي معرفة ان x تسعى نحو a بقيم أكبر أو أصغر.
4. يمكن استخراج معادلة المقارب المائل من القسمة الإقليدية.

أوضاع مستقيمين في الفراغ

ليكن d مستقيم موجهه $\vec{u}$ و $\acute{d}$ مستقيم موجهه $\vec{u'}$

- $\vec{u'}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً
  - $\boxed{d \parallel \acute{d}}$: لا يوجد حلول مشتركة
  - $\boxed{d , \acute{d}}$ منطبقان : يوجد عدد لا نهائي من الحلول
- $\vec{u'}, \vec{u}$ غير مرتبطان خطياً
  - $\boxed{d , \acute{d}}$ متقاطعان : يوجد حل وحيد (و هو نقطة التقاطع)
  - $\boxed{d , \acute{d}}$ متخالفان : لا يوجد حلول مشتركة

الحل المشترك لمستقيمين : نعوض المعادلات الوسيطية لـ $\acute{d}$ في المعادلات الوسيطية لـ d (بعد تبديل الوسيط في $\acute{d}$ حتى يكون مختلفاً عن الوسيط في d نجعله مثلاً s)

و نحل معادلتين من المعادلات الثلاثة الناتجة و نوجد قيمة t , s ثم نعوض في المعادلة الثالثة ونميز الحالات اللأتية :

- إذا حصلنا على معادلة محققة نكون حصلنا على حلول للجملة .
- إذا حصلنا على معادلة مستحيلة $(1 = 0$ مثلاً) عندئذٍ لا يوجد حلول .

أوضاع مستويين

ليكن P مستو ناظمه $\vec{n}$ و $\acute{P}$ مستو ناظمه $\vec{n'}$ ، بحيث :

$$P: ax+by+cz+d=0$$
$$\acute{P}: \acute{a}x+\acute{b}y+\acute{c}z+\acute{d}=0$$

- $\vec{n'}, \vec{n}$ مرتبطان خطياً
  - $\boxed{P \parallel \acute{P}}$: $\frac{a}{\acute{a}} = \frac{b}{\acute{b}} = \frac{c}{\acute{c}}$
  - $\boxed{P , P'}$ منطبقان : $\frac{a}{\acute{a}} = \frac{b}{\acute{b}} = \frac{c}{\acute{c}} = \frac{d}{\acute{d}}$
- $\vec{n'}, \vec{n}$ غير مرتبطان خطياً
  - $\acute{P} , P$ متقاطعان بمستقيم : نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك d، و ذلك بإيجاد مجهولين بدلالة المجهول الثالث نفرض المجهول الثالث t وعندها نحصل على المعادلات الوسيطية .
  - حالة خاصة : $P \quad \acute{P} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

حلدون سيروان 0932791896
حسان البيطار 0933756454

المعادلات الوسيطية لمستقيم

الحالة الأولى:

المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ويقبل $\vec{u}(a, b, c)$ شعاعاً موجهاً له.

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} : t \in R$$

الحالة الثانية:

المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من نقطتين A, B حيث:

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ عندها يكون $\overrightarrow{AB}$ هو نفسه شعاع التوجيه $\vec{u}$

اي: $\vec{u}(a, b, c) = \overrightarrow{AB}$

$$d: \begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} : t \in R$$

الحالة الثالثة:

المعادلات الوسيطية للفصل المشترك الناتج عن تقاطع مستويين:

$$d: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة نعبر مثلاً عن y و x بدلالة z وبفرض $z = t$ نحصل على جملة المعادلات الوسيطية للفصل المشترك d

التمثيلات الوسيطية

مستقيم (AB)	قطعة مستقيمة $[AB]$	نصف مستقيم $[AB)$
$t \in R$	$t \in [0,1]$	$t \in [0, +\infty[$

حسان البيطار 0933756454
خلدون سيروان 0932791896

أوضاع مستقيم و مستوي

ليكن d مستقيم موجهه $\vec{u}$ و P مستو ناظمه $\vec{n}$

- $\vec{u},\vec{n}$ متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0$
  - d يوازي P — لا يوجد حلول مشتركة
  - d محتوى في P (انطباق) — يوجد عدد لا نهائي من الحلول
- $\vec{u},\vec{n}$ غير متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$
  - $\Downarrow$ d قاطع لـ P بنقطة — نوجد نقطة التقاطع بالحل المشترك

الحل المشترك هو تعويض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي P

و نميز الحالات :

- يوجد قيمة للوسيط $t \Leftarrow$ حل وحيد $\Leftarrow$ نعوض t في المعادلات الوسيطية فنحصل على نقطة التقاطع (أي: المستقيم d قاطع للمستوي P)
- المعادلة مستحيلة الحل (مثلاً $0=1$) $\Leftarrow$ لا يوجد حلول مشتركة (أي: $P \backslash\backslash d$)
- يوجد عدد لا نهائي من الحلول (مثلاً $1=1$) ، (أي: d محتوى في P)

تقاطع ثلاث مستويات

P_3 , P_2 , P_1 ثلاث مستويات نواظمها على الترتيب $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ عندئذٍ :

- $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ ليست مرتبطة خطياً مثنى مثنى
  - المستويات متقاطعة بمستقيم: يوجد للمستويات عدد غير منته من الحلول. نوجد من معادلتين معادلة الفصل المشترك
  - المستويات متقاطعة بنقطة: يوجد للمعادلات حل وحيد. نوجد نقطة التقاطع
  - المستويات ليست متقاطعة: جملة المعادلات مستحيلة الحل
- يوجد ناظمين على الأقل مرتبطين خطياً
  - $\Downarrow$ المستويات الثلاثة ليست متقاطعة

ملخص الأعداد المركبة

ملاحظة: عند حل المعادلة ، باستخدام Δ إذا كان من الشكل

$\Delta = a + bi$ عدد عقدي

نوجد الجذران التربيعيان لـ Δ

$\sqrt{\Delta_1} = x_1 + iy_1 \quad \sqrt{\Delta_2} = x_2 + iy_2$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} \qquad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a}$$

تحليل $aZ^2 + bZ + c$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

نوجد Z_2, Z_1 بحل المعادلة ثم نستخدم القانون:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

إيجاد معادلة من الشكل

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية و Z_1 هو جذر للمعادلة عندئذ يكون $Z_2 = \overline{Z_1}$ ثم نكتب المعادلة بالشكل:

$$Z^2 - \left(\underbrace{Z_1 + Z_2}_{\text{مجموع}}\right)Z + \underbrace{Z_1 . Z_2}_{\text{جداء}} = 0$$

قانون

ملاحظة:

مجموع الجذرين $Z_1 + Z_2 = \dfrac{-b}{a}$

جداء الجذرين $Z_1 . Z_2 = \dfrac{c}{a}$

---

٣. معادلة من الدرجة الأولى

(تحوي مجهول واحد Z او $\overline{Z}$)

① تحوي Z فقط : و بالعزل نوجد قيمة Z

② تحوي $\bar{Z}$ فقط: وبالعزل نتوصل لـ $\bar{Z}$ و بأخذ المرافق نحصل على Z

٤. معادلة تحوي Z و $\overline{Z}$ معاً

(المطلوب إيجاد قيمة المجهول Z)

① نعوض في المعادلة كل $Z = x + iy$ و $\bar{Z} = x - iy$

② بالنشر و المطابقة بين الطرفين نحصل على : y و x

٥. جملة معادلتين بمجهولين Z و $\grave{Z}$

حيث Z و $\grave{Z}$ عددان عقديان نستخدم طريقة التعويض أو الجمع.

طرق حل المعادلات في C

١. $aZ^2 + bZ + c = 0$

إما بالإتمام إلى مربع كامل بشرط $a = 1$ نضيف ونطرح مربع نصف امثال Z.

او باستخدام الدستور $\Delta = b^2 - 4ac$.

♥ $\Delta > 0$

ومنه للمعادلة جذران مختلفان.

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

♥ $\Delta = 0$

ومنه للمعادلة جذر مضاعف $Z = \dfrac{-b}{2a}$

♥ $\Delta < 0$

ومنه للمعادلة جذران مترافقان تخيليان، نوجد $\sqrt{-\Delta}$.

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

٢. عامل مشترك أو مطابقة:

♥ $aZ^2 + bZ = 0 \rightarrow Z(aZ + b) = 0$

♥ $\underbrace{Z^3 \pm a^3 = 0}_{\text{مطابقة تكعيبية}} \qquad \underbrace{Z^2 - a^2 = 0}_{\text{مطابقة تربيعية}}$

♥ $Z^2 + a^2 = 0 \rightarrow \underbrace{Z^2 - a^2 i^2 = 0}_{\text{مطابقة تربيعية}}$

الشكل الجبري $Z = x + yi$

مرافق Z $\quad \overline{Z} = x - yi$

طويلة Z $\quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Z.\overline{Z} = x^2 + y^2$

$Z + \overline{Z} = 2x$

$Z - \overline{Z} = 2yi$

$\boxed{|Z|^2 = Z.\bar{Z}}$

$\boxed{|Z| = 1 \Longrightarrow Z.\bar{Z} = 1}$

لكتابة العدد $Z = \dfrac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري او بأبسط صورة نضرب البسط والمقام بمرافق المقام.

خواص القوى للعدد i

$i^{4n} = 1 \qquad i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$

إعداد المدرس

حسان البيطار

٠٩٣٣٧٥٦٤٥٤

ملخص الأعداد المركبة

ملاحظات لمدرسي المادة حسان بيطار وخلدون سيروان

- لكتابة $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ بابسط شكل نضرب بمرافق المقام.
- لكتابة $Z = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ بابسط شكل نميز حالتين:

إذا كان Z_1, Z_2 متشابهان نضرب بمرافق المقام.

وإذا كان Z_1, Z_2 مختلفان نحول Z_1, Z_2 للشكل الأسي.

- لاستنتاج النسب المثلثية للزاوية θ حيث لدينا Z بالشكلين الأسي وجبري نكتب:

$$Z_{\text{اسي}} = Z_{\text{جبري}}$$

أو : $Z_{\text{مثلثي}} = Z_{\text{جبري}}$

حيث:

القسم الحقيقي = القسم الحقيقي.

القسم التخيلي = القسم التخيلي.

إعداد المدرس

خلدون سيروان

٠٩٢٢٧٩١٨٩٦

الجذور التربيعية للعدد المركب $Z = a + bi$

بفرض $w = x + yi$ هو الجذر التربيعي للعدد $Z = a + bi$ نكتب المعادلات:

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = a$

$\boxed{3}\ x \cdot y = \frac{b}{2}$

$\boxed{1} + \boxed{2} \rightarrow x^2 \begin{cases} x_1 = + \\ x_2 = - \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} \rightarrow y^2 \begin{cases} y_1 = + \\ y_2 = - \end{cases}$

$\boxed{3} \rightarrow x.y > 0$

لـ x, y نفس الإشارة.

$\boxed{3} \rightarrow x.y < 0$

لـ y, x إشارتين مختلفتين.

ملاحظة :

إذا كان $(\bar{Z} = Z)$ أو $(ImZ = 0)$

او $(\arg Z = 0)$ او $(\arg Z = \pi)$

فإن Z حقيقي .

إذا كان $(ReZ = 0)$ او

$(\bar{Z} = -Z)$ او $\left(\arg Z = \frac{\pi}{2}\right)$

او $\left(\arg Z = \frac{-\pi}{2}\right)$ فإن Z تخيلي .

دستور دوموافر

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{n\theta i}$$

اياً كانت $\theta \in R$, $n \in Z$ كان:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

دستورا أويلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$\boxed{+} \rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\boxed{-} \rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

الشكل المثلثي :

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = |Z| \qquad \arg Z = \theta$$

الجذور من المرتبة n

الصيغة العامة للجذور من المرتبة n للعدد $Z = r.e^{i\theta}$

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

حيث: $k = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$

الشكل الأسي $Z = r.e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

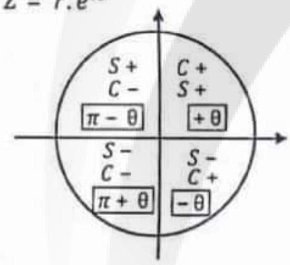
التحويل من الشكل الجبري للشكل الأسي

بفرض $Z = x + yi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{\theta}}$

$Z = r.e^{i\theta}$



خواص القوى للشكل الأسي:

$e^{2\pi ki} = 1 \qquad e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

$e^{\pi i} = -1 \qquad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$

حالات إيجاد معادلة المستوي

5) المستوي P المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$\underbrace{\text{نقطة} \qquad\qquad \text{ناظم}}$

نقطة: I هي منتصف $[AB]$

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

ناظم: بفرض $\overrightarrow{n_P}(a, b, c)$ يكون $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow P: \boxed{a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0}$

6) معادلة R عمودي على كل من المستويين المتقاطعين P, Q ويمر بالنقطة A:

نقطة: $A(x_A, y_A, z_A)$

ناظم: بما ان المستوي R عمودي على كل من P, Q فهو عمودي على الفصل المشترك لهما فيكون شعاع التوجيه للفصل المشترك هو شعاع الناظم للمستوي R

<u>لإيجاد شعاع التوجيه للفصل المشترك:</u>

نحتاج لنقطتين مثلاً BوC

لتعيين إحداثيات B نفرض مثلاً $x = 0$ ونعوض في معادلتي المستويين فنحصل على إحداثيات النقطة B ولتعيين إحداثيات C نفرض مثلاً $y = 0$ ونعوض في معادلتي المستويين فنحصل على إحداثيات النقطة C

عندئذ: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{n_R}$

ومعادلة المستوي R :

$\Rightarrow R: \boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

7) معادلة مستو Q المار من نقطتين ويعامد المستوي P:

$A(x_A, y_A, z_A)$

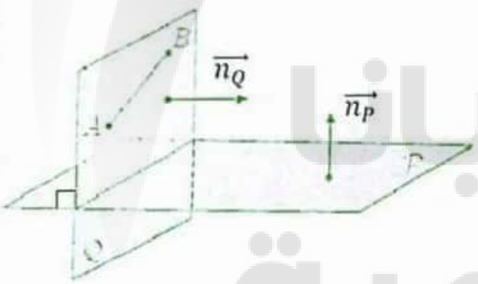
$B(x_B, y_B, z_B)$

بفرض $\overrightarrow{n_Q}(a, b, c)$:عندئذ

$\overrightarrow{n_P} . \overrightarrow{n_Q} = 0 \quad \boxed{1}$

$\overrightarrow{n_Q} . \overrightarrow{AB} = 0 \quad \boxed{2}$

حصلنا على جملة معادلتين بثلاث مجاهيل ونعلم انه يوجد عدد لا نهائي من الأشعة الناظمة على مستو ولأنه يكفي تعيين ثلاثية واحدة (a, b, c) تحقق الجملة يمكننا اختيار قيمة لإحدى المركبات فتصبح جملة معادلتين بمجهولين وبحلهما نحصل على $\overrightarrow{n_Q}$



وباختيار النقطة A مثلاً عندئذ:

$\Rightarrow Q: \boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

1) معادلة مستو P يمر بنقطة ويقبل $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً له

نقطة $A(x_A, y_A, z_A)$

ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

أيا كانت $M(x, y, z)$ تنتمي للمستوي فإن: $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Rightarrow P$: $\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

2) معادلة مستو P يمر بنقطة A ويقبل شعاعي توجيه $\vec{v}, \vec{u}$:

نقطة $A(x_A, y_A, z_A)$

ناظم: بفرض $\overrightarrow{n_P}(a, b, c)$

$\overrightarrow{n_P}.\vec{v} = 0$ $\boxed{1}$

$\overrightarrow{n_P}.\vec{u} = 0$ $\boxed{2}$

حصلنا على جملة معادلتين بثلاث مجاهيل ونعلم أنه يوجد عدد لا نهائي من الأشعة الناظمة على مستو ولأنه يكفي تعيين ثلاثية واحدة (a, b, c) تحقق الجملة يمكننا اختيار قيمة لإحدى المركبات فتصبح جملة معادلتين بمجهولين وبحلهما نحصل على $\overrightarrow{n_P}$

$\Rightarrow P$: $\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

3) معادلة مستو P يمر بنقطة ويوازي المستوي Q :

نقطة $A(x_A, y_A, z_A)$

ناظم $\overrightarrow{n_Q}(a, b, c)$

بما ان المستوي P يوازي المستوي Q فإن: $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$

$\Rightarrow P$: $\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

4) معادلة مستو P مار بثلاث نقاط:

$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), D(x_D, y_D, z_D)$

$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

$D(x_D, y_D, z_D)$

لإيجاد $\overrightarrow{n_P}$ نوجد مركبات الأشعة $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ حيث

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P} = 0$ $\boxed{1}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{n_P} = 0$ $\boxed{2}$

حصلنا على جملة معادلتين بثلاث مجاهيل ونعلم أنه يوجد عدد لا نهائي من الأشعة الناظمة على مستو ولأنه يكفي تعيين ثلاثية واحدة (a, b, c) تحقق الجملة يمكننا اختيار قيمة لإحدى المركبات فتصبح جملة معادلتين بمجهولين وبحلهما نحصل على $\overrightarrow{n_P}$ وباختيار نقطة مثل A عندئذ:

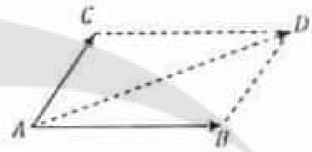
$\Rightarrow P$: $\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

جمع الأشعة

أشعة متعاقبة

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

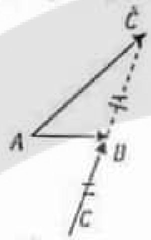
أشعة لها نفس البداية



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

حيث $\overrightarrow{AD}$ قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$

أشعة لها نفس النهاية



$$\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CB}}$$

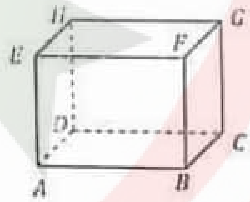
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'}$$

حيث C' نظيرة C بالنسبة لـ B

علاقة المتوسط

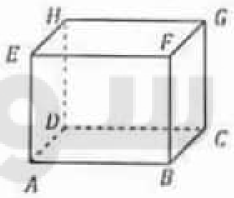
$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

ثلاثية الأضلاع



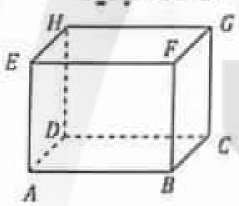
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EC}$
- $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$
- $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$

ثلاثية الأقطار



- $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BH}$
- $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EC}$

الأشعة البديلة



$$\overrightarrow{AE} + \underbrace{\overrightarrow{HG}}_{\parallel} = ?$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}}_{\parallel}$$

$$\overrightarrow{AF}$$

أمثلة هامة:

عدد طرق اختيار ثلاثة أشخاص من مجموعة تضم 10 أشخاص هو: $\binom{10}{3}$

عدد طرق اختيار ثلاثة أشخاص (مدير ، نائب مدير، أمين سر) من مجموعة تضم 10 أشخاص هو: P_{10}^{3}

عدد طرق توزيع 10 أشخاص على 10 كراسي هو: !10

<u>لدينا 10 نقاط أي ثلاثة منها لا تقع على استقامة واحدة:</u>

عدد القطع المستقيمة المختلفة التي يمكن إنشاؤها هو: $\binom{10}{2}$

عدد المثلثات المختلفة التي يمكن إنشاؤها هو: $\binom{10}{3}$

عدد الأشكال الرباعية المختلفة التي يمكن إنشاؤها هو: $\binom{10}{4}$

ملاحظة هامة : في مسائل السحب على التتالي مع الإعادة أو من دون إعادة

نميز الحالات الآتية من أجل الضرب بالتباديل :

سحب كرتين (أو بطاقتين)

$AA \times 1$

$AB \times 2$

سحب ثلاث كرات (أو ثلاث بطاقات)

$AAA \times 1$

$AAB \times 3$

$ABC \times 6$

ملاحظة : في حالة النسق لا نضرب بعدد التباديل

مثال : أن تكون البطاقة الأولى حمراء و الثانية بيضاء و الثالثة سوداء لا نضرب بعدد التباديل

لأن الألوان مرتبة وفق النسق السابق .

حسان البيطار 0933756454

خلدون سيروان 0932791896

مثال توضيحي : لتكن المجموعة S المكونة من العناصر $S = \{a, b, c\}$ فإننا نميز ما يلي

عدد طرق تشكيل قائمة مؤلفة من عنصرين من المجموعة S حيث: n عدد عناصر المجموعة

r عدد عناصر القائمة

التباديل: $n!$

تباديل المجموعة S:

(a, b, c)

(a, c, b)

(b, a, c)

(b, c, a)

(c, a, b)

(c, b, a)

عدد تباديل مجموعة مؤلفة من n عنصر هو $n!$

عدد تباديل المجموعة S هو:

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

التراتيب: P_n^r

سحب على التتالي دون إعادة

(a, b)

(a, c)

(b, a)

(b, c)

(c, a)

(c, b)

عدد التراتيب التي طول كل منها r من مجموعة مؤلفة من n عنصر هو: P_n^r

عدد التراتيب التي طول كل منها 2 من المجموعة S

$P_3^2 = 3 \times 2 = 6$

القوائم المكررة: n^r

سحب على التتالي مع الإعادة

(a, b)	(a, a)
(a, c)	(b, b)
(b, c)	(c, c)
(b, a)	
(c, a)	
(c, b)	

عدد القوائم مع تكرار التي طول كل منها r من مجموعة مؤلفة من n عنصر هو: n^r

عدد القوائم مع تكرار التي طول كل منها 2 من المجموعة S هو

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

التوافيق: $\binom{n}{r}$

سحب معاً.

(a, b)

(a, c)

(b, c)

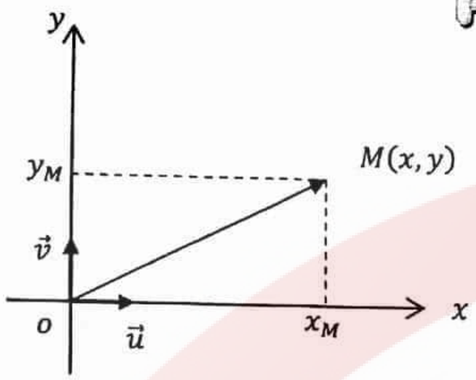
عدد التوافيق التي طول كل منها r من مجموعة مؤلفة من n عنصر هو: $\binom{n}{r}$

عدد التوافيق التي طول كل منها 2 من المجموعة S هو:

$\binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الأشعة بأعداد عقدية:



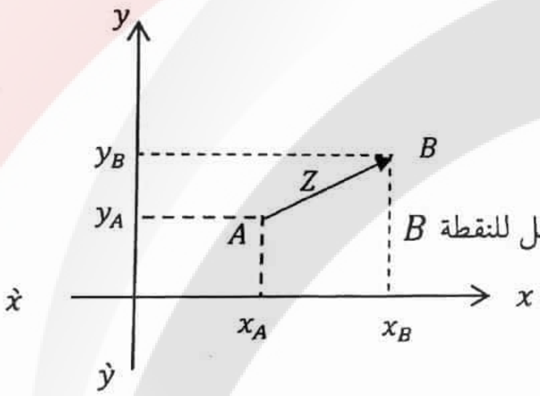
نتأمل المعلم المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.

- نقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي العدد العقدي:

$$Z_M = x + iy\ .$$

- إن العدد العقدي $Z = x + iy$ الذي مركبتاه (x,y) يمثل بالشعاع $\overrightarrow{oM}$: $Z_{\overrightarrow{oM}} = Z_M = x + iy$

- بفرض لدينا في المستوي النقطتان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$:



العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$.

حيث Z_A هو العدد العقدي الممثل للنقطة A و Z_B هو العدد العقدي الممثل للنقطة B

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$$
$$= (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

	العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
١	$AB = \|Z_B - Z_A\|$	المسافة بين AB
٢	$Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[AB]$
٣	$Z_G = \dfrac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$	G مركز ثقل المثلث ABC
٤	$\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a \in R$	النقط A , B , C على استقامة واحدة
٥	$\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ai \quad : a \in R$	ABC قائم الزاوية في النقطة A
٦	$\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \pm i$	ABC متساوي الساقين وقائم في النقطة A
٧	$\|Z - Z_A\| = r \Leftrightarrow AM = r \quad r \in R_+^*$	M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها r
٨	$\|Z - Z_A\| = \|Z - Z_B\|$ $AM = BM$	M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[AB]$

تطبيقات العقدية

ملاحظات ونتائج: لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد العقدية a, b, c, d على الترتيب. حيث

$$Z_A = a\,,\ Z_B = b,\ Z_C = c\,,\ Z_D = d$$

١) إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{CD}}$

٢) إذا كان $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$ فإن $Z_{\overrightarrow{AB}} = \lambda Z_{\overrightarrow{CD}}$

ويكون الشعاعان مرتبطان خطياً. ومنه لإثبات ثلاث نقاط أنها تقع على استقامة واحدة يجب أن يكون:

$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ أي $Z_{\overrightarrow{AB}} = \lambda Z_{\overrightarrow{AC}}$

٣) بفرض لدينا أربع نقاط A, B, C, D فإن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ هي:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CD}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

٤) $$\frac{d-c}{b-a} = ai \quad : \quad a\epsilon R \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

٥) $$\frac{d-c}{b-a} = a \quad : \quad a\epsilon R \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

٦) بفرض لدينا ثلاث نقاط A, B, C فإن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AC}$ هي:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$$

٧) إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ فالرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

٨) إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$ فالرباعي $ABCD$ معين.

٩) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ فالرباعي $ABCD$ مستطيل.

١٠) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ فالرباعي $ABCD$ مربع.

١١) إذا كان $\frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{Z_A + Z_C}{2}$ فإن قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي أضلاع.

١٢) بفرض r عدد حقيقي موجب تماماً وبفرض $M(Z)$ مجموعة نقاط تمثل العدد العقدي Z فإذا كان $|Z - Z_\Omega| = r$ فإن مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل دائرة مركزها Ω ونصف قطرها r.

١٣) A و B نقطتان تمثلان العددان Z_A و Z_B وبفرض $M(Z)$ مجموعة نقاط تمثل العدد العقدي Z فإذا كان $|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$ فإن $M(Z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

معادلة مماس لخط بياني:

لكتابة معادلة مماس يلزمنا نقطة (x_0, y_0) وميل m والجدول الآتي يبين كيفية إيجاد معادلة مماس في أي حالة:

المعلومات المعطاة	المعلومات المستنتجة
x_0	$\acute{f}(x_0) = m \xrightarrow{\text{نشتق}}$ نعوض في التابع نجد y_0
y_0	$\acute{f}(x_0) = m \xrightarrow{\text{نشتق}}$ نعوض في التابع نجد x_0
m	نعوض في التابع نجد y_0 $\rightarrow$ نشتق التابع نجد x_0
المماس يوازي مستقيم معلوم d	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ ميل المماس = ميل المستقيم d
المماس يعامد مستقيم معلوم d	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ ميل المماس $= \frac{-1}{m_d}$
المماس أفقي	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ $m = 0$
المماس في القيمة المحلية الصغرى أو الكبرى	معادلته $y = y_0$ $\rightarrow$ $m = 0$
مماس يمر بنقطتين A , B	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

ملخص في التكامل

تمارين مميزة لقاعدة $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$

$\int \frac{1}{\sin 2x}\,dx$	$\int \tan x\,dx$	$\int \cot x\,dx$	$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$	$\int \frac{2}{e^x + 1}\,dx$	$\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$	$\int \frac{1}{x.\ln x}\,dx$

تمارين مميزة لقاعدة $\int H'(x).H^{r}(x)\,dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$	$\int \frac{4x+8}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}\,dx$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$	$\int \sin x \,.\, \sin 2x\,dx$

$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$	$\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$	$\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx$	$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

إعداد: أ.خلدون سيروان

إعداد: أ.حسان البيطار

تمارين مميزة لقاعدة التكامل بالتجزئة $\int u(x).v'(x)\,dx$

$\int \ln x\,dx$	$\int x^2 e^x\,dx$	$\int x \sin x\,dx$	$\int x \cos x\,dx$	$\int x.e^x\,dx$	$\int x \ln x\,dx$	$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

ملخص في التكامل

تكامل كسر
يأتي في إحدى الحالات

$\frac{\acute{g}}{g}$ — يؤول إلى $\dot{H}.H^{r}$ — تفريق كسور

♥درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام.

♥درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام ولا تتحقق القاعدة $\frac{\acute{g}}{g}$ عندئذ نلجأ إلى تفريق الكسور.

♥المقام يحوي جذر فنتخلص من الجذر ونرفع المقام للبسط مع تغيير إشارة الأس وتؤول إلى $\dot{H}.H^{r}$.

تكامل جداء
يأتي في إحدى الحالات

$\dot{H}.H^{r}$ — تكامل بالتجزئة

يستخدم التكامل بالتجزئة في إحدى الأشكال

$\int x^m.\sin(\alpha x)\,dx$ $\int x^m.\cos(\alpha x)\,dx$ $\int x^m.e^{\alpha x}\,dx$	نفرض $u(x) = x^m$
$\int x^m.\ln x\,dx \rightarrow$	نفرض $u(x) = \ln x$

ملاحظة (1): في تكاملات الدوال المثلثية لا تنس قوانين المثلثات الأساسية وهي:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

ملاحظة (2): تكامل جداء نسبتين مثلثيتين من الدرجة الأولى مختلفتين بالزاوية من الشكل:

$\int \sin ax.\sin bx\,dx$ $: a \neq b$	$\int \sin ax.\cos bx\,dx$ $: a \neq b$	$\int \cos ax.\sin bx\,dx$ $: a \neq b$	$\int \cos ax.\cos bx\,dx$ $: a \neq b$

عندئذ نلجأ إلى التحويل من جداء إلى مجموع حسب القوانين:

$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$
$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\sin a.\sin b = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$